Часть III

РАССТОЯНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКЕ

Глава 10

Расстояния в алгебре

10.1. МЕТРИКИ НА ГРУППАХ

Группой $(G, \cdot, e)$ называется множество G с бинарной операцией $\cdot$, которая называется *групповой операцией*, совместно удовлетворяющие четырем фундаментальным свойствам *замыкания* ($x \cdot y \in G$ для любых $x, y \in G$), *ассоциативности* ($x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для любых $x, y, z \in G$), *существования единичного элемента* ($x \cdot e = e \cdot x = x$ для любого $x \in G$) и *существования обратного элемента* (для любого $x \in G$ существует $x^{-1} \in G$, такой что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$). В аддитивной форме записи группа $(G, +, 0)$ является множеством G с такой бинарной операцией +, что имеют место следующие свойства: $x + y \in G$ для любых $x, y \in G$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ для любых $x, y, z \in G$, $x + 0 = 0 + x$ для любого $x \in G$, для любого $x \in G$ существует $-x \in G$, такой что $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Группа $(G, \cdot, e)$ называется *конечной*, если конечно множество G. Группа $(G, \cdot, e)$ называется *абелевой*, если она *коммутативна*, т.е. равенство $x \cdot y = y \cdot x$ справедливо для любых $x, y \in G$.

Многие из рассматриваемых в данном разделе метрик являются **метрикой нормы группы** на группе $(G, \cdot, e)$, заданной как

$$\| x \cdot y^{-1} \|$$

(или, иногда, как $\| y^{-1} \cdot x \|$), где $\| \cdot \|$ – *норма группы*, т.е. функция $\| \cdot \|: G \to \mathbb{R}$, такая что для любых $x, y \in G$ имеют место следующие свойства:

1) $\| x \| \geq 0$, с $\| x \| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = e$;
2) $\| x \| = \| x^{-1} \|$;
3) $\| x \cdot y \| \leq \| x \| + | y \|$ (*неравенство треугольника*).

В аддитивной форме записи метрика нормы группы на группе $(G, +, 0)$ определяется как $\| x + (-y) \| = \| x - y \|$ или иногда как $\| (-y) + x \|$.

Простейшим примером метрики нормы группы является **биинвариантная ультраметрика** (иногда ее называют *хэмминговой метрикой*) $\| x \cdot y^{-1} \|_H$, где $\| x \|_H = 1$ для $x \neq e$ и $\| e \|_H = 0$.

Биинвариантная метрика

Метрика (в общем случае – полуметрика) d на группе $(G, \cdot, e)$ называется **биинвариантной**, если равенство

$$d(x, y) = d(x \cdot z, y \cdot z) = d(z \cdot x, z \cdot y)$$

справедливо для любых $x, y, z \in G$ (см. **Инвариантная метрика переноса**). Любая **метрика нормы группы** на абелевой группе является бивариантной.

Метрика (в общем случае – полуметрика) d на группе $(G, \cdot, e)$ называется **правоинвариантной**, если равенство $d(x, y) = d(z \cdot x, z \cdot y)$ справедливо для любых $x, y, z \in G$, т.е. операция правого умножения на элемент z является **движением** метрического пространства (G, d). Любая метрика нормы группы, определяемая как $\| x \cdot y^{-1} \|$, является правоинвариантной.

Метрика (в общем случае – полуметрика) d на группе $(G, \cdot, e)$ называется **левоинвариантной**, если равенство $d(x, y) = d(z \cdot x, z \cdot y)$ справедливо для любых $x, y, z \in G$, т.е. операция левого умножения на элемент z является **движением** метрического пространства (G, d). Любая метрика нормы группы, определяемая как $\| y \cdot x^{-1} \|$, является левоинвариантной.

Любая правовариантная, равно как и левоинвариантная, в частности, любая биинвариантная метрика d на G является метрикой нормы группы, поскольку норму группы на G можно задать как $\| x \| = d(x, 0)$.

Положительно однородная метрика

Метрика (в общем случае – расстояние) d на абелевой группе $(G, +, 0)$ называется **положительно однородной**, если равенство

$$d(mx, my) = md(x, y)$$

справедливо для всех $x, y \in G$ и всех $m \in \mathbb{N}$, где mx – сумма m элементов, каждый из которых равен x.

Дискретная переноса метрика

Метрика нормы группы (в общем случае – полуметрика полунормы группы) на группе $(G, \cdot, e)$ называется **дискретной метрикой переноса**, если *расстояния переноса* (или *числа переноса*)

$$\tau_G(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\| x^n \|}{n}$$

элементов x без кручения (т.е. таких, что $x^n \neq e$ для любого $n \in \mathbb{N}$) по отношению к этой метрике являются отделенными от нуля.

Если числа $\tau_G(x)$ являются ненулевыми, то такая метрика нормы группы называется **собственной метрикой переноса**.

Словарная метрика

Пусть $(G, \cdot, e)$ – конечно порожденная группа с множеством A порождающих элементов. *Словарная длина* $w_W^A(x)$ элемента $x \in G \backslash \{e\}$ определяется как

$$w_W^A(x) = \inf\{r : \ x = a_1^{a_1} ... a_r^{a_r}, a_i \in A, e_i \in \{\pm 1\}\},$$

и $w_W^A(e) = 0$.

Словарная метрика d_W^A, *соответствующая множеству* A, есть метрика **нормы группы** на G, определяемая как

$$w_W^A(x \cdot y^{-1}),$$

Так как словарная длина w_W^A является *нормой группы* на G, то d_W^A **правоинвариантна**. Иногда она определяется как $w_W^A(y^{-1} \cdot x)$, и тогда она становится **левоинвариантной**. Именно, d_W^A – это максимальная метрика на G, которая является правовариантной и обладает тем свойством, что расстояние от любого элемента из A или из A^{-1} до единичного элемента e равно единице.

Если A и B – два конечных множества порождающих элементов группы $(G, \cdot, e)$, то тождественное отображение между метрическими пространствами (G, d_W^A) и

$(G,\ d_W^B)$ является **квазиизометрией**, т.е. словарная метрика единствена с точностью до квазиизометрии.

Словарная метрика – **метрика пути** *графа Кэли* Г группы $(G, \cdot, e)$, построенного относительно A. Именно, Г является графом с множеством вершин G, в котором две вершины x и $y \in G$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $y = a^\varepsilon x, \varepsilon = \pm 1$, $a \in A$.

Взвешенная словарная метрика

Пусть $(G, \cdot, e)$ – конечно порожденная группа с множеством A порождающих элементов. Если имеется ограниченная *весовая функция* w: $A \to (0, \infty)$, то *взвешенная словарная длина* $w_{WW}^A(x)$ элемента $x \in G\backslash\{e\}$ определяется как

$$w_{WW}^A(x) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{t} w(a_i), t \in \mathbb{N}: \ x = a_1^{e_1}...a_t^{e_t}, a_i \in A, e_i \in \{\pm 1\}\right\},$$

и $w_{WW}^A(e) = 0$.

Взвешенная словарная метрика d_{WW}^A, *соответствующая* A, есть **метрика нормы группы** на G, определенная как

$$w_{WW}^A(x \cdot y^{-1}).$$

Поскольку взвешенная словарная длина w_{WW}^A является *нормой группы* на G, то d_{WW}^A будет **правоинвариантной**. Иногда она задается как $w_{WW}^A(y^{-1} \cdot x)$ и в этом случае она является **левоинвариантной**.

Метрика d_{WW}^A является супремумом полуметрик d на G, обладающих свойством $d(e, a) \le w(a)$ для любого $a \in A$.

Метрика d_{WW}^A является **метрикой упрощенного пути**, и каждая правоинвариантная метрика упрощенного пути является весовой словарной метрикой с точностью до **грубой изометрии**.

Метрика d_{WW}^A является **метрикой пути** *взвешенного графа Кэли* Γ_W группы $(G, \cdot, e)$, построенного относительно A. Именно, Γ_W является взвешенным графом с множеством вершин G, в котором две вершины x и $y \in G$ соединены ребром с весом $w(a)$ тогда и только тогда, когда $y = a^\varepsilon x$, $\varepsilon = \pm 1$, $a \in A$.

Метрика интервальной нормы

Метрика интервальной нормы есть **метрика нормы группы** на конечной группе $(G, \cdot, e)$, определенная как

$$\| x \cdot y^{-1} \|_{\text{int}},$$

где $\| \cdot \|_{\text{int}}$ – *интервальная норма* на G, т.е. такая *норма группы*, что значения $\| \cdot \|_{\text{int}}$ образуют множество последовательных целых чисел, начиная с 0.

Каждой интервальной норме $\| \cdot \|_{\text{int}}$ соответствует упорядоченное *разбиение* $\{B_0,..., B_m\}$ множества G с $B_i = \{x \in G: \| x \|_{\text{int}} = i\}$ (см. **расстояние Шарма–Кошека**, гл. 16). *Норма Хэмминга* и *норма Ли* являются особыми случаями интервальной нормы. *Обобщенная норма Ли* – интервальная норма, для которой каждый класс имеет форму $B_i = \{a, a^{-1}\}$.

C-метрика

***C*-метрика** d – метрика на группе $(G, \cdot, e)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) значения d образуют множество последовательных целых чисел, начиная с 0;

2) кардинальное число сферы $S(x, r) = \{y \in G: d(x, y) = r\}$ не зависит от выбора $x \in G$.

Словарная метрика, хэммингова метрика и метрика Ли являются C-метриками. Любая **метрика интервальной нормы** есть C-метрика.

Метрика нормы порядка

Пусть $(G, \cdot, e)$ – конечная абелева группа. Пусть $\mathrm{ord}(x)$ – *порядок* элемента $x \in G$, т.е. наименьшее положительное целое число n, такое что $x^n = e$. Тогда функция $\|\cdot\|_{\mathrm{ord}}: G \to \mathbb{R}$, определенная как $\|\cdot\|_{\mathrm{ord}} = \ln\mathrm{ord}(x)$, является *нормой группы* на G и называется *нормой порядка*.

Метрика нормы порядка – метрика нормы группы на G, определенная как

$$\| x \cdot y^{-1} \|_{\mathrm{ord}}.$$

Метрика нормы мономорфизма

Пусть $(G, +, 0)$ – группа и $(H, \cdot, e)$ – группа с *нормой группы* $\|\cdot\|_H$. Пусть f: $G \to H$ – *мономорфизм* групп G и H, т.е. инъективная функция, такая что $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ для всех $x, y \in G$. Тогда функция $\|\cdot\|_G^f$: $G \to \mathbb{R}$, заданная как $\| x \|_G^f = \| f(x) \|_H$, является *нормой группы* на G и называется *нормой мономорфизма*.

Метрика нормы мономорфизма – метрика нормы группы на G, определяемая как

$$\| x - y \|_G^f .$$

Метрика нормы произведения

Пусть $(G, +, 0)$ – группа с *нормой группы* $\|\cdot\|_G$ и $(H, \cdot, e)$ – группа с нормой группы $\|\cdot\|_H$. Пусть $G \times H = \{\alpha = (x, y): x \in G, y \in H\}$ – декартово произведение G и H, и пусть $(x, y) \cdot (x, t) = (x + z, y \cdot t)$. Тогда функция $\|\cdot\|_{G\times H}$: $G \times H \to \mathbb{R}$, определенная как $\| \alpha \|_{G\times H} = \| (x, y) \|_{G\times H} = \| x \|_G + \| y \|_H$,, есть норма группы на $G \times H$, называемая *нормой произведения*.

Метрика нормы произведения есть **метрика нормы группы**, определенная как

$$\| \alpha \cdot \beta^{-1} \|_{G\times F} .$$

На декартовом произведении $G \times H$ двух конечных групп с *интервальными нормами* $\|\cdot\|_G^{\mathrm{int}}$ и $\|\cdot\|_H^{\mathrm{int}}$ может быть задана интервальная норма $\|\cdot\|_{G\times H}^{\mathrm{int}}$. Именно, $\| \alpha \|_{G\times H}^{\mathrm{int}} = \| (x, y \|_{G\times H}^{\mathrm{int}} = \| x \|_G + (m+1) \| y \|_H$, где $m = \max_{a\in G} \| a \|_G^{\mathrm{int}}$.

Метрика фактор-нормы

Пусть $(G, \cdot, e)$ – группа с *нормой группы* $\|\cdot\|_G$ и $(H, \cdot, e)$ – нормальная подгруппа группы $(G, \cdot, e)$, $xN = Nx$ для любых $x \in G$. Пусть $(G/N, \cdot, eN)$ – *фактор-группа группы* G, т.е. $G/N = \{xN: x \in G$: с $xN = \{x \cdot a: a \in N\}$ и $xN \cdot yN = xyN$. Тогда функция $\|\cdot\|_{G/N}$: $G/N \to \mathbb{R}$, заданная как $\| xN \|_{G/N} = \min_{a\in N} \| xa \|_X$, – норма группы G/N на и называемая *фактор-нормой*.

Метрика фактор-нормы есть **метрика нормы группы** на G/N, определенная как

$$\| xN \cdot (yN)^{-1} \|_{G/N} = \| xy^{-1}N \|_{G/N} .$$

Если $G = \mathbb{Z}$ с нормой, равной абсолютному значению, и $N = m\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, то фактор-норма на $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$ совпадает с *нормой Ли*.

Если метрика d на группе $(G, \cdot, e)$ **правоинвариантна**, то для любой нормальной подгруппы $(N, \cdot, e)$ группы $(G, \cdot, e)$ метрика d порождает правоинвариантную метрику (именно, **хаусдорфову метрику**) d^* на G/N по закону

$$d^*(xN, yN) = \max\left\{\max_{b\in yN}\min_{a\in xN} d(a,b), \max_{a\in xN}\min_{b\in yN} d(a,b)\right\}.$$

Расстояние коммутирования

Пусть $(G, \cdot, e)$ – конечная неабелева группа. Пусть $Z(G) = \{c \in G\colon x \cdot c = c \cdot x$ для любого $z \in G\}$ – *центр* G. *Граф коммутирования* группы G определяется как граф с множеством вершин G, в котором различные элементы $x, y \in G$ соединены ребром всякий раз, когда они *коммутируют*, т.е. $x \cdot y = y \cdot x$. Очевидно, что любые два различных элемента $x, y \in G$, которые не коммутируют, в данном графе соединены путем x, c, y, где c – любой элемент из $Z(G)$ (например, e). Путь $x = x^1, x^2,..., x^k = y$ в графе коммутирования называется $(x - y)N$ – *путем*, если $x^i \notin Z(G)$ для любого $i \in \{1,\dots, k\}$. В этом случае элементы $x, y \in G\setminus Z(G)$ называются *N-соединенными*.

Расстоянием коммутирования (см. [DeHu98]) d называется расширенное расстояние на G, такое что выполняются следующие условия:

1) $d(x, x) = 0$;

2) $d(x, x) = 1$, если $x \neq y$ и $x \cdot y = y \cdot x$;

3) $d(x, x)$ является минимальной длиной $(x - y)N$-пути для любых N-соединенных элементов x и $y \in G\setminus Z(G)$;

4) $d(x, x) = \infty$, если $x, y \in G\setminus Z(G)$ не соединены никаким N-путем.

Модулярное расстояние

Пусть $(\mathbb{Z}_m, +, 0)$, $m \geq 2$ – конечная *циклическая группа* и $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. *Модулярный r-вес* $w_r(x)$ элемента $x \in \mathbb{Z}_m = \{0, 1,\dots, m\}$ определяется как $w_r(x) = \min\{w_r(x), w_r(m - x)\}$, где $w_r(x)$ – *арифметический r-вес* целого числа x. Значение $w_r(x)$ можно получить как число ненулевых коэффициентов в *обобщенной несмежной форме* $x = e_n r^n + \ldots + e_1 r + e_0$ с $e_i = \mathbb{Z}$, $|e_i| < r$, $|e_i + e_{i+1}| < r$ и $|e_i| < |e_{i+1}|$, если $e_i e_{i+1} < 0$ (см. **метрика арифметической *r*-нормы**, гл. 12).

Модулярное расстояние – расстояние на $\mathbb{Z}_m$, определенное как

$$w_r(x - y).$$

Модулярное расстояние является метрикой для $w_r(m) = 1$, $w_r(m) = 2$ и для некоторых особых случаев с $w_r(m) = 3$ или 4. В частности, оно является метрикой для $m = r^n$ или $m = r^n - 1$; если $r = 2$, то оно будет метрикой и для $m = 2^n + 1$ (см., например, [Ernv85]).

Наиболее популярной метрикой на $\mathbb{Z}_m$ является **метрика Ли**, определяемая как $\| x - y \|_{Lee}$, где $\| x \|_{Lee} = \min\{x, m - x\}$ – *норма Ли* элемента $x \in \mathbb{Z}_m$.

Метрика *G*-нормы

Рассмотрим конечное поле F_{p^n} для простого числа p и натурального числа n.

Для данного компактного выпуклого центральносимметричного тела G в $\mathbb{R}^n$ определим *G-норму* элемента $x \in F_{p^n}$ как $\| x \|_G = \inf\{\mu \geq 0: \; x \in p\mathbb{Z}^n + \mu G\}$.

Метрика *G*-нормы есть **метрика нормы группы** на F_{p^n}, определенная как

$$\| x \cdot y^{-1} \|_G .$$

Метрика нормы перестановок

Возьмем конечное метрическое пространство (X, d). **Метрикой нормы перестановок** называется **метрика нормы группы** на группе $(\mathrm{Sym}_X, \cdot, \mathrm{id})$ всех перестановок множества X (id – *тождественное отображение*), определенная как

$$\| f \cdot g^{-1} \|_{\mathrm{Sym}},$$

где норма группы $\| \cdot \|_{\mathrm{Sym}}$ на Sym_X задается как $\| f \|_{\mathrm{Sym}} = \max_{x \in X} d(x, f(x))$.

Метрика движений

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство и $p \in X$ – фиксированный элемент из X.

Метрикой движений (см. [Buse55]) называется метрика на группе $(\Omega, \cdot, \mathrm{id})$ всех **движений** пространства (X, d) (id – *тождественное отображение*), определенная как

$$\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \cdot \mathrm{e}^{-d(p,x)}$$

для любых $f, g \in \Omega$ (см. **Буземанова метрика множеств**, гл. 3). Если пространство (X, d) ограничено, то подобную метрику на Ω можно определить как

$$\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Для полуметрического пространства (X, d) **полуметрику движений** на $(\Omega, \cdot, \mathrm{id})$ можно определить как

$$d(f(p), g(p)).$$

Полуметрика общей линейной группы

Пусть $\mathbb{F}$ – локально компактное недискретное *топологическое поле*. Пусть $\left(\mathbb{F}^n, \| \cdot \|_{\mathbb{F}^n}\right)$, $n \geq 2$ – *нормированное векторное пространство* над $\mathbb{F}$. Пусть $\| \cdot \|$ – *операторная норма*, ассоциированная с нормированным векторным пространством $\left(\mathbb{F}^n, \| \cdot \|_{\mathbb{F}^n}\right)$, и пусть $GL(n, \mathbb{F})$ – *общая линейная группа* над $\mathbb{F}$. Тогда функция $| \cdot |_{\mathrm{op}}$: $GL(n, \mathbb{F})$, определенная как $| g |_{\mathrm{op}} = \sup\{| \ln \| g \||, \; | \ln \| g^{-1} \||\}$, является полунормой на $GL(n, \mathbb{F})$.

Полуметрика общей линейной группы есть полуметрика на группе $GL(n, \mathbb{F})$, заданная как

$$| g \cdot h^{-1} |_{\mathrm{op}} .$$

Она является **правоинвариантной** полуметрикой, которая единственна с точностью до **грубой изометрии**, поскольку любые две нормы на $\mathbb{F}$ являются **билипшицево эквивалентными**.

Полуметрика обобщенного тора

Пусть $(T, \cdot, e)$ – *обобщенный тор*, т.е. *топологическая группа*, которая изоморфна прямому произведению n мультипликативных групп $\mathbb{F}_i^*$ локально комактных недискретных *топологических полей* $\mathbb{F}_i$. Тогда существует собственный непрерывный гомоморфизм v: $T \to \mathbb{R}^n$, именно, $v(x_1, \ldots, x_n) = (v_1(x_n))$, где v_1: $\mathbb{F}_i^* \to \mathbb{R}$ являются собственными непрерывными гомоморфизмами из $\mathbb{F}_i^*$ в аддитивную группу $\mathbb{R}$, заданными как логарифм *валюации*. Всякий другой собственный непрерывный гомоморфизм v': $T \to \mathbb{R}^n$ имеет вид $v' = \alpha \cdot v$ с $\alpha \in GL(n, \mathbb{R})$. Если $\| \cdot \|$ является нормой на $\mathbb{R}^n$, то получаем соответствующую полунорму $\| x \|_T = \| v(x) \|$ на T.

Полуметрика обобщенного тора есть полуметрика на группе $(T, \cdot, e)$, определенная как

$$\| xy^{-1} \|_T = \| v(xy^{-1}) \| = \| v(x) - v(y) \|.$$

Метрика Гейзенберга

Пусть $(H, \cdot, e)$ – *первая гейзенбергова группа*, т.е. группа на множестве $H = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}$ с групповым законом $x \cdot y = (z,t) \cdot (u,s) = (z + u, t + s + 2\Im(z\bar{u}))$ и единичным элементом $e = (0, 0)$. Пусть $|\cdot|_{\text{Heis}}$ – *гейзенбергова норма* на H, определенная как $| x |_{\text{Heis}} = | (z,t) |_{\text{Heis}} = (| z |^4 + t^2)^{1/4}$.

Метрика Гейзенберга (или **метрика шаблона, метрика Кораньи**) d_{Heis} есть **метрика нормы** на H, определенная как

$$| x^{-1} \cdot y |_H .$$

Другая естественная метрика на $(H, \cdot, e)$ – **метрика Карно–Каратеодори** (или *C-C метрика, контрольная метрика*) d_{C}, определяемая как **внутренняя метрика** с использованием горизонтальных векторных полей на H. Метрики d_{Heis} и d_{C} являются **билипшицево эквивалентными**; именно, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} d_{\text{Heis}}(x,y) \le d_{\text{C}}(x,y) \le$ $\le d_{\text{Heis}}(x,y)$.

Метрику Гейзенберга можно задать аналогичным образом на любой гейзенберговой группе $(H^n, \cdot, e)$ с $H^n = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{R}$.

Метрика между интервалами

Пусть G – множество интервалов $[a, b]$ из $\mathbb{R}$. Множество G образует полугруппы $(G, +)$ и $(G, \cdot)$ относительно сложения $I + J = \{x + y\colon x \in I, y \in J\}$ и умножения $I \cdot J = \{x \cdot y\colon x \in I, y \in J\}$ соответственно.

Метрика между интервалами – метрика на G, заданная как $\max\{| I |, | J |\}$ для всех $I, J \in G$, где для $I = [a, b]$ имеем $| I | = | a - b |$.

Полуметрика кольца

Пусть $(A, +, \cdot)$ – *факториальное кольцо*, т.е. кольцом, в котором разложение на множители единственно. **Полуметрикой кольца** называется полуметрика на множестве $A \backslash \{0\}$, определяемая как

$$\ln \frac{l.c.m.(x,y)}{g.c.d.(x,y)},$$

где $l.c.m.(x, y)$ – наименьшее *общее кратное* и $g.c.d.(x, y)$ – *наибольший общий делитель* элементов $x, y \in A \backslash \{0\}$.

10.2. МЕТРИКИ НА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ

Бинарное отношение R на множестве X является подмножеством $X \times X$. Оно представляет собой множество дуг орграфа (X, R) с множеством вершин X.

Бинарное отношение R, которое является *симметричным* (если $(x, y) \in R$, то $(y, x) \in R$), *рефлексивным* (все $x, x) \in R$ и *транзитивным* (если $(x, y), (y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$), называется *отношением эквивалентности* или *разбиением* (X на классы эквивалентности). Любая *q-арная последовательность* $x = (x_1,\ldots, x_n)$, $q \geq 2$ (т.е. $0 \leq x_i \leq q - 1$ для $1 \leq i \leq n$) соответствует разбиению $\{B_0,\ldots, b_{q-1}\}$ множества $V_r = \{1,\ldots, n\}$, где $B_j = \{1 \leq i \leq n: x_i = j\}$ – классы эквивалентности.

Бинарное отношение R, которое является *антисимметричным* (если $(x, y), (y, x) \in R$, то $x = y$), *рефлексивным* и *транзитивным*, называется *частичным порядком*, а пара (X, R) называется *частично упорядоченным множеством.* Частичный порядок R на X также обозначается как $\preceq$ с $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in R$. Порядок $\preceq$ называется *линейным*, если любые два элемента $x, y \in X$ *сравнимы*, т.е. $x \preceq y$ или $y \preceq x$.

Частично упорядоченное множество $(L, \preceq)$ называется *решеткой*, если каждые два элемента $x, y \in L$ обладают *объединением* $x \vee y$ и *пересечением* $x \wedge y$. Все разбиения X образуют решетку измельчению; она является подрешеткой решетки (по включению) всех бинарных отношений.

Расстояние Кемени

Расстояние Кемени между бинарными отношениями R_1 и R_2 на множестве X есть **хэммингова метрика** $|R_1 \Delta R_2|$.. Оно в 2 раза превышает минимальное число инверсий пар смежных элементов из X, необходимое для получения R_2 из R_1.

Если R_1, R_2 являются *разбиениями*, то расстояние Кемени совпадает с *расстоянием Миркина–Черного* и $1 - \frac{|R_1 \Delta R_2|}{n(n-1)}$ является *индексом Рэнда*.

Если бинарные отношения R_1, R_2 являются *линейными порядками* (или *ранжированиями, перестановками*) на множестве X, то расстояние Кемени совпадает с **метрикой инверсии** на перестановках.

Расстояние Драпала–Кепки между различными квазигруппами $(X, +)$ и $(X, \cdot)$ определяется как $|\{(x, y): \ x + y \neq x \cdot y\}|$.

Метрики между разбиениями

Пусть X – конечное множество с числом элементов $n = |X|$ и пусть A, B – непустые подмножества множества X. Пусть P_X – множество разбиений X и P, $Q \in Px$. Пусть $B_1,\ldots, B_q$ – *блоки* разбиения P, т.е. попарно непересекающиеся множества, такие что $X = B_1 \cup \ldots \cup B_q$, $q \geq 2$. Пусть $P \vee Q$ есть *объединение* P и Q, а $P \vee Q$ – *пересечение* P и Q в *решетке* $\mathbb{P}$ *разбиений* множества X.

Рассмотрим следующие *операции редактирования* на разбиениях:

– *пополнение* преобразует разбиение P множества $A\backslash\}B\}$ в разбиение множества A либо включением объектов из B в некоторый блок, либо включением самого B в качестве нового блока;

– *удаление* преобразует разбиение P множества A в разбиение множества $A\backslash\{B\}$ посредством удаления объектов из B из каждого содержащего их блока;

– *деление* преобразует одно разбиение P в другое посредством одновременного удаления B из B_i (где $B \subset B_i$, $B \neq B_i$) и добавления B как нового блока;

– *объединение* преобразует одно разбиение P в другое посредством одновременного удаления B из B_i (где $B = B_i$) и добавления B в B_j (где $j \neq i$);

– *перенос* преобразует одно разбиение P в другое посредством одновременного удаления B из B_i (где $B \subset B_i$) и добавления B в B_j (где $j \neq i$).

Определим (см., например, [Day81]) применительно к вышеуказанным операциям следующие **метрики редактирования** на P_X:

1) минимальное количество пополнений и удалений единичных объектов, необходимых для преобразования P в Q;

2) минимальное количество делений, объединений и переносов единичных объектов, необходимых для преобразования P в Q;

3) минимальное количество делений, объединений и переносов, необходимых для преобразования P в Q;

4) минимальное количество делений и объединений, необходимых для преобразования P в Q; именно, оно равно $|P|+|Q|-2|P \vee Q|$;

5) $\sigma(P)+\sigma(Q)-2\sigma(P \wedge Q),$, где $\sigma(P)=\sum\limits_{P_u \in P} |P_i|(|P_i|-1)$;

6) $e(P)+\sigma(Q)-2e(P \wedge Q),$ где $e(P)=\log_2 n+\sum\limits_{P_i \in P} \frac{|P_i|}{n}\log_2\frac{|P_i|}{n}.$

Расстояние Ренье есть минимальное число элементов, которые необходимо переместить между блоками разбиения P с тем, чтобы преобразовать его в Q (см. **Расстояние бульдозера**, гл. 21 и вышеуказанную метрику 2).

10.3. МЕТРИКИ РЕШЕТОК

Возьмем частотно упорядоченное множество $(L,\preceq)$. *Пересечение* (или *инфимум*) $x \wedge y$ (если yj существует) двух элементов x и y является единственным элементом, удовлетворяющим условию $x \wedge y \preceq x, y$ и $z \preceq x \wedge y,$ если $z \preceq x, y.$ Аналогичным образом *объединение* (или *супремум*) $x \vee y$ (если оно существует) является единственным элементом, таким что $x, y \preceq x \vee y$ и $x \vee y \preceq z,$ если $x, y \preceq z.$

Частотно упорядоченное множство $(L,\preceq)$ называется *решеткой*, если каждые два элемента $x,\ y \in L$ имеют объединение $x \vee y$ и пересечение $x \wedge y.$ Частотно упорядоченное множество $(L,\preceq)$ называется *полурешеткой пересечения* (или *нижней полурешеткой*), если задана только операция пересечения. Частично упорядоченное множество $(L,\preceq)$ называется *полурешеткой объединения* (или *верхней полурешеткой*), если задана только операция объединения.

Решетка $\mathbb{L}=(L,\preceq,\vee,\wedge)$ называется *полумодулярной решеткой* (или *полудедекиндовой решеткой*), если *отношение модулярности xMy* симметрично: xMy влечет yMx для всех $x,\ y \in L.$ *Отношение модулярности* здесь определяется следующим образом: два элемента x и y считаются *модулярной парой*, что обозначается как $xMy,$ если $x \wedge (y \vee z)=(x \wedge y) \vee z$ для любых $z \preceq x.$ Решетка $\mathbb{L},$ в которой каждая пара элементов является модулярной, называется *модулярной решеткой* (или *дедекиндовой решеткой*). Решетка является модулярной тогда и только тогда, когда действует *закон модулярности*: если $z \preceq x,$ то $x \wedge (y \vee z)=(x \wedge y) \vee z$ для любого $y.$ Решетка называется *дистрибутивной*, если $x \wedge (y \vee z)=(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ выполняется для всех $x,\ y,\ z \in L.$

Для данной решетки $\mathbb{L}$ функция v: $L \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, удовлетворяющая условию $v(x \vee y) + v(x \wedge y) \leq v(x) + v(y)$ для всех $x, y \in L$, называется субвалюацией на $\mathbb{L}$. Субвалюация v называется *изотонной*, если $v(x) \leq v(y)$ всякий раз, когда ,$x \preceq y$, и называется *положительной*, если $v(x) < v(y)$ всякий раз, когда $x \preceq y$, $x \neq y$.

Субвалюация v называется *валюацией*, если она изотонна и равенство $v(x \vee y) + v(x \wedge y) = v(x) + v(y)$ справедливо для всех $x, y \in L$. Целочисленное валюация называется *высотой* (или *длиной*) решетки $\mathbb{L}$.

Метрика валюации решетки

Пусть $\mathbb{L} = (L, \preceq, \vee, \wedge)$ – решеткf и v – изотонная субвалюация на $\mathbb{L}$. *Полуметрика субвалюации решетки d_v* на $\mathbb{L}$ определяется как

$$2v(x \vee y) - v(x) - v(y).$$

(Она может быть также задана на некоторых полурешетках). Если v является положительной субвалюацией на $\mathbb{L}$, то получим метрику, которая называется **метрикой субвалюации решетки**. Если v – валюация, то d_v можно записать как

$$v(x \vee) - v(x \wedge y) = v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y);$$

в этом случае d_s называется *полуметрикой валюации* Если v является положительной валюацией на $\mathbb{L}$, то получаем метрику, называемую **метрикой валюации решетки**.

Если $\mathbb{L} = \mathbb{N}$ (множество натуральных чисел), $x \vee y = l.c.m.(x, y)$ (наименьшее общее кратное), $x \wedge y = g.c.d.(x, y)$ (наибольший общий делитель) и положительная валюация $v(x) = \ln x$, то $d_v(x, y) = \ln \frac{l.c.m.(x, y)}{g.c.d.(x, y)}$. Данную метрику можно обобщить на любое *факториальное кольцо* (т.е. кольцо с единственной факторизацией), снабженное положительной валюацией v, такой что $v(x) \geq 0$ с равенством только для мультипликативной единицы кольца и $v(xy) = v(x) + v(y)$.

Метрика конечных подгрупп

Пусть $(G, \cdot, e)$ – группа и $\mathbb{L} = (L, \subset, \cap)$ – нижняя полурешетка всех конечных подгрупп группы $(G, \cdot, e)$ с пересечением $X \cap Y$ и валюацией $v(X) = \ln |X|$.

Метрика конечных подгрупп есть **метрика валюации** на $\mathbb{L}$, определяемая как

$$v(X) + v(Y) - 2v(X \wedge Y) = \ln \frac{|X||Y|}{(|X \cap Y|)^2}.$$

Скалярная и векторная метрики

Пусть $\mathbb{L} = (L, \leq, \max, \min)$ – решетка с объединением $\max\{x, y\}$ и $\min\{x, y\}$ пересечением на множестве $L \subset [0, \infty)$, имеющим заданное число а как наибольший элемент и замкнутое относительно *отрицания*, т.е. для любого $x \in L$ имеем $\bar{x} = a - x \in L$.

Скалярная метрика d на L задается для $x \neq y$ как

$$d(x, y) = \max\{\min\{x, \bar{y}\}, \min\{\bar{x}, y\}\}.$$

Скалярная метрика d^* на $L^* = L \cup \{*\}$, определяется для $x \neq y$ как

$$d^*(x,y) = \begin{cases} d(x,y), & \text{если} \quad x, y \in L, \\ \max\{x, \bar{x}\}, & \text{если} \quad y = *, x \neq *, \\ \max\{y, \bar{y}\}, & \text{если} \quad x = *, y \neq *. \end{cases}$$

Для данной нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ **векторная метрика** на L^n задается как

$$\|(d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n))\|$$

и **векторная метрика** на $(L^*)^n$ задается как

$$\|(d^*(x_1, y_1), \ldots, d^*(x_n, y_n))\|.$$

Векторная метрика на $L_2^n = \{0, 1\}^n$ с l_1-*нормой* на $\mathbb{R}^n$ называется **расстоянием Фреше–Никодима–Аронзяна**. Векторная метрика на $L_m^n = \left\{0, \frac{1}{m-1}, \ldots, \frac{m-2}{m-1}, 1\right\}^n$ с l_1-*нормой* на $\mathbb{R}^n$ называется ***m*-значной метрикой Сгарро**. Векторная метрика на $[0, 1]^n$ с l_1-*нормой* на $\mathbb{R}^n$ называется **нечетко определенной метрикой Сгарро**. Если L есть L_m или $[0, 1]$ и $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+r})$, $y = (y_1, \ldots, y_n, *, \ldots, *)$, где $*$ стоит на r местах, то векторная метрика между x и y является **метрикой Сгарро** (см., например, [CSY01]).

Метрики на пространстве Рисса

Пространство Рисса (или *векторная решетка*) есть частично упорядоченное векторное пространство $(V_{\text{Ri}}, \preceq)$, в котором выполняются следующие условия:

1) структура векторного пространства и частично упорядоченная структура совместимы: из $x \preceq y$ следует, что $x + z \preceq y + z$, а из $x \succ 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ следует, что $\lambda x \succ 0$;

2) для любых двух элементов $x, y \in V_{\text{Ri}}$ существует объединение $x \vee y \in V_{\text{Ri}}$ (в частности, существует объединение и пересечение любого конечного множества элементов на V_{Ri}).

Метрика нормы Рисса есть **метрика нормы** на V_{Ri}, заданная как

$$\|x - y\|_{\text{Ri}},$$

где $\|\cdot\|_{\text{Ri}}$ – *норма Рисса*, т.е. *норма* на V_{Ri}, такая что для любых $x, y \in V_{\text{Ri}}$ из неравенства $|x| \leq |y|$, где $|x| = (-x) \vee (x)$ следует неравенство $\|x\|_{\text{Ri}} \leq \|y\|_{\text{Ri}}$. Пространство $((V_{\text{Ri}}, \|\cdot\|_{\text{Ri}})$ называется *нормированным пространством Рисса.* В случае полноты оно называется *банаховой решеткой*. Все нормы Рисса на банаховой решетке эквивалентны.

Элемент $e \in V_{\text{Ri}}^+ = \{x \in V_{\text{Ri}} : \; x \succ 0\}$ называется *сильной единицей* для V_{Ri}, если для каждого $x \in V_{\text{Ri}}$ существует $\lambda \in \mathbb{R}$, такое что $|x| \preceq \lambda e$. Если пространство Рисса V_{Ri} имеет сильную единицу e, то $\|x\| = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \; |x| \preceq \lambda e\}$ является нормой Рисса и на V_{Ri} получим метрику нормы Рисса

$$\inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \; |x - y| \preceq \lambda e\}.$$

Слабой единицей для V_{Ri} является элемент e из V_{Ri}^{+}, такой что $e \wedge |x| = 0$ влечет $x = 0$. Пространство Рисса V_{Ri} называется *архимедовым*, если для любых двух $x, y \in V_{\mathrm{Ri}}^{+}$ существует натуральное число n, такое что $nx \preceq y$. **Равномерная метрика** на архимедовом пространстве Рисса со слабой единицей e определяется как

$$\inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \ |x - y| \wedge e \preceq \lambda e\}.$$

Расстояние галереи для флагов

Пусть $\mathbb{L}$ – решетка. *Цепь* C в $\mathbb{L}$ есть подмножество множества L, которое является *линейно упорядоченным*, т.е. любые два элемента из C сравнимы между собой. *Флагом* называется цепь в $\mathbb{L}$, которая является максимальной относительно включению. Если $\mathbb{L}$ является полумодулярной решеткой, содержащей конечный флаг, то $\mathbb{L}$ имеет единственный минимальный и единственный максимальный элемент, и любые два флага C, D в $\mathbb{L}$ имеют одинаковое кардинальное число $n + 1$. Тогда n – это высота решетки $\mathbb{L}$. Два флага C, D в $\mathbb{L}$ называются *смежными*, если они совпадают или D содержит только один элемент вне C. *Галереей* от C к D длины m называется последовательность флагов $C = C_0, C_1, \ldots, C_m = D$, такая что C_{i-1} и C_i являются смежными для $i = 1, \ldots, m$.

Расстояние галереи для флагов (см. [Abel91]) есть расстояние на множестве всех флагов полумодулярной решетки $\mathbb{L}$ конечной высоты, определяемое как минимум длин галерей из C к D. Оно может быть записано как

$$|C \vee D| - |C| = |C \vee D| - |D|,$$

где $C \vee D = \{c \vee d : \ c \in C, \ d \in D\}$ является верхней подполурешеткой, порожденной C и D.

Расстояние галереи для флагов меток является специальным случаем **метрики галереи** (для *системы камер*, состоящей из флагов).

Глава 11

РАССТОЯНИЯ НА СТРОКАХ И ПЕРЕСТАНОВКАХ

Алфавит – конечное множество $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| \geq 2$, элементы которого называются *буквами* (или *символами*). *Строка* (или *слово*) есть последовательность букв над данным конечным алфавитом $\mathcal{A}$. Множество всех конечных последовательностей над алфавитом $\mathcal{A}$ обозначается как $W(\mathcal{A})$.

Подстрока (или *фактор, цепочка, блок*) строки $x = x_1,\ldots, x_n$ – любая ее подпоследовательность сменных элементов $x_i x_{i+1} \ldots x_k$ с $1 \leq i \leq k \leq n$. *Префиксом* строки $x_1 \ldots x_n$ является любая ее подстрока, начинающаяся с x_1; *суффикс* – любая ее подстрока, заканчивающиаяся на x_n. Если строка является частью текста, то *разделительные знаки* (пробел, точка, запятая и т.п.) добавляются к алфавиту $\mathcal{A}$.

Вектор – любая конечная последовательность из действительных чисел, т.е. конечная строка над *бесконечным алфавитом* $\mathbb{R}$. *Вектором частот* (или *дискретным распределением вероятностей*) является любая строка $x_1 \ldots x_n$ со всеми $x_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. *Перестановка* (или *ранжирование*) – любая строка $x_1 \ldots x_n$, в которой все x_i – различные числа множества $\{1,\ldots, n\}$.

Операцией редактирования называется любая операция на строках, т.е. *симметричное бинарное отношение* на множестве всех рассматриваемых строк. Если имеется множество операций редактирования $\mathbb{O} = \{O_1,\ldots, O_m\}$, то соответствующая **метрика редактирования** (или *единичная цена расстояния редактирования*) между строками x и y есть минимальное число операций редактирования из $\mathbb{O}$, требующихся для того, чтобы получить y из x. Это **метрика пути** графа со множеством вершин $W(\mathcal{A})$, где xy является ребром, если y может быть получено из x посредством одной из операций множества $\mathbb{O}$. В некоторых приложениях каждому типу операций редактирования ставится в соответствие *функция цены*; тогда расстоянием редактирования является минимальная общая цена преобразования x в y. Если задано множество операций редактирования $\mathbb{O}$ на строках, то соответствующая **метрика редактирования ожерелий** между циклическими строками x и y есть минимальное число операций редактирования из $\mathbb{O}$, необходимых для получения y из x, минимизированное по всем вращениям x.

Основными операциями редактирования на строках являются:

– *вставуд* (вставка-удаление) *символа*;

– *замена символа*;

– *своп символов*, т.е. сдвиг символа на одну позицию вправо или влево (что переставляет смежные символы);

– *перемещение подстроки*, т.е. преобразование, скажем, строки $x = x_1 \ldots x_n$ в строку $x_1 \ldots x_{i-1} x_j \ldots x_{k-1} x_i \ldots x_{j-1} x_k \ldots x_n$;

– *копирование подстроки*, т.е. преобразование, скажем, $x = x_1 \ldots x_n$ в $x_1 \ldots x_{i-1} x_j \ldots x_{k-1} x_i \ldots x_n$;

– *антикопирование подстроки*, т.е. удаление подстроки с сохранением в строке ее копии.

Ниже приводятся основные расстояния на строках. Однако некоторые расстояния на строках представлены в главах 15, 21 и 23, где они более уместны, с учетом необходимого уровня обобщения или специализации.

11.1. РАССТОЯНИЯ НА СТРОКАХ ОБЩЕГО ВИДА

Метрика Левенштейна

Метрика Левенштейна (или *тасованное расстояние Хэмминга, метрика Хэмминга с пропусками, метрика редактирования символов*) является метрикой редактирования на $W(\mathcal{A})$, которая получена для $\mathbb{O}$, включающего только операции замены символов или их вставки-удаления.

Метрика Левенштейна между строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ равна

$$\min\{d_H(x^*, y^*)\},$$

где x^*, y^* – строки длины k, $k \geq \max\{m, n\}$ над алфавитом $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cup \{*\}$, такие что после удаления всех новых символов $*$ строки x^* и y^* превращаются в x и y соответственно. Здесь *пропуск означает* новый символ $*$ и x^*, y^* – *тасования* строк x и y со строками, включающими только $*$.

Метрика редактирования с перемещениями

Метрика редактирования с перемещениями есть метрика редактирования на $W(\mathcal{A})$ ([Corm03]), полученная для $\mathbb{O}$, включающего только перемещения подстрок и вставки-удаления.

Метрика уплотненного редактирования

Метрика уплотненного редактирования есть метрика редактирования на $W(\mathcal{A})$ ([Corm03]), полученная для $\mathbb{O}$, включающего только операции вставки-удаления (вставуд), символа копирования подстроки антикопирования подстроки.

Метрика вставки-удаления

Метрика вставки-удаления есть метрика редактирования на $W(\mathcal{A})$, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только операцию вставки-удаления.

Это – аналог **хэммингова расстояния** $|X \Delta Y|$ между множествами X и Y. Для строк $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ она равна $m + n - 2LCS(x, y)$, где подобность $LCS(x, y)$, – длина самой длинной общей подпоследовательности для x и y.

Расстояние фактора на $W(\mathcal{A})$ определяется как $m + n - 2LCS(x, y)$, где подобность $LCS(x, y)$ – длина самой длинной общей подстроки (фактора) для x и y.

Метрика свопа

Метрика свопа – метрика редактирования на $W(\mathcal{A})$, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только операцию свопа символов.

Метрика мультимножества

Метрикой мультимножества называется метрика на $W(\mathcal{A})$, определяемая как

$$\max\{|X - Y|, |Y - X|\}$$

для любых строк x и y, где X, Y – *мультимножества символов* строк x, y, соответственно.

Метрика маркировки

Метрикой маркировки называется метрика на $W(\mathcal{A})$ ([EhHa88]), определенная как

$$\ln_2((\mathrm{diff}(y,x)+1)\,(\mathrm{diff}(y,x)+1))$$

для любых строк $x = x_1...x_m$ и $y = y_1...y_n$, где diff(x, y) – минимальный размер $|M|$ подмножества $M \subset \{1,..., m\}$, такого что любая подстрока x, не содержащая x_i с $i \in M$, является подстрокой y.

Другой метрикой, определенной в [EhHa88], является

$$\ln_2(\mathrm{diff}(x, y) + \mathrm{diff}(y, x) + 1).$$

Расстояние преобразования

Расстоянием преобразования называется **расстояние редактирования с ценой** на $W(\mathcal{A})$ (Варе и др., 1999), полученное для $\mathbb{O}$, включающего только операции копирования, антикопирования и вставки-удаления подстрок. Расстояние между строками x и y является минимальной ценой преобразования x в y посредством этих операций, где цена каждой операции – длина ее описания. Так, например, для описания копирования необходим бинарный код, точно определяющий тип операции, смещение местоположения подстрок относительно друг друга в x и y и длину самой подстроки. Кодом вставки должен определять тип операции, длину подстроки и последовательность подстроки.

Расстояние нормалированной информации

Расстояние нормализованной информации d есть симметричная функция на $W(\{0, 1\})$ ([LCLM04]), заданная как

$$\frac{\max\{K(x\,|\,y^*), K(y\,|\,x^*)\}}{\max\{K(x), K(y)\}}$$

для каждых двух бинарных строк x и y. Здесь для бинарных строк u и v, u^* является кратчайшей бинарной программой для вычисления u на подходящей, т.е. использующей Тьюринг-полный язык ЭВМ, *сложность по Колмогорову* (или *алгоритмическая энтропия*) $K(u)$ есть длина u^* (окончательно сжатый вариант u) и $K(u\,|\,v)$ – длина кратчайшей программы вычисления u, если v дано как вспомогательный ввод.

Функция $d(x, y)$ является метрикой с точностью до незначительного остаточного члена: $d(x, x) = O((K(x))^{-1})$ и $d(x, z) - d(y, z) = O((\max\{K(x), K(y), K(z)\})^{-1})$ (сравните $d(x, y)$ с **метрикой информации** (или *метрикой энтропии*) $H(X\,|\,Y) + H(Y\,|\,X)$ между стохастическими источниками X и Y).

Нормализованное расстояние сжатия – это расстояние н $W(\{0, 1\})$а ([LCLM04], [BGLVZ98]), заданное как

$$\frac{C(xy) - \min\{C(x), C(y)\}}{\max\{C(x), C(y)\}}$$

для любых бинарных строк x и y, где $C(x)$, $C(y)$ и $C(xy)$ означают размер сжатых (с помощью фиксированного компрессора C, такого как gzip, bzip2 или PPMZ) строк x, y и их сочленения xy. Данное расстояние не является метрикой. Это – аппроксимация расстояния нормализованной информации. Подобное расстояние может быть задано как $\dfrac{C(xy)}{C(x)+C(y)} - \dfrac{1}{2}$.

Подобность Энтони–Хаммера

Подобность Энтони–Хаммера между бинарной строкой $x = x_1 \ldots x_n$ и множеством Y бинарных строк $y = y_1 \ldots y_n$ есть максимальное число m, такое что для каждого m-подмножества M множества $\{1,\ldots, n\}$ подстрока строки x, содержащая только x_i с $i \in M$, является подстрокой некоторой строки $y \in Y$, содержащей только y_i с $i \in M$.

Подобность Джаро

Для строк $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ назовем символ x_i общим с y, если $x_i = y_j$, где $|i-j| \le \frac{\min(m,n)}{2}$. Пусть $x' = x'_1 \ldots x'_m$ – все символы строки x, общие с y (в том же порядке, как они следуют в x), и пусть $y' = y'_1 \ldots y'_n$ – аналогичная строка для y.

Подобность Джаро $\mathrm{Jaro}(x, y)$ между строками x и y определяется как

$$\frac{1}{3}\left(\frac{m'}{m} + \frac{n'}{n} + \frac{|\{1 \le i \le \min\{m', n'\}:\ x'_i = y'_i\}|}{\min\{m', n'\}}\right).$$

Эта и последующие две подобности используются связи документации.

Подобность Джаро–Уинклера

Подобность ДжароУинклера между строками x и y определяется как

$$\mathrm{Jaro}(x,y) + \frac{max\{4, LCP(x,y)\}}{10}(1 - \mathrm{Jaro}(x,y)),$$

где $\mathrm{Jaro}(x, y)$ – **подобность Джаро** и $LCP(x, y)$ – длина самого большого общего префикса для x и y.

Подобность q-граммы

Подобность q-граммы между строками x и y определяется как

$$\frac{q(x,y) + q(y,x)}{2},$$

где $q(x, y)$ – число подстрок длины q в строке y, которые также появляются как подстроки в x, деленное на количество всех подстрок длины q в y.

Эта подобность является примером **подобностей на основе маркеров**, т.е. таких, к которым применимо определение *маркеров* (избранных подстрок или слов). Здесь маркеры – это *q-граммы*, т.е. подстроки длины q. Примером других подобностей на основе маркеров на строках, используемых в связи документации, являются **подобность объединения Жаккарда** и **TF-IDF** (вариант **подобности косинуса**). Типовой метрикой, **основанной на словаре** между строками x и y является $|D(x)\Delta D(y)|$, где $D(z)$ обозначает полный *словарь* строки z, т.е. множество всех ее подстрок.

Метрика префикс–Хэмминга

Метрика префикс–Хэмминга между строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ определяется как

$$(\max\{m, n\} - \min\{m, n\}) + |\{1 \le i \le \min\{m, n\}: x_i \ne y_i\}|.$$

Взвешенное Расстояние Хэмминга

Взвешенное расстояние Хэмминга $d_{wH}(x, y)$ между строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ определяется как

$$\sum_{i=1}^{m} d(x_i, y_i).$$

Нечеткое расстояние Хэмминга

Если $(\mathcal{A}, d)$ – метрическое пространство, то **нечетким расстоянием Хэмминга** между строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_m$ называется **расстояние редактирования с ценой** на $W(\mathcal{A})$, полученное для $\mathbb{O}$, включающего только операции вставки-удаления, каждая с фиксированной ценой $q > 0$, и *сдвигов символов* (т.е. перемещение односимвольных подстрок), где цена замены i на j есть функция $f(|i - j|)$. Это расстояние – минимальная общая цена преобразования x в y с помощью указанных операций. Букштейн, Клейн и Раита, которые в 2001 г. ввели это расстояние для процессов выборки информации, доказали, что оно является метрикой, если f – монотонно возрастающая вогнутая функция на множестве целых чисел, которая обращается в нуль только в точке 0. Случай $f(|i - j|) = C|i - j|$, где $C > 0$ – константа и $|i - j|$ – сдвиг во времени, соответствует **расстоянию Виктора–Пурпура** для последовательности всплесков (см. гл. 23).

В 2003 г. Ралеску предложил для выборки образов еще одно **нечеткое расстояние Хэмминга** на $\mathcal{R}^m$. **Расстояние Ралеску** между двумя строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_m$ есть нечеткое кардинальное число разностного нечеткого множества $D_\alpha(x, y)$ (где α – параметр) с функцией принадлежности

$$\mu_i = 1 - e^{-\alpha(x_i - y_i)^2}, \quad 1 \le i \le m.$$

Точное кординальное число нечеткого множества $D_\alpha(x, y)$, аппроксимирующее его нечеткое кардинальное число равно $\left|\left\{1 \le i \le m:\ \mu_i > \frac{1}{2}\right\}\right|$.

Метрика Нидлмана–Вунша–Селлерса

Если $(\mathcal{A}, d)$ – метрическое пространство, то **метрикой Нидлмана–Вунша–Селлерса** (или *расстоянием Левенштейна с ценой, метрикой общего совмещения*) называется **метрика редактирования с ценой** на $W(\mathcal{A})$ ([NeWu70]), полученная для $\mathbb{O}$, включающего только операции вставки-удаления, каждая постоянной цены $q > 0$ и замены символов, где $d(i, j)$ является ценой замена i на j. Данная метрика есть минимальная общая цена преобразования x в y с применением этих операций. Эквивалентно, она равна

$$\min\{d_{wH}(x^*, y^*)\},$$

где x^*, y^* – строки длины k, $k \ge \max\{m, n\}$ над алфавитом $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \cup \{*\}$, такие что после удаления всех новых символов $*$ строки x^* и y^* сокращаются до x и y соответственно. Здесь $d_{wH}(x^*, y^*)$ есть **взвешенное хэммингово расстояние** между x^* и y^* с весом $d(x_i^*, y_i^*) = q$ (т.е. операцией редактирования является вставка-удаление), если одна из x_i^*, y_i^* является $*$ и $d(x_i^*, y_i^*) = d(i, j)$, иначе.

Расстояние Гото–Смита–Уотермана (или *расстояние строки с аффинными пропусками*) является более специализированной метрикой с ценой (см. [Goto82]). Она отбрасывает несоответствующие части в начале и конце строк x и y и вводит две цены вставки-удаления одну для инициирования *аффинного пропуска* (непрерывный блок операций вставки-удаления) и другую (меньшую) для расширения пропуска.

Метрика Мартина

Метрика Мартина d^a между строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ определяется как

$$|\,2^{-m} - 2^{-n}\,| + \sum_{t=1}^{\max\{m,n\}} \frac{a_t}{|\mathcal{A}|^t} \sup_z |\,k(z,x) - k(z,y)\,|,$$

где z – любая строка длины t, $k(z, x)$ – *ядро Мартина* ([MaSt99]) *марковской цепи* $M = \{M_t\}_{t=0}^{\infty}$, и последовательность $a \in \{a = \{a_i\}_{t=0}^{\infty}: \ a_t > 0, \ \sum_{t=1}^{\infty} a_t < \infty$ – параметра.

Метрика Бэра

Метрикой Бэра называется ультраметрика между конечными или бесконечными строками $x = x_1 \ldots x_m \ldots$ и $y = y_1 \ldots y_n \ldots$, определяемая для $x \neq y$ как

$$\frac{1}{1 + LGCP(x,y)},$$

где $LCP(x, y)$ – длина самого длинного общего префикса строк x и y.

Обобщенная метрика Кантора

Обобщенной метрикой Кантора называется ультраметрика между бесконечными строками $x = x_1 \ldots x_m \ldots$ и $y = y_1 \ldots y_n \ldots$, определяемая для $x \neq y$ как

$$a^{LCP(x,y)},$$

где a – фиксированное число из интервала (0,1), а $LCP(x, y)$ – длина самого длинного префикса строк x и y.

Данное метрическое пространство является **компактным**. Для случая $a = \frac{1}{2}$ метрика $\frac{1}{2^{LCP(x,y)}}$ рассматривалась на классическом **фрактале** (см. гл. 1) для [0,1] – *множестве Кантора* (см. **Метрика Кантора**, гл. 18).

Метрика Дункана

Рассмотрим множество X всех строго возрастающих бесконечных последовательностей $x = \{x_n\}_n$ положительных целых чисел. Определим $N(n, x)$ как число элементов в $x = \{x_n\}_n$, которые меньше n, и $\delta(x)$ как *плотность* x, т.е. $\delta(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{N(n,x)}{n}$. Пусть Y – подмножество X, состоящее из всех последовательностей $x = \{x_n\}_n$, для которых $\delta(x) < \infty$.

Метрикой Дункана является метрика на Y, определенная для $x \neq y$ как

$$\frac{1}{1 + LCP(x,y)} + |\,\delta(x) - \delta(y)\,|,$$

где $LCP(x, y)$ – длина самого длинного общего префикса строк x и y. Метрическое пространство (X, d) называется *пространством Дункана*.

11.2. РАССТОЯНИЯ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Перестановкой (или *ранжированием*) называется любая строка $x_1 \ldots x_n$, где x_i – различные числа множества $\{1\ldots, n\}$; *перестановка со знаком* – любая строка $x_1 \ldots x_n$, где $|x_i|$ – различные числа из множества $\{1\ldots, n\}$. Обозначим через $(\mathrm{Sym}_n, \cdot, \mathrm{id})$ группу всех перестановок множества $\{1\ldots, n\}$, где id – *тождественное отображение*. Сужение на множество Sym_n (всех n-перестановочных векторов) любой метрики на $\mathbb{R}^n$ является метрикой на Sym_n; основным примером служит **l_p-метрика** $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$.

Основными операциями редактирования на перестановках являются:

• *Транспозиция блока*, т.е. перемещение подстроки.

• *Перемещение символа*, т.е. транспозиция блока, состоящего из одного символа.

• *Своп символов*, т.е. перестановка местами двух соседних символов.

• *Обмен символов*, т.е перестановка местами любых двух символов (в теории групп это называется *транспозицией*).

• *Одноуровневый обмен символов*, т.е. обмен символов x_i и x_j, $i < j$, таких что для любого k с $i < k < j$ выполняется либо $\min\{x_i, x_j\} > x_k$, либо $x_k > \max\{x_i, x_j\}$.

• *Реверсия блока*, т.е. преобразование, скажем, перестановки $x = x_1 \ldots x_n$ в перестановку $x_1 \ldots x_{i-1} \mathrm{X}_{\mathrm{j}} \mathrm{X}_{\mathrm{j-1}} \ldots X_{i+1} \mathrm{X}_{\mathrm{i}}\, x_{j+1} \ldots x_n$ (так, своп – это реверсия блока, состоящего только из двух символов).

• *Реверсия со знаком*, т.е. реверсия в перестановке, со знаком, с последующим умножением на –1 всех символов реверсированного блока.

Ниже перечислены наиболее употребляемые метрики редактирования и другие метрики на множестве Sym_n.

Хэммингова метрика на перестановках

Хэммингова метрика на перестановках d_H есть метрика редактирования на Sym_n, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только операции замены символов. Это – **биинвариантная** метрика. При этом $n – d_H(x, y)$ – число фиксированных точек перестановки xy^{-1}.

ρ-расстояние Спирмана

ρ-расстояние Спирмана – это евклидова метрика на Sym_n:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

(см. **Корреляция ρ-ранга Спирмана**, гл. 17)

Расстояние масштабной линейки Спирмана

Расстояние масштабной линейки Спирмана – это **l_1-метрика** на Sym_n:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

(см. **Подобность масштабной линейки Спирмана**, гл. 17).

Оба расстояния Спирмана **биинвариантны**.

τ-расстояние Кендалла

τ-расстояние Кендалла (или *метрика инверсии, метрика свопа перестановок*) I является метрикой редактирования на Sym_n, полученной для $\mathbb{O}$, включающего только свопы символов.

В терминах теории групп, $I(x, y)$ – число смежных транспозиций, необходимых для получения x из y. Кроме того, $I(x, y)$ есть число *относительных инверсий* x и y, т.е. пар (i, j), $1 \le i < j \le n$ с $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ (см. **Корреляционная подобность τ ранга Кендалла**, гл. 17).

В [BCFS97] также приведены следующие метрики, связанные с метрикой $I(x, y)$:

1) $\min\limits_{z \in \mathrm{Sym}_n} (I(x, z) + I(z^{-1}, y^{-1}))$;

2) $\max\limits_{z \in \mathrm{Sym}_n} I(zx, zy)$;

3) $\min\limits_{z \in \mathrm{Sym}_n} I(zx, zy) = T(x, y)$, где T – **метрика Кэли**;

4) Метрика редактирования, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только одноуровневый обмен символов.

Полуметрика Даниелса–Гильбо

Полуметрика Даниельса–Гильбо есть полуметрика на Sym_n, определенная для любых $x, y \in \mathrm{Sym}_n$ как число троек (i, j, k), $1 \le i < j < k \le n$, таких что (x_i, x_j, x_k) не является циклическим сдвигом (y_i, y_j, y_k); она равна нулю тогда и только тогда, когда x – циклический сдвиг y (см. [Monj98]).

Метрика Кэли

Метрика Кэли T есть метрика редактирования на Sym_n, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только обмен символов.

В терминах теории групп, $T(x, y)$ есть минимальное число транспозиций, необходимых для того, чтобы получить x из y. При этом $n–T(x, y)$ – число циклов в перестановке xy^{-1}. Метрика T является **биинвариантной**.

Метрика Улама

Метрика Улама (или **метрика редактирования перестановок**) U – метрика редактирования на Sym_n, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только операции перемещения символов.

Эквивалентно, она является метрикой редактирования, полученной для $\mathbb{O}$, включающего только операции вставки-удаления. При этом $n–U(x, y) = LCS(x, y) = LIS(xy^{-1})$, где $LCS(x, y)$ – длина самой длинной общей подпоследовательности (не обязательно подстроки) x и y, тогда как $LIS(z)$ – длина самой длинной возрастающей подпоследовательности перестановки $z \in \mathrm{Sym}_n$.

Эта метрика и все шесть предыдущих метрик являются **правоинвариантными**.

Метрика реверсии

Метрика реверсии – метрика редактирования на Sym_n, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только операции реверсии блоков.

Метрика реверсии со знаком

Метрика реверсии со знаком (по Санкоффу, 1989) является метрикой редактирования на множестве всех $2^n n$ перестановок со знаком множества $\{1,\ldots, n\}$, полученной для $\mathbb{O}$, включающего только операции реверсии со знаком. Эта метрика применяется в биологии, где перестановки со знаком представляют однохромосомный геном, рассматриваемый как перестановку генов (вдоль хромосом), каждая из которых имеет направление (т.е. знак "+" или "–").

Метрика цепочки

Метрика цепочки (или *метрика перегруппировки*) есть метрика на Sym_n ([Page65]), определенная для любых $x, y \in \mathrm{Sym}_n$ как минимальное число минус 1 цепочек (подстрок) $y'_1, \ldots, y'_t$ строки y, таких что x может быть *строка из них*, т.е. $x = y'_1, \ldots, y'_t$.

Лексикографическая метрика

Лексикографическая метрика – это метрика на Sym_n, определенная как

$$|N(x) - N(y)|,$$

где $N(x)$ – порядковое число позиции (из 1,…, $n!$), занимаемой перестановкой x в *лексикографическом упорядочении* множества Sym_n.

В *лексикографическом упорядочении* множества Sym_n мы имеем $x = x_1 \ldots x_n \prec \prec y = y_1 \ldots y_n$, если существует индекс $1 \leq i \leq n$, такой что $x_1 = x_1, \ldots, x_{i-1} = y_{i-1}$, но $x_i < y_i$.

Метрика перестановок Фреше

Метрика перестановок Фреше есть **метрика произведения Фреше** на множестве Sym_∞ перестановок положительных целых чисел, определяемая как

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}.$$

Глава 12

Расстояния на числах, многочленах и матрицах

12.1. РАССТОЯНИЯ НА ЧИСЛАХ

В этой главе рассматриваются некоторые наиболее важные метрики на классических числовых системах: полукольце $\mathbb{N}$ натуральных чисел, кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел, а также полях $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ рациональных, действительных и комплексных чисел соответственно. Рассматривается также алгебра $\mathcal{Q}$ кватернионов.

Метрики на натуральных числах

Существует несколько хорошо известных метрик на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел:

1. $|n-m|$; сужение **натуральной метрики** (из $\mathbb{R}$) на $\mathbb{N}$.

2. $p^{-\alpha}$, где α – наибольшая степень данного простого числа p, делящая $m-n$ для $m \neq n$ (и равная 0 для $m = n$); сужение ***p*-адической метрики** (из $\mathbb{Q}$) на $\mathbb{N}$.

3. $\ln \frac{l.c.m.(m,n)}{g.c.d.(m,n)}$; пример **метрики валюации решетки**.

4. $w_r(n-m)$, где $w_r(n)$ – *арифметический r-вес* числа n; сужение **метрики арифметической *r*-нормы** (из $\mathbb{Z}$) на $\mathbb{N}$.

5. $\frac{|n-m|}{mn}$ (см. ***M*-относительная метрика**, гл. 19)

6. $1+\frac{1}{m+n}$ для $m \neq n$ (и равная 0 для $m = n$); **метрика Серпинского**.

Большинство этих метрик на $\mathbb{N}$ могут быть распространены на $\mathbb{Z}$. Более того, любую из вышеперечисленных метрик можно использовать для случая произвольного счетного множества X. Например, **метрику Серпинского** определяют обычно на произвольном счетном множестве $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ как $1+\frac{1}{m+n}$ для всех $x, x_n \in X$ с $m \neq n$ (и как 0, иначе).

Метрика арифметической *r*-нормы

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. *Преобразованной r-арной формой* целого числа x называется представление

$$x = e_n r^n + \cdots + e_1 r + e_0,$$

где $e_i \in \mathbb{Z}$ и $|e_i| < r$ для всех $i = 0,\ldots, n$. r-Арная форма называется *минимальной*, если число ее ненулевых коэффициентов минимально. Минимальная форма не является единственной в общем случае. Однако если коэффициенты e_i, $0 \leq i \leq n-1$, удовлетворяют условиям $|e_i + e_{i+1}| < r$ и $|e_i + e_{i+1}| < |e_{i+1}|$, если $e_i e_{i+1} < 0$, то вышеуказанная форма является единственной и минимальной; она называется *обобщенной несмежной формой. Арифметический r-вес* $w_r(x)$ целого числа x есть количество ненулевых коэффициентов в *минимальной r-форме* числа x, в частности в обобщенной несмежной форме.

Метрика арифметическая *r*-нормы (см., например, [Ernv85]) есть метрика на $\mathbb{Z}$, определенная как

$$w_r(x-y).$$

***p*-Адическая метрика**

Пусть p – простое число. Любое ненулевое рациональное число x может быть представлено как $x = p^{\alpha}\frac{c}{d}$, где c и d – целые числа, взаимно-простые с p, и α – целое число, определенное единственным образом. *p-Адическая норма* числа x определяется как $|x|_p = p^{-\alpha}$. Кроме того, мы считаем, что $|0|_p = 0$.

***p*-Адической метрикой** называется **метрика нормы** на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, определенная как

$$|x-y|_p .$$

Данная метрика лежит в основе построения алгебры p-адических чисел. Именно, **пополнение Коши** метрического пространства $(\mathbb{Q},\ |x-y|_p)$ дает поле $\mathbb{Q}_p$ *p-адических чисел*, точно так же как пополнение Коши метрического пространства $(\mathbb{Q},\ |x-y|)$ с **натуральной метрикой** $|x-y|$ дает поле $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Натуральная метрика

Натуральной метрикой (или **метрикой абсолютного значения**) называется метрика на $\mathbb{R}$, определенная как

$$|x-y| = \begin{cases} y-x, & \text{если } \ x-y<0, \\ x-y, & \text{если } \ x-y \geq 0. \end{cases}$$

На $\mathbb{R}$ все **l_p-метрики** совпадают с ней. Метрическое пространство $(\mathbb{R},\ |x-y|)$ называется *действительной прямой* (или *евклидовой прямой*).

Существует много других полезных метрик на $\mathbb{R}$. В частности, для данного $0 < \alpha < 1$ **обобщенная метрика абсолютного значения** на $\mathbb{R}$ определяется как $|x-y|^{\alpha}$.

Метрика нулевого отклонения

Метрикой нулевого отклонения называется метрика на $\mathbb{R}$, определенная как

$$1+|x-y|,$$

если одно и только одно из чисел x и y является положительным, и как

$$|x-y|$$

иначе, где $|x-y|$ – **натуральная метрика** (см., например, [Gile87]).

Квазиполуметрика действительной полупрямой

Квазиполуметрика действительной полупрямой задается на полупрямой $\mathbb{R}_{>0}$ как

$$\max\left\{0, \ln\frac{y}{x}\right\}.$$

Расширенная метрика действительной прямой

Расширенной метрикой действительной прямой называется метрика на множестве $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Основным примером (см., в частности, [Cops68]) такой метрики является

$$| f(x) - f(y) |,$$

где $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ для $x \in \mathbb{R}$, $f(+\infty) = 1$ и $f(-\infty) = -1$. Другая часто используемая метрика на $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ задается как

$$| \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y |,$$

где $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{arctg} x < \frac{1}{2}\pi$ для $-\infty < x < \infty$ и $\operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\frac{1}{2}\pi$.

Метрика комплексного модуля

Метрикой комплексного модуля является метрика на множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел, определяемая как

$$| z - u |,$$

где для любого $z \in \mathbb{C}$ действительное число $|z| = |z_1 + z_2 i| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ является его *комплексным модулем*. Метрическое пространство $(\mathbb{C}, |z-u|)$ называется *комплексной плоскостью* (или *плоскостью Аргана*). В качестве примера других полезных метрик на $\mathbb{C}$ можно привести **метрику Британской железной дороги**, определяемую как

$$| z | + | u |$$

для $z \neq u$ (и равную 0, иначе); ***p*-относительную метрику**, $1 \le p \le \infty$ (см. **(*p*, *q*)-относительная метрика**, гл. 19), определяемую как

$$\frac{|z-u|}{(|z|^p + |u|^p)^{1/p}}$$

для $|z| + |u| \neq 0$ (и равную 0, иначе); для $p = 0$ получаем **относительную метрику**, задаваемую для $|z| + |u| \neq 0$ как

$$\frac{|z-u|}{\max\{|z|, |u|\}}.$$

Хордальная метрика

Хордальная метрика d_χ есть метрика на множестве $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, определенная как

$$d_\chi(z,u) = \frac{2|z-u|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|u|^2}}$$

для всех $z, u \in \mathbb{C}$ и как

$$d_\chi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$ (см. ***M*-относительная метрика**, гл. 19). Метрическое пространство

$(\overline{\mathbb{C}}, d_\chi)$ называется *расширенной комплексной плоскостью*. Она гомеоморфна и конформно эквивалентна *римановой сфере*.

Именно, *риманова сфера* – это сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$, рассматриваемая как метрическое подпространство $\mathbb{E}^3$, на которую в стереографической проекции взаимно-однозначно отображается расширенная комплексная плоскость. *Единичную сферу* $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ можно рассматривать как риманову сферу, а плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ можно отождествить с плоскостью $x_3 = 0$ так, что ее действительная ось совпадает с x_1-осью, а мнимая ось – с x_2-осью. При стереографической проекции каждая точка $z \in \mathbb{C}$ соответствует точке $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, которая получена как точка пересечения луча, проведенного из "северного полюса" (0, 0, 1) сферы в точку z сферы S^2; "северный полюс" соответствует бесконечно удаленной точке. Хордальное расстояние между двумя точками $p, q \in S^2$ определяется как расстояние между их прообразами $z, u \in \overline{\mathbb{C}}$.

Хордальная метрика может быть аналогичным образом определена на $\overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Именно для любых

$$d_\chi(x, y) = \frac{2 \| x - y \|_2}{\sqrt{1 + \| x \|_2^2} \sqrt{1 + \| y \|_2^2}}$$

и для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$d_\chi(x, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + \| x \|_2^2}},$$

где $\| \cdot \|_2$ – обычная евклидова норма на $\mathbb{R}^n$. Метрическое пространство $(\mathbb{R}^n, d_\chi)$ называется *пространством Мёбиуса*. Это *птолемеево метрическое пространство* (см. **Птолемеева метрика**, гл.1).

Если заданы $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $p \geq 1$, то **обобщенной хордальной метрикой** называется метрика на $\mathbb{C}$ (в общем случае на $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_2)$ и даже на любом птолемеевом пространстве $(V, \| \cdot \|)$), определенная как

$$\frac{| z - u |}{(\alpha + \beta | z |^p)^{1/p} \cdot (\alpha + \beta | u |^p)^{1/p}}.$$

Она легко обобщается и на случай $\overline{\mathbb{C}}(\overline{\mathbb{R}}^n)$.

Кватернионная метрика

Кватернионы – элементы некоммутативной алгебры с делением $\mathfrak{Q}$ над полем $\mathbb{R}$, геометрически реализуемые в четырехмерном пространстве ([Hami66]). Кватернион можно записать в форме $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$, $q_i \in \mathbb{R}$, где кватернионы i, j и k называются *основными единицами* и удовлетворяют следующим соотношениям, известным как *правила Гамильтона*: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ и $ij = -ji = k$.

Норма $\| q \|$ *кватерниона* $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_3 k \in \mathfrak{Q}$ определяется как

$$\| q \| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}, \quad \overline{q} = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k.$$

Кватернионная метрика есть **метрика нормы** на множестве $\mathfrak{Q}$ всех кватернионов, определяемой как $\| x - y \|$.

12.2. РАССТОЯНИЯ НА МНОГОЧЛЕНАХ

Многочлен – выражение, являющееся суммой степеней одной или нескольких переменных, умноженных на коэффициенты. *Многочлен от одной переменной* с действительными (комплексными) коэффициентами задается как $P = P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}(a_k \in \mathbb{C})$. Множество $\mathcal{P}$ всех действительных (комплексных) многочленов образуют кольцо ($\mathcal{P}$, +, ·, 0). Оно является также векторным пространством над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$).

Метрика нормы многочлена

Метрика нормы многочлена есть **метрика нормы** на множестве $\mathcal{P}$ всех действительных (комплексных) многочленов, определенная как

$$\| P - Q \|,$$

где $\| \cdot \|$ – *норма многочлена*, т.е. такая функция $\| \cdot \|: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, что для всех $P, Q \in \mathcal{P}$ и любого скаляра k имеем следующие свойства:

1) $\| P \| \geq 0$ с $\| P \| = 0$ тогда и только тогда, когда $P = 0$;

2) $\| kP \| = | k | \| P \|$;

3) $\| P + Q \| \leq \| P \| + \| Q \|$ (*неравенство треугольника*).

Для множества $\mathcal{P}$ обычно используются несколько классов норм. *l_p-норма* ($1 \leq p \leq \infty$) многочлена $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ определяется как

$$\| P \|_p = \left(\sum_{k=0}^{n} | a_k |^p \right)^{1/p},$$

давая особые случаи $\| P \|_1 = \sum_{k=0}^{n} | a_k |$, $\| P \|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} | a_k |^2}$ и $\| P \|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} | a_k |$. Значение $\| P \|_\infty$ называется *высотой многочлена*. *L_p-норма* ($1 \leq p \leq \infty$) многочлена $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ определяется как

$$\| P \|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} | P(e^{i\theta}) |^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p},$$

давая особые случаи $\| L \|_{L_1} = \int_0^{2\pi} | P(e^{i\theta}) | \frac{d\theta}{2\pi}$, $\| P \|_{L_2} = \sqrt{\int_0^{2\pi} | P(e^{i\theta}) | \frac{d\theta}{2\pi}}$ и $\| P \|_{L_\infty} = \sup_{|z|=1} | P(z) |$.

Метрика Бомбьери

Метрика Бомбьери (или **скобочная метрика многочлена**) есть **метрика нормы многочлена** на множестве $\mathcal{P}$ всех действительных (комплексных) многочленов, определенная как

$$[P - Q]_p,$$

где $[\cdot]_p$, $0 \le p \le \infty$, есть *p-норма Бомбьери*. Для многочлена $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ она задается как

$$[P]_p = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{1-p} |a_k|^p \right)^{1/p},$$

где $\binom{n}{k}$ – биномиальный коэффициент.

12.3. РАССТОЯНИЯ НА МАТРИЦАХ

$m \times n$ матрица $A = ((a_{ij}))$ над полем $\mathbb{F}$ представляет собой таблицу, состоящую из m строк и n столбцов с элементами a_{ij} из поля $\mathbb{F}$. Множество всех $m \times n$ матриц с действительными (комплексными) элементами обозначается как $M_{m,n}$. Оно образует *группу* $(M_{m,n}, +, 0_{m,n})$, где $((a_{ij})) + ((b_{ij})) = ((a_{ij} + b_{ij}))$, а матрица $0_{m,n} \equiv 0$, т.е. все ее элементы равны 0. Оно является также mn-мерным векторным пространством над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$). Транспонированной матрицей для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_{m,n}$ называется матрица $A^T = ((a_{ij})) \in M_{n,m}$. *Сопряженной транспонированной матрицей* (или *присоединенной матрицей*) для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_{m,n}$ называется матрица $A^* = ((\overline{a}_{ij})) \in M_{n,m}$.

Матрица называется *квадратной матрицей*, если $m = n$. Множество всех квадратных $n \times n$ матриц с действительными (комплексными) элементами обозначается как M_n. Оно образует *кольцо* $(M_n, +, 0)$, где + и 0_n определяются как указано выше, а $((a_{ij})) \cdot ((b_{ij})) = \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) \right)$. Оно является также n^2-мерным векторным пространством над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$). Матрица $A = ((a_{ij})) \in M_n$ называется *симметричной*, если $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, т.е., если $A = A^T$. Специальным случаем типы квадратных $n \times n$ матриц является *единичная матрица* $1_n = ((c_{ij}))$ с $c_{ii} = 1$ и $c_{ij} = 0$, $i \ne j$. *Унитарная матрица* $U = ((u_{ij}))$ есть квадратная матрица, определенная как $U^{-1} = U^*$, где U^{-1} – *обратная матрица* для U, т.е. $U \cdot U^{-1} = 1_n$. *Ортогональной матрицей* называется матрица $A \in M_{m,n}$, такая что $A^*A = 1_n$.

Если для матрицы $A \in M_n$ существует вектор x, такой что $Ax = \lambda x$ для некоторого скаляра λ, то λ называется *собственным значением* матрицы A, *соответствующим собственному вектору* x. Для комплексной матрицы $A \in M_{m,n}$, ее *сингулярные значения* $s_i(A)$ определяются как квадратные корни собственных значений матрицы A^*A, где A^* – сопряженная транспонированная матрица для A. Они являются неотрицательными действительными числами, причем $s_1(A) \ge s_2(A) \ge \ldots$.

Метрика нормы матрицы

Метрикой нормы матрицы называется **метрика нормы** на множестве $M_{m,n}$ всех действительных (комплексных) $m \times n$ матриц, определенная как

$$\| A - B \|,$$

где $\|\cdot\|$ – *норма матрицы*, т.е. такая функция $\|\cdot\|$: $M_{m,n} \to \mathbb{R}$, что для всех $A, B \in M_{m,n}$ и для любого скаляра k имеют место следующие свойства:

1) $\| A \| \geq 0$ с $\| A \| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0_{m,n}$;

2) $\| kA \| k \| \| A \|$;

3) $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$ (неравенство треугольника).

Все метрики нормы матрицы на $M_{m,n}$ эквивалентны. Норма матрицы $\|\cdot\|$ на множестве M_n всех действительных (комплексных) квадратных $n \times n$ матриц называется *субмультипликативной*, если она *совместима* с умножением матриц, т.е. $\| AB \| \leq \| A \| \cdot \| B \|$ для всех $A, B \in M_n$. Множество M_n с субмультипликативной нормой является *банаховой алгеброй*.

Простейшим примером метрики нормы матрицы является **хэммингова метрика** на $M_{m,n}$ (в общем случае на множестве $M_{m,n}(\mathbb{F})$ всех матриц $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{F}$), определенная как $\| A - B \|_H$, где $\| A \|_H$ – *норма Хэмминга* матрицы $A \in M_{m,n}$, т.е. число ненулевых элементов матрицы A.

Метрика естественной нормы

Метрика естественной нормы (или **индуцированная метрика нормы, подчиненная метрика нормы**) есть **метрика нормы** на множестве M_n всех действительных (комплексных) квадратных $n \times n$ матриц, определенная как

$$\| A - B \|_{\text{nat}},$$

где $\|\cdot\|_{\text{nat}}$ – *естественная норма* на M_n. *Естественная норма* $\|\cdot\|_{\text{nat}}$ на M_n, порожденная нормой вектора $\| x \|$^ $x \in \mathbb{R}_n$ ($x \in \mathbb{C}^n$), есть *субмультипликативная норма матрицы*, определенная как

$$\| A |_{\text{nat}} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| Ax \|.$$

Натуральную метрику нормы можно задать аналогичным образом на множестве $M_{m,n}$ всех $m \times n$ действительных (комплексных) матриц: если заданы нормы вектора $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ на $\mathbb{R}^m$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ на $\mathbb{R}^n$, *естественная норма* $\| A \|_{\text{nat}}$ матрицы $A \in M_{m,n}$, порожденная нормами $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, есть норма матрицы, определенная как $\| A \|_{\text{nat}} = \sup_{\| x \|_{\mathbb{R}^n = 1}} \| Ax \|_{\mathbb{R}^m}$.

Метрика p-нормы матрицы

Метрика p-нормы матрицы называется **натуральная метрика нормы** на M_n, определенная как

$$\| A - B \|_{\text{nat}}^p,$$

где $\|\cdot\|_{\text{nat}}^p$ – *p-норма матрицы*, т.е. *естественная норма*, порожденная *l_p-нормой* вектора, $1 \leq p \leq \infty$:

$$\| A \|_{\text{nat}}^p = \max_{\|x\|_p = 1} \| Ax \|_p,$$

где

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{1/p}.$$

Максимальной абсолютной метрикой столбцов (точнее, **максимальной метрикой нормы абсолютных сумм по столбцам**) является **метрика 1-нормы матрицы** $\| A-B\|_{\text{nat}}^{1}$ на M_n. *1-Норма матрицы* $\|\cdot\|_{\text{nat}}^{1}$, порожденная l_1*-нормой* вектора, называется также *максимальной нормой абсолютных сумм по столбцам*. Для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_n$ ее можно записать как

$$\| A\|_{\text{nat}}^{1} = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Максимальной абсолютной метрикой строк (точнее, **максимальной метрикой нормы абсолютных сумм по строкам**) называется **метрика ∞-нормы матрицы** $\| A-B\|_{\text{nat}}^{\infty}$ на M_n. *∞-Норма матрицы* $\|\cdot\|_{\text{nat}}^{\infty}$, порожденная l_∞*-нормой* вектора, называется также *максимальной нормой абсолютных сумм по строкам*. Для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_n$ ее можно записать как

$$\| A\|_{\text{nat}}^{\infty} = \max_{1\le j\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Метрика спектральной нормы – это **метрика 2-нормы матрицы** $\| A-B\|_{\text{nat}}^{2}$ на M_n. Для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_n$ ее можно записать как

$$\| A \|_{\text{sp}} = (\text{максимальное собственное значение } A^*A)^{1/2},$$

где матрица $A^* = ((\overline{a}_{ij})) \in M_n$ является сопряженной транспонированной матрицей матрицы A (см. **Метрика нормы Ки Фана**, гл. 14).

Метрика нормы Фробениуса

Метрика нормы Фробениуса есть **метрика нормы матрицы** на $M_{m,n}$, определенная как

$$\| A - B \|_{\text{Fr}},$$

где $\| \cdot \|_{\text{Fr}}$ – *норма Фробениуса*. Для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_{m,n}$ она определяется как

$$\| A\|_{\text{Fr}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Она равна также квадратному корню из следа матрицы A^*A, где матрица $A^* = ((\overline{a}_{ji}))$ является сопряженной транспонированной матрицей для матрицы A или, эквивалентно, квадратному корню из суммы *собственных значений* λ_i матрицы A^*A: $\| A\|_{\text{Fr}} = \sqrt{Tr(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \lambda_i}$ (см. **Метрика нормы Шатена**, гл. 13). Эта норма порождена *скалярным произведением* на пространстве $M_{m,n}$, но не является *субмультипликативной* для $m = n$.

Метрика (*c, p*)-нормы

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \le \min\{m, n\}$, $c \in \mathbb{R}^k$, $c_1 \ge c_2 \ge \cdots \ge c_k > 0$ и $1 \le p < \infty$. **Метрика (*c, p*)-нормы** – это **метрика нормы матрицы** на $M_{m,n}$, определенная как

$$\| A-B\|_{(c,p)}^{k},$$

где $\|\cdot\|^k_{(c,p)}$ (c, p)-*норма* на $M_{m,n}$. Для матрицы $A \in M_{m,n}$ она определяется как

$$\| A \|^k_{(c,p)} = \left(\sum_{i=1}^{k} c_i s_i^p(A) \right)^{1/p},$$

где $s_1(A) \geq s_2(A) \geq \cdots \geq s_k(A)$ – первые k *сингулярных значений* матрицы A. Если $p = 1$, то мы получаем *c-норму*. Если, более того, $c_1 = \cdots = c_k = 1$, то имеем *k-норму Ки Фана*.

Метрика нормы Ки Фана

Для $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min\{m, n\}$ **метрикой нормы Ки Фана** является **метрика нормы матрицы** на $M_{m,n}$, определенная как

$$\| A - B \|^k_{\mathrm{KF}},$$

где $\|\cdot\|^k_{\mathrm{KF}}$ – *k-норма Ки Фана* на $M_{m,n}$. Для матрицы $A \in M_{m,n}$ она определяется как сумма ее первых k *сингулярных значений*:

$$\| A \|^k_{\mathrm{KF}} = \sum_{i=1}^{k} s_i(A).$$

Для $k = 1$ мы получаем *спектральную норму*. Для $k = \min\{m, n\}$ имеем *следовую норму*.

Метрика нормы Шатена

Если дано $1 \leq p < \infty$, то **метрика нормы Шатена** есть **метрика нормы матрицы** на $M_{m,n}$, определенная как

$$\| A - B \|^p_{\mathrm{Sch}},$$

где $\|\cdot\|^p_{\mathrm{Sch}}$ – *p-норма Шатена* на $M_{m,n}$. Для матрицы $A \in M_{m,n}$ она определяется как корень p-й степени из суммы p-х степеней всех ее *сингулярных* значений:

$$\| A \|^p_{\mathrm{Sch}} = \left(\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} s_i^p(A) \right)^{1/p}.$$

Для $p = 2$ мы получаем *норму Фробениуса*, а для $p = 1$ – *следовую норму*.

Метрика следовой нормы

Метрикой следовой нормы называется **метрика нормы матрицы** на $M_{m,n}$, определенная как сумма всех ее *сингулярных значений*:

$$\| A - B \|_{\mathrm{tr}},$$

где $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}}$ – *следовая норма* на $M_{m,n}$. Для матрицы $A \in M_{m,n}$ она определяется как сумма всех ее *сингулярных значений*:

$$\| A \|_{\mathrm{tr}} = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} s_i(A).$$

Метрика Розенблюма–Цфасмана

Пусть $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$ – множество всех $m \times n$ матриц с элементами из конечного поля $\mathbb{F}_q$. *Норма Розенблюма–Цфасмана* $\| \cdot \|_{RT}$ на $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$ определяется следующим образом: если $m = 1$ и $a = (\xi_1, \xi_2,\dots, \xi_n) \in M_{1,n}(\mathbb{F}_q)$, то $\| 0_{1,n} \|_{RT} = 0$ и $\| a \|_{RT} = \max\{ i|\xi_i \neq 0\}$ для $a \neq 0_{1,n}$; если $A = (a_1,\dots, a_m)^T \in M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$, $a_j \in M_{1,n}(\mathbb{F}_q)$, $1 \le j \le m$, то $\| A \|_{RT} = \sum_{j=1}^{m} \| a_j \|_{RT}$.

Метрикой Розенблюма–Цфасмана ([RoTs96]) называется **метрика нормы матрицы** (на самом деле **ультраметрика**) на $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$, определенная как

$$\| A - B \|_{RT}.$$

Угловое расстояние между подпространствами

Рассмотрим *грассманово пространство* $G(m, n)$ всех n-мерных подпространств евклидова пространства $\mathbb{E}^m$; оно является компактным *римановым многообразием* размерности $n(m–n)$.

Если имеются два подпространства A, $B \in G(m, n)$, то *главные углы* $\frac{\pi}{2} \ge \theta_1 \ge \cdots \ge \theta_n \ge 0$ между ними определяются (для $k = 1,\dots, n$) индуктивно как

$$\cos\theta_k = \max_{x\in A}\max_{y\in B} x^T y = (x^k)^T y^k,$$

если выполняются условия $\| x \|_2 = \| y \|_2 = 1$, $x^T x^i = 0$, $y^T y^i = 0$ для $1 \le i \le k - 1$, где $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма. Главные углы могут задаваться также через ортонормированные матрицы Q_A и Q_B, на которые натянуты подпространства A и B соответственно: именно n упорядоченных *сингулярных значений* матрицы $Q_A Q_B \in M_n$ могут быть заданы как $\cos\theta_1,\dots, \cos\theta_n$.

Геодезическое расстояние между подпространствами A и B определяется (по Вонгу, 1967) как

$$\sqrt{2\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2}.$$

Расстояние Мартина между подпространствами A и B задается как

$$\sqrt{\ln\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\cos^2\theta_i}}.$$

Если подпространства представляют авторегрессивные модели, то расстояние Мартина может выражаться посредством кепстра автокорреляционной функции этих моделей (см. **Кепстральное расстояние Мартина**, гл. 21).

Расстояние Азимова между подпространствами A и B задается как

$$\theta_1.$$

Оно может быть выражено также через **финслерову метрику** на многообразии $G(m, n)$.

Расстояние пропуска между подпространствами A и B определяется как

$$\sin\theta_1.$$

Оно может выражаться также в терминах *ортогональных операторов проектирования* как l_2-*норма* разности операторов проектирования на A и B соответственно. Многие вариации этого расстояния применяются в теории управления (см. **Метрика пропуска**, гл. 18).

Расстояние Фробениуса между подпространствами A и B определяется как

$$\sqrt{2\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \theta_i}.$$

Оно может быть выражено также в терминах *ортогональных операторов проектирования* как *норма Фробениуса* разности операторов проектирования на A и B соответственно. Аналогичное расстояние $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \theta_i}$ называется **хордальным расстоянием**.

Полуметрики на сходствах

Следующие две полуметрики определяются для любых двух *сходств* d_1 и d_2 на данном конечном пространстве X (более того, для любых двух действительных симметричных матриц).

Полуметрика Лермана (см. **расстояние Кендалла** на перестановках, гл. 11) определяется как

$$\frac{|\{(\{x,y\},\{u,v\}):\ (d_1(x,y)-d_1(u,v))\,(d_2(x,y)-d_2(u,v))<0\}|}{\binom{|X|+1}{2}^2},$$

где $(\{x, y\}, \{u, v\})$ – любая пара неупорядоченных пар $\{x, y\}$, $\{u, v\}$ элементов x, y, u, v из X.

Полуметрика Кауфмана определяется как

$$\frac{|\{(\{x,y\},\{u,v\}):\ (d_1(x,y)-d_1(u,v))\,)d_2(x,y)-d_2(u,v))<0\}|}{|\{(\{x,y\},\{u,v\}):\ (d_1(x,y)-d_1(u,v))\,(d_2(x,y)-d_2(u,v))\neq 0\}|}.$$

Глава 13

Расстояния в функциональном анализе

Функциональный анализ является областью математики, которая занимается изучением функциональных пространств. Такое использование слова *функциональный* происходит от вариационного исчисления, где рассматриваются функции, аргументом которых является функция. На современном этапе предметом функционального анализа считается изучение полных *нормированных векторных пространств*, т.е. **банаховых пространств.** Для любого действительного числа примером банахова пространства является **L_p-пространство** всех измеримых по Лебегу функций, p-я степень абсолютного значения которых имеет конечный интеграл. **Гильбертово пространство** является банаховым пространством, в котором норма получена из *скалярного произведения.* Помимо этого, в функциональном анализе исследуются *непрерывные линейные операторы,* определяемые на банаховых и гильбертовых пространствах.

13.1. МЕТРИКИ НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – *открытый интервал* (т.е. непустое связное открытое множество) в $\mathbb{R}$. Действительная функция $f : I \to \mathbb{R}$ называется *действительно аналитической* на I, если она разложима в *ряд Тейлора в открытой окрестности* U_{x_0} каждой точки $x_0 \in I$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ для любого $x \in U_{x_0}$. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – *область* (т.е. *выпуклое открытое множество*) в $\mathbb{C}$. Комплексная функция $f : I \to \mathbb{C}$ называется *комплексно аналитической* (или просто *аналитической*) на D, если она разложима в *ряд Тейлора* в *открытой окрестности* каждой точки $z_0 \in D$. Комплексная функция f является аналитической на D тогда и только тогда, когда она *голоморфна* на D, т.е. обладает комплексной производной $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ в каждой точке $z_0 \in D$.

Интегральная метрика

Интегральной метрикой называется **L_1-метрика** на множестве $C_{[a,\, b]}$ всех непрерывных действительных (комплексных) функций на данном отрезке $[a,\ b]$, определенная как

$$\int_a^b |\, f(x) - g(x)\,|\, dx.$$

Соответствующее метрическое пространство сокращенно записывается как $C^1_{[a,b]}$ и является банаховым пространством.

В общем случае для любого **компактного** (или *счетно компактного*) топологического пространства X интегральную метрику можно задать на множестве всех непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ как $\int_X |f(x) - g(x)| dx$.

Равномерная метрика

Равномерная метрика (или **sup-метрика**) есть L_∞**-метрика** на множестве $C_{[a, b]}$ всех действительных (комплексных) непрерывных функций на данном отрезке $[a, b]$, определенная как

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Соответствующее метрическое пространство сокращенно записывается как $C^\infty_{[a,b]}$ и является банаховым пространством.

Обобщением $C^\infty_{[a,b]}$ является *пространство непрерывных функций* $C(X)$, т.е. метрическое пространство на множестве всех непрерывных (в общем случае, ограниченных) функций $f : X \to \mathbb{C}$ топологического пространства X с L_∞-метрикой $\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.

Для случая метрического пространства $C(X, Y)$ непрерывных (в общем случае ограниченных) функций $f : X \to Y$ из одного **метрического компакта** (X, d_X) в другой (X, d_Y) sup-метрика между двумя функциями $f, g \in C(X, Y)$ определяется как $\sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$. Метрическое пространство $C^\infty_{[a,b]}$ и метрическое пространство $C^1_{[a,b]}$ являются важнейшими случаями метрического пространства $C^p_{[a,b]}$, $1 \le p \le \infty$ на множестве $C_{[a, b]}$ с L_p-метрикой $\left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$. Пространство $C^p_{[a,b]}$ является примером *L_p-пространства.*

Расстояние собаковода

Для метрического пространства (X, d) **расстоянием собаковода** называется метрика на множестве всех функций $f : [0, 1] \to X$, определенная как

$$\inf_{\sigma} \sup_{t \in [0,1]} d(f(t), g(\sigma(t)),$$

где σ: $[0, 1] \to [0, 1]$ есть непрерывная монотонно возрастающая функция, такая что $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$. Данная метрика является частным случаем **метрики Фреше.** Применяется для измерения расстояний между кривыми.

Метрика Бора

Пусть $\mathbb{R}$ – метрическое пространство с метрикой ρ. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *почти периодической,* если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $l = l(\varepsilon) > 0$, такое что каждый интервал $[t_0, t_0 + l(\varepsilon)]$ содержит по меньшей мере одно число τ, для которого $\rho(f(t), f(t + \tau)) < \varepsilon$, $-\infty < t < +\infty$.

Метрикой Бора называется **метрика нормы** $\| f - g \|$ на множестве AP всех почти периодических функций, заданная нормой

$$\| f \| = \sup_{-\infty < t < +\infty} |f(t)|.$$

Тем самым пространство AP превращается в банахово пространство. Некоторые обобщения почти периодических функций были получены с использованием других норм; см. **Расстояние Степанова, Расстояние Вэйля, Расстояние Бесиковича** и **Метрику Бохнера.**

Расстояние Степанова

Расстояние Степанова – расстояние на множестве всех измеримых функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с суммируемой p-й степенью на каждом ограниченном интеграле, определенное как

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f(x)-g(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Расстояние Вейля – расстояние на том же множестве, заданное как

$$\lim_{l\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f(x)-g(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Этим расстояниям соответствуют *обобщенные почти периодические функции Степанова и Вэйля.*

Расстояние Бесиковича

Расстоянием Бесиковича называется расстояние на множестве всех измеримых функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с суммируемой p-й степенью на каждом ограниченном интеграле, определенное как

$$\left(\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x)-g(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Этим расстояниям соответствуют *обобщенные почти периодические функции Бесиковича.*

• Метрика Бохнера

Для пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ банахова пространства $(V, \|\cdot\|_V)$ и $1 \le p \le \infty$ *пространством Бохнера* (или *пространством Лебега–Бохнера*) называется множество всех измеримых функций $f: \Omega \to V$, таких что $\| f \|_{L^p(\Omega,V)} < \infty$. Здесь *норма Бохнера* $| f \|_{L^p(\Omega,V)}$ определяется как $\left(\int_\Omega \| f(\omega)\|_V^p\, d\mu(\omega)\right)^{1/p}$ для $1 \le p < \infty$ и как $ess_{\omega\in\Omega} \| f(\omega)\|_V$. для $p = \infty$.

***p*-метрика Бергмана**

При данном $1 \le p \le \infty$ пусть $L_p(\Delta)$ – L_p-пространство лебеговых измеримых функций f на *единичном диске* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ с $\| f \|_p = \left(\int_\Delta |f(z)|^p\, \mu(dz)\right)^{1/p} < \infty$.

Пространством Бергмана $L_p^a(\Delta)$ называется подпространство пространства $L_p(\Delta)$, состоящее из аналитических функций, и ***p*-метрикой Бергмана** называется

***L_p*-метрика** $L_p^a(\Delta)$ (см. **Метрика Бергмана,** гл. 7). Любое пространство Бергмана является банаховым пространством.

Метрика Блоха

Пространство Блоха B на *единичном диске* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ есть множество всех аналитических функций f на Δ, таких что $\| f \|_B = \sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty$. При использовании полной *полунормы* $\| \cdot \|_B$ норма на B задается как

$$\| f \| = |f(0)| + \| f \|_B .$$

Метрикой Блоха называется **метрика нормы** $\| f - g \|$ на B; она превращает B в банахово пространство.

Метрика Бесова

Если $1 < p < \infty$, то *пространство Бесова* B_p на *единичном диске* Δ] $\{z \in \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ есть множество аналитических функций f в Δ, таких что $\| f \|_{B_p} = \left(\int_\Delta (1-|z|^2)^p |f'(z)|^p \, d\lambda(z) \right)^{1/p}$, где $d\lambda(z) = \frac{\mu(dz)}{(1-|z|^2)^2}$ – инвариантная мера Мёбиуса на Δ. При использовании полной *полунормы* $\| \cdot \|_{B_p}$ норма B_p на задается как

$$\| f \| = |f(0) + \| f \|_{B_p} .$$

Метрика Бесова – метрика нормы $\| f - g \|$ на B_p. Она превращает B_p в банахово пространство.

Множество B_2 является классическим *пространством Дирихле* аналитических на функций Δ с квадратично интегрируемой производной, снабженнsм **метрикой Дирихле.** *Пространство Блоха B* можно рассматривать как B_∞.

Метрика Харди

Если $1 \le p < \infty$, то *пространство* Харди $H^p(\Delta)$ есть класс функций, аналитических на *единичном диске* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих следующим условиям роста для *нормы Харди* $\| \cdot \|_{H^p}$:

$$\| f \|_{H^p(\Delta)} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$

Метрика Харди – метрика нормы $\| f - g \|_{H^p(\Delta)}$ на $H^p(\Delta)$. Она превращает $H^p(\Delta)$ в банахово пространство.

В комплексном анализе пространства Харди являются аналогами L_p-пространств функционального анализа. Такие пространства используются как в самом математическом анализе, так и в теории рассеяния и теории управления (см. гл. 18).

Метрика части

Метрикой части называется метрика на *области D* в $\mathbb{R}^2$, заданная как

$$\sup_{f\in H^+} \left| \ln\left(\frac{f(x)}{f(y)} \right) \right|$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$, где H^+ – множество всех положительных *гармонических функций* на области D.

Дважды дифференцируемая действительная функция $f: D \to \mathbb{R}$ называется *гармонической* на D, если ее *лапласиан* $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ обращается в нуль на D.

Метрика Орлича

Пусть $M(u)$ – четная выпуклая функция действительной переменной, которая возрастает для положительного u и $\lim\limits_{u \to 0} u^{-1}M(u) = \lim\limits_{u \to \infty} u(M(u))^{-1} = 0$. В этом случае функция $p(v) = M'(v)$ не убывает на $[0, \infty)$, $p(0) = \lim\limits_{v \to 0} p(v) = 0$ и $p(v) > 0$ при $v > 0$. Если задать $M(u) = \int_0^{|u|} p(v)dv$ и $N(u) = \int_0^{|u|} p^{-1}(v)dv$, то получаем пару $(M(u), N(u))$ *дополнительных функций.*

Пусть $(M(u), N(u))$ *будет* пара дополнительных сопряженных функций и пусть G – ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$. *Пространство Орлича* $L_M^*(G)$ есть множество измеримых по Лебегу функций f на G, удовлетворяющих следующему условию возрастания для *нормы Орлича* $\|f\|_M$:

$$\|f\|_M = \sup\left\{\int_G f(t)g(t)dt : \int_G N(g(t))dt \le 1\right\} < \infty.$$

Метрика Орлича – метрика нормы $\|f - g\|_M$ на $L_M^*(G)$. Она превращает $L_M^*(G)$. в банахово пространство ([Orli32]).

Если $M(u) = u^p$, $1 < p < \infty$, то $L_M^*(G)$. совпадает с пространством $L_p(G)$ и L_p-*норма* $\|f\|_p$ совпадает с $\|f\|_M$ с точностью до скалярного множителя. Норма Орлича эквивалентна *норме Люксембурга* $\|f\|_M \le \|f\|_M \le 2\|f\|_{(M)}$.

Метрика Орлича–Лоренца

Пусть $w : (0, \infty) \to (0, \infty)$ – невозрастающая функция. Пусть $M : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – неубывающая и выпуклая функция с $M(0) = 0$ и пусть G – ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$.

Пространством Орлича–Лоренца $L_{w,M}(G)$ называется множество всех измеримых по Лебегу функций f на G, удовлетворяющих следующему условию возрастания *для нормы Орлича–Лоренца* $\|f\|_{w,M}$:

$$\|f\|_{w,M} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_0^\infty w(x)M\left(\frac{f^*(x)}{\lambda}\right)dx \le 1\right\} < \infty,$$

где $f^*(x) = \sup\{t : \mu(|f| \ge t) \ge x\}$ – *невозрастающая перестановка* f.

Метрика Орлича–Лоренца – метрика нормы на $\|f - g\|_{w,M}$ на $L_{w,M}(G)$. Она превращает $L_{w,M}(G)$ в банахово пространство.

Пространство Орлича–Лоренца является обобщением *пространства Орлича* $L_M^*(G)$ (см. **Метрика Орлича**) и *пространства Лоренца* $L_{w,M}(G)$, $1 \le q < \infty$ всех измеримых по Лебегу функций f на G, удовлетворяющих следующему условию возрастания для *нормы Лоренца* $\| f \|_{w,\,q}$:

$$\| f \|_{w,q} = \left(\int_0^\infty w(x)(f^*(x))^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Метрика Гельдера

Пусть $L^\alpha(G)$ – множество всех ограниченных непрерывных функций f, заданных на подмножестве G множества $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих *условию Гельдера* на G. Функция f удовлетворяет *условию Гельдера* в точке $y \in G$ с *индексом* (или *порядком*) α $(0 < \alpha \le 1)$ и с коэффициентом $A(y)$, если $| f(x) - f(y) | \le A(y) \, | x - y |^\alpha$ для всех $x \in G$, достаточно близких к y. Если $A = \sup_{y \in G}(A(y)) < \infty$, то условие Гельдера называется *равномерным* на G и A называется *коэффициентом Гельдера* для G. Величина $| f |_\alpha = \sup_{x,y \in G} \frac{| f(x) - f(y) |}{| x - y |^\alpha}$, $0 \le \alpha \le 1$ называется α-*полунормой Гельдера* для f и *норма Гельдера* для f определяется как

$$\| f \|_{L^\alpha(G)} = \sup_{x \in G} | f(x) + | f |_\alpha .$$

Метрика Гельдера – метрика нормы $\| f - g \|_{L^\alpha(G)}$ на $L^\alpha(G)$. Она превращает $L^\alpha(G)$ в банахово пространство.

Метрика Соболева

Пространство Соболева $W^{k,\,p}$ есть подпространство L_p-пространства, такие что f и ее производные до порядка k обладают конечной L_p-нормой. Формально, имея подмножество G множества $\mathbb{R}^n$, определим

$$W^{k,p} = W^{k,p}(G) = \{ f \in L_p(G) : f^{(i)} \in L_p(G),\ 1 \le i \le k \},$$

где $f^{(i)} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = i$, и производные берутся в слабом смысле. *Норма Соболева* на $W^{k,\,p}$ определяется как

$$\| f \|_{k,p} = \sum_{i=0}^{k} \| f^{(i)} \|_p .$$

При этом достаточно использовать только первое и последнее числа последовательности, т.е. норма, определенная как $\| f \|_{k,p} = \| f \|_p + \| f^{(k)} \|_p$, эквивалентна вышеприведенной норме. Для $p = \infty$ норма Соболева равна *существенному супремуму* для $| f |$: $\| f \|_{k,\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in G} | f(x) |$, т.е. является инфимумом всех чисел $a \in \mathbb{R}$, для которых неравенство $| f(x) | > a$ выполняется на множестве меры нуль.

Метрика Соболева есть метрика нормы $\| f - g \|_{k,\,p}$ на $W^{k,\,p}$; она превращает $W^{k,\,p}$ в банахово пространство.

Пространство Соболева $W^{k,\,2}$ обозначается как H^k. Оно является гильбертовым пространством для *скалярного произведения* $\langle f, g \rangle_k = \sum_{i=1}^{k} \langle f^{(i)}, g^{(i)} \rangle_{L_2} =$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_G f^{(i)} \overline{g}^{(i)} \mu(d\omega).$$

Пространства Соболева – современные аналоги пространства C^1 (функций с непрерывными производными) для решения *дифференциальных уравнений в частных производных.*

• Метрики пространства переменной экспоненты

Пусть G – непустое открытое подмножество множества $\mathbb{R}^n$ и пусть $p : G \to \to [1, \infty)$ – измеримая ограниченная функция, называемая *переменной экспонентой. Пространство Лебега переменной экспоненты* $L_{p(\cdot)}(G)$ есть множество всех измеримых функций $f: G \to \mathbb{R}$, для которых *модуляр* $\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_G |f(x)|^{p(x)}\,dx$ конечен. *Норма Люксембурга* на этом пространстве определяется как

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \le 1\}.$$

Метрика лебегова пространства переменной экспоненты есть метрика нормы $\|f - g\|_{p(\cdot)}$ на $L_{p(\cdot)}(G)$.

Пространство Соболева переменной экспоненты $W^{1,p(\cdot)}(G)$ есть подпространство $L_{p(\cdot)}(G)$, состоящее из функций f, распределительный градиент которых существует почти всюду и удовлетворяет условию $|\nabla f| \in L_{p(\cdot)}(G)$. Норма

$$\|f\|_{1,p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)} + \|\nabla f\|_{p(\cdot)}$$

превращает $W^{1,p(\cdot)}(G)$ в банахово пространство. **Метрика пространства Соболева переменной экспоненты** есть метрикой нормы $\|f - p\|_{1,p(\cdot)}$ на $W^{1,p(\cdot)}$.

Метрика Шварца

Пространство Шварца (или *пространство быстро убывающих функций*) $S(\mathbb{R}^n)$ есть класс *функций Шварца*, т.е. бесконечно дифференцируемых функций $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, которые убывают на бесконечности, так же как все их производные, быстрее, чем любая обратная степень x. Точнее, f является функцией Шварца, если имеет место следующее условие возрастания:

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| < \infty$$

для любых неотрицательных целочисленных векторов α и β. Семейство *полунорм* $\|\cdot\|_{\alpha\beta}$ определяет локально выпуклую топологию пространства $S(\mathbb{R}^n)$, которое является метризуемым и полным.

Метрика Шварца – метрика на $S(\mathbb{R}^n)$, которая может быть получена с помощью данной топологии (см. **Счетно нормированное пространство,** гл. 2).

Соответствующим метрическим пространством на $S(\mathbb{R}^n)$ является *пространство Фреше* в смысле функционального анализа, т.е. локально выпуклое *F-пространство.*

Квазирасстояние Брегмана

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое множество с непустой внутренностью G^0 и пусть f – *функция Брегмана с зоной G.*

Квазирасстояние Брегмана $D_f : G \times G^0 \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ определяется как

$$D_f(x,y) = f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle,$$

где $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. $D_f(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, $D_f(x, y) + D_f(y, z) - D_f(x, z) = \langle \nabla f(z) - \nabla f(y), x - y\rangle$ но в общем случае D_f не удовлетворяет неравенству треугольника и не является симметричным.

Действительная функция f, эффективная область которой содержит G, называется *функцией Брегмана с зоной* G, если выполняются следующие условия:

1) f непрерывно дифференцируема на G;

2) f строго выпукла и непрерывна на G;

3) для всех $\delta \in \mathbb{R}$ неполные *множества частично уровня* $\Gamma(x, \delta) = \{y \in G^0 : D_f(x, y) \le \delta\}$ являются ограниченными для всех $x \in G$;

4) если $\{y_n\}_n \subset G^0$ сходится к y^*, то $D_f(y^*, y_n)$ сходится к 0;

5) если $\{x_n\}_n \subset G$ и $\{y_n\}_n \subset G^0$ – такие последовательности, что $\{y_n\}_n$ ограничена, $\lim\limits_{n \to y_n} = y^*$ и $\lim\limits_{n \to \infty} D_f(x_n, y_n) = 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = y^*$.

Если $G = \mathbb{R}^n$, то достаточное условие для строго выпуклой функции быть функцией Брегмана принимает вид: $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = \infty$.

13.2. МЕТРИКИ НА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Линейным оператором называется функция $T : V \to W$ между двумя векторными пространствами V, W над полем $\mathbb{F}$, которая совместима с их линейными структурами, т.е. для любых $x, y \in V$ и любого скаляра $k \in \mathbb{F}$ имеет место следующие свойства: $T(x + y) = T(x) + T(y)$ и $T(kx) = kT(x)$.

Метрика операторной нормы

Рассмотрим множество всех линейных операторов из *нормированного пространства* $(V, \|\cdot\|_V)$ на нормированное пространство $(W, \|\cdot\|_W)$. Операторная норма $\|T\|$ *линейного оператора* $T : V \to W$ определяется как наибольшее значение, на которое T растягивает элементы из V, т.е.

$$\|T\| = \sup_{\|v\|_V \neq 0} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\|v\|_V = 1} \|T(v)\|_W = \sup_{\|v\|_V \le 0} \|T(v)\|_W .$$

Линейный оператор $T : V \to W$ из нормированного пространства V в нормированное пространство W называется *ограниченным,* если операторная норма конечна. Для нормированных пространств линейный оператор является ограниченным тогда и только тогда, когда он *непрерывен.*

Метрикой операторной нормы называется метрика нормы на множестве $B(V, W)$ всех ограниченных линейных операторов из V в W, которая определяется как

$$\|T - P\|.$$

Пространство $(B(V, W))\ \|\cdot\|)$ называется пространством *ограниченных линейных операторов.* Данное метрическое пространство является **полным,** если таковым является пространство W. Если пространство $V = W$ полное, то пространство $B(V, V)$ есть *банахова алгебра*, поскольку операторная норма является *субмультипликативной нормой.*

Линейный оператор $T : V \to W$ из банахова пространства V в другое банахово пространство W называется *компактным,* если отображение любого ограниченного подмножества множества V – относительно компактное подмножество множества W. Любой компактный оператор является ограниченным (и, следовательно, непрерывным). Пространство $(K(V, W), \|\cdot\|)$ на множестве $K(V, W)$ всех компактных операторов из V в W с операторной нормой $\|\cdot\|$ называется *пространством компактных операторов.*

Метрика ядерной нормы

Пусть $B(V, W)$ – пространство всех ограниченных линейных операторов, отображающих банахово пространство $(V, \|\cdot\|_V)$ в другое банахово пространство $(W, \|\cdot\|_W)$. Обозначим *банахово двойственное пространство для* V как V' и значение функционала $x' \in V'$ в точке $x \in V$ как $\langle x, x'\rangle$. Линейный оператор $T \in B(V, W)$ называется *ядерным оператором,* если его можно представить в виде $x \mapsto T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i'\rangle y_i$, где $\{x_i'\}_i$ и $\{y_i\}_i$ являются последовательностями в V' и W соответственно, такими что $\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i' \|_{V'} \| y_i \|_W < \infty$. Данное представление называется *ядерным* и может рассматриваться как представление T в виде суммы операторов ранга 1 (т.е. с одномерным множеством значений). *Ядерная норма* оператора T определяется как

$$\| T \|_{\text{пис}} = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i' \|_{V'} \| y_i \|_W,$$

где инфимум берется по всем возможным ядерным представлениям T.

Метрика ядерной нормы есть метрика нормы $\| T - P \|_{\text{пис}}$ на множестве $N(V, W)$ всех ядерных операторов, отображающих V в W. Пространство $(N(V, W), \|\cdot\|_{\text{пис}})$ называется *пространством ядерных операторов* и является банаховым пространством.

Ядерное пространство определяется как **локально выпуклое** пространство, для которого все непрерывные линейные функции на произвольном банаховом пространстве – ядерные операторы. Ядерное пространство строится как проективный предел гильбертовых пространств H_α с таким свойством, что для каждого $\alpha \in I$ можно найти $\beta \in I$, такое что $H_\beta \subset H_\alpha$ и оператор вложения $H_\beta \ni x \to x \in H_\alpha$ является *оператором Гильберта-Шмидта. Нормированное пространство* является ядерным тогда и только тогда, когда оно конечномерно.

Метрика конечной ядерной нормы

Пусть $F(V, W)$ – пространство всех *линейных операторов конечного ранга* (т.е. с конечномерным множеством значений), отображающих банахово пространство $(V, \|\cdot\|_V)$ в другое банахово пространство $(W, \|\cdot\|_W)$. Линейный оператор $T \in F(V, W)$ можно представить в виде $x \mapsto T(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i'\rangle y_i$, где $\{x_i'\}_i$ и $\{y_i\}_i$ являются последовательностями из V' (*банахова двойственного* пространства для V) и W соответственно, а $\langle x, x'\rangle$ – значением функционала $x' \in V'$ на векторе $x \in V$.

Конечная ядерная норма T определяется как

$$\| T \|_{f\ \text{пис}} = \inf \sum_{i=1}^{n} \| x_i' \|_{V'} \| y_i \|_W,$$

где инфимум берется по всем возможным конечным представлениям T.

Метрика конечной ядерной нормы есть метрика нормы $\| T - P \|_{f\,\text{пис}}$ на множестве $F(V, W)$. Пространство $F(V, W)$, $\| \cdot \|_{f\,\text{пис}})$ называется *пространством ядерных операторов конечного ранга*. Оно является плотным линейным *подпространством пространства ядерных операторов* $N(V, W)$.

Метрика нормы Гильберта–Шмидта

Рассмотрим множество всех линейных операторов из гильбертова пространства $\left(H_1, \| \cdot \|_{H_1}\right)$ в гильбертово пространство $\left(H_2, \| \cdot \|_{H_2}\right)$. *Норма Гильберта–Шмидта* $\| T \|_{\text{HS}}$ линейного оператора $T : H_1 \to H_2$ задается как

$$\| T \|_{\text{HS}} = \left(\sum_{\alpha \in I} \| T(e_\alpha) \|_{H_2}^2 \right)^{1/2},$$

где $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ – ортогонормированный базис в H_1. Линейный оператор $T : H_1 \to H_2$ называется *оператором Гильберта–Шмидта*, если $\| T \|_{\text{HS}}^2 < \infty$.

Метрика нормы Гильберта–Шмидта есть метрика нормы $\| T - P \|_{\text{HS}}$ на множестве $S(H_1, H_2)$ всех операторов Гильберта–Шмидта из H_1 в H_2.

Для $H_1 = H_2 = H$ алгебра $S(H, H) = S(H)$ с нормой Гильберта–Шмидта является *банаховой алгеброй*. Она содержит как плотное подмножество операторы конечного ранга и принадлежит пространству $K(H)$ компактных операторов. *Скалярное произведение* $\langle , \rangle_{\text{HS}}$ на $S(H)$ определяется как и $\langle T, P \rangle_{\text{HS}} = \sum_{\alpha \in I} \langle T(e_\alpha), P(e_\alpha) \rangle$ и $\| T \|_{\text{HS}} = \langle T, T \rangle_{\text{HS}}^{1/2}$. Следовательно, $S(H)$ является гильбертовым пространством (независимо от выбора базиса $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$).

Метрика нормы операторов со следом

Для гильбертова пространства H *норма операторов со следом* для линейного оператора $T : H \to H$ задается как

$$\| T \|_{\text{tc}} = \sum_{\alpha \in I} \langle | T | (e_\alpha), e_\alpha \rangle,$$

где $| T |$ – *абсолютное значение* T *в банаховой алгебре* $B(X)$ всех ограниченных операторов из H в себя, а $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ – ортогонормированный базис в H. Оператор $T : H \to H$ называется *операторов со следом,* если $\| T \|_{\text{tc}} < \infty$. Любой такой оператор является произведением двух *операторов Гильберта–Шмидта.*

Метрика нормы операторов со следом – метрика нормы $\| T - P \|_{\text{tc}}$ на множестве $L(H)$ всех операторов со следом из H в себя. Множество $L(H)$ с нормой $\| \cdot \|_{\text{tc}}$ образует банахову алгебру, которая содержится в алгебре $K(H)$ (всех компактных операторов из H в себя), и содержит алгебру $S(H)$ (всех операторов Гильберта–Шмидта из H в себя).

Метрика нормы p-класса Шатена

Возьмем $1 \le p < \infty$. Для сепарабельного гильбертова пространства H *норма* *p-класса Шатена* компактного линейного оператора $T : H \to H$ определяется как

$$\| T \|_{\mathrm{Sch}}^{p} = \left(\sum_{n} | s_n |^p \right)^{1/p},$$

где $\{s_n\}_n$ – последовательность *сингулярных значений оператора T*. Компактный оператор $T : H \to H$ называется *оператором p-класса Шатена,* если $\| T \|_{\mathrm{Sch}}^{p} < \infty$.

Метрикой нормы p-класса Шатт∈ ена называется **метрика нормы** $\| T - P \|_{\mathrm{Sch}}^{p}$ на множестве $S_p(H)$ всех операторов p-класса Шатена из H на себя. Множество $S_p(H)$ с нормой $\| \cdot \|_{\mathrm{Sch}}^{p}$ образует банахово пространство. $S_1(H)$ является классом *операторов со следом* для H и $S_2(H)$ является классом *операторов Гильберта–Шмидта* для H (см. также **Метрика нормы Шатена**, гл. 12).

Непрерывное двойственное пространство

Пусть $(V, \| \cdot \|)$ – *нормированное векторное пространство.* Пусть V' – множество всех *непрерывных* линейных функционалов T из V в основное поле ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и пусть $\| \cdot \|'$ – *операторная норма* на V', определенная как

$$\| T \|' = \sup_{\|x\| \le 1} | T(x) |.$$

Пространство $(V', \| \cdot \|')$ является банаховым пространством, которое называется **непрерывным двойственным пространством** (или *банаховым двойственным пространством*) пространства $(V, \| \cdot \|)$.

Так, непрерывным двойственным пространством для метрического пространства $l_p^n(l_p^\infty)$ является $l_q^n(l_q^\infty)$ соответственно. Оба непрерывных двойственных пространства для банаховых пространств C (состоящего из всех сходящихся последовательностей с **l_∞-метрикой**) и C_0 (состоящего из всех последовательностей (с **l_∞-метрикой**), сходящихся к нулю) естественным образом отождествляются с l_1^∞.

Постоянная расстояния оператороной алгебры

Пусть $\mathcal{A}$ – операторная алгебра содержащаяся в $B(H)$ – множестве всех ограниченных операторов на гильбертовом пространстве H. Для любого оператора $T \in$ $\in B(H)$ пусть $\beta(T, A) = \sup\{\| P^{\perp}TP \|;\ P$ – проекция и $P^{\perp}\mathcal{A}P = (0)\}$. Пусть $\mathrm{dist}(T, \mathcal{A})$ есть *расстояние между оператором T* и *алгеброй* $\mathcal{A}$, т.е. наименьшая норма оператора $T - A$, где A пробегает $\mathcal{A}$. Наименьшая положительная постоянная C (если она существует) такая что для любого оператора $T \in B(H)$ выполняется неравенство

$$\mathrm{dist}(T, \mathcal{A}) \le C(T, \mathcal{A}),$$

называется **постоянной расстояния** для алгебры $\mathcal{A}$.

Глава 14

Расстояния в теории вероятностей

Пространством вероятностей называется *измеримое пространство* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где $\mathcal{A}$ есть множество всех измеримых подмножеств множества Ω, а P – мера на $\mathcal{A}$ с $P(\Omega) = 1$. Множество Ω называется *пространством выборок.* Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется *событием,* в частности, *элементарное событие* – это подмножество множества Ω, содержащее только один элемент; $P(a)$ называется *вероятностью* события a. Мера P на $\mathcal{A}$ называется *вероятностной мерой,* или *законом распределения* (*вероятностей*), или просто *распределением* (*вероятностей*).

Случайная величина X есть измеримая функция из пространства вероятностей $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ в измеримое пространство, называемое *пространством состояний* возможных значений переменной; обычно берутся действительные числа с *борелевой* α-*алгеброй,* так что $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Множество значений χ случайной величины X называется *несущим множеством* распределения P; элемент $x \in \chi$ называется *состоянием.*

Закон распределения можно единственным образом описать через *кумулятивную функцию распределения* (*CDF*, функцию распределения, кумулятивную *функцию плотности*) $F(x)$, которая показывает вероятность того, что случайная величина X принимает значение не больше, чем x: $F(x) = P(X \le x) = P(\omega \in \in \Omega: X(\omega) < x)$.

Таким образом, любая случайная величина X порождает такое *распределение вероятностей,* которым интервалу $[a, b]$ ставится в соответствие вероятность $P(a \le X \le b) = P(\omega \in \Omega: a \le X(\omega) \le b)$, т.е. вероятность, что величина X будет иметь значение в интервале $[a, b]$.

Распределение называется *дискретным,* если $F(x)$ состоит из последовательности конечных скачков при x_i; распределение называется *непрерывным,* если $F(x)$ непрерывна. Мы рассматриваем (как в большинстве приложений) только дискретные или *абсолютно непрерывные распределения*, т.е. функция распределения $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является *абсолютно непрерывной.* Это означает, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой последовательности попарно непересекающихся интервалов $[x_k, y_k]$, $1 \le k \le n$ неравенство $\sum_{1 \le k \le n} (y_k - x_k) < \delta$ влечет неравенство $\sum_{1 \le k \le n} |F(y_k) - F(x_k)| < \varepsilon$.

Закон распределения может быть также единственным образом определен через *плотность распределения вероятностей* (*PDF, функцию плотности, функцию вероятности*) $p(x)$ соответствующей случайной величины. Для абсолютно непрерывного распределения функция распределения является почти всюду дифференцируемой и функция плотности определяется как производная

$p(x) = F'(x)$ функции распределения; следовательно, $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$ и $\int_{a}^{b} p(t)dt = P(a \le X \le b)$. Для случая дискретного распределения функция плотности (плотности случайной величины X) определяется как ее значения $p(x_i) = P(X = x)$, так что $F(x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$. В противоположность этому каждое элементарное событие имеет в непрерывном случае вероятность ноль.

Случайная величина X применяется для "переноса" меры P на Ω на меру dF на $\mathbb{R}$. Соответствующее пространство вероятностей является техническим инструментом, применение которого обеспечивает существование случайных величин, а иногда используется и для их построения.

В теории вероятностей метрики между распределениями называются *простыми метриками,* а метрики между случайными величинами называются *сложными метриками* [Rach91]. Для простоты мы будем обычно рассматривать дискретный вариант метрик теории вероятностей, однако большинство из них определяются на любом измеримом пространстве. Для вероятностной метрики d условие $P(X = Y) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $d(X, Y) = 0$. Во многих случаях на пространстве состояний χ задается некоторое *базовое* расстояние и рассматриваемое расстояние является его лифтингом на пространство распределений.

В статистике многие из указанных ниже расстояний между распределениями P_1 и P_2 применяются как меры *степени согласия* между оцениваемым (P_2) и теоретическим (P_1) распределениями.

Далее по тексту символом $\mathbb{E}[X]$ обозначается *математическое ожидание* (или *среднее значение*) случайной величины X: в дискретном случае $\mathbb{E}[X] = \sum_{x} xp(x)$, а для непрерывного случая $\mathbb{E}[X] = \int xp(x)dx$. *Дисперсией* X называется величина $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X])^2]$. Используются также обозначения $p_X = p(x) = P(X = x)$, $F_X = F(x) = P(X \le x)$, $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.

14.1. РАССТОЯНИЯ НА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

Все расстояния в данном разделе определяются на множестве $\mathbf{Z}$ всех случайных величин с одним и тем же несущим множеством χ; здесь $X, Y \in Z$.

L_p-метрика между величинами

L_p-метрика между величинами есть метрика на $\mathbf{Z}$ с $\chi \subset \mathbb{R}$ и $\mathbb{E}[| Z |^p] < \infty$ для всех $Z \in \mathfrak{Z}$, определенная как

$$(\mathbb{E}[| X - Y |^p])^{1/p} = \left(\sum_{(x,y) \in \chi \times \chi} | x - y |^p \; p(x,y) \right)^{1/p}.$$

Для $p = 1$, 2 и ∞ она называется соответственно *инженерной метрикой, среднеквадратическим расстоянием* и *расстоянием существенного супремума между переменными.*

Индикаторная метрика

Индикаторная метрика – метрика на **Z**, определенная как

$$\mathbb{E}[1_{X \neq Y}] = \sum_{(x,y) \in \chi \times \chi} 1_{x \neq y} \, p(x,y) = \sum_{(x,y) \in \chi \times \chi,\ x \neq y} p(x,y).$$

(см. **Хэммингова метрика,** гл. 1).

К метрика Ки Фана

***K* метрика Ки Фана** есть метрика K на **Z,** определенная как

$$\inf\{\varepsilon > 0 : P(|X - Y| > \varepsilon) < \varepsilon\}.$$

Это является случаем $d(x, y) = |X - Y|$ **вероятностного расстояния.**

K^* метрика Ки Фана

K^* метрика Ки Фана есть метрика K^* на **Z**, определенная как

$$\mathbb{E}\left[\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|}\right] = \sum_{(x,y) \in \chi \times \chi} \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} p(x,y).$$

Вероятностное расстояние

Для метрического пространства (χ, d) **вероятностное расстояние** на **Z** определяется как

$$\inf\{\varepsilon : P(d(X,Y) > \varepsilon) < \varepsilon\}.$$

14.2. РАССТОЯНИЯ НА ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Все расстояния в данном разделе определяются на множестве $\mathcal{P}$ всех законов распределения таким образом, что соответствующие случайные величины имеют одинаковое множество значений χ; здесь $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$.

L_p-метрика между плотностями

L_p-метрика между плотностями есть метрика на $\mathcal{P}$ (для счетного χ), определенная для любог $p > 0$ как

$$\left(\sum_x |p_1(x) - p_2(x)|^p)^{\min(1,1/p)}\right).$$

Для $p = 1$ ее половина называется **метрикой полной вариации** (или *изменяемым расстоянием, расстоянием следа*). Точечная метрика $\sup_x |p_1(x) - p_2(x)|$ соответствует $p = \infty$.

Полуметрика Махаланобиса

Полуметрика Махаланобиса (или *квадратичное расстояние, квадратичная метрика*) есть полуметрикая на $\mathcal{P}$ (для $\chi \subset \mathbb{R}^n$), определяемая как

$$\sqrt{(\mathbb{E}_{P_1}[X] - \mathbb{E}_{P_2}[X])^T A^{-1} (\mathbb{E}_{P_1}[X] - \mathbb{E}_{P_2}[X])}$$

для данной положительно определенной матрицы A.

Инженерная полуметрика

Инженерной полуметрикой называется полуметрика на $\mathcal{P}$ (для $\chi \subset \mathbb{R}$), определенная как

$$|\mathbb{E}_{P_1}[X] - \mathbb{E}_{P_2}[X]| = \left| \sum_x x(p_1(x) - p_2(x)) \right|.$$

Метрика ограничения потери порядка *m*

Метрика ограничения потери порядка *m* есть метрикой на $\mathcal{P}$ (для $\chi \subset \mathbb{R}$), определенная как

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{x \geq t} \frac{(x-t)^m}{m!}(p_1(x) - p_2(x)).$$

Метрика Колмогорова–Смирнова

Метрикой Колмогорова–Смирнова (или *метрикой Колмогорова, равномерной метрикой*) является метрика на $\mathcal{P}$ (для $\chi \subset \mathbb{R}$), определенная как

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |P_1(X \leq x) - P_2(X \leq x)|.$$

Расстояние Куипера на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sup_{x \in \mathbb{R}}(P_1(X \leq x) - P_2(X \leq x)) + \sup_{x \in \mathbb{R}}(P_2(X \leq x) - P_1(X \leq x))$$

(см. *Метрика Помпейю–Эгглестона,* гл. 9).

Расстояние Андерсона–Дарлинга на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|P_1(X \leq x) - P_2(X \leq x)}{\ln \sqrt{P_1(X \leq x)(1 - P_1(X \leq x))}}.$$

Расстояние Крнковича–Драхмы определяется как

$$\sup_{x \in \mathbb{R}}(P_1(X \leq x) - P_2(X \leq x)) \ln \frac{1}{\sqrt{P_1(X \leq x)(1 - P_1(X \leq x))}} +$$

$$+ \sup_{x \in \mathbb{R}}(P_2(X \leq x) - P_1(X \leq x)) \ln \frac{1}{\sqrt{P_1(X \leq x)(1 - P_1(X \leq x))}}.$$

Три вышеприведенных расстояния используются в статистике в качестве степени согласия, особенно для расчета рисковой стоимости в финансовой сфере.

Расстояние Крамера–фон Мизеса

Расстояние Крамера–фон Мизеса есть расстояние на $\mathcal{P}$ (для $\chi \subset \mathbb{R}$), определенное как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (P_1(X \le x) - P_2(X \le x))^2 \, dx.$$

Оно представляет собой квадрат **L_2-метрики** между кумулятивными функциями плотности.

Метрика Леви

Метрика Леви – метрика на $\mathcal{P}$ (только для $\chi \subset \mathbb{R}$), определенная как

$$\inf\{\varepsilon < 0 : P_1(X \le x - \varepsilon) - \varepsilon \le P_2(X \le x) \le P_1(X \le x + \varepsilon) + \varepsilon$$

$$\text{для любого } x \in \mathbb{R}\}$$

Она является специальным случаем **метрики Прохорова** для $(\chi, d) = (\mathbb{R}, |x - y|)$.

Метрика Прохорова

Для метрического пространства (χ, d) *метрика Прохорова* на $\mathcal{P}$ определяет0 ся как

$$\inf\{\varepsilon > 0 : P_1(X \in B) \le P_2(X \in B^\varepsilon) + \varepsilon \text{ и } P_2(X \in B) \le P_1(X \in B^\varepsilon) + \varepsilon\},$$

где B – любое борелевское подмножество множества χ, а $B^\varepsilon = \{x : d(x,y) < \varepsilon, y \in B\}$.

Это наименьшее (по всем совместным распределениям пар (X, Y) случайных величин X, Y, таких что их маргинальныеми распределениями являются P_1 и P_2 соответственно) **вероятностное расстояние** между случайными величинами X и Y.

Метрика Дадли

Для метрического пространства (χ, d) **метрика Дадли** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sup_{f \in F} |\mathbb{E}_{P_1}[f(X)] - \mathbb{E}_{P_2}[f(X)]| = \sup_{f \in F} \left| \sum_{x \in \chi} f(x)(p_1(x) - p_2(x)) \right|.$$

где $F = \{f : \chi \to \mathbb{R}, \ \|f\|_\infty + \mathrm{Lip}_d(f) \le 1\}$ и $\mathrm{Lip}_d(f) = \sup\limits_{x,y \in \chi, \ x \ne y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$.

Метрика Шульги

Для метрического пространства (χ, d) **метрика Шульги** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sup_{f \in F} \left| \left(\sum_{x \in \chi} |f(x)|^p \ p_1(x))^{1/p} \right) - \left(\sum_{x \in \chi} |f(x)|^p \ p_2(x))^{1/p} \right) \right|,$$

где $F = \{f : \chi \to \mathbb{R}, \ \mathrm{Lip}_d(f) \le 1\}$ и $\mathrm{Lip}_d(f) = \sup\limits_{x,y \in \chi, \ x \ne y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$.

Полуметрика Золотарева

Полуметрикой Золотарева называется полуметрика на $\mathcal{P}$, определенная как

$$\sup_{f \in F} \left| \sum_{x \in \chi} f(x)(p_1(x) - p_2(x)) \right|,$$

где F – любое множество функций (для непрерывного случая F – любое множество таких ограниченных непрерывных функций); см. **Метрика Шульги, Метрика Дадли.**

Метрика свертки

Пусть G – сепарабельная локально компактная абелева группа и пусть $C(G)$ – множество всех действительных ограниченных непрерывный функций на G, которые обращаются в нуль в бесконечности. Зафиксируем функцию $g \in C(G)$, такую что $|g|$ является интегрируемой по отношению к мере Хаара на G и $\{\beta \in G^* : \hat{g}(\beta) = 0\}$ имеет пустую внутренность: здесь G^* – дуальная группа для G и $\hat{g}$ – преобразование Фурье для g.

Метрика свертки Юкича (или *метрика сглаживания*) определяется для любых двух конечных мер Бэра со знаком P_1 и P_2 на G как

$$\sup_{x \in G} \int_{y \in G} g(xy^{-1})(dP_1 - dP_2)(y)\, |.$$

Данную метрику можно также рассматривать как разность $T_{p_1}(g) - T_{p_2}(g)$ *операторов свертки* на $C(G)$, где для любой $f \in C(G)$ оператор $T_p f(x)$ определяется как $\int_{y \in G} f(xy^{-1}) dP(y)$.

Метрика несходства

Для метрического пространства (χ, d) **метрика несходства** на $\mathcal{P}$ определяется как
$\sup\{|P_1(X \in B) - P_2(X \in B)|:$ B – любой замкнутый шар$\}$.

Полуметрика двойного несходства

Полуметрика двойного несходства есть полуметрика между распределениями P_1 и P_2, заданными над разными семействами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ измеримых множеств, определяемая следующим образом:

$$D(P_1, P_2) + D(P_2, P_1),$$

где $D(P_1, P_2) = \sup\{\inf\{P_2(C) : B \subset C \in \mathcal{A}_2\} - P_1(B) : B \in \mathcal{A}_1\}$ – *расхождение.*

Расстояние Ле Кама

Расстояние Ле Кама есть полуметрика между распределениями вероятностей P_1 и P_2 (заданных на различных пространствах χ_1 и χ_2), определенная следующим образом:

$$\max\{\delta(P_1, P_2),\ \delta(P_2, P_1)\},$$

где $\delta(P_1, P_2) = \inf_B \sum_{x_2 \in \chi_2} | BP_1(X_2 = x_2) - BP_2(X_2 = x_2) |$ – *невязка Ле Кама.* Здесь $BP_1(X_2 = x_2) = \sum_{x_1 \in \chi_1} p_1(x_1) b(x_2 | x_1)$, где B – распределение вероятностей над $\chi_1 \times \chi_2$ и

$$b(x_2 | x_1) = \frac{B(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{B(X_1 = x_1)} = \frac{B(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\sum_{x \in \chi_2} B(X_1 = x_2, X_2 = x)}.$$

Следовательно, $BP_2(X_2 = x_2)$ является распределением вероятностей над χ_2, поскольку $\sum_{x_2 \in \chi_2} b(x_2 | x_1) = 1$. Расстояние Ле Кама не является расстоянием теории вероятностей, поскольку P_1 и P_2 заданы над разными пространствами; это есть расстояние между статистическими экспериментами (моделями).

Метрика Скорохода–Билингсли

Метрика Скорохода–Билингсли – метрика на $\mathcal{P}$, определенная как

$$\inf_f \max\left\{\sup_x | P_1(X \le x) - P_2(X \le f(x)) | \sup_x | f(x) - x |, \sup_{x \ne y} \left| \ln \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \right\},$$

где f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – строго возрастающая непрерывная функция.

Метрика Скорохода

Метрикой Скорохода называется метрика на $\mathcal{P}$, определенная как

$$\inf\left\{\varepsilon > 0 : \max\left\{\sup_x | P_1(X < x) - P_2(X \le f(x)) |, \sup_x | f(x) - x |\right\} < \varepsilon\right\},$$

где f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – строго возрастающая непрерывная функция.

Расстояние Бирнбаума–Орлича

Расстояние Бирнбаума–Орлича – расстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(| P_1(X \le x) - P_2(X \le x) |),$$

где f: $\mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ – любая неубывающая непрерывная функция с $f(0) = 0$ и $f(2t) \le Kf(t)$ для любого $t > 0$ и некоторого заданного K. Оно является **почти метрикой,** поскольку соблюдается условие $d(P_1, P_2) \le K(d(P_2, P_3) + d(P_3, P_2))$.

Расстояние Бирнбаума–Орлича применяется также в функциональном анализе на множестве всех интегрируемых функций на отрезке [0, 1], где оно определяется как $\int_0^1 H(| f(x) - g(x) |) dx$, где H – неубывающая непрерывная функция из $[0, \infty)$ в $[0, \infty)$, которая обращается в нуль в нуле и удовлетворяет *условию Орлича*:

$$\sup_{t > 0} \frac{H(2t)}{H(t)} < \infty.$$

Расстояние Круглова

Расстояние Круглова – расстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$\int f(P_1(X \le x) - P_2(X \le x)dx,$$

где f: $\mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ – строго возрастающая четная функция с $f(0) = 0$ и $f(s+t) \le \le K(f(s) + f(t))$ для любых s, $t \ge 0$ и некоторого заданного $K \ge 1$. Оно является **почти метрикой**, поскольку соблюдается условие $d(P_1, P_2) \le K(d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2))$.

Расстояние Бурби–Рао

Рассмотрим непрерывную выпуклую функцию $\phi(t): (0, \infty) \to \mathbb{R}$ и положим $\phi(0) = \lim_{t \to 0} \phi(t) \in (-\infty, \infty]$. Выпуклость ϕ влечет неотрицательность функции $\delta_\phi : [0,1]^2 \to (-\infty, \infty]$, определенной как $\delta_\phi(x, y) = \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2} - \phi\left(\frac{x+y}{2}\right)$ если $(x, y) \ne \ne (0, 0)$ и $\delta_\phi(0, 0) = 0$.

Соответствующее **расстояние Бурби–Рао** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sum_x \delta_\phi(p_1(x), p_2(x)).$$

Расстояние Брегмана

Рассмотрим дифференцируемую выпуклую функцию $\phi(t)$: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ и положим $\phi(0) = \lim_{t \to 0} \phi(t) \in (-\infty, \infty]$. Выпуклость ϕ влечет неотрицательность функции $\delta_\phi : [0,1]^2 \to (-\infty, \infty]$, определенной как непрерывное продолжение функции $\delta_\phi(u, v) = \phi(u) - \phi(v) - \phi'(v)(u - v)$, $0 < u$, $v \le 1$ на $[0, 1]^2$.

Соответствующее **расстояние Брегмана** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sum_1^m \delta_\phi(p_i, q_i)$$

(см. **Квазирасстояние Брегмана**).

***f*-расхождение Чизара**

***f*-расхождение Чизара** есть функция на множестве $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, определенная как

$$\sum_x p_2(x) f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right),$$

где f: $\mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция.

Случаи $f(t) = t \ln t$ и $f(t) = (t - 1)^2/2$ соответствуют **расстоянию Куллбака–Лейблера** и **χ^2-расстоянию**, указанных ниже. Случай $f(t) = | t - 1 |$ соответствует **L_1-метрике между плотностями,** а случай $f(t) = 4(1 - \sqrt{t})$ (так же как и случай $f(t) = 2(t+1) - 4\sqrt{t}$) соответствует квадрату **метрики Хеллинджера.**

Полуметрики могут быть получены так же, как квадратный корень *f*-расхождения Чизара в случаях $f(t) = (t-1)^2/(t+1)$ (**полуметрика Важды–Куса**), $f(t) = |t^a - 1|^{1/a}$ с $0 < a \le 1$ (**полуметрика Матушиты**) и $f(t) = \frac{(t^a+1)^{1/a} - 2^{(1-a)/a}(t+1)}{1-1/a}$ (**полуметрика Остеррейхера**).

Подобность достоверности

Подобность достоверности (или *коэффициент Бхаттачарья, аффинность Хеллинджера*) на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\rho(P_1, P_2) = \sum_x \sqrt{p_1(x)p_2(x)}.$$

Метрика Хеллинджера

В терминах **подобности достоверности, метрика Хеллинджера** (или *метрика Хеллинджера–Какутани*) на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\left(2\sum_x \left(\sqrt{p_1(x)} - \sqrt{p_2(x)}\right)^2\right)^{1/2} = 2(1 - \rho(P_1, P_2))^{1/2}.$$

Это – L_2**-метрика** между квадратными корнями функций плотности.

Подобность среднего гармонического

Подобность среднего гармонического есть подобность на $\mathcal{P}$, определенная как

$$2\sum_x \frac{p_1(x)p_2(x)}{p_1(x) + p_2(x)}.$$

Расстояние 1 Бхаттачарья

В терминах **подобности достоверности, расстояние 1 Бхаттачарья** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$(\arccos \rho(P_1, P_2))^2.$$

Удвоение такого расстояния применяется также в статистике и машинном обучении, где оно называется **расстоянием Фишера.**

Расстояние 2 Бхаттачарья

В терминах **подобности достоверности, расстояние 2 Бхаттачарья** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$-\ln \rho(P_1, P_2).$$

χ_2**-расстояние**

χ_2**-расстояние** (или χ_2**-расстояние Неймана**) есть квазирасстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$\sum_x \frac{(p_1(x) - p_2(x))^2}{p_2(x)}.$$

χ_2-расстояние Пирсона определяется как

$$\sum_x \frac{(p_1(x) - p_2(x))^2}{p_1(x)}.$$

Вероятностная **симметрическая χ_2-мера** есть расстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$2\sum_x \frac{(p_1(x) - p_2(x))^2}{p_1(x) - p_2(x)}.$$

Расстояние разделения

Расстоянием разделения называется квазирасстояние на $\mathcal{P}$ (для любого счетного χ), определенное как

$$\max_x \left(1 - \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right).$$

(Не путать с **расстоянием разделения** между выпуклыми телами.)

Расстояние Куллбака–Лейблера

Расстояние Куллбака–Лейблера (или *относительная энтропия, отклонение информации, KL-расстояние*) есть квазирасстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$KL(P_1, P_2) = \mathbb{E}_{P_1}[\ln L] = \sum_x p_1(x) \ln \frac{p_1(x)}{p_2(x)},$$

где $L = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ – *отношение правдоподобия*. Следовательно,

$$KL(P_1, P_2) = -\sum_x (p_1(x) \ln p_2(x)) + \sum_x (p_1(x) \ln p_1(x)) = H(P_1, P_2) - H(P_1),$$

где $H(P_1)$ – *энтропия* P_1, а $H(P_1, P_2)$ – *перекрестная энтропия* P_1 и P_2. Если P_2 является произведением маргиналов P_1, то KL-расстояние $KL(P_1, P_2)$ называется **количеством информации Шэннона** и равно $\sum_{(x,y) \in \chi \times \chi} p_1(x, y) \ln \frac{p_1(x, y)}{p_1(x) p_1(y)}$ (см. **расстояние Шэннона**).

Косое расхождение

Косое расхождение – квазирасстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$KL(P_1, aP_2 + (1 - a)P_1),$$

где $a \in [0, 1]$ – константа и KL – **расстояние Куллбака–Лейблера.** Таким образом, случай $a = 1$ соответствует $KL(P_1, P_2)$. Косое расхождение с $a = \frac{1}{2}$ называется *K-расхождением.*

Расхождение Джеффри

Расхождением Джеффри (или *J-расхождением*) называется симметричная версия **расстояния Куллбака–Лейблера,** определенная как

$$KL(P_1, P_2) + KL(P_2, P_1) = \sum_x \left(p_1(x) \ln \frac{p_1(x)}{p_2(x)} + p_2(x) \ln \frac{p_2(x)}{p_1(x)} \right).$$

Для $P_1 \to P_2$ расхождение Джеффри ведет себя аналогично $\boldsymbol{\chi_2}$**-расстоянию.**

Расхождение Дженсена–Шэннона

Расхождение Дженсена–Шэннона определяется как

$$aKL(P_1, P_3) + (1-a)KL(P_2, P_3),$$

где $P_3 = aP_1 + (1-a)P_2$ и $a \in [0, 1]$ – константа (см. **Подобность ясности**).

На языке *энтропии* $H(P) = \sum_x p(x) \ln p(x)$ расхождение Дженсена–Шэннона равно $H(aP_1 + (1-a)P_2) - aH(P_1) - (1-a)H(P_2)$.

Расстояние Топсе есть симметричная версия **расстояния Куллбака–Лейблера** на $\mathcal{P}$. Оно определяется как

$$KL(P_1, P_3) + KL(P_2, P_3) = \sum_x \left(p_1(x) \ln \frac{p_1(x)}{p_3(x)} + p_2(x) \ln \frac{p_2(x)}{p_3(x)} \right),$$

где $P_3 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$. Расстояние Топсе есть удвоенное расхождение Дженсена–Шэннона с $a = \frac{1}{2}$. Некоторые авторы используют термин "расхождение Дженсена–Шэннона" только для данной величины a. Расстояние тоже метрикой не является, но его квадратный корень – метрика.

Расстояние среднего сопротивления

Расстояние среднего сопротивления по Дженсену–Шимановичу есть симметричная версия **расстояния Куллбака–Лейблера** на $\mathcal{P}$. Оно определяется как гармоническая сумма

$$\left(\frac{1}{KL(P_1, P_2)} + \frac{1}{KL(P_2, P_1)} \right)^{-1}$$

(см. **Метрика сопротивления** для графов, гл. 15).

Расстояние Али–Силвея

Расстояние Али–Силвея есть квазирасстояние на $\mathcal{P}$, заданное функционалом

$$f(\mathbb{E}_{P_1}[g(L)]),$$

где $L = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ – *отношение правдоподобия*, f – неубывающая функция, а g – непрерывная выпуклая функция (см. ***f*-расхождение Чизара**).

Случай $f(x) = x$, $g(x) = x \ln x$ соответствует **расстоянию Куллбака–Лейблера**; случай $f(x) = -\ln x$, $g(x) = x'$ – **расстоянию Чернова.**

Расстояние Чернова

Расстоянием Чернова (или *перекрестной энтропией Реньи*) называется расстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$\max_{t\in[0,1]} D_t(P_1, P_2),$$

где $D_t(P_1, P_2) = -\ln \sum_x (p_1(x))^t (p_2(x))^{1-t}$, что пропорционально **расстоянию Реньи.**

Случай $t = \frac{1}{2}$ соответствует **расстоянию 2 Бхаттачарья.**

Расстояние Реньи

Расстояние Реньи (или *энтропия Реньи порядка t)* есть квазирасстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$\frac{1}{t-1} \ln \sum_x p_2(x) \left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \right)^t,$$

где $t \geq 0$, $t \neq 1$.

Пределом расстояния Реньи для $t \to 1$ является **расстояние Куллбака–Лейблера.** Для $t = \frac{1}{2}$ половина расстояния Реньи есть **расстояние 2 Бхаттачарья** (см. ***f*-расхождение Чизара** и **расстояние Чернова**).

Подобность ясности

Подобность ясности – это подобность на $\mathcal{P}$, определенная как

$$(KL(P_1, P_3) + KL(P_2, P_3)) - (KL(P_1, P_2) + KL(P_2, P_1)) =$$
$$= \sum_x \left(p_1(x) \ln \frac{p_2(x)}{p_3(x)} + p_2(x) \ln \frac{p_1(x)}{p_3(x)} \right),$$

где KL – **расстояние Куллбака–Лейблера** и P_3 – заданный ссылочный закон теории вероятностей. Впервые определена в труде [CCL01], где P_3 означало распределение вероятностей общего английского языка.

Расстояние Шэннона

Для *пространства с мерой* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ где множество Ω конечно и P является вероятностной мерой, *энтропия* функции $f : \Omega \to X$, где X – конечное множество, определяется как

$$H(f) = \sum_{x\in X} P(f = x) \ln(P(f = x));$$

следовательно, f может рассматриваться как *разбиение* пространства с мерой. Для любых двух таких разбиений $f : \Omega \to X$ и $g : \Omega \to Y$ обозначим *энтропию* разбиения (f, g): $\Omega \to X \times Y$ (*общую энтропию*) как $H(f, g)$ и *условную энтропию* как $H(f \mid g)$. Тогда **расстояние Шэннона** между f и g определяется как

$$2H(f, g) - H(f) - H(g) = H(f \mid g) + H(g \mid f).$$

Данное расстояние является метрикой. **Количество информации Шэннона** определяется как

$$H(f,g) - H(f) - H(g) = \sum_{(x,y)} p(f = x, g = y) \ln \frac{p(f = x, g = y)}{p(f = x)p(g = y)}.$$

Если P – закон равномерного распределения вероятностей, то, как доказал Гоппа, расстояние Шэннона может быть получено как предельный случай **метрики конечных подгрупп.**

В общем случае **метрика информации** (или **метрика энтропии**) между двумя случайными величинами (источниками информации) X и Y определяется как

$$H(X \mid Y) + H(Y \mid X),$$

где *условная энтропия* $H(X \mid Y)$ определяется как $\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \ln p(x \mid y)$ и $p(x,y) = P(X = x \mid Y = y)$ является условной вероятностью.

Нормализированная метрика информации определяется как

$$\frac{H(X \mid Y) - H(Y \mid X)}{H(X,Y)}.$$

Она равна 1, если X и Y независимы (см. другое понятие **Нормализированного расстояния информации,** гл. 11).

Метрика Канторовича–Мэллоуза–Монжа–Вассерштейна

Для метрического пространства (χ, d) **метрика Канторовича–Мэллоуза–Монжа–Вассерштейна** определяется как

$$\inf \mathbb{E}_S[d(X, Y)],$$

где инфимум берется по всем распределениям S пар (X, Y) случайных величин X и Y, таких что маргинальными распределениями X и Y являются P_1 и P_2.

Для любого **сепарабельного** метрического пространства (χ, d) это эквивалентно **липшицеву расстоянию между мерами** $\sup_f \int fd(P_1 - P_2)$, где супремум берется по всем функциям f с $|f(x) - f(y)| \le d(x,y)$ для любых $x, y \in \chi$.

В более общем смысле L_p**-расстояние Вассерштейна** для $\chi = \mathbb{R}^n$ определяется как

$$(\inf \mathbb{E}_S[d^p(X,Y)])^{1/p},$$

и для $p = 1$ оно называется также $\overline{\rho}$*-расстоянием.* Для (χ, d) = ($\mathbb{R}$, $|x - y|$) оно называется L_p*-метрикой между функциями распределения* (CDF) и его можно записать

$$(\inf \mathbb{E}[|X - Y|^p])^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |F_1(x) - F_2(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 |F_1^{-1}(x) - F_2^{-1}(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

с $F_i^{-1}(x) = \sup_u (P_i(X \le x) < u)$.

Случай $p = 1$ этой метрики называется **метрикой Монжа–Канторовича** (или, в теории фракталов *метрикой Хатчинсона*), **метрикой Вассерштейна** (или *метрикой Форте–Мурье*)

$\bar{d}$-метрика Орнштейна

$\bar{d}$-метрика Орнштейна есть метрика на $\mathcal{P}$ (для $\chi = \mathbb{R}^n$), определенная как

$$\frac{1}{n} \inf \int_{x,y} \left(\sum_{i=1}^{n} 1_{x_i \neq y_i} \right) dS,$$

где инфимум берется по всем совместным распределениям S пар (X, Y) случайных величин X и Y, таких что маргинальными распределениями X и Y являются P_1 и P_2.

Данная метрика используется в теории стационарных случайных процессов, теории динамических систем и теории кодирования.

Часть IV

РАССТОЯНИЯ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Глава 15

Расстояния в теории графов

Графом называется пара $G = (V, E)$, где V – множество, называемое множеством *вершин* графа G, и E – множество неупорядоченных пар вершин, которые называются *ребрами* графа G. *Ориентированный граф* (или *орграф*) есть пара $D = (V, E)$, где V – множество, называемое множеством *вершин* орграфа D, и E – множество упорядоченных пар вершин, которые называются *дугами* орграфа D.

Граф, у которого любые две вершины соединены не более чем одним ребром, называется *простым графом.* Если допускается соединение вершин кратными (параллельными) ребрами, то такой граф называется *мультиграфом.* Граф называется *конечным* (*бесконечным*), если множество V его вершин *конечно* (или соответственно *бесконечно*). *Порядком* конечного графа называется количество его вершин; *размером* конечного графа называется число его ребер.

Граф или ориентированный граф совместно с функцией, приписывающей положительный вес каждому ребру, называется *взвешенным графом* или *сетью.* Сеть также называют **каркасом** в том случае когда веса интерпретируются как длины ребер возможного вложения в некоторое евклидово пространство. В терминах теории прочности ребра каркаса называются *прутьями* (обычно одинаковой длины); **тенсегрити** – это каркасная структура, в которой прутья являются либо элементом натяжения – *тросами* (т.е. не могут отдалиться друг от друга), либо элементом сжатия – *распорками* (т.е. не могут сблизиться).

Подграфом графа G называется граф G', вершины и ребра которого образуют подмножества вершин и ребер графа G. Если G' является подграфом G, то граф G называется *суперграфом графа* G'. *Индуцированный подграф* – подмножество вершин графа G вместе со всеми ребрами, обе конечные точки которых принадлежат данному подмножеству.

Граф $G = (V, E)$ называется *связным,* если для любых вершин $u, v \in V$ существует $(u - v)$ *путь,* т.е. такая последовательность ребер $uw_1 = w_0w_1, w_1w_2, \dots, w_{n-1}w_n = w_{n-1}v$ из E, что $w_i \neq w_j$ для $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Орграф $D = (V, E)$ называется *сильно связным,* если для любых вершин $u, v \in V$ существуют как *ориентированный* $(u - v)$ *путь*, так и *ориентированный* $(v - u)$ *путь*. Любой максимальный связный подграф графа G называется его *связной компонентой.*

Соединенные ребром вершины называются *смежными. Степень* $\deg(v)$ вершины $v \in V$ графа $G = (V, E)$ равна числу его вершин, смежных с v.

Полным графом называется граф, каждая пара вершин которого соединена ребром. *Двудольный граф* – граф, в котором множество вершин V разбивается на два таких непересекающихся подмножества, что в одном и том же подмножестве нет ни одной пары смежных вершин. *Путь* – это простой связный граф, в котором две вершины имеют степень 1, а другие вершины, если они существуют, имеют степень 2; *длиной* пути является число его ребер. *Циклом* является *замкнутый путь,* т.е. простой связный граф, каждая вершина которого имеет степень 2. *Дерево* – это простой связный граф, не имеющий циклов.

Два графа, содержащие одинаковое число одинаково соединенных вершин, называются *изоморфными.* Формально, два графа $G = (V(G), E(G))$ и $H = (V(H), E(H))$ называются *изоморфными,* если существует биекция $f: V(G) \to V(H)$, такая что для любых $u, v \in V(G)$ ребро $uv \in E(G)$ тогда и только тогда, когда ребро $f(u)f(v) \in E(H)$.

Мы будем рассматривать только простые конечные графы и орграфы, точнее классы эквивалентности таких изоморфных графов.

15.1. РАССТОЯНИЯ НА ВЕРШИНАХ ГРАФА

Метрика пути

Метрикой пути (или *метрикой графа*, *метрикой кратчайшего пути*) d_{path} называется метрика на множестве вершин графа $G = (V, E)$, определенная для любых $u, v \in V$ как длина кратчайшего $(u - v)$ пути в G. Кратчайший $(u - v)$ путь называется *геодезической линией.* Соответствующее метрическое пространство называется *графическим метрическим пространством,* связанным с графом G.

Метрика пути *графа Кэли* Γ конечно порожденной группы $(G, \cdot, e)$ называется **словарной метрикой.** Метрика пути графа $G = (V, E)$, такого что V может быть циклически упорядоченно в *гамильтоновом цикле,* называется **гамильтоновой метрикой.** **Метрика гиперкуба** – метрика пути *графа гиперкуба* $H(m, 2)$ с множеством вершин $V = \{0, 1\}^m$, ребра которого являются парами векторов $x, y \in \{0, 1\}^m$, такими что $|\{i \in \{1,\ldots, n\}: x_i \neq y_i\}| = 1$; она равна $|\{i \in \{1,\ldots, n\}: x_i \neq 1\}\Delta\{i \in \{1,\ldots, n\}: y_i = 1\}|$. Графическое метрическое пространство, соответствующее графу гиперкуба, называется *метрическим пространством гиперкуба.* Оно совпадает с метрическим пространством $(\{0,1\}^m, d_{l_1})$.

Взвешенная метрика пути

Взвешенная метрика пути d_{wpath} есть метрика на множестве вершин V связного взвешенного графа $G = (V, E)$ с положительными весами ребер $(w(e))_{e \in E}$, определенная как

$$\min_P \sum_{e \in P} w(e),$$

где минимум берется по всем $(u - v)$ путям P в G.

Расстояние обхода

Расстояние обхода – расстояние на множестве вершин V связного графа $G = (V, E)$, определенное как длина самого длинного *индуцированного пути* (т.е. пути, который является индуцированным подграфом графа G) из вершины u в вершину $v \in V$.

В общем случае оно не является метрикой. Граф называется *графом обхода*, если его расстояние обхода совпадает с **метрикой пути** (см., например, [CJT93]).

Квазиметрика пути в орграфах

Квазиметрика пути в орграфах d_{dpath} есть квазиметрика на множестве вершин V сильно связного ориентированного графа $D = (V, E)$, определенная для любых $u, v \in V$ как длина кратчайшего ориентированного $(u - v)$ пути в графе D. Хороший таксист при езде по городским улицам с односторонним движением должен пользоваться данной квазиметрикой.

Циклическая метрика в орграфах

Циклической метрикой в орграфах называется метрика на множестве вершин V сильно связного ориентированного графа $D = (V, E)$, определенная как

$$d_{\mathrm{dpath}}(u, v) + d_{\mathrm{dpath}}(v, u),$$

где d_{dpath} – **квазиметрика пути в орграфах.**

ϒ-метрика

Для класса ϒ связных графов метрика d метрического пространства (X, d) называется **ϒ-метрикой**, если (X, d) изометрично подпространству метрического пространства (V, d_{wpath}), где граф $G = (V, E) \in \Upsilon$ и d_{wpath} – **взвешенная метрика пути** на множестве вершин V графа G с положительной функцией реберных весов w (см. **древовидная метрика**).

Древовидная метрика

Древовидная метрика (или **взвешенная метрика дерева**) d на множестве X есть **ϒ-метрика** для класса ϒ всех деревьев, т.е. метрическое пространство (X, d) изометрично подпространству метрического пространства (V, d_{wpath}), где $T = (V, E)$ есть дерево и d_{wpath} – **взвешенная метрика пути** на множестве вершин V дерева T с положительной функцией реберных весов w. Метрика является древовидной метрикой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет **неравенству четырех точек.**

Метрика d на множестве X называется ослабленной древоподобной метрикой, если множество X может быть вложено в некоторое (не обязательно положительно) реберно-взвешенное дерево, такое что для любых $x, y \in X$ метрика $d(x, y)$ равна сумме весов всех ребер вдоль (единственного) пути между соответствующими вершинами x и y дерева. Метрика является ослабленной древовидной метрикой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет **ослабленному неравенству четырех точек.**

Метрика сопротивления

Для случая связного графа $G = (V, E)$ с положительной функцией реберных весов $w = (w(e))_{e \in E}$ рассмотрим веса ребер как сопротивления. Возьмем любые две различные вершины u и v предположим, что к ним подсоединена батарея таким образом, что единица тока течет из v в u. Необходимая для этого разность (потенциалов) напряжения определяется по закону Ома как эффективное сопротивление между u и v в электрической цепи; оно называется **метрикой сопротивления** $\Omega(u, v)$ между ними ([KlRa93]) (см. **Расстояние среднего сопротивления**, гл. 14). Число $\frac{1}{\Omega(u,v)}$ можно рассматривать подобно электрической *проводимости* как меру *соединяемости* между u и v. Именно, выполняется условие $\Omega(u,v) \le \min_P \sum_{e \in P} \frac{1}{w(e)}$, где P – любой $(u - v)$ путь, с равенством тогда и только тогда, когда такой путь P является единственным; следовательно, если $w(e) = 1$ для всех ребер, равенство означает, что G является деревом. Метрика сопротивления применяется (в физике, химии и сетях) в случаях, когда необходимо учитывать число путей между любыми двумя вершинами.

Если $w(e) = 1$ для всех ребер, то

$$\Omega(u,v) = (g_{uu} + g_{vv}) - (g_{vv} + g_{uu}),$$

где $((g_{ij}))$ – *обобщённая обратная матрица для матрицы Лапласа* (l_{ij}) графа G: здесь l_{ii} есть степень вершины i, а для $i \neq j$ величина $l_{ij} = 1$, если вершины i и j смежные, и $l_{ij} = 0$, иначе. Вероятностная интерпретация такова: $\Omega(u,v) = (\deg(u)\Pr(u - v))^{-1}$, где $\deg(u)$ – степень вершины u и $\Pr(u - v)$ – вероятность при случайног блуждании, начинающемся с u, посетить v перед возращением в u.

Усеченная метрика

Усеченной метрикой называется метрика на множестве вершин графа, равная 1 для любых двух смежных вершин и равная 2 для любых различных несмежных вершин. Она является 2-**усеченной метрикой** для **метрики пути** графа. Она является **(1,2)-*B*-метрикой,** если степень любой вершины не больше чем B.

Многократно выверенное расстояние

Многократно выверенным расстоянием называется расстояние на множестве вершин V *m-связного* взвешенного графа$G = (V, E)$, определенное для любых $u, v \in V$ как минимальная взвешенная сумма длин m непересекающихся $(u - v)$ путей. Оно является обобщением понятия расстояния на случай, когда требуется найти несколько непересекающихся путей между двумя точками, например, в системах связи, где $m - 1$ из $(u - v)$ путей используются для кодирования сообщения, передаваемого по оставшемуся $(u - v)$ пути (см. [McCa97]).

Граф G называется *m-связным,* если не существует множества из $m - 1$ ребра, удаление которых превратит граф в несвязный. Связный граф является 1-связным.

Разрез – это *разбиение* множества на две части. Если задано подмножество S множества $V_n = \{1,\dots, n\}$, то задано разбиение $\{S, V_n \backslash S\}$ множества V_n. **Полуметрика разреза** на V_n, определяемая таким разбиением, может рассматриваться как специальная полуметрика на множестве вершин *полного двудольного графа* $K_{S,V_n \setminus S}$, где расстояние между вершинами равно 1, если они принадлежат разным частям данного графа, и равно 0, иначе.

Полуметрика разреза

Если задано подмножество S множества $V_n = \{1,\dots, n\}$, то **полуметрика разреза** (или **полуметрика раздвоения**) δ_S является полуметрика на V_n, определенная как

$$\delta_S(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq j, \ \ |S \cap \{i,j\}| = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обычно она рассматривается как вектор в $\mathbb{R}^{|E_n|}$, $E(n) = \{\{i,j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$.

Круговой разрез V_n задается подмножеством $S_{[k+1,\, l]} = \{k + 1,\dots, l\} \pmod n \subset V_n$: если рассматривать точки как упорядоченные вдоль окружности в том же круговом порядке, то $S_{[k+1,\, l]}$ есть множество последовательных вершин от $k + 1$ до l. Для кругового разреза соответствующая полуметрика разреза называется **полуметрикой кругового разреза.**

Полуметрикой четного разреза называется полуметрика δ_S на V_n с четным $|S|$. **Полуметрикой нечетного разреза** называется полуметрика δ_S на V_n с нечетным $|S|$. Полуметрика ***k*-равномерного разреза** есть δ_S на V_n с $|S| \in \{k, n - k\}$. **Полуметрика равного разреза** есть полуметрика δ_S на V_n с $|S| \in \left\{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right\}$.

Полуметрика неравного разреза – полуметрика δ_S на V_n с $|S| \notin \left\{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right\}$ (см., например, [DeLa97]).

Разложимая полуметрика

Разложимая полуметрикой – полуметрика на $V_n = \{1,\ldots, n\}$, которую можно представить как неотрицательную линейную комбинацию **полуметрик разреза.** Множеством всех разложимых полуметрик на V_n образует *выпуклый конус,* который называется *разрезным конусом* CUT_n.

Полуметрика на V_n будет разложимой тогда и только тогда, когда она является **конечной l_1-полуметрикой.**

Круговой разложимой полуметрикой называется полуметрика на $V_n = \{1,\ldots, n\}$, которую можно представить как неотрицательную линейную комбинацию **полуметрик кругового разреза.**

Полуметрика на V_n будет круговой разложимой полуметрикой тогда и только тогда, когда она является **полуметрикой Калмансона** по отношению к тому же порядку (см. [ChFi98]).

Конечная l_p-полуметрика

Для конечного множества X **конечная l_p-полуметрик** называетсяс полуметрика d на X, такая что (X, d) есть полуметрическое подпространство l_p^m*-пространства* $(\mathbb{R}^m, d_{l_p})$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Если $X = \{0, 1\}^n$, то метрическое пространство (X, d) называется l_p^m-кубом. l_1^m-куб называется *хэмминговым кубом.*

Полуметрика Калмансона

Полуметрикой Калмансона называется полуметрика d на $V_n = \{1,\ldots, n\}$, удовлетворяющая условию

$$\max\{d(i,j)+d(r,s), d(i,s)+d(j,r)\} \le d(i,r)+d(j,s)$$

для всех $1 \le i \le j \le r \le s \le n$. В данном определении важен порядок элементов; именно, d является полуметрикой Калмансона *по отношению к порядку* $1,\ldots, n$.

Эквивалентно, если рассматривать точки $\{1,\ldots, n\}$ как расположенные вдоль цикла C_n в том же круговом порядке, то расстояние d на V_n является полуметрикой Калмансона, если неравенство

$$d(i,r)+d(j,s) \le d(i,j)+d(r,s)$$

выполняется для всех $i, j, r, s \in V_n$, таких что отрезки $[i, j]$ и $[r, s]$ являются пересекающимися хордами C_n.

Древовидная метрика есть метрика Калмансона для некоторой упорядоченности вершин дерева. Евклидова метрика, ограниченная на множество точек, образующих выпуклый многоугольник на плоскости, является метрикой Калмансона.

Полуметрика мультиразреза

Пусть $\{S_1,\ldots, S_q\}$, $q \ge 2$ – *разбиение* множества $V_n = \{1,\ldots, n\}$, т.е. совокупность $S_1,\ldots, S_q$ попарно непересекающихся подмножеств множества V_n, таких что $S_1 \cup \ldots \cup S_q = V_n$.

Полуметрика мультиразреза $\delta_{S_1,\ldots,S_q}$ – это полуметрика на V_n, определенная как

$$\delta_{S_1,\ldots,S_q}(i,j)=\begin{cases}0, \text{ если } i,j\in S_h \text{ для некоторого } h, 1\le h\le q,\\ 1, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Квазиполуметрика ориентированного разреза

Для подмножества S множества $V_n = \{1,\ldots, n\}$ **квазиполуметрикой ориентированного разреза** δ'_S называется квазиполуметрика на V_n, определенная как

$$\delta'_S(i,j)=\begin{cases}1, \text{ если } i\in S,\ j\notin S,\\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Обычно она рассматривается как вектор в $\mathbb{R}^{|I_n|}$, $I(n)=\{\{i,j\}:1\le i\ne j\le n\}$. **Полуметрика разреза** δ_S может быть представлена как $\delta'_S+\delta'_{V_n\setminus S}$.

Квазиполуметрика ориентированного мультиразреза

Для *разбиения* $\{S_1,\ldots, S_q\}$, $q \ge 2$ множества V_n **квазиполуметрикой ориентированного мультиразреза** $\delta_{S_1,\ldots,S_q}$ называется квазиполуметрика на V_n, определенная как

$$\delta'_{S_1,\ldots,S_q}(i,j)=\begin{cases}1, \text{ если } i\in S_h,\ j\in S_m,\ h<m,\\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

15.2. ГРАФЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ РАССТОЯНИЙ

***k*-степень графа**

***k*-степень графа** $G = (V, E)$ есть суперграф $G^k = (V, E')$ графа G с ребрами между всеми парами вершин, метрика пути для которых не больше чем k.

Изометрический подграф

Подграф H графа $G = (V, E)$ называется **изометрическим подграфом,** если метрика пути между любыми двумя вершинами подграфа H равна их метрике пути в графе G.

Ретракт подграфа

Подграф H графа $G = (V, E)$ называется **ретракт-подграфом,** если он порожден идемпотентным **сжимающим отображением** G в себя, т.е. $f^2 = f : V \to V$ с $d_{\text{path}}(f(u), f(v)) \le d_{\text{path}}(u, v)$ для всех . Любой ретракт – подграф является **изометрическим подграфом.**

Геодетический граф

Связный граф называется **геодетическим,** если существует только один кратчайший путь между любыми двумя его вершинами. Любое дерево является геодетическим графом.

Расстояннo-регулярный граф

Связный граф $G = (V, E)$ диаметра T называется **расстояннo-регулярным,** если для любых его вершин u, v и любых целых чисел $0 \le i, j \le T$ количество вершин w, таких что $d_{\mathrm{path}}(u, w) = i$ и $d_{\mathrm{path}}(v, w) = j$, зависит только от i, j и $k = d_{\mathrm{path}}(u, v)$, но не от выбранных вершин u и v.

Специальным случаем является **расстояннo-транзитивный граф,** т.е. такой граф, что его группа автоморфизмов транзитивна для любого $0 \le i < T$ на парах вершин (u, v) с $d_{\mathrm{path}}(u, v) = i$.

Любой расстояннo-регулярный граф является **расстояннo-уравновешенным графом,** т.е. $|\{x \in V: d(x, u) \le d(x, v)\}| = |\{x \in V: d(x, v) \le d(x, u)\}|$ для любых его ребер uv, и **расстояннo-степенно-регулярным графом,** т.е. $|\{x \in V: d(x, u) = i\}|$ зависит только от i, но не от $u \in V$.

Расстояннo-регулярный граф иначе называется *P-полиномиальной ассоциативной схемой.* **Конечное полиномиальное метрическое пространство** – ассоциативная схема, которая P- и Q-полиномиальна. Термин бесконечное **полиномиальное метрическое пространство** используется для *компактного связного двухточечного однородного пространства.* Ванг классифицировал их как евклидовы единичные сферы, действительные, комплексные и кватернионные проективные пространства или проективные плоскости Кэли.

Расстояннo-полиномиальный граф

Возьмем связный граф $G = (V, E)$ диаметра T, для любого $2 \le i \le T$ обозначим через G_i граф с тем же множеством вершин, что и G, и ребрами uv, такими что $d_{\mathrm{path}}(u, v) = i$.

Граф G называется **расстояннo-полиномиальным,** если матрица смежности любого графа G_i, $2 \le i \le T$, является полиномом в терминах матрицы смежности G.

Любой расстояннo-регулярный граф является расстояннo-полиномиальным.

Расстояннo-наследственный граф

Связный граф называется **расстояннo-наследственным,** если каждый из его связных индуцированных подграфов изометричен. Граф является расстояннo-наследственным, если изометричен каждый из его индуцированных путей. Любой *кограф,* т.е. граф, который не содержит индуцированных путей на четырех вершин,ах является расстояннo-наследственным. Граф является расстояннo-наследственным тогда и только тогда, когда его метрика пути удовлетворяет **ослабленному неравенству четырех точек.** Граф является расстояннo-наследственным, двудольным расстояннo-наследственным, блоковым графом или деревом тогда и только тогда, когда его метрика пути есть ослабленная древовидная метрика для реберных весов, которые являются, соответственно, ненулевыми полуцелыми, ненулевыми целыми, положительными полуцелыми или положительными целыми числами.

Граф является расстояннo-наследственным тогда и только тогда, когда каждый его индуцированный подграф – **1-остов.**

Блоковый граф

Граф называется **блоковым**, если каждый его *блок,* т.е. максимальный 2-связный индуцированный подграф, является полным графом. Любое дерево – блоковый граф. Граф является блоковым тогда и только тогда, когда его метрика пути является **древовидной метрикой** или, эквивалентно, удовлетворяет **неравенству четырех точек.**

Птолемеев граф

Граф называется **птолемеевым,** если его метрика пути удовлетворяет **неравенству Птолемея**

$$d(x,y)d(u,z) \le d(x,u)d(y,z) + d(x,z)d(y,u).$$

Граф является птолемеевым тогда и только тогда, когда он расстоянно-наследственный и *хордальный,* т.е. каждый цикл длины более 3 имеет хорду. В частности, любой **блоковый граф** является птолемеевым.

Граф *D*-расстояния

Для множества D положительных чисел, содержащего 1, и метрического пространства (X, d) **графом *D*-расстояния** $D(X, d)$ называется граф с множеством вершин X и множеством ребер $\{uv : d(u, v) \in D\}$ (см. ***D*-хроматическое число,** гл. 1).

Граф D-расстояния называется *графом единичного расстояния,* если $D = \{1\}$, *графом* ε*-единичного расстояния,* если $D = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, *графом единичной окрестности,* если $D = (0, 1]$, *графом целочисленного расстояния*, если $D = \mathbb{Z}_+$, *графом рационального расстояния*, если $D = \mathbb{Q}_+$, *графом простого расстояния,* если D является множеством простых чисел (с 1).

Обычно метрическое пространство (X, d) является подпространством евклидова пространства $\mathbb{E}^n$. Более того, каждый конечный граф $G = (V, E)$ может быть представлен как граф D-расстояния в некотором $\mathbb{E}^n$. Минимальная размерность такого евклидова пространства называется *D-размерностью* графа G.

***t*-Неприводимое множество**

Множество $S \subset V$ вершин в связном графе $G = (V, E)$ называется ***t*-неприводимым** (по Хаттингу и Хеннингу, 1994), если для любого $u \in S$ существует вершина $v \in V$, такая что для метрики пути выполняется неравенство

$$d(v,x) \le t < d(v, V \setminus S).$$

Число *t*-неприводимое ir_t графа G есть наименьшее кардинальное число $|S|$, такое что S является, а $S \cup \{v\}$ не является t-неприводимым для каждого $v \in V \setminus S$.

Число t-доминирования γ_t и *число t-независимости* α_t графа G есть соответственно кардинальное число наименьшего *t-покрытия* и наибольшей $\frac{1}{2}$*-упаковки* метрического пространства (V, d) (см. **Радиус метрического пространства**, гл. 1). Пусть γ_t^i – наименьшее $|S|$, такое что S является, а $S \cup \{v\}$ не является $\frac{t}{2}$-упаковкой для каждого $v \in V \setminus S$; следовательно, такая *нерасширяемая* $\frac{t}{2}$-упаковка является также t-покрытием. При этом выполняется условие $\frac{\gamma_t + 1}{2} \le ir_t \le$ $\le \gamma_t \le \gamma_t^i \le \alpha_t$.

***t*-Остов**

Остовной подграф $H = (V, E(H))$ связного графа $G = (V, E)$ называется ***t*-остовом** графа G, если для любых $u, v \in V$ справедливо неравенство $d_{\text{path}}^H(u,v) / d_{\text{path}}^G(u,v) \le t.$. Величина t называется *коэффициентом растяжения* подграфа H.

Остовное дерево связного графа $G = (V, E)$ есть подмножеством из $|V| - 1$ ребер, которые образуют дерево на множестве вершин V.

Расстояние Штейнера

Расстояние Штейнера множества $S \subset V$ вершин связного графа $G = (V, E)$ есть минимальное число ребер связного подграфа графа G, содержащего S. Такой подграф является деревом и называется *деревом Штейнера* для S.

Схема индексирования расстояний

Говорят, что семейство графов A (Пелег, 2000) имеет $l(n)$ **схему индексирования расстояний,** если существует функция L, которая индексирует вершины каждого n-вершинного графа в А различными индексами величиной до бит, и существует алгоритм, называемый ***декодером расстояний,*** который находит расстояние между любыми двумя вершинами u, v в графе из A в полиномиальное (по длине его индексов $L(u)$, $L(v)$) время.

15.3. РАССТОЯНИЯ НА ГРАФАХ

Подграф-суперграф расстояния

Общий подграф графов G и H – граф, который изоморфен индуцированным подграфам обоих графов G и H. *Общий суперграф* графов G и H – граф, содержащий индуцированные подграфы, изоморфные графам G и H.

Расстояние Зелинки d_Z на множестве $\mathbf{G}$ всех графов (более точно, на множестве всех классов эквивалентности изоморфных графов) определяется как

$$\max\{n(G_1), n(G_2)\} - n(G_1, G_2)$$

для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{G}$, где $n(G_1$, – число вершин в G_i, $i = 1, 2$ и $n(G_1, G_2)$ – максимальное число вершин общего подграфа графов G_1 и G_2).

Для произвольного множества $\mathbf{M}$ графов **расстояние общего подграфа** d_M на $\mathbf{M}$ определяется как

$$\max\{n(G_1)n(G_2)\} - n(G_1, G_2),$$

а **расстояние общего суперграфа** d_M^* на $\mathbf{M}$ определяется как

$$N(G_1, G_2) - \min\{n(G_1), n(G_2)\}$$

для любых G_1, $G_2 \in \mathbf{M}$, где $n(G_i)$ – число вершин в G_i, $i = 1, 2$ и $n(G_1, G_2)$ – максимальное число вершин общего подграфа графов $G \in \mathbf{M}$ и G_1 и G_2 и $N(G_1, G_2)$ – минимальное число вершин общего суперграфа графов $H \in \mathbf{M}$ и G_1 и G_2.

d_M является метрикой на $\mathbf{M}$, если выполняется следующее условие (1): если $H \in \mathbf{M}$ – общий суперграф графов G_1, $G_2 \in \mathbf{M}$, то существует общий подграф $G \in \mathbf{M}$ графов G_1 и G_2 с $n(G) \geq n(G_1) + n(G_2) - n(H)$. d_M^* является метрикой на $\mathbf{M}$, если выполняется следующее условие (2): если $G \in \mathbf{M}$ – общий подграф графов G_1, $G_2 \in \mathbf{M}$, то существует общий суперграф $H \in \mathbf{M}$ графов G_1 и G_2 с $n(H) \geq n(G_1) + n(G_2) - n(G)$. Мы имеем $d_M \leq d_M^*$, если выполняется условие (1) и $d_M \geq d_M^*$, если выполняется условие (2).

Расстояние d_M является метрикой на множестве **G** всех графов, множестве всех графов без циклов, множестве всех двудольных графов и множестве всех деревьев. Расстояние d_M^* является метрикой на множестве G всех графов, множестве всех связных графов, множестве всех связных двудольных графов и множестве всех деревьев. Расстояние Зелинки d_Z совпадает с d_M и d_M^* на множестве **G** всех графов. На множестве **T** всех деревьев расстояния d_M и d_M^* идентичны, но отличаются от расстояния Зелинки.

Расстояние Зелинки d_Z является метрикой на множестве $\mathbf{G}(n)$ всех графов с n вершинами и равно $n - k$ или $K - n$ для всех $G_1, G_2 \in \mathbf{G}(n)$, где k – максимальное число вершин общего подграфа графов G_1 и G_2, а K – минимальное число вершин общего суперграфа графов G_1 и G_2. На множестве $\mathbf{T}(n)$ всех деревьев с n вершинами расстояние d_Z называется **расстоянием дерева Зелинки** (см., например, [Zeli75]).

Реберное расстояние

Реберное расстояние – расстояние на множестве **G** всех графов, определенное как

$$|E_1| + |E_2| - 2|E_{12}| + ||V_1| - |V_2||$$

для любых графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2),$, где $G_{12} = (V_{12}, E_{12})$ – общий подграф графов G_1 и G_2 с максимальным числом ребер. Данное расстояние широко применяется в области органической и медицинской химии.

Расстояние стягивания

Расстояние стягивания – расстояние на множестве $\mathbf{G}(n)$ всех графов с n вершинами, определенное как

$$n - k$$

для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{G}(n)$, где k – максимальное число вершин графа, изоморфного одновременно графу, полученному из каждого графа G_1, G_2 конечным числом операций стягивания ребер.

Осуществить *стягивание* ребра $uv \in E$, принадлежащего графу $G = (V, E)$, означает заменить вершины u и v одной такой вершиной, которая является смежной для всех вершин $V \backslash \{u, v\}$, смежных с u или v.

Расстояние перемещения ребра

Расстояние перемещения ребра есть метрика на множестве $\mathbf{G}(n, m)$ всех графов с n вершинами и m ребрами, определенная для любых G_1, $G_2 \in \mathbf{G}(n, m)$ как минимальное число *перемещений ребра,* необходимых для преобразования графа G_1 в граф G_2. Оно равно $m - k$, где k – максимальное число ребер общего подграфа графов G_1 и G_2.

Перемещение ребра – один из типов *преобразования ребер,* который задается следующим образом: граф H может быть получен из графа G перемещением ребра, если существуют (не обязательно различные) вершины u, v, w и x в графе G, такие что $uv \in E(G)$, $wx \neq E(G)$ и $H = G - uv + wx$.

Расстояние скачка ребра

Расстояние скачка ребра – расширенная метрика (которая в общем случае может принимать значение ∞) на множестве $\mathbf{G}(n, m)$ всех графов с n вершинами и m

ребрами, определенная для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{G}(n, m)$ как минимальное число *скачков ребра,* необходимых для преобразования графа G_1 в граф G_2.

Скачок ребра – один из типов *преобразования ребер,* который задается следующим образом: граф H может быть получен из графа G с помощью скачка ребра, если существуют четыре различные вершины u, v, w и x в графе G, такие что $uv \in (G), wx \notin E(G)$ и $H = G - uv + wx$.

Расстояние вращения ребра

Расстояние вращения ребра есть метрика на множестве $\mathbf{G}(n, m)$ всех графов с n вершинами и m реберами, определенная для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{G}(n, m)$ как минимальное число *вращений ребра,* необходимых для преобразования графа G_1 в граф G_2.

Вращение ребра – один из типов *преобразования ребер,* который задается следующим образом: граф H может быть получен из графа G с помощью вращения ребра, если существуют различные вершины u, v и w в графе G, такие что $uv \in E(G), wx \notin E(G)$ и $H = G - uv + uw$.

Расстояние вращения дерева

Расстояние вращения дерева – это метрика на множестве $\mathbf{T}(n)$ всех деревьев с n вершинами, определенная для всех $T_1, T_2 \in \mathbf{T}(n)$ как минимальное число *вращений ребер дерева,* необходимых для преобразования T_1 в T_2. Для множества $\mathbf{T}(n)$ расстояние вращения дерева и расстояние вращения ребра могут различаться.

Вращение ребра дерева – это *вращение ребра*, осуществляемое на дереве и дающее в результате дерево.

Расстояние смещения ребра

Расстояние смещения ребра (или **расстояние скольжения ребра**) есть метрика на множестве $\mathbf{G}_c(n, m)$ всех связных графов с n вершинами и m ребрами, задаваемая для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{G}_c(n, m)$ как минимальное число *смещений ребра,* необходимых для преобразования графа G_1 в граф G_2.

Смещение ребра – один из типов *преобразования ребер,* который задается следующим образом: граф H может быть получен из графа G с помощью смещения ребра, если существуют различные вершины u, v и w в графе G, такие что $uv, uv \in E(G), wx \notin E(G)$ и $H = G - uv + uw$. Смещение ребра – это особый тип *вращения ребра* для случая, когда вершины v, w являются смежными в G.

Расстояние смещения ребра может быть получено между любыми графами G и H с компонентами $G_i(1 \le i \le k)$ и $H_i(1 \le i \le k)$, соответственно если G_i и H_i имеют одинаковые порядок и размер.

Расстояние F-вращения

Расстоянием F-вращения называется расстояние на множестве $\mathbf{G}_F(n, m)$ всех графов с n вершинами и m реберами, содержащих подграф, изоморфный данному графу F порядка не менее 2, определенное для всех $G_1, G_2 \in \mathbf{G}_F(n, m)$ как минимальное число F-вращений, необходимых для преобразования графа G_1 в граф G_2.

F-вращение – один из типов *преобразования ребер,* который задается следующим образом: пусть F' есть подграф графа G, изоморфный графу F, и пусть u, v, w – три различные вершины графа G, такие что $u \notin V(F'), v, w \in V(F'), uv \in$ $\in E(G)$ и $uw \notin E(G)$; граф H может быть получен из графа G с помощью *F-вращения* ребра uv в положение uw, если $H = G - uv + uw$..

Расстояние бинарного отношения

Пусть R – нерефлексивное *бинарное отношение* между графами, т.е. $R \subset \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ и существует граф $G \in \mathbf{G}$, такой что $(G, G) \notin R$.

Расстояние бинарного отношения – расширенная метрика (которая в общем случае может принимать значение ∞) на множестве $\mathbf{G}$ всех графов, определенная для любых графов G_1 и G_2 как минимальное число *R-преобразований,* необходимых для трансформации графа G_1 в граф G_2. Мы говорим, что граф H может быть получен из графа G путем *R-преобразования,* если $(H, G) \in R$.

Примером такого расстояния является расстояние между двумя *треугольными вложениями полного графа* (т.е. его клеточными вложениями в поверхность, имеющую только 3-гональные грани), определенное как минимальное число t, такое что вложения изометричны с точностью до замещения t граней.

Метрики преобразования без пересечений

Для подмножества S из $\mathbb{R}^2$ *остовное дерево без пересечений* множества S есть дерево, вершины которого – точки множества S, а ребра – попарно непересекающиеся отрезки прямых.

Метрика перемещения ребра без пересечений ([AAH00]) на множестве $\mathbf{T}_S$ всех остовных деревьев без пересечений множества S определяется для любых $T_1, T_2 \in \mathbf{T}_S$ как минимальное число *перемещений ребра без пересечений,* необходимых для преобразования T_1 в T_2. *Перемещение ребра пересечений – преобразование ребер,* суть которого заключается в добавлении некоторого ребра e в $T \in \mathbf{T}_S$ и уничтожении некоторого ребра f из полученного цикла, так чтобы e и f не пересекались.

Метрика скольжения ребра без пересечений есть метрика на множестве $\mathbf{T}_S$ всех остовных деревьев без пересечений множества S, определенная для любых $T_1, T_2 \in \mathbf{T}_S$ как минимальное число *скольжений ребре без пересечений*, необходимых для преобразования T_1 в T_2. *Скольжение ребра без пересечений* есть одно из *преобразований ребер,* в ходе которого берется некоторое ребро e в $T \in \mathbf{T}_S$ и одна из его концевых точек перемещается вдоль некоторого смежного с e ребра в T так, чтобы не возникло пересечения ребер и "заметания" точек из S (это дает нам вместо e новое ребро f). Скольжение ребра является особым случаем перемещения ребра без пересечений: новое дерево образуется в результате замыкания с помощью f цикла C длины 3 в T и удаления e из C таким образом, чтобы f не попадало внутрь треугольника C.

Расстояния маршрутов коммивояжера

Проблема коммивояжера известна как задача нахождения кратчайшего маршрута для посещения некоторого множества городов. Мы рассмотрим проблему коммивояжера только для неориентированного случая. Для решения проблемы коммивояжера применительно к N городам рассмотрим пространство $\mathcal{T}_N$ маршрутов как множество, состоящее из $\frac{(N-1)!}{2}$ циклических перестановок городов $1, 2, \ldots, N$.

Метрика D на $\mathcal{T}_N$ определяется в терминах различия следующим образом: если маршруты $T, T' \in \mathcal{T}_N$ различаются в m ребрах, то $D(T, T') = m$.

k-OPT преобразование маршрута T получают посредством удаления k ребер из T и построения других ребер. Маршрут T', получаемый из T с использованием *k-OPT* преобразования, называется *k-OPTом* для T. Расстояние d на множестве $\mathcal{T}_N$ определяется в терминах 2-OPT преобразований: $d(T, T')$ есть минимальное число i, для которого существует последовательность из i 2-OPT преобразований, переводящая T в T'.

Для любых $T, T' \in \mathcal{T}_N$ имеет место неравенство $d(T, T') \leq D(T, T')$ (см., например, [MaMo95]).

Расстояния между подграфами

Стандартное расстояние на множестве всех подграфов связного графа $G = (V, E)$ определяется как

$$\min\{d_{\text{path}}(u,v) : u \in V(F),\ \ v \in V(H)\}$$

для любых подграфов F, H графа G. Для любых подграфов F, H сильно связного орграфа $D = (V, E)$ стандартное квазирасстояние определяется как

$$\min\{d_{\text{dpath}}(u,v) : u \in V(F),\ \ v \in V(H)\}.$$

Расстояние вращения ребра на множестве $\mathbf{S}^k(G)$ всех реберно-индуцированных подграфов с k ребрами в связном графе G определяется как минимальное число *вращений ребра,* необходимых для преобразования $F \in \mathbf{S}^k(G)$ в $H \in \mathbf{S}^k(G)$. Говорят, что H получается из F *вращением ребра,* если существуют различные вершины u, v и w в G, такие что $uv \in E(F)$, $uw \in E(G)$ и $H = F - uv + uw$.

Расстояние смещения ребра на множестве $\mathbf{S}^k(G)$ всех реберно-индуцированных подграфов с k ребрами в связном графе G определяется как минимальное число *смещений ребра,* необходимых для преобразования $F \in \mathbf{S}^k(G)$ в $H \in \mathbf{S}^k(G)$. Говорят, что H получается из F *смещением ребра,* если существуют различные вершины u, v и w в G, такие что $uv \in E(F)$, $uw \in E(G)\backslash E(F)$ и $H = F - uv + uw$.

Расстояние перемещения ребра на множестве $\mathbf{S}^k(G)$ всех реберно-индуцированных подграфов с k ребрами в графе G (не обязательно связном) определяется как минимальное число *перемещений ребра,* необходимых для преобразования $F \in \mathbf{S}^k(G)$ в $H \in \mathbf{S}^k(G)$. Говорят, что H получается из F *перемещениям ребра,* если существуют (не обязательно различные) вершины u, v, w и x в G, такие что $uv \in E(F)$, $wx \in E(G)\backslash E(F)$ и $H = F - uv + wx$. Расстояние перемещения ребра – метрика на $\mathbf{S}^k(G)$. Если F и H имеют s общих ребер, то оно равно $k - s$.

Расстояние скачка ребра (которое в общем случае может принимать значение ∞) на множестве $\mathbf{S}^k(G)$ всех реберно-индуцированных подграфов с k ребрами графа G (не обязательно связного) определяется как минимальное число *скачков ребра,* необходимых для преобразования $F \in \mathbf{S}^k(G)$ в $H \in \mathbf{S}^k(G)$. Говорят, что H получается из F *скачком ребра,* если существуют такие четыре различные вершины u, v, w и x в G, что $uv \in E(F)$, $wx \in E(G)\backslash E(F)$ и $H = F - uv + wx$.

15.4. РАССТОЯНИЯ НА ДЕРЕВЬЯХ

Пусть T – корневое дерево, т.е. дерево, у которого одна из его вершин выбрана в качестве *корня. Глубина* вершины v, depth(v) – это число ребер на пути от v к корню. Вершина v называется *родительской* для вершины u, v = par(u), если они смежные и имеет место равенство depth(u) = depth(v) + 1; в этом случае u называется *дочерней* для v. Две вершины называются сестрами, если имеют одного и того же родителя. *Степень выхода* вершины – это количество ее дочерних вершин. $T(v)$ есть поддерево дерева T с корнем в вершине $v \in V(T)$. Если $w \in V(T(v))$, то v является *предком* для w, а w – *потомком* для v; $nca(u, v)$ – *ближайший общий предок* для вершин u и v. Дерево называется *помеченным деревом,* если каждая из его вершин обозначена символом заданного конечного алфавита $\mathcal{A}$. Дерево T называется *упорядоченным деревом,* если задан порядок (слева направо) на вершинах-сестрах.

На множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев допускаются следующие *операции редактирования:*

Переиндексация – изменение метки вершины v.

Удаление – удаление некорневой вершины v с родителем v', так что дочерние элементы v становятся дочерними элементами v'; эти дочерние элементы вставляются вместо v как упорядоченная слева направо подпоследовтельность дочерних элементов v'.

Вставка – дополнение к удалению; вставка вершины v в качестве дочернего элемента v', что делает v родителем последующей подпоследовательности дочерних элементов v'.

Для неупорядоченных деревьев операции редактирования определяются аналогичным образом, но операции вставки и удаления действуют на подмножестве, а не на подпоследовательности.

Предполагается, что существует *функция цены,* определяемая для каждой операции редактирования, а *цена* последовательности операций редактирования определяется как сумма цен этих операций.

Упорядоченное отображение расстояния редактирования – специальная интерпретация операций редактирования. Формально, назовем тройку (M, T_1, T_2) как *упорядоченным отображением расстояния редактирования* дерева T_1 в дерево T_2, $T_1, T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$, если $M \subset V(T_1) \times V(T_2)$ и, для любых (v_1, w_1), $(v_2, w_2) \in M$ выполняется следующее условие: $v_1 = v_2$ тогда и только тогда, когда $w_1 = w_2$ (условие *взаимной однозначности*), v_1 является предком для v_2 тогда и только тогда, когда w_1 является предком w_2 (*условие предков*), v_1 находится слева от v_2 тогда и только тогда, когда w_1 находится слева от w_2 (*условие сестер*).

Говорят, что вершина v в T_1 и T_2 *тронута линией* в M, если v появляется в некоторой паре из M. Пусть N_1 и N_2 – множества вершин деревьев T_1 и T_2 соответственно, которые не тронуты линиями в M. Цена M задается как $\gamma(M) = \sum_{(v,w)\in M} \gamma(v \to w) + \sum_{v\in N_1} \gamma(v \to \lambda) + \sum_{w \in N_2} \gamma(\lambda \to w)$, где $\gamma(a \to b) = \gamma(a, b)$ – *цена* операции редактирования $a \to b$, которая является переиндексацией, если $a, b \in \mathcal{A}$, удалением, если $b = \lambda$, и вставкой, если $a = \lambda$. Здесь символ $\lambda \notin \mathcal{A}$ выступает как специальный *символ пробела,* и γ является метрикой на множестве $\mathcal{A} \cup \lambda$ (исключая значение $\gamma(\lambda, \lambda)$).

Расстояние редактирования дерева

Расстояние редактирования дерева ([Tai79]) на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев определяется для любых $T_1, T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальная цена последовательности операций редактирования (переиндексаций, вставок и удалений), переводящей T_1 в T_2.

В терминах упорядоченного отображения расстояния редактирования это расстояние равно $\min_{(M,T_1,T_2)} \gamma(M)$, где минимум берется по всем упорядоченным отображениям расстояния редактирования (M, T_1, T_2).

Расстояние редактирования дерева можно определить аналогичным образом на множестве всех корневых неупорядоченных деревьев.

Расстояние Селкоу

Расстояние Селкоу (или расстояние нисходящего редактирования, расстояния редактирования 1-степени) есть расстояние на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев, определенное для любых T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальная цена последовательности операций редактирования (переиндексаций, вставок и удалений), переводящей T_1 в T_2, если вставки и удаления распространяются только на листья деревьев ([Selk77]). Корень дерева T_1 должен отображаться в корень дерева T_2 и, если вершина v подлежит удалению (вставке), то поддерево с корнем в v, если таковое имеется, подлежит удалению (вставке).

В терминах упорядоченного отображения расстояния редактирования расстояние Селкоу равно $\min_{(M,T_1,T_2)} \gamma(M)$, где минимум берется по всем отображениям расстояния упорядоченного редактирования (M, T_1, T_2), удовлетворяющим следующему условию: если $(v, w) \in M$, где ни v, ни w не являются корнями, то $(\mathrm{par}(v), \mathrm{par}(w)) \in M$.

Расстояние редактирования с ограничением

Расстояние редактирования с ограничением (или **расстояние регламентированного редактирования**) есть расстояние на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев, определенное для любых T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальная цена последовательности операций редактирования (переиндексаций, вставок и удалений), переводящей T_1 в T_2, с тем ограничением, что непересекающиеся поддеревья должны отображаться на непересекающиеся поддеревья.

В терминах упорядоченного отображения расстояния редактирования расстояние редактирования с ограничением равно $\min_{(M,T_1,T_2)} \gamma(M)$, где минимум берется по всем упорядоченным отображениям расстояния редактирования (M, T_1, T_2), удовлетворяющим следующему условию: для всех (v_1, w_1), (v_2, w_2), $(v_3, w_3) \in M$, $nca(v_1, v_2)$ является собственным предком v_3 тогда и только тогда, когда $nca(w_1, w_2)$ является собственным предком w_3.

Это расстояние эквивалентно **расстоянию редактирования соответственно структуре,** определенному как $\min_{(M,T_1,T_2)} \gamma(M)$, где минимум берется по всем упорядоченным отображениям расстояния редактирования (M, T_1, T_2), удовлетворяющим следующему условию: для всех (v_1, w_1), (v_2, w_2), $(v_3, w_3) \in M$, таких что ни одна из v_1, v_2 и v_3 не является предком для других, $nca(v_1, v_2) = nca(v_1, v_3)$ тогда и только тогда, когда $nca(w_1, w_2) = nca(w_1, w_3)$

Расстояние редактирования единичной цены

Расстояние редактирования единичной цены – расстояние на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев, определенное для любых T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальное число операций редактирования (переиндексацией, вставок и удалений), переводящих T_1 в T_2.

Расстояние выравнивания

Расстояние выравнивания ([JWZ94]) есть расстояние на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев, определенное для любых T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальная *цена выравнивания* T_1 и T_2. Оно соответствует расстоянию регламентированного редактирования, где все вставки должны предшествовать удалениям.

Это означает, что мы вставляем *пробелы,* т.е. вершины, обозначенные *символом пробела* λ, в деревья T_1 и T_2 так, чтобы они стали изоморфны при игнорировании индексов; полученные в результате деревья накладываются друг на друга и дают *выравнивание* T_A, – дерево, в котором каждая вершина получена парой индексов. *Цена* T_A – сумма цен всех пар противоположенных индексов в T_A.

Расстояние разбиений-совмещений

Расстояние разбиений-совмещений ([ChLu85]) есть расстояние на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев, определенное для любых T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальное число разбиений и совмещений вершин, необходимых для преобразования T_1 в T_2.

Расстояние 2-степени

Расстояние 2-степени есть метрика на множестве $\mathbb{T}_l$ всех помеченных деревьев (*помеченных свободных деревьев*), определенная как минимальное взвешенное число операций редактирования (переиндексацией, вставок и удалений), переводящих T_1 в T_2, если любая вставляемая (удаляемая) вершина имеет не более двух соседних вершин. Такая метрика является естественным расширением **расстояния редактирования дерева** и **расстояния Селкоу**.

Филогенетическое X-дерево – неупорядоченное дерево без корня с множеством помеченных листьев X, не имеющее вершин порядка 2. Если каждая внутренняя вершина имеет порядок 3, то дерево называется *бинарным* (или *вполне разрешенным*).

Разрез $A|B$ множества X есть *разбиение* множества X на два подмножества A и B (см. **Полуметрика разреза**). Удаление ребра e из филогенетического X-дерева влечет разрез множества листьев X, называемый *разрезом, ассоциированным* с e.

Метрика Робинзона–Фоулдса

Метрика Робинзона-Фоулдса (или **метрика ближайшего разбиения,** *расстояние разреза*) есть метрика на множестве $\mathbb{T}(X)$ всех филогенетических X-деревьев, определенная как

$$\frac{1}{2}\left|\Sigma(T_1)\Delta\Sigma(T_2)\right| = \frac{1}{2}\left|\Sigma(T_1) - \Sigma(T_2)\right| + \frac{1}{2}\left|\Sigma(T_2) - \Sigma(T_1)\right|.$$

для всех T_1, $T_2 \in \mathbb{T}(X)$, где $\Sigma(T)$ – совокупность всех разрезов X, ассоциированных с ребрами T.

Взвешенная метрика Робинзона–Фоулдса

Взвешенная метрика Робинзона–Фоулдса – метрика на множестве $\mathbb{T}(X)$ всех филогенетических X-деревьев, определенная как

$$\sum_{A|B \in \Sigma(T_1) \cup \Sigma(T_2)} \left|w_1(A \mid B) - w_2(A \mid B)\right|$$

для всех T_1, $T_2 \in \mathbb{T}(X)$, где $w_i = (w(e))_{e \in E(T_i)}$ – совокупность положительных реберных весов X-дерева T_i, $\Sigma(T_i)$ – совокупность всех разрезов X, ассоциированных с ребрами T_i, и $w_i(A|B)$ – вес ребра, ассоциированного с разрезом $A|B$ множества X_i, $i = 1, 2$.

Метрика обмена ближайшими соседями

Метрика обмена ближайшими соседями (или **метрика кроссовера**) есть метрика на множестве $\mathbb{T}(X)$ всех филогенетических X-деревьев, определенная для всех $T_1, T_2 \in \mathbb{T}(X)$ как минимальное число *обменов ближайшими соседями*, необходимых для преобразования T_1 в T_2.

Обмен ближайшими соседями – замена двух поддеревьев в дереве, смежных с одним и тем же внутренним ребром; при этом остальная часть дерева остается без изменений.

Расстояние упрощения и пересадки поддерева

Расстояние упрощения и пересадки поддерева есть метрика на множестве $\mathbb{T}(X)$ всех филогенетических X-деревьев, определенная для всех $T_1, T_2 \in \mathbb{T}(X)$ как минимальное число *упрощений и пересадки поддерева,* необходимых для преобразования T_1 в T_2.

Преобразование упрощения и пересадки поддерева осуществляется в три этапа: сначала выбирается и удаляется ребро uv дерева, тем самым дерево разделяется на два поддерева T_u (содержащее u) и T_v (содержащее v); затем выбирается и подразделяется ребро поддерева T_v, что дает нам новую вершину w; наконец, вершины u и w соединяются ребром, а все вершины степени два удаляются.

Метрика рассечения-восстановления дерева

Метрика рассечения-восстановления дерева – метрика на множестве $\mathbb{T}(X)$ всех филогенетических X-деревьев, определенная для всех $T_1,\ T_2 \in \mathbb{T}(X)$ как минимальное число *преобразований рассечения – восстановления дерева,* необходимых для обращения T_1 в T_2.

Преобразование рассечения – восстановления дерева осуществляется в три этапа: сначала выбирается и удаляется ребро uv дерева, тем самым дерево разделяется на два поддерева T_u (содержащее u) и T_v (содержащее v); затем выбираются и подразделяются ребро поддерева T_v, что дает нам новую вершину w, и ребро поддерева T_u, что дает нам новую вершину z; наконец, вершины w и z соединяются ребром, а все вершины степени два удаляются.

Расстояние квартета

Расстояние квартета ([EMM85]) – расстояние на множестве $\mathbb{T}_b(X)$ всех бинарных филогенетических X-деревьев, определенное для всех $T_1, T_2 \in \mathbb{T}_b(X)$ как число несовпадающих квартетов (из общего числа $\binom{n}{4}$ возможных квартетов) для T_1 и T_2.

Данное расстояние основано на том факте, что для четырех листьев {1, 2, 3, 4} дерева существует только три различных способа их объединения на бинарном поддереве: (12|34), (13|24) или (14|23): символом (12|34) обозначается бинарное дерево с множеством листьев {1, 2, 3, 4}, из которого после удаления внутреннего ребра получаются деревья с множествами листьев {1, 2} и {3, 4}.

Расстояние триплета

Расстоянием триплета ([CPQ96]) называется расстояние на множестве $\mathbb{T}_b(X)$ всех бинарных филогенетических X-деревьев, определенное для всех $T_1, T_2 \in \mathbb{T}_b(X)$ как число троек (из общего числа $\binom{n}{3}$ возможных троек), которые различаются (например, по расположению листа) для T_1 и T_2.

Расстояние совершенного паросочетания

Расстояние совершенного паросочетания – расстояние на множестве $\mathbb{T}_b(X)$ всех корневых бинарных филогенетических X-деревьев с множеством X n помеченных листьев, определенное для любых $T_1, T_2 \in \mathbb{T}_b(X)$ как минимальное число перестановок, необходимых для того, чтобы перевести совершенное паросочетание дерева T_1 в совершенное паросочетание дерева T_2.

Для множества $A = \{1,..., 2k\}$, состоящего из $2k$ точек, *совершенным паросочетанием A называется разбиение* A на k пар. Корневое бинарное филогенетическое дерево с n помеченными листьями имеет корень и $n - 2$ внутренние вершины, отличающихся от корня. Его можно отождествить с совершенным паросочетанием на $2n - 2$ отличающихся от корня вершин с помощью следующего построения: обозначим внутренние вершины числами $n + 1,..., 2n - 2$, поставив наименьший имеющийся индекс в качестве родительской вершины пары помеченных дочерних элементов, из которых один имеет наименьший индекс среди помеченных дочерних элементов; теперь паросочетание осуществляется посредством отслоения по двое дочерних элементов или пар вершин-сестер.

Метрики атрибутивного дерева

Атрибутивным деревом называется тройка (V, E, α), где $T = (V, E)$ – исходное дерево и α – функция, которая ставит в соответствие каждой вершине $v \in V$ вектор атрибутов $\alpha(v)$. Для двух атрибутивных деревьев (V_1, E_1, α) и (V_2, E_2, β) рассмотрим множество всех *изоморфизмов поддеревьев* между ними, т.е. множество всех изоморфизмов f: $H_1 \to H_2$, $H_1 \subset V_1$, $H_2 \subset V_2$ между их *индуцированными поддеревьями.* Если на множестве атрибутов имеется подобность s, то подобность между изоморфными индуцированными под деревьями определяется как $W_s(f) = \sum_{v \in H_1} s(\alpha(v), \beta(f(v)))$. Изоморфизм ϕ с максимальной подобностью $W_s(\phi) = W(\phi)$ называется *изоморфизмом дерева с максимальной подобностью.*

На множестве $\mathbf{T}_{\text{att}}$ всех атрибутивных деревьев используются следующие полуметрики:

1. $\max\{|V_1|, |V_2|\} - W(\phi)$;
2. $|V_1| + |V_2| - 2W(\phi)$;
3. $1 - \dfrac{W(\phi)}{\max\{|V_1|, |V_2|\}}$;
4. $1 - \dfrac{W(\phi)}{|V_1| + |V_2| - W(\phi)}$.

Они становятся метриками на множестве классов эквивалентности атрибутивных деревьев: два атрибутивных дерева (V_1, E_1, α) и (V_2, E_2, β) называются *эквивалентными,* если они *атрибутивно-изоморфны,* т.е. существует изоморфизм g: $V_1 \to V_2$ между деревьями T_1 и T_2, такой что для любой вершины $v \in V_1$ имеется $\alpha(v) = \beta(g(v))$. Тогда $|V_1| = |V_2| = W(g)$.

Расстояние поддерева наибольшего сходства

Расстояние поддерева наибольшего сходства – расстояние на множестве $\mathbf{T}$ всех деревьев, определенное для любых $T_1, T_2 \in \mathbf{T}$ как минимальное число листьев, которые нужно удалить для получения *поддерева наибольшего сходства.*

Поддерево сходства (или *общее упрощенное дерево*) двух деревьев есть дерево, которое может быть получено из обеих деревьев посредством удаления листьев с одинаковым индексом.

Глава 16

Расстояния в теории кодирования

Теория кодирования охватывает вопросы разработки и свойств *кодов с исправлением ошибок* для обеспечения надежной передачи информации по каналам с высоким уровнем шумов в системах связи и устройствах хранения данных. Целью теории кодирования является поиск кодов, обеспечивающих быструю передачу и дескодирование информации, содержащих много значимых кодовых слов и способных исправлять или, по крайней мере, обнаруживать много ошибок. Эти цели являются взаимно исключающими; таким образом, каждое из приложений имеет свой собственный хороший код.

В области коммуникаций *кодом* называется правило для преобразования сообщений (например, писем, слов или фраз) в другую форму или представление, не обязательно того же типа. *Кодирование* – процесс, посредством которого источник (объект) осуществляет преобразование информации в данные, передаваемые затем получателю (наблюдателю), например, системе обработки данных. *Декодирование* является обратным процессом преобразования данных, поступивших от источника, в понятный для получателя вид.

Код с исправлением ошибок – такой код, в котором каждый передаваемый элемент данных подчиняется специальным правилам построения, с тем чтобы отклонения от данного построения в полученном сигнале могли автоматически выявляться и корректироваться. Такая технология используется в компьютерных накопительных устройствах, например в динамической памяти RAM и в системах передачи данных. Задача выявления ошибок решается гораздо легче, чем задача исправления ошибок, и для обнаружения ошибок в номера кредитных карт дополнительно вводятся одна или более "контрольных" цифр. Существуют два основных класса кодов с исправлением ошибок: *блоковые коды* и *сверточные коды.*

Блоковый код (или *равномерный код*) длины n над алфавитом $\mathcal{A}$, обычно над конечным полем $\mathbb{F}_q = \{0,..., q-1\}$, является подмножеством $C \subset \mathcal{A}^n$; каждый вектор $x \in C$ называется *кодовым словом*, $M = |C|$ называется *размером* кода; для данной метрики d на $\mathbb{F}_q^n$ (обычно **хэмминговой метрики** d_H) значение $d^* = d^*(C) = \min_{x,y \in C,\ x \neq y} d(x, y)$ называется **минимальным расстоянием** кода C. *Вес* $w(x)$ кодового слова $x \in C$ определяется как $w(x) = d(x, 0)$. *(n, M, d^*)-код* есть q-значный блоковый код длины n, размера M и с минимальным расстоянием d^*. *Бинарным кодом* называется код над $\mathbb{F}_2$.

Когда кодовые слова выбираются таким образом, чтобы расстояние между ними было максимальным, код называется *кодом с исправлением ошибок,* поскольку незначительно искаженные векторы могут быть восстановлены путем выбора ближайшего кодового слова. Код C является *кодом с исправлением t ошибок* (и *кодом с обнаружением $2t$ ошибок*), если $d^*(C) \geq 2t + 1$. В этом случае каждая *окрестность* $U_t(x) = \{y \in C: d(x, y) \leq t\}$ точки $x \in C$ не пересекается с $U_t(y)$ для любой точки $y \in C$, $y \neq x$. *Совершенный код* – это q-значный $(n, M, 2t + 1)$-код, для которого M сфер $U_t(x)$ с радиусом t и центрами в кодовых словах заполняют полностью все пространство F_q^n без пересечений.

Блоковый код $C \subset F_q^n$ называется *линейным,* если C является векторным подпространством пространства F_q^n. $[n, k]$-код есть k-мерный линейный код $C \subset F_q^n$ (с минимальным расстоянием d^*); он имеет размер q^k, т.е. является (n, q^k, d^*)-кодом. *Кодом Хэмминга* называется линейный совершенный $\left(\frac{q^r-1}{q-1}, \frac{q^r-1}{q-1}-r, 3\right)$-код с исправлением одной ошибки.

$k \times n$ Матрица G со строками, являющимися базисными векторами для линейного $[n, k]$-кода C, называется *порождающей матрицей* кода C. В *стандартном виде* ее можно записать как $(1_k|A)$, где 1_k есть $k \times k$ единичная матрица. Каждое *сообщение* (или *информационный символ, символ источника*) $u = (u_1, \dots, u_k) \in F_q^n$ может быть закодирован путем умножения его (справа) на порождающую матрицу: $uG \in C$. Матрица $H = (-A^T|1_{n-k})$ называется *матрицей проверки на прочность* кода C. Число $r = n - k$ соответствует количеству цифр проверки на четность в коде и называется *избыточностью* кода C. *Информационная скорость* (или *кодовая скорость*) кода C – это число $R = \frac{\log_2 M}{n}$. Для q-значного $[n, k]$-кода $R = \frac{k}{n}\log_2 q$; для бинарного $[n, k]$-кода $R = \frac{k}{n}$.

Сверточный код – такой тип кода с исправлением ошибок, в котором подлежащий кодированию k-битов информационный символ преобразуется в n-битовое кодовое слово, где $R = \frac{k}{n}$ – кодовая скорость $(n \geq k)$, а преобразование является функцией последних m информационных символов, где m – *длина кодового ограничения.* Сверточные коды часто используются для повышения качества радио и спутниковых линий связи. *Код переменной длины* – код с кодовыми словами различной длины.

В отличие от кодов с автоматическим исправлением ошибок, которые предназначены только для повышения надежности передачи данных, *криптографические коды* предназначены для повышения защищенности линий связи. В криптографии отправитель использует *ключ* для шифрования сообщения до его передачи по незащищенным каналам связи, а авторизованный получатель на другом конце использует ключ для расшифровки полученного сообщения. Чаще всего алгоритмы сжатия и коды с исправлением ошибок используются совместно с криптографическими кодами, что обеспечивает одновременно эффективную и надежную связь без ошибок передачи данных и защиту данных от несанкционированного доступа. Зашифрованные сообщения, которые, более того, могут быть скрыты в тексте, изображении и т.п., называются *стеганографическими сообщениями*.

16.1. МИНИМАЛЬНОЕ РАССТОЯНИЕ И ЕГО АНАЛОГИ

Минимальное расстояние

Для кода $C \subset V$, где V – n-мерное векторное пространство, снабженное метрикой d, **минимальное расстояние** $d^* = d^*(C)$ кода C определяется как

$$\min_{x,y \in C, x \neq y} d(x, y).$$

Метрика d зависит от природы подлежащих исправлению ошибок в соответствии с предназначением кода. Для обеспечения требуемых характеристик по корректировке необходимо применять коды с максимальным количеством кодовых слов. Наиболее широко исследованными в этом плане кодами являются *q-значные блоковые коды* в **хэмминговой метрике** $d_H(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i, i = 1, ..., n\}|$.

Для *линейных кодов* C минимальное расстояние $d^*(C) = w(C)$, где $w(C) = \min\{w(x): x \in C\}$, называется *минимальным весом* кода C. Поскольку матрица H матрица проверена честность $[n, k]$-кода C имеет $\mathrm{rank}(H) \leq n - k$ независимых столбцов, то $d^*(C) \leq n - k + 1$ (*верхняя граница Синглтона*).

Двойственное расстояние

Двойственное расстояние $d^\perp$ *линейного* $[n, k]$-кода $C \subset \mathbb{F}_q^n$ является **минимальным расстоянием** *двойственного кода* $C^\perp$ для C.

Двойственный код $C^\perp$ для кода C определяется как множество всех векторов $\mathbb{F}_q^n$, ортогональных каждому кодовому слову из C: $C^\perp = \{v \in \mathbb{F}_q^n : \langle v, u \rangle = 0$ для любого $u \in C\}$. Код $C^\perp$ является линейным $[n, n - k]$-кодом. $(n - k) \times n$ порождающая матрица для $C^\perp$ является матрицей проверки на четность для C.

Расстояние ваr-произведения

Для линейных кодов C_1 и C_2, имеющих длину n с $C_2 \subset C_1$, их *bar-произведение* $C_1|C_2$ есть линейный код длины $2n$, определенный как $C_1 | C_2 = \{x | x + y : x \in C_1, y \in C_2\}$.

Расстояние bar-произведения – минимальное расстояние $d^*(C_1|C_2)$ bar-произведения $C_1 | C_2$.

Расстояние дизайна

Линейный код называется *циклическим кодом*, если все циклические сдвиги кодового слова также принадлежат C, т.е. если для любого $(a_0, ..., a_{n-1}) \in C$ вектор $(a_{n-1}, a_0, ..., a_{n-2}) \in C$. Удобно отождествлять кодовое слово $(a_0, ..., a_{n-1})$ с многочленом $c(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1}$, тогда каждый циклический $[n, k]$-код может быть представлен как главный идеал $\langle g(x) \rangle = \{r(x) g(x) : r(x) \in R_n\}$ кольца $R_n = \mathbb{F}_q(x)/(x^n - 1)$, порожденный многочленом $g(x) = g_0 + g_1 x + ... + x^{n-k}$, называемым *порождающим многочленом* кода C.

Для элемента α порядка n в конечном поле $\mathbb{F}_{q^s}$ $[n, k]$-*код Бозе–Чодхури–Хоквенгема,* имеющий **расстояние дизайна** d, является циклическим кодом длины n, порожденным многочленом $g(x)$ в $\mathbb{F}_q(x)$ степени $n - k$, имеющим корни $\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{d-1}$. Минимальное расстояние d^* кода Бозе–Чодхури–Хоквенгема с нечетным расстоянием дизайна d больше или равно d.

Код Рида–Соломона – это код Бозе–Чодхури–Хоквенгема с $s = 1$. Порождающим многочленом кода Рида–Соломона с расстоянием дизайна d является многочлен $g(x) = (x - \alpha)...(x - \alpha^{d-1})$ степени $n - k = d - 1$, т.е. для кода Рида–Соломона расстояние дизайна $d = n - k + 1$ и минимальное расстояние $d^* \geq d$. Поскольку для линейного $[n, k]$-кода минимальное расстояние $d^* \leq n - k + 1$ (*верхняя граница Синглтона*), код Рида–Соломона обладает минимальным расстоянием $d^* = n - k + 1$ и достигает верхней границы Синглтона. В проигрывателях компакт-дисков преимущественно используется система двойной коррекции ошибок (255, 251,5) кода Рида–Соломона над полем $\mathbb{F}_{256}$.

Расчетное минимальное расстояние Гоппы

Расчетное минимальное расстояние Гоппы ([Gopp71]) – нижняя граница $d^*(m)$ для минимального расстояния *одноточечных геометрических кодов Гоппы* (или кодов *алгебраической геометрии*) $G(m)$. Для кода $G(m)$, ассоциированного с делителями D и mP, $m \in \mathbb{N}$ гладкой проективной абсолютно неприводимой алгебраической кривой рода $g > 0$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$, мы имеем равенство $d^*(m) = m + 2 - 2g$, если $2g - 2 < m < n$.

Для кода Гоппы $C(m)$ структура последовательности пропусков в P может позволить получить более точную нижнюю границу минимального расстояния (см. **расстояние Фенга-Рао**).

Расстояние Фенга–Рао

Расстояние Фенга-Рао $\delta_{FR}(m)$ – нижняя граница для минимального расстояния *одноточечных геометрических кодов Гоппы* $G(m)$, которое лучше **расчетного минимального расстояния Гоппы.** Используемый метод кодирования Фенга–Рао для кода $C(m)$ декодирует ошибки до половины расстояния Фенга–Рао $\delta_{FR}(m)$ и увеличивает возможности по исправлению ошибок для одноточечных геометрических кодов Гоппы.

Формально расстояние Фенга–Рао определяется следующим образом. Пусть S будет *числовая полугруппа,* т.е. подполугруппа S полугруппы $\mathbb{N} \cup \{0\}$, такая что *род* $g = |\mathbb{N} \cup \{0\} \setminus S|$ полугруппы S является конечным, и $0 \in S$. **Расстояние Фенга–Рао** на S есть функция $\delta_{FR} : S \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, такая что $\delta_{FR}(m) = \min\{\nu(r) : r \geq m, r \in S\}$, где $\nu(r) = |\{(a,b) \in S^2 : a + b = r\}|$. Обобщенное ***r*-е расстояние Фенга–Рао** на S определяется как $\delta^r_{FR}(m) = \min\{\nu[m_1, \ldots, m_r] : m \leq m1 < \ldots < m_r, m_i \in S\}$, где $\nu[m_1, \ldots, m_r] = |\{a \in S : m_i - a \in S$ для некоторого $i = 1, \ldots, r\}|$. Тогда имеем $\delta_{FR}(m) = \delta^1_{FR}(m)$ (см., например, [FaMu03]).

Свободное расстояние

Свободное расстояние – минимальный ненулевой *вес Хэмминга* любого кодового слова в *сверточном коде* или *коде переменной длины*.

Формально, k-е **минимальное расстояние** d^*_k сверточного кода или кода переменной длины есть наименьшее хэммингово расстояние между начальными отрезками длины k любых двух кодовых слов, которые различаются на данных начальных отрезках. Последовательность $d^*_1, d^*_2, d^*_3, \ldots (d^*_1 \leq d^*_2 \leq d^*_3 \leq \ldots)$ называется *расстоянным профилем* кода. Свободное расстояние сверточного кода или кода переменной длины равно $\max_l d^*_l \lim_{l \to \infty} d^*_l = d^*_\infty$.

Эффективное свободное расстояние

Турбо-кодом называется длинный *блоковый код*, в котором имеется L входящих битов и каждый из этих битов кодируется q раз. При j-м кодировании L битов пропускаются через блок перестановок P_j, а затем кодируются блоковым $[N_j, L]$ кодером (*кодером кодовых фрагментов*), который может рассматриваться как $L \times N_j$ матрица. Тогда искомым турбо-кодом является *линейный* $[N_1 + \ldots + N_q, L]$-код (см., например, [BGT93]).

i-взвешенное минимальное расстояние входа $d^i(C)$ турбо-кода C есть минимальный вес для кодовых слов, соответствующих входящим словам веса i. **Эффективным свободным расстоянием** кода C показывается его 2-*взвешенное минималь-*

ное расстояние входа $d^2(C)$, т.е. минимальный вес для кодовых слов, соответствующих входящим словам веса 2.

Распределение расстояний

Для кода C над конечным метрическим пространством (X, d) с диаметром $\mathrm{diam}(X, d) = D$ **распределение расстояний** для C есть $(D + 1)$-вектор $(A_0,..., A_D)$, где $A_i = \frac{1}{|C|}|\{(c,c')\in C^2 : d(c,c') = i\}|$. Таким образом, мы рассматриваем величины $A_i(c)$ – число кодовых слов на расстоянии i от кодового слова c, и берем A_i как среднее от $A_i(c)$ по всем $c \in C$. $A_0 = 1$ и, если $d^* = d^*(C)$ является минимальным расстоянием для C, то $A_1 = ...A_{d^*-1} = 0$.

Распределение расстояний для кода с заданными параметрами важно, в частности, для оценки вероятности ошибки декодирования при применении различных алгоритмов декодирования. Кроме того, это может помочь при определении свойств кодовых структур и доказательстве невозможности существования определенных кодов.

Расстояние однозначности

Расстоянием однозначности криптосистемы (Шеннон, 1949) называется минимальная длина шифротекста, необходимая для уверенности в том, что существует только единственный смысловой вариант его расшифровки. Для классических криптографических систем с фиксированным ключевым пространством расстояние однозначности аппроксимируется по формуле $H(K)/D$, где $H(K)$ – *энтропия ключевого пространства* (грубо говоря, $\log_2 N$, где N – количество ключей), а D измеряет избыточность резервирования исходного языка открытого текста в битах на букву.

Криптосистема обеспечивает идеальную секретность, если ее расстояние однозначности бесконечно. Например, одноразовые блокноты обеспечивают идеальную секретность; именно такие коды используются для связи по "красному телефону" между Кремлем и Белым домом.

16.2. ОСНОВНЫЕ РАССТОЯНИЯ НА КОДАХ

Расстояние арифметического кода

Арифметическим кодом (или *кодом с исправлением арифметических ошибок*) называется конечное подмножество C множества $\mathbb{Z}$ целых (обычно неотрицательных) чисел. Он предназначается для контроля функционирования *блока суммирования* (модуля сложения). Когда сложение чисел осуществляется в двоичной системе счисления, то единственный сбой в работе блока суммирования ведет к изменению результата на некоторую степень двойки, т.е., к одной *арифметической ошибке.* Формально одна *арифметическая ошибка* на $\mathbb{Z}$ определяется как преобразование числа $n \in \mathbb{Z}$ в число $n = n \pm 2^i$, $i = 1, 2,...$.

Расстояние арифметического кода есть метрика на $\mathbb{Z}$, определенная для любых $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ как минимальное число *арифметических ошибок*, переводящих n_1 в n_2. Его можно записать как $w_2(n_1 - n_2)$, где $w_2(n)$ есть арифметический 2-вес n, т.е. наименьшое возможное число ненулевых коэффициентов в представлении $n = \sum_{i=0}^{k} e_i 2^i$, где e_i 0, ±1 и k – некоторое неотрицательное число. Именно, для каждого n имеется единственное такое представление с $e_k \neq 0$, $e_i e_{i+1} = 0$ для всех

$i = 0,..., k - 1$, которое обладает наименьшим числом ненулевых коэффициентов (см. **Арифметическая метрика *r*-нормы**, гл. 12).

Расстояние Шармы–Кошика

Пусть $q \geq 2$ и $m \geq 2$. *Разбиение* $\{B_0, B_1,..., B_{q-1}\}$ множества $\mathbb{Z}_m$ называется *разбиением Шармы–Кошика,* если выполняются следующие условия:

1) $B_0 = \{0\}$;
2) для любого $i \in \mathbb{Z}_m$, $i \in B_s$ тогда и только тогда, когда $m - i \in B_s$, $s = 1, 2,..., q - 1$;
3) если $i\in B_s$, $j \in B_t$ и $s > t$, то $\min\{i, m - i\} > \{j, m - j\}$;
4) если $s > t$, $s, t = 0, 1,..., q - 1$, то $|B_s| \geq |B_t|$, кроме $s = q - 1$, когда $|B_{q-1}| \geq \frac{1}{2}|B_{q-2}|$.

Для разбиения Шармы–Кошика множества $\mathbb{Z}_m$ *вес Шармы–Кошика* $w_{SK}(x)$ любого элемента $x \in \mathbb{Z}_m$ определяется как $w_{SK}(x) = i$, если $x \in B_i$, $i \in \{0, 1,..., q - 1\}$.

Расстояние Шармы–Кошика (см., например, [ShKa97]) есть метрика на $\mathbb{Z}_m$, определенная как

$$w_{SK}(x - y).$$

Расстояние Шармы–Кошика на $\mathbb{Z}_m^n$ определяется как $w_{SK}(x - y)$, где для $x = (x_1,..., x_n) \in \mathbb{Z}_m^n$ мы имеем $w_{SK}^n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{SK}(x_i)$.

Хэммингова метрика и метрика Ли возникают как два частных случая разбиений вышеназванного типа: $P_H = \{B_0, B_1\}$, где $B_1 = \{1, 2,...., q - 1\}$ и $PL = \{B_0, B_1,..., B_{\lfloor q/2 \rfloor}\}$, где $B_i = \{i, m - i\}$, $i = 1,..., \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$.

Расстояние абсолютного суммирования

Расстояние абсолютного суммирования (или *расстояние* Ли) – **метрика Ли** на множестве $\mathbb{Z}_m^n$, определенная как

$$w_{Lee}(x - y),$$

где $w_{SK}(x) = \sum_{i=1}^{n} \min\{x_i, m - x_i\}$ является *весом Ли* элемента $x = (x_1,..., x_n) \in \mathbb{Z}_m^n$.

Если множество $\mathbb{Z}_m^n$ снабжено расстоянием абсолютного суммирования, то подмножество C множества $\mathbb{Z}_m^n$ называется *кодом расстояния Ли.* Коды расстояния Ли применяются в каналах связи с фазовой модуляцией и с многоуровневой квантованной импульсной модуляцией, а также в тороидальных сетях связи. Важнейшими кодами расстояния Ли являются негациклические коды.

Расстояние Манхейма

Пусть $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi\colon a, b \in \mathbb{Z}\}$ – множество *целых гауссовых чисел.* Пусть $\pi = a + bi (a > b > 0)$ – г*ауссово простое число.* Это значит, что $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = p$, где $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ есть простое число, или что $\pi = p + 0 \cdot i = p$, где $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ есть простое число.

Расстояние Манхейма – это расстояние на $\mathbb{Z}[i]$, определенное для любых двух целых гауссовых чисел x и y как сумма абсолютных значений действительной и мнимой частей разности $x - y (\mathrm{mod}\, \pi)$. Приведение по модулю перед суммированием абсолютных значений действительной и мнимой частей – разница между **метрикой Манхэттена** и расстоянием Манхейма.

Элементы конечного поля $\mathbb{F}_p = \{0, 1,..., p - 1\}$ для $p \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, $p = a^2 + b_2$ и элементы конечного поля $\mathbb{F}_{p^2}$ для $p \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$, $p = a$ могут отображаться на подмножество целых гауссовых чисел с использованием функции $\mu(k) = k - \left[\frac{k(a-bi)}{p}\right](a+bi)$, $k = 0,..., p-1$, где [.] обозначает округление до ближайшего целого гауссового числа. Множество выбранных целых гауссовых чисел с минимальными нормами Галуа называется созвездием. Такое представление дает новый способ построения кодов для двумерных сигналов. Расстояние Манхейма было введено для того, чтобы обеспечить применение к QAM-подобным сигналам методов алгебраического декодирования. Для кодов над созвездиями гексагональных сигналов может быть применена аналогичная метрика на множестве *целых чисел Эйнштейна–Якоби.* Она является удобной для блоковых кодов над тором (см., например, [Hube93], [Hube94]).

Расстояние упорядоченного множества

Пусть $(V_n, \preceq)$ – *упорядоченное множество* на $V_n = \{1,..., n\}$. Подмножество I множества V_n называется *идеалом,* если $x \in I$ и из условия $y \preceq x$ следует, что $y \in I$. Если $J \subset V_n$, то (J) – наименьший идеал множества V_n, содержащий J. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{F}_q^n$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$. *P-вес* элемента $x = (x_1,..., x_n) \in \mathbb{F}_q^n$ определяется как кардинальное число наименьшего идеала множества V_n, содержащего *несущее множество* x: $w_p(x) = |\langle\mathrm{supp}(x)\rangle|$, где $\mathrm{supp}(x) = \{i: x_i \neq 0\}$. **Расстояние упорядоченного множества** (см. [BGL95]) есть метрика на $\mathbb{F}_q^n$, определенная как

$$w_P(x - y).$$

Если $\mathbb{F}_q^n$ снабжено расстоянием упорядоченного множества, то подмножество C множества $\mathbb{F}_q^n$ называется *кодом упорядоченного множества.* Если V_n образует цепь $1 \leq 2 \leq ... \leq n$, то линейный код C размерности k, состоящий из всех векторов $(0,...,0,a_{n-k+1},...,a_n) \in \mathbb{F}_q^n$, является совершенным кодом упорядоченного множества с минимальным расстоянием (упорядоченного множества) $d_P^*(C) = n - k + 1$. Если V_n образует антицепь, то расстояние упорядоченного множества совпадает с хемминговой метрикой.

Расстояние ранга

Пусть $\mathbb{F}_q$ – конечное поле, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ – расширение степени m поля $\mathbb{F}_q$ и $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n$ – векторное пространство размерности n над $\mathbb{K}$. Для любого $a = (a_1,..., a_n) \in \mathbb{E}$ его *ранг*, $\mathrm{rank}(a)$, определяется как размерность векторного пространства над $\mathbb{F}_q$, порождаемого множеством $\{a_1,..., a_n\}$. **Расстояние ранга** есть метрика на $\mathbb{E}$, определенная как

$$\mathrm{rank}(a - b).$$

Поскольку расстояние ранга между двумя кодовыми словами не больше, чем хэммингово расстояние между ними, для любого кода $C \subset \mathbb{E}$ его минимальное расстояние (ранга) $d^*_{RK}(C) \le \min\{m, n - \log_{q^m} |C| + 1\}$. Код C с $d^*_{RK}(C) = n - \log_{q^m} |C| + 1$, $n < m$, называется *кодом Габидулина* (см. [Gabi85]). Код C с $d^*_{RK}(C) = m$, $m \le n$, называется *кодом расстояния полного ранга*. Такой код имеет не более q^n элементов. *Максимальным кодом расстояния полного ранга* показывается код расстояния полного ранга с q^n элементами; он существует тогда и только тогда, когда m делит n.

Метрики Габидулина–Симониса

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{F}_q^n$ (над конечным полем $\mathbb{F}_q$) и конечное семейство $F = \{F_i\colon i \in I\}$ его подмножеств, таких что $\bigcup_{i \in I} F_i = \mathbb{F}_q^n$. Не ограничивая общности, можно считать, что F – антицепь линейных подпространств $\mathbb{F}_q^n$. *F-вес* w_F вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n$ определяется как кардинальное число наименьшего подмножества J из I, такого что $x \in \bigcup_{i \in I} F_q^n$.

Метрика Габидулина–Симониса (или ***F*-расстояние,** см. [GaSi98]) есть метрика на $\mathbb{F}_q^n$, определенная как

$$w_F(x - y).$$

Хэммингова метрика соответствует случаю, когда F_i, $i \in I$ образуют стандартный базис. **Метрика Вандермонда** – это F-расстояние с F_i, $i \in I$, которые являются столбцами обобщенной матрицы Вандермонда. Метриками Габидулина–Симониса являются также: **расстояние ранга**, *расстояние b-пакета*, *комбинаторные метрики* Габидулина (см. **Расстояние упорядоченного сомножества**).

Расстояние Розенблюма–Цфасмана

Пусть $Mm,n(F_q)$ – множество всех $m \times n$ матриц с элементами из конечного поля F_q (в общем случае из любого конечного алфавита $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_q\}$). *Норма Розенблюма–Цфасмана* $\|\cdot\|_{RT}$ на $M_{m,n}(F_q)$ определяется следующим образом: если $m = 1$ и $a = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in M_{1,n}$, то $\|0_{1,n}\|_{RT} = 0$ и $\|a\|_{RT} = \max\{i \,|\, \xi_i \ne 0\}$ для $a \ne 0_{1,n}$; если $A = (a_1, \ldots, a_m)^T \in M_{m,n}(F_q)$, $a_j \in M_{1,n}(F_q)$, $1 \le j \le m$, то $\|A\|_{RT} = \sum_{j=1}^{m} \|a_j\|_{RT}$.

Расстояние Розенблюма–Цфасмана ([RoTs96]) есть метрика (более того, **ультраметрика**) на $M_{m,n}(F_q)$, определенная как

$$\|A - B\|_{RT}.$$

Для каждого матричного кода $C \subset M_{m,n}(F_q)$ с q^k элементами минимальное расстояние (Розенблюма–Цфасмана) $d^*_{RT}(C) \le mn - k + 1$. Коды, на которых достигается равенство, называются *разделительными кодами с максимальным расстоянием.*

Наиболее часто используемым расстоянием между кодовыми словами матричного кода $C \subset M_{m,n}(F_q)$ является **хэммингова метрика** на $M_{m,n}(F_q)$, определенная как $\|A - B\|_H$, где $\|A\|_H$ – *вес Хэмминга* матрицы $A \in M_{m,n}(F_q)$, т.е. число ненулевых элементов матрицы A.

Расстояние взаимообмена

Расстояние взаимообмена (или *расстояние свопа*) есть метрика на коде $C \subset \mathcal{A}^n$ над алфавитом $\mathcal{A}$, определенная для любых $x, y \in C$ как минимальное число *свопов* (*транспозиций*), т.е. перестановок смежных пар символов, необходимое для преобразования x в y.

Расстояние ACME

Расстояние ACME – это метрика на коде $C \subset \mathcal{A}^n$ над алфавитом $\mathcal{A}$, определенная как

$$\min\{d_H(x,y), d_I(x,y)\},$$

где d_H – хэммингова метрика, а d_I – расстояние перестановок.

Расстояние вставки-удалени

Пусть W – множеством всех слов над алфавитом $\mathcal{A}$. *Удаление* буквы в слове $\beta = b_1...b_n$ длины n есть преобразование β в слово $\beta' = b_1...b_{i-1}b_{i+1}...b_n$ длины $n - 1$. *Вставка* буквы в слово $\beta = b_1...b_n$ длины n есть преобразование β в слово $\beta'' = b_1...b_i b b_{i+1}...b_n$ длины $n + 1$.

Расстояние вставки-удаления (или **расстояние кодов с исправлением удалений и вставок**) есть метрика на W, определенная для любых $\alpha, \beta \in W$ как минимальное число удалений и вставок букв, преобразующих α в β.

Код C с исправлением удалений и вставок – произвольное конечное подмножество множества W. Примером такого кода является множество слов $\beta = b_1...b_n$ длины n над алфавитом $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, для которого $\sum_{i=1}^{n} ib_i \equiv 0(\operatorname{mod} n+1)$. Количество слов в этом коде равно $\frac{1}{2(n+1)}\sum_k \phi(k)2^{(n+1)/k}$, где сумма берется по всем нечетным делителям k числа $n + 1$, а ϕ – *функция Эйлера*.

Интервальное расстояние

Интервальное расстояние (см., например, [Bata95]) – метрика на конечной группе $(G, +, 0)$, определенная как

$$w_{\text{int}}(x - y),$$

где $w_{\text{int}}(x)$ – *интервальный вес* на G, т.е. *норма группы,* значения которой являются последовательными неотрицательными целыми числами $0,..., m$. Это расстояние используется в *групповых кодах* $C \subset G$.

Метрика Фано

Метрикой Фано называется *метрика декодирования,* предназначенная для определения наилучшей возможной последовательности применительно к *алгоритму Фано последовательного декодирования сверточных кодов.*

Сверточный код – код с исправлением ошибок, в котором каждый k-бит подлежащего кодированию информационного символа преобразуется в n-битов кодовое слово, где $R = \frac{k}{n}$ есть кодовая скорость ($n \geq k$), а преобразование – функция последних m информационных символов. Линейный, не зависящий от времени декодер (*фиксированный сверточный декодер*) отображает информационный символ

$u_i \in \{u_1, ..., u_N\}$, $u_i = (u_{i1}, ..., u_{ik})$, $u_{ij} \in \mathbb{F}_2$ кодовое слово $x_i \in \{x_1, ..., x_N\}$, $x_i = (x_{i1}, ..., x_{in})$, $x_{ij} \in \mathbb{F}_2$ таким образом, что на выходе получается код $\{x_1, ..., x_N\}$ из N кодовых слов с вероятностями $\{p(x_1), ..., p(x_N)\}$. Последовательность l кодовых слов формирует *поток* (или *путь*) $x = x_{[1,l]} = \{x_1, ..., x_l\}$, который передается по *дискретным каналам без памяти* и поступает на приемник в виде последовательности $y = y_{[1,l]}$. В задачу декодера, предназначенного для минимизации вероятности ошибок в последовательности, входит поиск последовательности, которая максимально увеличивает общую вероятность входящей и исходящей последовательностей $p(x, y) = p(y \mid x) \cdot p(x)$. Обычно достаточно найти процедуру максимизации $p(y \mid x)$, и декодер, всегда выбирающий в качестве своей оценки одну из последовательностей, максимизирующих эту величину (или, эквивалентно, **метрика Фано**), называется *декодером максимального правдоподобия.*

Грубо говоря, каждый код можно считать деревом, у которого каждая ветвь является отдельным кодовым словом. Декодер начинает работу с первой вершины дерева и рассчитывает метрику ветви для каждой из возможных ветвей, определяя как наилучшую ту, ветвь которая соответствует кодовому слову x_j, обладающему наибольшей метрикой ветви $\mu F(x_j)$. Эта ветвь добавляется к пути, и алгоритм продолжается с новой вершины, представляющей сумму предыдущей вершины и количества битов в текущем наилучшем кодовом слове.

Посредством процесса итерации до конечной вершины дерева алгоритм прокладывает наиболее вероятный путь. В этом построении **битовая метрика Фано** определяется как

$$\log_2 \frac{p(y_i \mid x_i)}{p(y_i)} - R,$$

метрика ветви Фано определяется как

$$\mu_F(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\log_2 \frac{p(y_i \mid x_{ji})}{p(y_i)} - R \right),$$

а **метрика пути Фано** – как

$$\mu_F(x_{[1,l]}) = \sum_{j=1}^{l} \mu_F(x_j),$$

где $p(y_i \mid x_{ji})$ – вероятности перехода каналов, $p(y_i) = \sum_{xm} p(x_m) p(y_i \mid x_m)$ – распределение вероятностей выходных данных при заданных входных данных (усредненное по всем входным символам) и $R = \frac{k}{n}$ – кодовая скорость.

Для декодера с "жестким" решением $p(y_i = 0 \mid x_j = 0) = p$, $0 < p < \frac{1}{2}$ метрику Фано для пути $x_{[1,l]}$ можно записать как

$$\mu_F(x_{[1,l]}) = -\alpha d_H(y_{[1,l]}, x_{[1,l]}) + \beta \cdot l \cdot n,$$

где $\alpha = -\log_2 \frac{p}{1-p} > 0$, $\beta = 1 - R + \log_2(1-p)$ и d_H – хэммингова метрика.

Обобщенная метрика Фано для последовательного декодирования определяется как

$$\mu_F^w(x_{[1,l]}) = \sum_{j=1}^{ln} \left(\log_2 \frac{p(y_i \mid x_j)^w}{p(y_j)^{1-w}} - wR \right),$$

$0 \le w \le 1$. Когда $w = 1/2$, обобщенная метрика Фано сводится к метрике Фано с мультипликативной константой 1/2.

Метрическая рекурсия MAP декодирования

Максимальная апостериорная оценка последовательности или *MAP декодирование для кодов переменной длины,* использующая алгоритм Витерби, основана на **метрической рекурсии**

$$\Lambda_k^{(m)} = \Lambda_{k-1}^{(m)} + \sum_{n=1}^{l_k^{(m)}} x_{k,n}^{(m)} \log_2 \frac{p(y_{k,n} \mid x_{k,n}^{(m)} = +1}{p(y_{k,n} \mid x_{k,n}^{(m)} = -1} + 2\log_2 p(u_k^{(m)}),$$

где $\Lambda_k^{(m)}$ – **метрика ветви** для ветви m в период времени (уровень) k; $x_{k,n}$ – n-й бит кодового слова с $l_k^{(m)}$ битами, помеченных на каждой ветви; $y_{k,n}$ – соответствующий принятый "мягкий" бит; u_k^m – исходные символы ветви m в период k, и при предположении статистической независимости исходных символов вероятность $p(u_k^{(m)})$ эквивалентна вероятности исходного символа, помеченного на ветви m, которая известна или рассчитывается. Метрический инкремент рассчитывается для каждой ветви, и наибольшее значение, при использовании логарифмического значения правдоподобия каждого состоянияиспользуется для дальнейшей рекурсии. Декодер сначала вычисляет метрику на всех ветвях, и затем соответствующая последовательность с наибольшей метрикой ветви выбирается начиная с заключительного состояния.

Глава 17

РАССТОЯНИЯ И ПОДОБНОСТИ В АНАЛИЗЕ ДАННЫХ

Множество данных – конечное множество, состоящее из m последовательностей $(x_1^j,...,x_n^j)$, $j \in \{1,...,m\}$ длины n. Значения $x_i^1,...,x_i^m$ представляют *атрибут* S_i. Он может быть *числовым,* в том числе *непрерывным* (действительные числа) и *двоичным* (да/нет выражается как 1/0), *ординальным* (числами указывается только ранг) или *номинальным* (неупорядоченным).

Кластерный анализ (или *классификация, таксономия*, *распознавание образов*) представляет собой разбиение данных A на относительно малое число *кластеров,* т.е. таких множеств объектов, что (по отношению к выбранной мере расстояния) объекты, насколько это возможно, "близки", если принадлежат одному и тому же кластеру, и "далеки", если принадлежат разным кластерам, и дальнейшее подразделение на кластеры ослабит вышеуказанные условия.

Рассмотрим три типичных случая. В приложениях, связанных с *выборкой информации,* узлы одноранговой базы данных экспортируют информацию (совокупность текстовых документов); каждый документ характеризуется вектором из $\mathbb{R}^n$. В *запросе* пользователя содержится вектор $x \in \mathbb{R}^n$, и пользователю необходимы все документы базы данных, *имеющие отношение* к этому запросу, т.е. принадлежащие *шару* в $\mathbb{R}^n$ с центром в x, фиксированного радиуса и подходящей функцией расстояния. *В группировке записей,* каждый документ (запись в базе данных) представлен вектором частотности термина $x \in \mathbb{R}^n$, и требуется определить семантическую значимость синтаксически разных записей. В *экологии,* если вектора x, y обозначают *распределения численности видов,* полученные двумя методами, выборки данных (т.е. x_j, y_j – числа индивидов вида j, полученные в соответствующей выборке), то требуется определить меру расстояния между x и y для сравнения двух методов. Зачастую данные организуются сначала в виде **метрического дерева**, т.е. в виде дерева, индексированного элементами метрического пространства.

После выбора расстояния d между объектами **метрика линкиджа,** т.е. расстояние между кластерами $A = \{a_1,..., a_m\}$ и $B = \{b_1,..., b_n\}$, обычно определяется как одно из следующих:

– **усредненная линкидж:** среднее значение расстояний между всеми членами этих кластеров, т.е. $\frac{\sum_i \sum_j d(a_i, b_j)}{mn}$;

– **одинарный линкидж:** расстояние между ближайшими членами этих кластеров, т.е. $\min_{ij} d(a_i, b_j)$;

– **полный линкидж:** расстояние между самыми удаленными друг от друга членами этих кластеров, т.е. $\min_{ij} d(a_i, b_j)$;

– **линкидж центроидов:** расстояние между центроидами (центрами тяжести) этих кластеров, т.е. $\|\tilde{a}-\tilde{b}\|_2$, где $a = \frac{\sum_i a_i}{m}$ и $b = \frac{\sum_i b_i}{n}$;

– линкидж варда: расстояние $\sqrt{\frac{\min}{m+n}}\|\tilde{a}-\tilde{b}\|_2$.

Многомерное шкалирование – техника, применяемая в области поведенческих и социальных наук для исследования объектов или людей. Вместе с кластерным анализом она базируется на использовании расстояний. Однако при многомерном шкалировании, в отличие от кластерного анализа, процесс начинается с некоторой $m \times m$ матрицы D расстояний между объектами и затем (итерационно) ищется репрезентация объектов в $\mathbb{R}^n$ с малым n, такая что их матрица евклидовых расстояний имеет минимальное квадратичное отклонение от исходной матрицы D.

В процессе анализа данных применяются многие **подобности**; их выбор зависит от характера данных и пока точной наукой не является. Ниже приводятся основные из этих подобностей и расстояний.

Для двух объектов, представленных ненулевыми векторами $x = (x_1,..., x_n)$ и $y = (y_1,..., y_n)$ из $\mathbb{R}^n$, в данной главе используются следующие обозначения:

$\sum x_i$ означает $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

1_F – *характеристическая функция* события F: $1_F = 1$, если F имеет место и $1_F = 0$, если нет.

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$ – обычная евклидова норма на $\mathbb{R}^n$.

$\frac{\sum x_i}{n}$, т.е. *среднее значение* компонента x, обозначается как $\bar{x}$. Так, $\bar{x} = \frac{1}{n}$, если x является вектором частотности (*дискретным распределением вероятностей*), т.е. все $x_i \geq 0$, $\sum x_i = 1$; и $\bar{x} = \frac{n+1}{2}$, если x является *ранжированием* (*перестановкой*), т.е. все x_i – разные числа множества $\{1,..., n\}$.

Для бинарного случая $x \in \{0, 1\}^n$ (т.е. когда x является бинарной n-последовательностью) пусть $X = \{1 \leq i \leq n : x_i = 1\}$ и $\overline{X} = \{1 \leq i \leq n : x_i = 0\}$. Пусть $|X \cap Y|$, $|X \cup Y|$, $|X \setminus Y|$ и $|X \Delta Y|$ обозначают кардинальное число пересечения, объединения, разности и симметрической разности $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ множеств X и Y соответственно.

17.1. ПОДРОБНОСТИ И РАССТОЯНИЯ ДЛЯ ЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ

Подобность Ружечки

Подобность Ружечки – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum \min\{x_i, y_i\}}{\sum \max\{x_i, y_i\}}$$

Соответствующее расстояние

$$1-\frac{\sum\min\{x_i,y_i\}}{\sum\max\{x_i,y_i\}}=\frac{\sum|x_i-y_i|}{\sum\max\{x_i,y_i\}}$$

совпадает на $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ с **метрикой нечеткого полинуклеотида** (см. гл. 25).

Подобность Робертса

Подобность Робертса – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum(x_i+y_i)\dfrac{\min\{x_i,y_i\}}{\max\{x_i,y_i\}}}{\sum(x_i+y_i)}.$$

Подобность Элленберга

Подобность Элленберга – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum(x_i+y_i)1_{x_ix_i\neq 0}}{\sum(x_i+y_i)(1+1_{x_iy_i=0})}.$$

Бинарные случаи подобностей Элленберга и Ружечки совпадают; такая подобность называется **подобностью Танимото** (или **жаккардовой подобностью общности**):

$$\frac{|X\cap Y|}{|X\cup Y|}.$$

Расстояние Танимото (или **расстояние биотопа**) – расстояние на $\{0, 1\}^n$, определенное как

$$1-\frac{|X\cap Y|}{|X\cup Y|}=\frac{|X\Delta Y|}{|X\cup Y|}.$$

Подобность Глисона

Подобность Глисона – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum(x_i+y_i)1_{x_ix_i\neq 0}}{\sum(x_i+y_i)}.$$

Бинарные случаи **подобностей Глисона, Мотыки** и **Брэя-Куртиса** совпадают; такая подобность называется **подобностью Дайса** (или *подобностью Соренсена, подобностью Щекановского*):

$$\frac{2|X\cap Y|}{|X\cup Y|+|X\cap Y|}=\frac{2|X\cap Y|}{|X|+|Y|}.$$

Расстояние Щекановского–Дайса (или *неметрический коэффициент Брэя–Куртиса, нормализованное расстояние симметрической разности*) есть **почти метрика** на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$1-\frac{2|X\cap Y|}{|X|+|Y|}=\frac{|X\Delta Y|}{|X|+|Y|}.$$

Расстояние пересечения

Расстояние пересечения – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$1 - \frac{\sum \min\{x_i, y_i\}}{\min\{\sum x_i, \sum y_i\}}.$$

Подобность Мотыки

Подобность Мотыки – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum \min\{x_i, y_i\}}{\sum(x_i + y_i\}} = n\frac{\sum \min\{x_i, y_i\}}{\bar{x} + \bar{y}}.$$

Подобность Брэя–Куртиса

Подобность Брэя-Куртиса – это подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{2}{n(\bar{x} + \bar{y})}\sum \min\{x_i, y_j\}.$$

Она называется *% подобностью Ренконена* (или *процентной подобностью*), если x, y являются *векторами частотности.*

Расстояние Брэя–Куртиса

Расстояние Брэя-Куртиса – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\frac{\sum |x_i - y_i|}{\sum(x_i + y_i)}.$$

Расстояние Канберры

Расстояние Канберры – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sum \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|}.$$

Подобность 1 Кульчинского

Подобность 1 Кульчинского – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum \min\{x_i, y_i\}}{\sum |x_i - y_i|}.$$

Соответствующим расстоянием является

$$\frac{\sum |x_i - y_i|}{\sum \min\{x_i, y_i\}}.$$

Подобность 2 Кульчинского

Подобность 2 Кульчинского – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\bar{x}} + \frac{1}{\bar{y}}\right)\sum \min\{x_i, y_i\}.$$

Для бинарного случая она принимает вид

$$\frac{|x \cap Y| \cdot (|X| + |Y|)}{2|X| \cdot |Y|}.$$

Подобность Барони-Урбани–Бусера

Подобность Барони-Урбани-Бусера – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum \min\{x_i, y_i\} + \sqrt{\sum \min\{x_i, y_i\} \sum(\max_{1\le j\le n} x_j - \max\{x_i, y_i\})}}{\sum \max\{x_i, y_i\} + \sqrt{\sum \min\{x_i, y_i\} \sum(\max_{1\le j\le n} x_j - \max\{x_i, y_i\})}}.$$

Для бинарного случая она принимает вид

$$\frac{|X \cap Y| + \sqrt{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}|}}{|X \cup Y| + \sqrt{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}|}}.$$

17.2. АНАЛОГИ ЕВКЛИДОВА РАССТОЯНИЯ

Степенное (*p, r*) – расстояние

Степенным (*p, r*)-расстоянием называется расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$(\sum w_i(x_i - y_i)^p)^{1/p}$$

Для $p = r \ge 1$ оно является **l_p-метрикой**, включая соответственно **евклидову метрику,** метрику **Манхэттена и чебышевскую метрику** для $n = 2{,}1$ и ∞ соответственно.

Случай $0 < p = r < 1$ называется **дробным l_p-расстоянием** (не метрика); оно используется для случаев, когда количество наблюдений незначительно, а число n переменных велико.

Взвешенные версии $(\sum w_i(x_i - y_i)^p)^{1/p}$ (с неотрицательными весами w_i) также используются в приложениях для $p = 2{,}1$.

Расстояние размера Пенроуза

Расстояние размера Пенроуза – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{n} \sum |x_i - y_i|.$$

Оно пропорционально **метрике Манхэттена.** Средняя разность Щекановского определяется как $\frac{\sum |x_i - y_i|}{n}$.

Расстояние формы Пенроуза

Расстояние формы Пенроуза – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{\sum((x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y}))^2}.$$

Сумма квадратов вышеприведенных **расстояний Пенроуза равна квадрату евклидова расстояния.**

Лоренцевское расстояние

Лоренцевское расстояние – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sum \ln(1 + |x_i - y_i|).$$

Евклидово двоичное расстояние

Евклидово двоичное расстояние – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{\sum(1_{x_i > 0} - 1_{y_i > 0})^2}.$$

Евклидово среднее цензурированное расстояние

Евклидово среднее цензурированное расстояние – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{\frac{\sum(x_i - y_i)^2}{\sum 1_{x_i^2 + y_i^2 \neq 0}}}.$$

Нормированное l_p-расстояние

Нормированное l_p-расстояние – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\frac{\| x - y \|_p}{\| x \|_p + \| y \|_p}.$$

Единственным целым числом p, для которого нормированное l_p-расстояние является метрикой, есть $p = 2$. Более того, как показано в [Yian91], для любых $a, b > 0$ расстояние $\frac{\| x - y \|_2}{a + b(\| x \|_2 + \| y \|_2)}$ является метрикой.

Расстояние Кларка

Расстояние Кларка – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\left(\frac{1}{n}\sum\left(\frac{x_i - y_i}{|x_i| + |y_i|}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Расстояние Мила

Расстояние Мила (или *индекс Мила*) – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sum_{1 \le i \le n-1} (x_i - y_i - x_{i+1} + y_{i+1})^2.$$

Расстояние Хеллинджера

Расстояние Хеллинджера – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{2\sum\left(\sqrt{\frac{x_i}{\bar{x}}} - \sqrt{\frac{y_i}{\bar{y}}}\right)^2}$$

(см. **Метрика Хеллинджера,** гл. 14).

Индекс ассоциации Уайттекера определяется как $\frac{1}{2}\sum\left|\frac{x_i}{\bar{x}} - \frac{y_i}{\bar{y}}\right|$.

Симметричная χ^2-мера

Симметричная χ^2-мера – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{\sum \frac{\bar{x} + \bar{y}}{n(x_i + y_i)}\left(\frac{x_i}{\bar{x}} - \frac{y_i}{\bar{y}}\right)^2} = \sqrt{\sum \frac{\bar{x} + \bar{y}}{n(\bar{x} \cdot \bar{y})^2} \cdot \frac{(x_i\bar{y} - y_i\bar{x})^2}{x_i + y_i}}.$$

Симметрическое χ^2-расстояние

Симметрическое χ^2-расстояние (или *хи-расстояние*) есть расстояние по $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{\sum \frac{\bar{x}+\bar{y}}{n(x_i+y_i)}\left(\frac{x_i}{\bar{x}}-\frac{y_i}{\bar{y}}\right)^2} = \sqrt{\sum \frac{\bar{x}+\bar{y}}{n(\bar{x}\cdot\bar{y})^2}\cdot\frac{(x_i\bar{y}-y_i\bar{x})^2}{x_i+y_i}}.$$

Расстояние Махаланобиса

Расстояние Махаланобиса (или *статистическое расстояние*) – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{(\det A)^{1/n}(x-y)A^{-1}(x-y)^T}.$$

где A – положительно определенная матрица (обычно это *матрица ковариантности* матрица конечного подмножества из $\mathbb{R}^n$, состоящего из *векторов наблюдения*) (см. **Полуметрика Махаланобиса,** гл. 14).

17.3. ПОДОБНОСТИ И РАССТОЯНИЯ ДЛЯ БИНАРНЫХ ДАННЫХ

Обычно такие подобности s имеют множество значений от 0 до 1 или от –1 до 1, а соответствующие расстояния обычно равны $1 - s$ или $\frac{1-s}{2}$.

Подобность Амана

Подобность Амана – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{2|\overline{X\Delta Y}|}{n}-1=\frac{n-2|X\Delta Y|}{n}.$$

Подобность Рэнда

Подобность Рэнда (или *подобность Сокала–Миченера, простое соответствие*) – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|\overline{X\Delta Y}|}{n}.$$

Соответствующая метрика $\frac{|X\Delta Y|}{n}$ называется *вариантностью* (является бинарным случаем *средней разности между признаками Щекановского*) и $1-\frac{|X\Delta Y|}{n}$ называется *подобностью Говара.*

Подобность 1 Сокала–Сниса

Подобность 1 Сокала–Сниса – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{2|\overline{X\Delta Y}|}{n+|X\Delta Y|}.$$

Подобность 2 Сокала–Сниса

Подобность 2 Сокала–Сниса – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X\cap Y|}{|X\cup Y|+|X\Delta Y|}.$$

Подобность 3 Сокала–Сниса

Подобность 3 Сокала–Сниса – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X\Delta Y|}{|\overline{X\Delta Y}|}.$$

Подобность Рассела–Рао

Подобность Рассела–Рао – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X\cap Y|}{n}.$$

Подобность Симпсона

Подобность Симпсона (*подобность перекрытия)* – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X\cap Y|}{\min\{|X|,|Y|\}}.$$

Подобность Брауна–Бланке

Подобность Брауна–Бланке – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X\cap Y|}{\max\{|X|,|Y|\}}.$$

Подобность Роджера–Танимото

Подобность Роджера–Танимото – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|\overline{X\Delta Y}|}{n+|X\Delta Y|}.$$

Подобность Фэйса

Подобность Фейта – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X\cap Y|+|\overline{X\Delta Y}|}{2n}.$$

Подобность Тверского

Подобность Тверского – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X\cap Y|}{a|X\Delta Y|+b|X\cap Y|}.$$

Она становится **подобностью Танимото, подобностью Дайса** и (для бинарного случая) **подобностью 1 Кульчинского** для $(a,b)=(1,1)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$ и (1, 0) соответственно.

Подобность Говера–Лежандра

Подобность Гоуэра–Лежандра – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|\overline{X\Delta Y}|}{a|X\Delta Y|+|\overline{X\Delta Y}|}=\frac{|\overline{X\Delta Y}|}{n+(a-1)|X\Delta Y|}.$$

Подобность Андерберга

Подобность Андерберга (или *подобность 4 Сокала–Сниса*) – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y|}{4}\left(\frac{1}{|X|}+\frac{1}{|Y|}\right)+\frac{|\overline{X \cup Y}|}{4}\left(\frac{1}{|\overline{X}|}+\frac{1}{|\overline{Y}|}\right).$$

***Q* подобность Юле**

***Q* подобность Юле** – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y|\cdot|\overline{X \cup Y}|-|X \setminus Y|\cdot|Y \setminus X|}{|X \cap Y|\cdot|\overline{X \cup Y}|+|X \setminus Y|\cdot|Y \setminus X|}.$$

***Y* подобность взаимосвязанности Юле**

***Y* подобность взаимосвязанности Юле** – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{\sqrt{|X \cap Y|\cdot|\overline{X \cup Y}|}-\sqrt{|X \setminus Y|\cdot|Y \setminus X|}}{\sqrt{|X \cap Y|\cdot|\overline{X \cup Y}|}+\sqrt{|X \setminus Y|\cdot|Y \setminus X|}}.$$

Подобность дисперсии

Подобность дисперсии – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y|\cdot|\overline{X \cup Y}|-|X \setminus Y|\cdot|Y \setminus X|}{n^2}.$$

ϕ подобность Пирсона

ϕ подобность Пирсона – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y|\cdot|\overline{X \cup Y}|-|X \setminus Y|\cdot|Y \setminus X|}{\sqrt{|X|\cdot|\overline{X}|\cdot|Y|\cdot|\overline{Y}|}}.$$

Подобность 2 Говера

Подобность 2 Говера (или *подобность* 5 *Сокала–Сниса*) – подобность на $\{0, 1)^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y|\cdot|\overline{X \cup Y}|}{\sqrt{|X|\cdot|\overline{X}|\cdot|Y|\cdot|\overline{Y}|}}.$$

Разность образов

Разность образов – расстояние на $\{0, 1\}^n$, определенное как

$$\frac{4|X \setminus Y|\cdot|Y / X|}{n^2}.$$

Q_0-разность

Q_0-разность – расстояние на $\{0, 1\}^n$, определенное как

$$\frac{|X \setminus Y|\cdot|Y / X|}{|X \cap Y|\cdot|\overline{X \cup Y}|}.$$

17.4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ПОДРОБНОСТИ И РАССТОЯНИЯ

Ковариационная подобность

Ковариационная подобность – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n}=\frac{\sum x_i y_i}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}.$$

Кореляционная подобность

Кореляционная подобность (или *корреляция Пирсона*, или *линейный коэффициент корреляции по смешанным моментам Пирсона*) s – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{(\sum(x_j-\bar{x})^2)(\sum(y_j-\bar{y})^2)}}.$$

Несходства $1-s$ и $1-s^2$ называются **кореляционным расстоянием Пирсона** и *квадратом расстояния Пирсона* соответственно. Более того,

$$\sqrt{2(1-s)}=\sqrt{\sum\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sqrt{\sum(x_j-\bar{x})^2}}-\frac{y_i-\bar{y}}{\sqrt{\sum(y_j-\bar{y})^2}}\right)}$$

является нормализацией евклидова расстояния (см. отличающееся **нормированное** l_2**-расстояние** в данной главе).

Для случая $\bar{x}=\bar{y}=0$ корреляционная подобность принимает вид $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2\|y\|_2}$.

Подобность косинуса

Подобность косинуса (или *подобность Орчини, угловая подобность, нормированное скалярное произведение*) есть подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2\cdot\|y\|_2}=\cos\phi,$$

где ϕ – угол между векторами x и y. Для бинарного случая она принимает вид

$$\frac{|X\cap Y|}{\sqrt{|X|\cdot|Y|}}$$

и называется **подобностью Очиаи-Отсуки.**

В группировке записей подобность косинуса называется **TF-IDF** (сокращенно от английских терминов *Частота – Обратная Частота Документа*).

Расстояние косинуса определяется как $1-\cos\phi$.

Угловая полуметрика

Угловая полуметрика на $\mathbb{R}^n$ – угол (измеренный в радианах) между векторами x и y:

$$\arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2\cdot\|y\|_2}.$$

Расстояние Орлочи

Расстояние Орлочи (или *хордовое расстояние*) – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определяемое как

$$\sqrt{2\left(1-\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2\cdot\|y\|_2}\right)}.$$

Отношение подобности

Отношение подобности (или *подобностью Кохонена*) – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,y\rangle+\|x-y\|_2^2}.$$

Для бинарного случая она совпадает с **подобностью Танимото.**

Подобность Мориситы–Хорна

Подобность Мориситы–Хорна – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{2\langle x,y\rangle}{\|x\|_2^2\cdot\frac{\overline{y}}{\overline{x}}+\|y\|_2^2\cdot\frac{\overline{x}}{\overline{y}}}.$$

Ранговая корреляция Спирмана

В случае, когда векторы $x,\ y\ \in\mathbb{R}^n$ являются *ранжированиями* (или *перестановками*), т.е. компоненты каждого из них – различные числа множества $\{1,..., n\}$, мы имеем $\overline{x}=\overline{y}=\frac{n+1}{2}$. Для таких ординальных данных корреляционная подобность принимает вид

$$1-\frac{6}{n(n^2-1)}\sum(x_i-y_i)^2.$$

Это – ρ **ранговая корреляция Спирмана.** Она называется также ρ-*метрикой Спирмана*, но не является расстоянием. ρ **расстояние Спирмена** – евклидова метрика на перестановках. **Масштабная линейка Спирмана** определяется как

$$1-\frac{3}{n^2-1}\sum|x_i-y_i|.$$

Это l_1-версия **ранговой корреляции Спирмана. Расстояние масштабной линейки Спирмана** является l_1-метрикой на перестановках.

Другой корреляционной подобностью для перестановок является τ **ранговая корреляция Кендалла,** называемая также τ *метрикой Кендалла* (расстоянием не является), которая определяется как

$$\frac{2\sum_{1\le j<j\le n}\operatorname{sign}(x_i-x_j)\operatorname{sign}(y_i-y_j)}{n(n-1)}.$$

τ **расстояние Кендалла** на перестановках определяется как

$$|\{(i,j):1\le i<j\le n,\ (x_i-x_j)(y_i-y_j)<0\}|.$$

Расстояние Кука

Расстоянием Кука называется расстояние на $\mathbb{R}^n$, дающее статистическую оценку того, насколько сильно некое i-е наблюдение может повлиять на оценки регрессии. Оно является нормированным **квадратом евклидова расстояния** между расчетными параметрами регрессионных моделей, построенных на основе всех данных и данных без учета i-го наблюдения.

Основными расстояниями такого рода, применяемыми в регрессивном анализе для выявления наиболее влиятельных наблюдений, являются *DFITS расстояние, расстояние Вэлша* и *расстояние Хади*.

Машинное обучение на базе расстояний

Для многих практических приложений (*нейронных сетей, информационных сетей* и т.п.), характерными признаками которых являются неполнота данных, а также непрерывность и номинальность атрибутов рассматриваются следующие задачи. Для $m \times (n + 1)$ матрицы $((x_{ij}))$, ее строка $(x_{i0}, x_{i1},..., x_{in})$ *обозначает входной вектор* $x_i = (x_{i1},..., x_{in})$ с выходной меткой x_{i0}; множество из m входных векторов представляет собой тренировочное множество. Для любого нового входного вектора $y = (y1,..., y_n)$ ищется ближайший (в терминах выбранного расстояния) входной вектор x_i, необходимый для *классификации* y, т.е. для прогнозирования его выходной метки как x_{i0}.

Расстояние ([WiMa97]) $d(x_i, y)$ определяется как

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} d_j^2(x_{ij}, y_j)}$$

с $d_j(x_{ij}, y_j) = 1$, если x_{ij} или y_j неизвестны. Если атрибут j (т.е. диапазон значений x_{ij} для $1 \le i \le m$) является номинальным, то $dj(x_{ij}, y_j)$ определяется, например, как $1_{x_{ij} \neq y}$ или как

$$\sum_{o} \left| \frac{|\{1 \le t \le m : x_{t0} = a, x_{ij} = x_{ij}\}|}{|\{1 \le t \le m : \ x_{tj} = x_{ij}\}|} - \frac{|\{1 \le t \le m : \ x_{t0} = a, x_{tj} = y_i\}|}{|\{1 \le t \le m : \ x_{tj} = y_j\}|} \right|^q$$

для $q = 1$ или 2; сумма берется по всем классам выходных меток, т.е. значений a из $\{x_{t0}: 1 \le t \le m\}$. Для непрерывных атрибутов j число d_j берется как величина $|x_{ij} - y_j|$, деленная на $\max_t x_{tj} - \min_t x_{tj}$ или на $\frac{1}{4}$ стандартного отклонения значений x_{ij}, $1 \le t \le m$.

Глава 18

Расстояния в математической инженерии

В этой главе сгруппированы основные расстояния, применяемые при *программировании движения роботов, клеточных автоматов, систем с обратной связью и многоцелевой оптимизации.*

18.1. РАССТОЯНИЯ В ОРГАНИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ РОБОТОВ

Методы программирования перемещений автоматических механизмов применяются в области робототехники, системах виртуальной реальности и автоматизированного проектирования. **Метрика программирования перемещений** – это метрика, используемая в методике программирования перемещений автоматических механизмов.

Роботом называется конечная совокупность жёстких звеньев, организованных в соответствии с кинематической иерархией. Если робот имеет n степеней свободы, это приводит нас к n-мерному *многообразию* C, называемому *пространством конфигураций* (или *C-пространством*) робота. *Рабочее пространство* W робота – это пространство, в пределах которого робот перемещается. Обычно оно моделируется как евклидово пространство $\mathbb{E}^3$. *Область препятствий* CB – множество всех конфигураций $q \in C$, которые либо вынуждают робота сталкиваться с препятствиями B, либо заставляют разные звенья робота сталкиваться между собой. Замыкание $\mathrm{Cl}(C_{\mathrm{free}})$ множества $C\mathrm{free} = C\backslash\{CB\}$ называется *пространством конфигураций без столкновений.* Задача *алгоритма программирования перемещений* состоит в поиске свободного от столкновений пути от первоначальной конфигурации к конечной.

Метрикой конфигурации называется любая метрика программирования перемещений на пространстве конМфигураций C робота.

Обычно пространство конфигураций C представляет собой упорядоченную шестерку чисел $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$, где первые три числа – координаты положения и последние три – ориентация. Координаты ориентации выражены углами в радианах. Интуитивно, хорошая мера расстояния между двумя конфигурациями – это мера рабочего пространства, заметаемого роботом в ходе перемещения между ними (заметаемый объем). Однако расчет такой метрики является чрезмерно дорогостоящим делом.

Проще всего рассматривать C-пространство как евклидово пространство и использовать евклидовы расстояния или их обобщения. Для таких метрик конфигурации осуществляется нормализация координат ориентации таким образом, чтобы они были одинаковыми по величине с координатами положения. Грубо говоря, координаты ориентации умножаются на максимум значений x, y или z размера ограничивающего блока рабочего пространства. Примеры таких метрик конфигурации приводятся ниже.

В общем случае пространство конфигураций для трехмерного жесткого тела можно отождествить с группой Ли $ISO(3)$:$C \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}P^3$. Общая форма матрицы в $ISO(3)$ задается как

$$\begin{pmatrix} R & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{R} \in SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ и $X \in \mathbb{R}^3$. Если X_q и R_q являются компонентами переноса и вращения конфигурации $q = (X_q, R_q) \in ISO(3)$, то метрика конфигурации между конфигурациями q и r задается как $w_{tr} \| X_q - X_r \| + w_{\text{rot}} f(R_q, R_r)$, где **расстояние переноса** $\| X_q - X_r \|$ получается в результате использования некоторой нормы $\| \cdot \|$ на $\mathbb{R}^3$, а **расстояние вращения** $f(R_q, R_r)$ является положительной скалярной функцией, задающей нам расстояние между вращениями $R_q, R_r \in SO(3)$. Расстояние вращения масштабируется относительно расстояния переноса с помощью весов w_{tr} и w_{rot}.

Метрика рабочего пространства – любая метрика программирования перемещений в рабочем пространстве $\mathbb{R}^3$.

Имеется также много других типов метрик, используемых в процессе программирования перемещений, в частности, **римановы метрики, хаусдорфова метрика, расстояние роста** и т.п.

Взвешенное евклидово расстояние

Взвешенное евклидово расстояние – метрика конфигурации на $\mathbb{R}^6$, определенная как

$$\left(\sum_{i=1}^{3} | x_i - y_i |^2 + \sum_{i=4}^{6} (w_i | x_i - y_i |)^2 \right)^{1/2}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^6$, где $x = (x_1, \ldots, x_6)$, x_1, x_2, x_3 – координаты положения, x_4, x_5, x_6 – координаты ориентации и w_i – нормализирующий множитель. Взвешенное евклидово расстояние в $\mathbb{R}^6$ делает одинаковой значимость и положения, и ориентации.

Масштабированное евклидово расстояние

Масштабированным евклидовым расстоянием называется метрика конфигурации на $\mathbb{R}^6$, определенная как

$$\left(s\sum_{i=1}^{3} | x_i - y_i |^2 + (1-s)\sum_{i=4}^{6} (w_i | x_i - y_i |)^2 \right)^{1/2}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^6$. Масштабированное евклидово расстояние изменяет относительную значимость элементов положения и ориентации посредством масштабного параметра s.

Взвешенное расстояние Минковского

Взвешенное расстояние Минковского – метрика конфигурации на $\mathbb{R}^6$, определенная как

$$\left(\sum_{i=1}^{3} | x_i - y_i |^p + \sum_{i=4}^{6} (w_i | x_i - y_i |)^p \right)^{1/p}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^6$. Она использует параметр $p \geq 1$ и как и в евклидовом случае, имеет одинаковую значимость положения и ориентации.

Модифицированное расстояние Минковского

Модифицированное расстояние Минковского – метрика конфигурации на $\mathbb{R}^6$, определенная как

$$\left(\sum_{i=1}^{3} |x_i - y_i|^{p_1} + \sum_{i=4}^{6} (w_i |x_i - y_i|)^{p_2}\right)^{1/p_3}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^6$. Различия между положением и ориентацией определяются с использованием параметров $p1 \geq 1$ (для положения) и $p_2 \geq 1$ (для ориентации).

Взвешенное расстояние Манхэттена

Взвешенным расстоянием Манхэттена называется **метрика конфигурации** на $\mathbb{R}^6$, определенная как

$$\sum_{i=1}^{3} |x_i - y_i| + \sum_{i=4}^{6} w_i |x_i - y_i|$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^6$. Она совпадает с точностью до нормализующего множителя с обычной $\boldsymbol{l_1}$**-метрикой** на $\mathbb{R}^6$.

Метрика перемещения робота

Метрика перемещения робота – метрика конфигурации на пространстве конфигурации C робота, определенная как

$$\max_{a \in A} \| a(q) - a(p) \|$$

для любых конфигураций $q, r \in C$, где $a(q)$ – положение точки a в рабочем пространстве $\mathbb{R}^3$, когда робот находится в конфигурации q, и $\|\cdot\|$ – одна из норм на $\mathbb{R}^3$, обычно евклидова норма. Интуитивно, метрика вычисляет максимальное из тех расстояний в рабочем пространстве, которые проходит каждая часть робота при его переходе от одной конфигурации к другой (см. **метрика ограниченного блока**).

Метрика углов Эйлера

Метрика углов Эйлера – метрика вращения на группе $SO(3)$ (для случая использования *эйлеровых углов* для вращения), определенная как

$$w_{\text{rot}} \sqrt{\Delta(\theta_1, \theta_2)^2 + \Delta(\phi_1, \phi_2)^2 + \Delta(\eta_1, \eta_2)^2}$$

для всех R_1, $R_2 \in SO(3)$, заданных *углами Эйлера* $(\theta_1, \phi_1, \eta_1)$ и $(\theta_2, \phi_2, \eta_2)$ соответственно, где $\Delta(\theta_1, \theta_2) = \min\{|\theta_1 - \theta_2|, 2\pi - |\theta_1 - \theta_2|\}$, $\theta_i \in [0, 2\pi]$ – **метрика между углами** и w_{rot} –коэффициент масштабирования.

Метрика единичных кватернионов

Метрикой единичных кватернионов называется **метрика вращения** на *представлении с помощью единичных кватернионов для* $SO(3)$, т.е. представлении $SO(3)$ как множества точек (*единичных кватернионов*) на единичной сфере S^3 в $\mathbb{R}^4$ с отождествленными антиподальными точками ($q \sim -q$). Данное представление $SO(3)$

предполагает наличие многих возможных метрик на нем, например таких, как:

1) $\| \ln(q^{-1}r) \|$,

2) $w_{\text{rot}}(1 - \| \lambda \|)$, $\lambda = \sum_{i=1}^{4} q_i r_i$,

3) $\min\{\| q - r \|, \| q + r \|\}$,

4) $\arccos \lambda, \lambda = \sum_{i=1}^{4} q_i r_i$,

где $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$, $\sum_{i=1}^{4} q_i = 1$, $\| \cdot \|$ – норма на $\mathbb{R}^4$ и w_{rot} – коэффициент масштабирования.

Метрика центра массы

Метрика центра массы – метрика рабочего пространства, определенная как евклидово расстояние между *центром массы* робота в двух конфигурациях. Центр массы аппроксимируется путем усреднения всех вершин объекта.

Метрика ограниченного блока

Метрикой ограниченного блока называется **метрика рабочего пространства,** определенная как максимальное евклидово расстояние между любой вершиной *ограничивающего блока* робота в одной конфигурации и соответствующий вершиной в другой конфигурации.

Расстояние позы

Расстояние позы обеспечивает меру несходства между действиями *исполнительных устройств* (включая роботов и людей) в процессе обучения роботов посредством имитации.

В этом контексте исполнительные устройства рассматриваются как *кинематические цепи* и представлены в форме *кинематического дерева,* такого что каждое звено в кинематической цепи представлено единственным ребром соответствующего дерева. Конфигурация цепи представлена позой соответственного дерева, полученной посредством размещения пары (n_i, l_i) на каждом ребре e_i. Здесь n_i является единичным вектором нормали, представляющим ориентацию соответствующего звена цепи, а l_i есть длина звена. *Класс поз* состоит из всех поз данного кинематического дерева.

Расстояние позы – расстояние на данном классе поз, которое является суммой мер несходства для каждой пары сопоставимых отрезков в данных двух позах.

Метрики миллиботов

Миллиботы – группа разнородных ограниченных по ресурсам роботов малого размера. Группа роботов может коллективно обмениваться информацией. Они в состоянии объединять информацию о расстояниях, получаемую от разных платформ, и строить карту глобального размещения, представляющую собой единое коллективное видение окружающей среды. При программировании перемещения миллиботов с целью построения **метрики программирования перемещения** можно назначить последовательность случайных точек вокруг робота и представить каждую точку как место для предстоящего перемещения. После этого выбирается точка с наиболее высокой функцией полезности и робот направляется именно в эту точку. Так, **метрика свободного пространства,** определяемая контуром свободного пространства, позволяет выбирать только те точки, которые не предполагают преодоления роботом каких-либо препятствий; **метрикой исключения столкновений** отвергаются перемещения, маршрут которых проходит слишком близко от препятствий; **метрикой осваиваемой области** поощряются перемещения робота по маршрутам, выводящим его на открытое пространство; **метрикой конфигурации** поощряются перемещения, позволяющие сохранить конфигурацию; **метрика локализации,** основанная на угле расхождения между одной или несколькими парами локализации, поощряет те перемещения, которые максимизируют локализацию ([GKC04], см. **Расстояние исключения столкновений, Расстояние носильщиков пианино,** гл. 19).

18.2. РАССТОЯНИЯ ДЛЯ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

Пусть S, $2 \le |S| < \infty$ есть конечное множество (*алфавит*) и пусть S^∞ – множество бесконечных в обе стороны последовательностей $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ (*конфигураций*) элементов (*букв*) множества S. (*Одномерный*) *клеточный автомат* – непрерывное отображение $f : S^\infty \to S^\infty$, которое *коммутирует с отображением переноса* $g : S^\infty \to S^\infty$, определенным как $g(x_i) = x_{i+1}$. После определения метрики на S^∞ полученное метрическое пространство вместе с отображением f образуют **дискретную динамическую систему.** Клеточные автоматы (в общем случае бесконечные в обе стороны таблицы вместо последовательностей) применяются в символической динамике, информатике и (как модели) в физике и биологии. Основные расстояния между конфигурациями $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ из S^∞ (см. [BFK99]) приведены ниже.

Метрика Кантора

Метрикой Кантора называется метрика на S^∞, определенная как

$$2^{-\min\{i\ge 0:|x_i-y_i|+|x_{-i}-y_{-i}|\ne 0\}}.$$

Она соответствует случаю $a = \frac{1}{2}$ **обобщенной метрики Кантора** (гл. 11). Соответствующее метрическое пространство является компактным.

Полуметрика Бесиковича

Полуметрикой Бесиковича называется метрика на S^∞, определенная как

$$\overline{\lim}_{l\to\infty} \frac{|-l \le i \le l : x_i \ne y_i|}{2l+1}.$$

Соответствующее полуметрическое пространство является **полным** (см. **Расстояние Бесиковича** на измеримых функциях, гл. 13).

Полуметрика Вейля

Полуметрика Вейля называется полуметрика на S^∞, определенная как

$$\overline{\lim}_{l\to\infty} \max_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|k+1 \le i \le l : x_i \ne y_i|}{l}.$$

Эта и приведенные выше метрики являются **инвариантными относительно переноса,** однако они не являются сепарабельными или локально компактными (см. Расстояние Вейля, гл. 13).

18.3. РАССТОЯНИЯ В ТЕОРИИ КОНТРОЛЯ

В *теории контроля* рассматривается цепь обратной связи между *установкой* P (функция, представляющая подлежащий контролю объект и *управляющим устройством* C (функция, которую предстоит построить). Результат y, измеренный сенсорным датчиком, сравнивается с эталонным значением r. Затем управляющее устройство использует вычисленную ошибку $e = r - y$ для ввода данных $u = Ce$. При наличи нулевых начальных условий сигналы ввода и вывода на установку соотносятся как $y = Pu$, где r, y, v и P, C являются функциями частотной переменной s. Таким образом, $y = \frac{PC}{1+PC} r$ и $y \approx r$ (т.е. вывод контролируется просто установкой эталонного значения), если PC больше любого значения s. Если система моделируется как система линейных дифференциальных уравнений, то *передаточная функция* $\frac{PC}{1+PC}$ является рациональной функцией. Установка P является стабильной, если не имеет полюсов в замкнутой правой полуплоскости $C_+ = \{s \in \mathbb{C}: \Re s \geq 0\}$.

Задача устойчивой стабилизации состоит в нахождении для заданной *номинальной* установки (модели) P_0 и некоей метрики d на установках такого центрированного в P_0 открытого шара с максимальным радиусом, чтобы некоторые управляющие устройства (рациональные функции) C могли стабилизировать каждый элемент данного шара.

Граф $G(P)$ установки P есть множество всех ограниченных пар вход-выход $(u, y = Pu)$. Как u так и y принадлежат *пространству Харди* $H^2(\mathbb{C}_+)$ правой полуплоскости; граф является замкнутым подпространством $H^2(\mathbb{C}_+) + H^2(\mathbb{C}_+)$. Именно, $G(P) = f(P)H^2(\mathbb{C}^2)$ для некоторой функции $f(P)$, называемой *символом графа*, а $G(P)$ является замкнутым подпространством $H^2(\mathbb{C}^2)$.

Все приведенные ниже метрики являются пропускоподобными метриками; они топологически эквивалентны, и стабилизация является устойчивым свойством по отношению к каждой из них.

Метрика пропуска

Метрика пропуска между установками P_1 и P_2 (введена в теорию контроля Замесом и Эль-Заккари) определяется как

$$\text{gap}(P_1, P_2) = \| \Pi(P_1) - \Pi(P_2) \|_2,$$

где $\Pi(P_o)$, $i = 1, 2$ является ортогональной проекцией графа $G(P_i)$ установки P_i, рассматриваемого как замкнутое подпространство $H^2(\mathbb{C}^2)$.

Имеем

$$\text{gap}(P_1, P_2) = \max\{\delta_1(P_1, P_2),\ \delta_1(P_2, P_1)\},$$

где $\delta_1(P_1, P_2) = \inf_{Q \in H^\infty} \| f(P_1) - f(P_2)Q \|_{H^\infty}$ и $f(P)$ – символ графа.

Если A является $m \times n$ матрицей с $m < n$, то ее n столбцов порождают n-мерное подпространство, а матрица B ортогональной проекции на пространство столбцов матрицы A имеет вид $A(A^T A) - 1A^T$. Если базис ортонормирован, то $B = AA^T$. В общем случае метрика пропуска между двумя подпространствами одной и той же размерности – l_2-*норма* разности их ортогональных проекций (см. **Расстояние Фробениуса**, гл. 12).

Метрика Видьясагара

Метрика Видьясагара (или *метрика графа*) между установками P_1 и P_2 определяется как

$$\max\{\delta_2(P_1,P_2),\ \delta_2(P_2,P_1)\},$$

где $\delta_2(P_1,P_2)=\inf_{\|Q\|\le 1}\| f(P_1)-f(P_2)Q\|_{H\infty}$.

Поведенческое расстояние – пропуск между *расширенными графами* установок P_1 и P_2; новый элемент добавлен к графу $G(P)$ для учета всех возможных исходных условий (вместо обычной ситуации, когда исходные условия нулевые).

Метрика Винникомбе

Метрика Винникомбе (*метрика* ν-*пропуска*) между установками P_1 и P_2 определяется как

$$\delta_\nu(P_1,P_2)=\|(1+P_2P_2^*)^{-1/2}(P_2-P_1)(1+P_1^*P_1)^{-1/2}\|_\infty$$

если $\mathrm{wno}(f^*(P_2)f(P_1))=0$ и равна 1, иначе. Здесь $f(P)$ является функцией символа графа установки P. В [Youn98] даны определения *числа кручения* wno(f) для рациональной функции f, а также хорошее введение в теорию стабилизации с обратной связью.

18.4. MOEA РАССТОЯНИЯ

Многие связанные с оптимизацией задачи преследуют несколько целей одновременно, однако для простоты только одна из них оптимизируется, а остальные выступают в качестве ограничений. При *многоцелевой оптимизации* рассматривается (помимо некоторых ограничений в виде неравенств) целевая вектор-функция $f: X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ из *пространства поиска* (или *генотипа, переменных решения*) X в *пространство целей* (или *фенотипа, векторов решений*) $f(X) = \{f(x)\colon x\in X\}\subset\mathbb{R}^k$. Точка $x^*\in X$ является *оптимальной по Парето*, если для каждой другой точки $x\in X$ вектор решений $f(x)$ не *мажорирует по Парето* вектор $f(x^*)$, т.е $f(x)\le f(x^*)$. *Оптимальный по Парето фронт* – это множество $PF^*=\{f(x): x\in X^*\}$, где X^* является множеством всех оптимальных по Парето точек.

Многоцелевые эволюционные алгоритмы (сокращенно MOEA от английского *Multi-objective evolutionary algorithms*) порождают на каждом этапе *множество аппроксимации* (найденный по Парето фронт PF_{known} приближает к желаемый Парето фронт PF^*) в пространстве целей, где ни один элемент доминирует по Парето над другим. Примеры **метрик MOEA**, т.е. мер оценки, насколько PF_{known} близок к PF^*, представлены ниже.

Расстояние поколений

Расстояние поколений определяется как

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{m} d_j^2\right)^{1/2}}{m},$$

где $m=|PF_{\text{known}}|$ и d_j есть евклидово расстояние (в пространстве целей) между (т.е. j-м членом фронта PF_{known}) и ближайшим членом PF^*.

Термин **расстояние поколений** (или *скорость оборота*) используется также для обозначения минимального числа ветвей между двумя положениями в любой системе ранжированного убывания, представленного в виде иерархического дерева. Примерами являются: **филогенетическое расстояние** на филогенетическом дереве, количество поколений, отделяющих фотокопию от оригинального оттиска, количество поколений, отделяющих посетителей мемориала от памятных событий, которым он посвящен.

Расположение с промежутками

Расположение с промежутками определяется как

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^{m}(\bar{d}-d_j)^2}{m-1}\right)^{1/2},$$

где $m=|PF_{\mathrm{known}}|$ и d_j есть l_1-расстояние (в пространстве целей) между $f^j(x)$ (т.е. j-м членом фронта PF_{known}) и другим ближайшим членом PF_{known}, в то время как d является средним значением всех d_j.

Суммарное недоминированное отношение векторов

Суммарное недоминированное отношение векторов определяется как $\frac{|PF_{\mathrm{known}}|}{|PF^*|}$.

Часть V

РАССТОЯНИЯ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СФЕРЕ

Глава 19

Расстояния на действительной и цифровой плоскостях

19.1. МЕТРИКИ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

На плоскости $\mathbb{R}^2$ можно использовать много разных метрик. В частности, любая **l_p-метрика** (так же, как и любая **метрика нормы** для данной нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^2$) может быть использована на плоскости, при этом наиболее естественной является l_2-метрика, т.е. евклидова метрика $d_E(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, которая дает нам длину отрезка $[x, y]$ прямой и является **внутренней метрикой** плоскости. Однако имеются и другие, нередко "экзотические" метрики на $\mathbb{R}^2$. Многие из них применяются для построения *обобщенных диаграмм Вороного* на $\mathbb{R}^2$ (см., например, **московскую метрику, метрику сети, правильную метрику**). Некоторые из них применяются в цифровой геометрии.

Задачи на расстояния эрдешевского типа (задаваемые обычно для евклидовой метрики на $\mathbb{R}^2$) представляют интерес для случая $\mathbb{R}^n$ и для других метрик на $\mathbb{R}^2$. Примерным содержанием таких задач является:

– нахождение наименьшего числа различных расстояний (или наибольшего числа появлений заданного расстояния) в n-подмножестве множества $\mathbb{R}^2$; наибольший размер подмножества множества $\mathbb{R}^2$, определяющего не более m расстояний;

– определение минимального диаметра n-подмножества множества $\mathbb{R}^2$ только с целочисленными расстояниями (или, скажем, без пары (d_1, d_2) расстояний с $0 < |d_1 - d_2| < 1$);

– существование n-подмножества множества $\mathbb{R}^2$, в котором расстояние i (для каждого $1 \le i \le n$) встречается точно i раз (примеры известны для $n \le 8$);

– определение *недопустимых расстояний* разбиения множества $\mathbb{R}^2$, т.е. расстояний, которые отсутствуют в каждой из частей.

Метрика городского квартала

Метрикой городского квартала называется **l_1-метрика** на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$\|x-y\|_1=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|.$$

Данную метрику называют по-разному, например, **метрикой такси, метрикой Манхэттена, прямоугольной метрикой, метрикой прямого угла**; на $\mathbb{Z}^2$ ее называют **метрикой гриды** и **4-метрикой.**

Метрика Чебышева

Метрикой Чебышева называется l_∞-метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$\|x-y\|_\infty - \max\{|x_1-y_1|,\ |x_2-y_2|\}.$$

Эту метрику называют также **равномерной метрикой, sup-метрикой и бокс-метрикой**; на $\mathbb{Z}^6$ она называется **метрикой решетки, метрикой щахматной доски, метрикой хода короля** и **8-метрикой.**

(*p, q*)-относительная метрика

Пусть $0 < q \le 1,\ p \ge \max\left\{1-q, \frac{2-q}{3}\right\}$ и пусть $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$).

(*p, q*)-относительная метрика есть метрика на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$ и даже на любом *птолемеевом пространстве* $(V, \|\cdot\|)$), определенная как

$$\frac{\| x-y \|_2}{\left(\frac{1}{2}(\| x \|_2^p + \| y \|_2^p)\right)^{q/p}}$$

для x или $y \ne 0$ (и равная 0, иначе). В случае $p = \infty$ она принимает вид

$$\frac{\| x-y \|_2}{(\max\{\| x \|_2, \| y \|_2\})^q}.$$

Для $q = \mathbf{1}$ и любого $1 \le p < \infty$ мы получаем ***p*-относительную метрику** (или *метрику Кламкина–Меира*); для $q = 1$ и $1 \le p < \infty$ получаем **относительную метрику.** (1,1)-метрика называется **метрикой Шатшнейдер.**

***M*-относительная метрика**

Пусть $f:[0,\infty) \to (0,\infty)$ – выпуклая возрастающая функция, такая что $\frac{f(x)}{x}$ убывает для $x > 0$. Пусть $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$).

***M*-относительная метрика** есть метрика на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$ и даже на любом *птолемеевом пространстве* $(V, \|\cdot\|)$), определенная как

$$\frac{\| x-y \|_2}{f(\| x \|_2) \cdot f(\| y \|_2)}.$$

В частности, расстояние

$$\frac{\| x-y \|_2}{\sqrt[p]{1+\| x \|_2^p}\ \sqrt[p]{1+\| y \|_2^p}}$$

является метрикой на $\mathbb{R}^2$ (на $\mathbb{R}^n$) тогда и только тогда, когда $p \ge 1$. Аналогичная метрика на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) может быть определена как

$$\frac{\| x-y \|_2}{\| x \|_2 \cdot \| y \|_2}.$$

Московская метрика

Московская метрика (или **метрика Карлсруэ**) есть метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как минимальная евклидова длина всех *допустимых* кривых, соединяющих x и $y \in \mathbb{R}^2$, где кривая называется *допустимой,* если состоит только из отрезков прямых, проходящих через начало координат, и отрезков окружностей с центрами в начале координат (см., например, [Klei88]).

Если полярные координаты для точек $x, y \in \mathbb{R}^2$ равны соответственно (r_x, θ_x) и (r_y, θ_y), то расстояние между данными точками равно $\min\{r_x, r_y\}\Delta(\theta_x - \theta_y) + |r_x - r_y|$, если $0 \le \Delta(\theta_x, \theta_y) < 2$, и равно $r_x + r_y$,, если $2 \le \Delta(\theta_x, \theta_y) < \pi$, где $\Delta(\theta_x, \theta_y) = \min\{|\theta_x - \theta_y|, 2\pi - |\theta_x - \theta_y|\}$, $\theta_x, \theta_y \in [0, 2\pi)$ **есть метрика между углами.**

Метрика французского метро

Для *нормы* $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^2$ **метрикой французского метро** называется метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$\| x - y \|,$$

если $x = cy$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$, и как

$$\| x \| + \| y \|,$$

иначе. Для евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$ она называется **парижской метрикой, метрикой ежа, радиальной метрикой** или **усиленной метрикой SNCF.** В этом случае она может быть определена как минимальная евклидова длина всех *допустимых* кривых между двумя данными точками x и y, где кривая называется *допустимой,* если состоит только из отрезков прямых, проходящих через начало координат.

В терминах графов эта метрика похожа на **метрику пути** дерева, состоящего из точки, откуда исходят несколько непересекающихся путей.

Парижская метрика – это пример $\mathbb{R}$**-дерева** T, которое является *симплициальным,* т.е. множество точек x, для которых множество $T - \{x\}$ состоит из одной компоненты, является дискретным и замкнутым.

Метрика лифта

Метрикой лифта (или **метрикой сборщика малины, метрической "рекой"**) называется метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$| x_1 - y_1 |,$$

если $x_2 = y_2$, и как

$$| x_1 | + | x_2 - y_2 | + | y_1 |,$$

если $x_2 \neq y_2$ (см., например, [Brya85]). Она может определяться как минимальная евклидова длина всех *допустимых* кривых, соединяющих две данные точки x и y, где кривая называется допустимой, если состоит только из отрезков прямых, параллельных оси x_1, и отрезков оси x_2.

Метрика лифта является примером *несимплициального* (см. **Метрика французского метро**) $\mathbb{R}$-дерева.

Метрика британской железной дороги

Для нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$) **метрикой британской железной дороги** называется метрика на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$), определенная как

$$\| x \| + \| y \|$$

для $x \neq y$ (и равная 0, иначе).

Ее называют также **метрикой почты, метрикой гусеницы** и **метрикой челнока**.

Метрика цветочного магазина

Пусть d – метрик на $\mathbb{R}^2$ и f – фиксированная точка (*цветочный магазин*) на плоскости.

Метрикой цветочного магазина (иногда ее называют **метрикой SNCF**) называется метрика на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на любом метрическом пространстве), определенная как

$$d(x, f) + d(f, y)$$

для $x \neq y$ (и равная 0, иначе). Так, человек, живущий в точке x, который хочет посетить кого-то, живущего в точке y, сначала заходит в f, чтобы купить цветы. В случае если $d(x, f) = \| x - y \|$, а точка f является началом координат, мы получаем **метрику британской железной дороги**.

Если имеется $k > 1$ цветочных магазинов $f_1, \ldots, f_k$, то человек купит цветы в ближайшем магазине с минимальным отклонением от своего маршрута, т.е. расстояние между различными точками x, y равно $\min_{l \le i \le k}(d(x, f_i) + d(f_i, y))$.

Метрика экрана радара

Для нормы $\| \cdot \|$ на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$) **метрикой экрана радара** называется метрика на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$), определенная как

$$\min\{1, \| x - y \|\}.$$

Метрика ковра Рикмана

Для числа $\alpha \in (0, 1)$ **метрикой ковра Рикмана** является метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$| x_1 - y_1 | + | x_2 - y_2 |^{\alpha}.$$

Это является случаем $n = 2$ параболического расстояния (гл. 6; см. там же другие метрики на $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$).

Метрика Бурагро–Иванова

Метрикой Бурагро–Иванова ([BuIv01]) называется метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$\big| \| x \|_2 - \| y \|_2 \big| + \min\{\| x \|_2 \cdot \| \| y \|_2\} \cdot \sqrt{\angle(x, y)},$$

где $\angle(x, y)$ – угол между векторами x и y и $\| \cdot \|$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^2$. Соответствующая **внутренняя метрика** на $\mathbb{R}^2$ равна $\big| \| x \|_2 - \| y \|_2 \big|$, если $\angle(x, y) = 0$, и равна $\| x \|_2 - \| y \|_2$, иначе.

Метрика 2*n*-угольника

Для центрально симметричного правильного $2n$-угольника K на плоскости **метрикой 2*n*-угольника** называется метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ как наикратчайшая евклидова длина ломаной линии от x к y, каждое из звенье которой параллельна некоторому из ребер многоугольника K.

Если K есть прямоугольник с вершинами $\{(\pm 1, \pm 1)\}$, то мы получаем **метрику Манхэттена**. Метрику Манхэттена также можно рассматривать как **метрику Минковского** с единичным шаром в виде *бриллианта,* т.е. квадрата с вершинами $\{(1,0(0,1), (-1,0),(0,-1)\}$.

Метрика центрального парка

Метрикой центрального парка называется метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как длина наикратчайшего l_1-пути (*пути Манхэттена*) между двумя точками, $x, y \in \mathbb{R}^2$ при наличии данного множества зон, через которые проходят кратчайшие евклидовы пути (например, Центральный парк в Манхэттене).

Расстояние исключения столкновений

Пусть $\mathbb{O} = \{O_1, \ldots, O_m\}$ – совокупность попарно непересекающихся многоугольников на евклидовой плоскости, представляющее собой множество препятствий, которые являются одновременно непрозрачными и непроходимыми.

Расстоянием исключения столкновений (или **расстоянием носильщиков пианино, метрикой кратчайшего пути с препятствиями**) называется метрика на множестве $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbb{O}\}$, определенная для любых $x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbb{O}\}$ как длина кратчайшего из всех возможных непрерывных путей, соединяющих x и y и не пересекающих препятствия $O_i \backslash \partial O_i$ (путь может проходить через точки на границе ∂O_i препятствия ∂O_i), $i = 1,\dots,m$.

Прямоугольное расстояние с барьерами

Пусть $\mathbb{O} = \{O_1,\dots,O_m\}$ – совокупность попарно непересекающихся открытых многоугольных барьеров на $\mathbb{R}^2$. *Прямоугольный путь* (*или путь Манхэттена*) P_{xy} от x к y есть совокупность горизонтальных и вертикальных отрезков на плоскости, соединяющих x и y. Путь P_{xy} называется *осуществляемым* если

$$P_{xy} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i \right) = \emptyset .$$

Прямоугольное расстояние с барьерами (или *прямоугольное расстояние при наличии барьеров*) есть метрика на $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbb{O}\}$, определенная для любых $x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbb{O}\}$ как длина *кратчайшего осуществимого прямоугольного пути* от x к y.

Прямоугольное расстояние с барьерами является сужением **метрики Манхэттена** и обычно рассматривается на множестве $\{q_1,\dots,q_r\} \subset \mathbb{R}^2$ из n точек "отправитель-получатель": задача нахождения путей такого типа возникает, например, при организации транспортных перевозок в городских условиях, а также при планировке заводов и сооружений (см., например, [LaLi81]).

Расстояние связи

Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ – *многоугольная область* (на n вершинах с h дырами), т.е. замкнутая многосвязная область, граница которой – объединение n линейных отрезков, образующих $n + 1$ замкнутых многоугольных циклов. **Расстоянием связи** называется метрика на P, определенная для любых $x, y \in P$ как минимальное число ребер многоугольного пути от x к y в пределах многоугольной области P.

Если разрешены только прямоугольные пути, мы получаем *прямоугольное расстояние связи.* Если пути C-ориентированы (т.е. каждое ребро параллельно одному из ребер множества C с заданной ориентацией), то мы имеем *C-ориентированное расстояние связи.*

Расстояния планировки сооружений

Планировка – это разбиение прямоугольной плоской области на прямоугольники меньшего размера, называемые *отделениями,* линиями, проходящими параллельно сторонам исходного прямоугольника. Все внутренние вершины должны быть трехвалентными, а некоторые из них, по крайней мере одна на границе каждого отделения, являются *дверями,* т.е. местами входа-выхода. Проблема заключается в создании подходящего представления о расстоянии $d(x, y)$ между отделениями x и y, которое минимизировало бы *функцию цены* $\sum_{x,y} F(x,y)d(x,y)$, где $F(x, y)$ – некий *материальный поток* между x и y. Основными используемыми для этого расстояниями являются:

– **расстояние центроида**, т.е. кратчайшее евклидово расстояние или расстояние **Манхэттена** между *центроидами* (пересечения диагоналей) x и y;

– **расстояние периметра**, т.е. кратчайшее прямоугольное расстояние между дверями x и y, проходящее только вдоль *стен,* т.е. периметров отделений.

Метрика быстрейшего пути

Метрика быстрейшего пути (или **метрика сети**) – метрика на $\mathbb{R}^2$ (или на подмножестве $\mathbb{R}^2$) при наличии данной *сети,* т.е. плоского взвешенного графа $G(V, E)$. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ это является временем *быстрейшего пути* между x и y в при наличии сети G, т.е. пути, максимально сокращающего время перемещения между x и y. После получения доступа в сеть G далее можно перемещаться с некоторой скоростью $v > 1$ вдоль ее ребер. Движение вне сети осуществляется с единичной скоростью относительно заданной метрики d на плоскости (например, евклидовой метрики или **метрики Манхэттена**).

Метрика воздушных перевозок есть метрикой быстрейшего пути на $\mathbb{R}^2$ при наличии *сети аэропортов*, т.е. плоского графа $G(V, E)$ на n вершинах (*аэропортах*) с положительными весами ребер $(w_e)_{e\in E}$ (*время полета*). Войти и выйти из графа можно только через аэропорты. Движение вне сети осуществляется с единичной скоростью относительно евклидовой метрики. Предполагается, что движение на автомобиле по времени равно метрике евклидова расстояния d_E, тогда как полет вдоль ребра $e = uv$ графа G займет время $w_e < d_E(u, v)$. В простейшем случае, когда осуществляется перевозка по воздуху между двумя точками $a, b \in \mathbb{R}^2$, расстояние между x и y равно

$$\min\{d_E(x,y), d_E(x,a)+w+d_E(b,y), d_E(x,b)+w+d_E(a,y)\},$$

где $w < d_2(a, b)$ есть продолжительность полета между a и b.

Метрика города – метрика быстрейшего пути на $\mathbb{R}^2$ при наличии *сети общественного транспорта*, т.е. плоского графа G с горизонтальными или вертикальными ребрами. G может состоять из многих связных компонент и содержать циклы. Каждый может попасть в G в любой точке, будь то вершина или ребро (возможно назначить также и строго фиксированные точки входа). Внутри G движение осуществляется с заданной скоростью $v > 1$ в одном из доступных направлений. Движение вне сети осуществляется с единичной скоростью относительно **метрики Манхэттена** (в нашем случае подразумевается крупный современный город с прямоугольной планировкой улиц по направлениям север–юг и восток–запад).

Метрика метро – метрика быстрейшего пути на $\mathbb{R}^2$, которая является вариантом метрики города: метро (в виде линии на плоскости) используется для сокращения ходьбы пешком в пределах городской сетки координат.

Периодическая метрика

Метрика d на $\mathbb{R}^2$ называется **периодической,** если существуют два линейно независимых вектора v и u, такие что *перенос* по любому вектору $w = mv + nu, m,n \in \mathbb{Z}$ сохраняет расстояния, т.е. $d(x,y) = d(x+w, y+w)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ (см. **Инвариантная метрика переноса**, гл. 5)

Правильная метрика

Метрика d на $\mathbb{R}^2$ называется **правильной,** если обладает следующими свойствами:

1) d порождает евклидову топологию;

2) d-окружности ограничены относительно евклидовой метрики;

3) если $x, y \in \mathbb{R}^2$ и $x \neq y$, то существует точка $z, z \neq x, z \neq y,$ такая что выполняется равенство $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$;

4) если $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \prec y$ (где $\prec$ фиксированный порядок на $\mathbb{R}^2$, например, лексикографический порядок), $C(x,y) = \{z \in \mathbb{R}^2 : d(x,z) \leq d(y,z)\}$, $D(x,y) = \{z \in \mathbb{R}^2 : d(x,$

$z) < d(y,z)\}$ и $\overline{D(x,y)}$ – замыкание $D(x,y)$, то $J(x,y) = C(x,y) \cap \overline{D(x,y)}$ есть кривая, гомеоморфная (0,1). Пересечение двух таких кривых состоит из конечного числа многих связных компонент.

Каждая **метрика нормы** имеет свойства 1., 2. и 3. Свойство 2. означает, что метрика d является непрерывной в бесконечности относительно евклидовой метрики. Свойством 4. обеспечивается, что границы соответствующих диаграмм *Вороного* являются кривыми и что не слишком много пересечений существовует в окрестности точки или в бесконечности. Правильная метрика d имеет *правильную диаграмму Вороного*: в диаграмме Вороного $V(P,d,\mathbb{R}^2)$ (где $P = \{p_1,\dots,p_k\}, k \geq 2$ – множество генераторов) каждая *область Вороного* $V(p_i)$ является путь-связным множеством с непустой внутренностью, а система $\{V(p_i),\dots,V(p_k)\}$ образует *разбиение* плоскости.

Квазирасстояния контакта

Квазирасстояния контакта представляют собой следующие варианты **выпуклой функции расстояния** (см. гл. 1), определенной на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$).

Для множества $B \subset \mathbb{R}^2$ **квазирасстояние первого контакта** d_B определяется как

$$\inf\{\alpha > 0 : y - x \in \alpha B\}$$

(см. **Расстояния сети сенсорных датчиков,** гл. 28).

Более того, для точки $b \in B$ и множества $A \subset \mathbb{R}^2$ квазирасстоянием **линейного контакта называется расстояние между точкой и множеством**, определенное как $d_b(x,A) = \inf\{\alpha \geq 0 : \alpha b + x \in A\}$.

Квазирасстояние перехвата для конечного множества B определяется как $\dfrac{\sum_{b \in B} d_b(x,y)}{|B|}$.

Дальность распознавания радара

Дальность распознавания радара – расстояние на $\mathbb{R}^2$, определенное как

$$|\rho_x - \rho_y + \theta_{xy}|,$$

если $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, и как

$$|\rho_x - \rho_y|,$$

если $x = 0$ или $y = 0$, где для каждой "локации" $x \in \mathbb{R}^2$ ρ_x – радиальное расстояние x от начала координат, и для любых x, $y \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ θ_{xy} – угол между ними (в радианах)ю

Полуметрика Эренфёхта–Хауслера

Пусть S – будет подмножество $\mathbb{R}^2$, так что $x_1 \geq x_2 - 1 \geq 0$ для любого $x \in S$.

Полуметрика **Эренфёхта–Хауслера** ([EhHa88]) на S определяется как

$$\log_2\left(\left(\frac{x_1}{y_2}+1\right)\left(\frac{y_1}{x_2+1}\right)\right).$$

Тороидальная метрика

Тороидальная метрика – метрика на теле $T = [0,1)\times[0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1, x_2 < 1\}$, определенная как

$$\sqrt{t_1^2 + t_2^2}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$, где $t_i = \min\{|x_i - y_i|,\ |x_i - y_i + 1|\}$ для $i = 1,2$ (см. **Метрика тора**).

Метрика окружности

Метрика окружности – внутренняя метрика на *единичной окружности* S^1 круге на плоскости. Поскольку $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} = \{e^{i\theta} : 0 \le \theta < 2\pi\}$, эта метрика длиной кратчайшей из двух дуг, соединяющих точки $e^{i\theta}$, $e^{i\vartheta} \in S^1$, и может быть записана как

$$\min\{|\theta - \vartheta\}, 2\pi - |\theta - \vartheta|\} = \begin{cases} |\theta - \vartheta|, & \text{если } 0 \le |\theta - \vartheta| \le \pi, \\ 2\pi - |\vartheta - \theta|, & \text{если } |\vartheta - \theta| > \pi \end{cases}$$

(см. **Метрика между углами**).

Угловое расстояние

Угловое расстояние по окружности круга является числом радиан, пройденных путем, т.е.

$$\theta = \frac{l}{r},$$

где l – длина пути и r – радиус окружности.

Метрика между углами

Метрикой между углами Λ называется метрика на множестве всех углов плоскости, определенная как

$$\min\{|\theta - \vartheta\}, 2\pi - |\theta - \vartheta|\} = \begin{cases} |\vartheta - \theta|, & \text{если } 0 \le |\vartheta - \theta| \le \pi, \\ 2\pi - |\vartheta - \theta|, & \text{если } |\vartheta - \theta| > \pi \end{cases}$$

для любых $\theta, \vartheta \in [0, 2\pi)$ (см. **Метрика круга**).

Метрика между направлениями

На плоскости $\mathbb{R}^2$ *направление* $\hat{l}$ есть класс всех прямых, параллельных данной прямой $l \subset \mathbb{R}^2$. **Метрикой между направлениями** называется метрика на множестве $\mathscr{L}$ всех направлений плоскости, определенная для любых направлений $\hat{l}, \hat{m} \in \mathscr{L}$ как угол между любыми двумя их представителями.

Квазиметрика кольцевой железной дороги

Квазиметрикой кольцевой железной дороги называется квазиметрика на *единичной окружности* $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, определенная для любых $x,y \in S^1$ как длина дуги окружности против часовой стрелки от x к y.

Инверсивное расстояние

Инверсивное расстояние между двумя непересекающимися кругами на плоскости определяется как натуральный логарифм частного радиусов (большего и меньшего) двух концентрических кругов, в которые данные круги могут быть инверсированы.

Пусть c – расстояние между центрами двух непересекающихся кругов с радиусами a и $в$, $b < a$. Тогда их инверсивное расстояние задается как

$$\cosh^{-1}\left|\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right|.$$

Описанная окружность и *вписанная окружность* треугольника с радиусом описанной окружности R и радиусом вписанной окружности находятся на инверсивном расстоянии $2\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{R}}\right)$.

Имея три неколлинеарных точки, построим три попарно касающиеся окружности с центрами в указанных точках. В этом случае существуют точно две непересекающиеся окружности, которые являются касательными для всех трех окружностей. Они называются внутренним и наружным *кругами Содди*. Инверсивное расстояние между кругами Содди равно $2\cosh^{-1}2$.

19.2. МЕТРИКИ НА ЦИФРОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Ниже перечисляются метрики, которые применяются в *компьютерном зрении* (или *распознавании образов, системах технического зрения робота, цифровой геометрии*).

Машинное изображение (или *компьютерное изображение*) – подмножество $\mathbb{Z}^n$, называемого *цифровым nD пространством.* Обычно изображения представляются на *цифровой плоскости* (или *плоскости образов*) $\mathbb{Z}^2$ или в *цифровом пространстве* (или *пространстве образов*) $\mathbb{Z}^3$. Точки $\mathbb{Z}^n$ называются *пикселями.* Цифровое *nD m-квантованное пространство* есть шкалированное пространство $\frac{1}{m}\mathbb{Z}^n$.

Цифровая метрика (см., например, [RoPf68]) – любая метрика на цифровом *nD* пространстве. Обычно она целочисленна.

Основными используемыми метриками на $\mathbb{Z}^n$ являются $\boldsymbol{l_1}$- и $\boldsymbol{l_\infty}$**-метрики**, а также $\boldsymbol{l_2}$**-метрика**, округленные до ближайшего справа (или слева) целого. В общем случае, если задать перечень *соседней* пикселя, то метрику можно рассматривать как перечень *пошаговых движений* на $\mathbb{Z}^2$. Сопоставим **простое расстояние**, т.е. положительный вес, каждому типу таких движений. Теперь многие цифровые метрики можно получить как минимум (по всем возможным *путям*, т.е. последовательностям допустимых движений) суммы соответствующих простых расстояний.

На практике вместо полного пространства $\mathbb{Z}^n$ рассматривается подмножество $(\mathbb{Z}_m)^n = \{0,1,\dots,m-1\}^n$. $(\mathbb{Z}_m)^2$ и $(\mathbb{Z}_m)^3$ называются соответственно *m-грилем* и *m-стеллажом* структурой. Наиболее часто используемыми метриками на $(\mathbb{Z}_m)^n$ являются **хэммингова метрика** и **метрика Ли.**

Метрика гриды

Метрикой гриды называется $\boldsymbol{l_1}$**-метрика** на $\mathbb{Z}^n$. l_1-метрику на $\mathbb{Z}^n$ можно рассматривать как **метрику пути** бесконечного графа: две точки $\mathbb{Z}^n$ являются смежными, если их l_1-расстояние равно единице. Для $\mathbb{Z}^2$ данный граф является обычной *гридой* (*сеткой координат*). Поскольку каждая точка имеет точно четыре ближайших соседа в $\mathbb{Z}^2$ для l_1-метрики, то ее называют также **4-метрикой**.

Для $n = 2$ данная метрика является сужением на $\mathbb{Z}^2$ **метрики городского квартала**, которую называют также **метрикой такси, прямоугольной метрикой** или **метрикой Манхэттена**.

Метрика решетки

Метрикой решетки называется **l_∞-метрика** на $\mathbb{Z}^n$. l_∞-метрику на $\mathbb{Z}^n$ можно рассматривать как **метрику пути** бесконечного графа: две точки $\mathbb{Z}^n$ являются смежными, если их l_∞-расстояние равно единице. Для $\mathbb{Z}^2$ смежность соответствует ходу короля, в терминах шахмат, и такой граф называется *l_∞-гридой*, а сама метрика называется также **метрикой шахматной доски, метрикой хода короля** или **метрикой короля**. Так как каждая точка имеет точно восемь ближайших соседей в $\mathbb{Z}^2$ для l_∞-метрики, она называется также **8-метрикой**.

Данная метрика является сужением на $\mathbb{Z}^n$ **метрики Чебышева**, которую также называют **sup метрикой** или **равномерной метрикой**.

Шестиугольная метрика

Шестиугольной метрикой называется метрика на $\mathbb{Z}^2$ с *единичной сферой* $S^1(x)$ (с центром в точке $x \in \mathbb{Z}^2$), определенной как $S^1(x) = S^1_{l_1}(x) \cup \{(x_1 - 1, x_2 - 1),\ (x_1 - 1, x_2 + 1)\}$ для x *четного* (т.е. с четным x_2) и как $S^1(x) = S^1_{l_1}(x) \cup \{(x_1 + 1, x_2 - 1),\ (x_1 + 1, x_2 + 1)\}$ для x нечетного (т.е. с нечетным x_2). Поскольку любая единичная сфера $S^1(x)$ содержит точно шесть целочисленных точек, шестиугольная метрика называется также **6-метрикой** ([LuRo76]).

Для любых $x, y \in \mathbb{Z}^2$ она может быть записана как

$$\max\left\{|u_2|, \frac{1}{2}(|u_2| + u_2) + \left\lfloor \frac{x_2+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y_2+1}{2} \right\rfloor - u_1,\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}(|u_2| - u_2) - \left\lfloor \frac{x_2+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y_2+1}{2} \right\rfloor + u_1\right\}.$$

где $u_1 = x_1 - y_1$ и $u_2 = x_2 - y_2$.

Шестиугольная метрика может быть определена как **метрика пути** на *шестиугольной гриде* плоскости. В *шестиугольных координатах* (h_1, h_2) (где h_1- и h_2-оси параллельны ребрам гриды) шестиугольное расстояние между точками (h_1, h_2) и (i_1, i_2) можно записать как $|h_1 - i_1| + |h_2 - i_2|$, если $(h_1 - i_1)(h_2 - i_2) \geq 0$, и как $\max\{|h_1 - i_1|, |h_2 - i_2|\}$, если $(h_1 - i_1)(h_2 - i_2) \leq 0$. Здесь шестиугольные координаты (h_1, h_2) точки x соотносятся с их прямоугольными декартовыми координатами (x_1, x_2) как $h_1 = x_1 - \left\lfloor \frac{x_2}{2} \right\rfloor$, $h_2 = x_2$ для x четного и как $h_1 - = x_1 - \left\lfloor \frac{x_2+1}{2} \right\rfloor$, $h_2 = x_2$ для x нечетного.

Шестиугольная метрика является лучшей, чем **l_1-метрика** или **l_∞-метрика**, аппроксимацией евклидовой метрики.

Метрика последовательности соседства

На цифровой плоскости $\mathbb{Z}^2$ рассмотрим два типа движений: *движение городского квартала*, где разрешены только горизонтальные или вертикальные направления, и *движение шахматной доски*, где разрешаются также перемещения по диагонали. Использование двух этих типов движений определяется *последовательностью соседства* $B = \{b(1), b(2), \dots, b(l)\}$, где $b(i) \in \{1, 2\}$ является специальным типом соседства: $b(i) = 1$ обозначает изменение объекта в одной координате (*соседство городского квартала*), а $b(i) = 2$ обозначает изменение объекта также в двух координатах (*соседство шахматной доски*). Последовательность B определяет тип движения, которое будет применяться на каждом этапе (см. [Das90]).

Метрика последовательности соседства – метрика на $\mathbb{Z}^2$, определенная как длина кратчайшего пути между x и $y \in \mathbb{Z}^2$, задаваемого конкретной последовательностью соседства B. Ее можно записать как

$$\max\{d_B^1(u), d_B^2(u)\},$$

где $u_1 = x_1 - y_1$, $u_2 = x_2 - y_2$, $d_B^1(u) = \max\{|u_1|, |u_2|\}$, $d_B^2(u) = \sum_{j=1}^{l} \left\lfloor \frac{|u_1| + |u_2| + g(j)}{f(l)} \right\rfloor$,

$$f(0) = 0, \quad f(i) \sum_{j=1}^{i} b(j), \quad 1 \le i \le l, \quad g(j) = f(l) - f(j-1) - 1, \quad 1 \le j \le l.$$

Для $B = \{1\}$ получаем **метрику городского квартала,** для $B = \{2\}$ получаем **метрику шахматной доски.** Случай $B = \{1, 2\}$, т.е. альтернативное использование этих передвижений, дает **восьмиугольную метрику** (см. [RoPf68]).

Правильный выбор B-последовательности может подвести соответствующую метрику весьма близко к евклидовой метрике. Она всегда больше, чем расстояние шахматной доски, но меньше, чем расстояние городского квартала.

Метрика последовательности *nD*-соседства

Метрикой последовательности nD-соседства называется метрика на $\mathbb{Z}^n$, определенная как длина кратчайшего пути между x и $y \in \mathbb{Z}^n$, задаваемого *последовательностью nD-соседства* B (см. [Faze99]).

Формально две точки $x, y \in \mathbb{Z}^n$ называются *m-соседями,* $0 \le m \le n$, если $0 \le |x_i - y_1| \le 1$, $1 \le i \le n$, и $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \le m$. Конечная последовательность $B = \{b(1), \dots, b(l)\}$, $b(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ называется *последовательностью nD-соседства с периодом l*. Для любых $x, y \in \mathbb{Z}^n$ последовательность точек $x = x^0, x^1, \dots, x^k = y$, где x^i и x^{i+1}, $0 \le i \le k-1$ являются r-соседями, $r = b((i \bmod l)+1)$, называется *путем длины R* от x к y, *заданным с помощью B*. Расстояние между x и y можно записать как

$$\max_{1 \le i \le n} d_i(u) \subset d_i(u) = \sum_{j=1}^{l} \left\lfloor \frac{a_i + g_i(j)}{f_i(l)} \right\rfloor,$$

где $u = (|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|)$ является невозрастающей упорядоченностью $|u_m|$, $u_m = x_m - y_m$, $m = 1, \dots, n$, т.е. $|u_i| \le |u_j|$, если $i < j$; $a_i = \sum_{j=1}^{n-i+1} u_j$; $b_i(j) = b(j)$, если $b(j) < n - i + 2$, и равно $n - i + 1$,, иначе; $f_i(j) = \sum_{k=1}^{j} b_i(k)$, если $1 \le j \le l$, и равно 0, если $j = 0$; $g_i(j) = f_1(l) - f_i(j-1) - 1, 1 \le j \le l$.

Множество метрик последовательности $3D$-соседства образует полную дистрибутивную решетку относительно естественного сравнения. Данная структура играет важную роль в аппроксимировании евклидовой метрики цифровыми метриками.

Метрика, порожденная путем

Рассмотрим *l_∞-гриду*, т.е. граф с множеством вершин $\mathbb{Z}^2$, в котором две вершины являются *соседними,* если их l_∞-расстояние равно единице. Пусть $\mathcal{P}$ – совокупность путей в l_∞-гриде, такая что для любых $x, y \in \mathbb{Z}^2$ существует по крайней мере один путь из $\mathcal{P}$ между x и y, и $\mathcal{P}$ если содержит путь Q, то она также содержит каждый путь, содержащийся в Q. Пусть $d_{\mathcal{P}}(x, y)$ – длина кратчайшего пути из $\mathcal{P}$ между x и $y \in \mathbb{Z}^2$. Если $d_{\mathcal{P}}$ является метрикой на $\mathbb{Z}^2$, то она называется **метрикой, порожденной путем** (см., например, [Melt91]).

Пусть G – одно из множеств $G_1 = \{\uparrow, \rightarrow\}$, $G_{2A} = \{\uparrow, \nearrow\}$, $G_{2B} = \{\uparrow, \nwarrow\}$, $G_{2C} = \{\nearrow, \nwarrow\}$, $G_{2D} = \{\rightarrow, \nwarrow\}$, $G_{3A} = \{\rightarrow, \uparrow, \nearrow\}$, $G_{3B} = \{\rightarrow, \uparrow, \nwarrow\}$, $G_{4A} = \{\rightarrow, \nearrow, \nwarrow\}$, $G_{4B} = \{\uparrow, \nearrow, \nwarrow\}$, $G_5 = \{\rightarrow, \uparrow, \nearrow, \nwarrow\}$. Пусть $\mathcal{P}(G)$ – множество путей, полученных посредством сочленения путей в G и соответствующих путей в противоположных направлениях. Любая метрика, порожденная путем, совпадает с одной из метрик $d_{\mathcal{P}(G)}$. Более того, имеют место следующие формулы:

1. $d_{\mathcal{P}(G_1)}(x, y) = |u_1| + |u_2|$;
2. $d_{\mathcal{P}(G_{2A})}(x, y) = \{|2u_1 - u_2|, |u_2|\}$;
3. $d_{\mathcal{P}(G_{2B})}(x, y) = \max\{|2u_1 - u_2|, |u_2|\}$;
4. $d_{\mathcal{P}(G_{2C})}(x, y) = \max\{|2u_2 - u_1|, |u_1|\}$;
5. $d_{\mathcal{P}(G_{2D})}(x, y) = \max\{|2u_2 - u_1|, |u_1|\}$;
6. $d_{\mathcal{P}(G_{3A})}(x, y) = \max\{|u_1|, |u_2|, |u_1 - u_2|\}$;
7. $d_{\mathcal{P}(G_{3B})}(x, y) = \max\{|u_1|, |u_2|, |u_1 + u_2|\}$;
8. $d_{\mathcal{P}(G_{4A})}(x, y) = \max\left\{2\left\lceil\left(|u_1| - |u_2|\right)/2\right\rceil, 0\right\} + |u_2|$;
9. $d_{\mathcal{P}(G_{4B})}(x, y) = \max\left\{2\left\lceil\left(|u_2| - |u_1|\right)/2\right\rceil, 0\right\} + |u_1|$;
10. $d_{\mathcal{P}(G_5)}(x, y) = \max\{|u_1|, |u_2|\}$;

где $u_1 = x_1 - y_1$, $u_2 = x_2 - y_2$, а $\lceil \cdot \rceil$ является *потолочной функцией*: для любого действительного x число является $\lceil x \rceil$ наименьшим целым числом, которое больше или равно x.

Полученные из G-множеств метрические пространства, имеющие одинаковые цифровые индексы, являются изометричными. $d_{\mathcal{P}(G_1)}$ есть **метрика городского квартала**, а $d_{\mathcal{P}(G_5)}$ – **метрика шахматной доски**.

Метрика коня

Метрикой коня называется метрика на $\mathbb{Z}^2$, определенная как минимальное число ходов, которые понадобится сделать шахматному коню для перемещения из x в $\mathbb{Z}^2$. Ее *единичная сфера* S^1_{knight} с центром в начале координат содержит ровно 8 целочисленных точек $\{(\pm 2, \pm 1), (\pm 1, \pm 2)\}$ и может быть записана как $S^1_{\text{knight}} = S^3_{l_1} \cap S^2_{l_\infty}$, где $S^3_{l_1}$ есть l_1-сфера радиуса 3 и $S^2_{l_\infty}$ есть l_∞-сфера радиуса 2 и центром в начале координат ([DaCh88]).

Расстояние между x и y равно 3, если $(M, m) = (1, 0)$, равно 4, если $(M, m) = (2, 2)$, и равно $\max\left\{\left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{M+m}{3} \right\rceil\right\} + (M+m) - \max\left\{\left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{M+m}{3} \right\rceil\right\} (\text{mod}\, 2)$, иначе, где $M = \max\{|u_1|, |u_2|\}$, $m = \min\{|u_1|, |u_2|\}$, $u_1 = x_1 - y_1$, $u_2 = x_2 - y_2$.

Метрика супер-коня

Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, причем $p + q$ четно и $(p, q) = 1$.

(p, q)-*супер-конь* (или (p, q)-*прыгун*) есть фигура обобщенных шахмат, ход которой состоит из прыжка на р клеток в одном направлении и последующего ортогонального прыжка на q клеток в заданную конечную клетку. Термины обобщенных шахмат существуют для $(p, 1)$-прыгуна с $p = 0,1,2,3,4$ (*визирь, ферзь, обычный конь, верблюд, жираф*) и для $(p, 2)$-прыгуна с $p = 0,1,2,3$ (*даббаба, обычный конь, алфил, зебра*).

Метрика **(p, q)-супер-коня** (или *метрика* (p, q)-*прыгуна*) – метрика на $\mathbb{Z}^2$, определенная как минимальное число ходов, которое понадобится (p, q)-супер-коню для перемещения из x в $y \in \mathbb{Z}^2$. Таким образом, ее *единичная сфера* $S^1_{p,q}$ с центром в начале координат содержит ровно 8 целочисленных точек $\{(\pm p, \pm q), (\pm q, \pm p)\}$ ([DaMu90].)

Метрика коня – метрика (1,2)-супер-коня. Метрику городского квартала можно рассматривать как *метрику визиря*, т.е. метрику (0,1)-супер-коня.

Метрика ладьи

Метрикой ладьи называется метрика на $\mathbb{Z}^2$, определенная как минимальное число ходов, которые понадобится сделать шахматной ладье для перемещения из x в $y \in \mathbb{Z}^2$. Данная метрика имеет только значения $\{0,1,2\}$ и совпадет с **хэмминговой метрикой** на $\mathbb{Z}^2$.

Метрика скругления

Возьмем два положительных числа α, β с $\alpha \le \beta < 2$ и рассмотрим (α,β)-*взвешенную* l_∞-*гриду координат,* т.е. бесконечный граф с множеством вершин $\mathbb{Z}^2$, две вершины которого являются смежными, если их l_∞-расстояние равно единице, причем горизонтальные/вертикальные и диагональные ребра имеют *веса* α и β соответственно.

Метрикой скругления (или *метрикой* (α, β)-*скругления*, см. [Borg86]) называется **метрика взвешенного пути** в вышеуказанном графе. Для любых $x, y \in \mathbb{Z}^2$ она может быть записана как

$$\beta m + \alpha(M - m),$$

где $M = \max\{|u_1|, |u_2|\}$, $m = \min\{|u_1|, |u_2|\}$, $u_1 = x_1 - y_1$, $u_2 = x_2 - y_2$.

Если веса α и β равны евклидовым длинам 1, $\sqrt{2}$ горизонтальных/вертикальных и диагональных ребер соответственно, то получаем евклидову длину кратчайшего пути шахматной доски между x и y. Если $\alpha = \beta = 1$, то имеем **метрику шахматной доски**. Метрика (3, 4)-скругления наиболее часто используется для работы с цифровыми образами; она называется просто **(3, 4)-метрикой**.

Метрика 3*D*-скругления – метрика взвешенного пути графа с множеством вершин $\mathbb{Z}^3$ вокселей, два из которых являются смежными, если их l_∞-расстояние равно единице, причем веса α, β и γ связаны соответственно с расстояниями от 6 граневых соседей, 12 реберных соседей и 8 угловых соседей.

Метрика взвешенного разреза

Рассмотрим *взвешенную l_∞-гриду*, т.е. граф с множеством вершин $\mathbb{Z}^2$, две из которых являются смежными, если их l_∞-расстояние равно единице, и каждое ребро имеет заданный положительный *вес* (или *цену*). Обычная **метрика взвешенного пути** между двумя пикселями является минимальной ценой соединяющего их пути. **Метрикой взвешенного разреза** между двумя пикселями называется минимальная цена (определенная сейчас как сумма цен пересекаемых ребер) *разреза,* т.е. кривой в плоскости, соединяющей их и обходящей пиксели.

Метрика цифрового объема

Метрикой цифрового объема называется метрика на множестве K всех ограниченных подмножеств (*изображений* или *образов*) множества $\mathbb{Z}^2$ (в общем случае $\mathbb{Z}^n$), определенная как

$$\mathrm{vol}(A\Delta B),$$

где $\mathrm{vol}(A) = |A|$, т.е. число содержащихся в A пикселей, и $A\Delta B$ – *симметрическая разность* между множествами A и B.

Данная метрика – цифровой аналог **метрики Никодима**.

Шестиугольная хаусдорфова метрика

Шестиугольная хаусдорфова метрика есть метрика на множестве всех ограниченных подмножеств (*изображений* или *образов*) *шестиугольной гриды* на плоскости, определенная как

$$\inf\{p, q : A \subset B + qH,\ \ D \subset A + pH\}$$

для любых изображений A и B, где pH – *правильный шестиугольник размера p* (т.е. с $p + 1$ пикселем на каждом ребре) с центром в начале координат, содержащий свою внутренность, и + является *сложением Минковского*: $A + B = \{y + y : x \in A,$ $y \in B\}$ (см. **Метрика Помпейю–Хаусдорфа–Бляшке,** гл. 9). Если A является пикселем x, то расстояние между x и B равно $\sup_{y \in B} d_6(x, y)$, где d_6 – **шестиугольная метрика**, т.е. **метрика пути** на шестиугольной гриде.

Глава 20

РАССТОЯНИЯ ДИАГРАММ ВОРОНОГО

Для конечного множества A объектов A_i в пространстве S построение *диаграммы Вороного* множества A означает разбиение пространства S на *области Вороного* $V(A_i)$ таким образом, чтобы $V(A_i)$ содержали все точки S, которые расположены "ближе" к A_i, чем к любому другому объекту A_j из A.

Для порождающего множества $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $k \geq 2$, различных точек (*порождающих элементов*), *или генераторов* из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *стандартный многоугольник Вороного* $V(p_i)$, связанный с порождающим элементом p_i, определяется как

$$V(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_E(x, p_i) \leq d_E(x, p_j) \quad \text{для любого } j \neq i\},$$

где d_E – обычное евклидово расстояние на $\mathbb{R}^n$. Множество

$$V(P, d_E, \mathbb{R}^n) = \{V(p_1), \ldots, V(p_k)\}$$

называется *n-мерной стандартной диаграммой Вороного, порождаемой* P. Границы (n-мерных) многоугольников Вороного называются ((n–1)-мерными) *гранями Вороного*, границы граней Вороного называются (n–2)-*мерными гранями Вороного*, …, границы двумерных граней Вороного называются *ребрами Вороного*, границы ребер – *вершинами Вороного.*

Обобщение стандартной диаграммы Вороного возможно в следующих трех направлениях:

1. Обобщение в смысле порождающего множества $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$, которое может быть множеством прямых, множеством областей и т.п.

2. Обобщение в смысле пространства‛, которое может быть сферой (*сферическая диаграмма Вороного*), цилиндром (*цилиндрическая диаграмма Вороного*), конусом (*коническая диаграмма Вороного*), поверхностью многогранника (*диаграмма многогранника Вороного*) и т.п.

3. Обобщение в смысле функции d, где $d(x, A)$ является мерой "расстояния" от точки $x \in S$ до порождающего элемента $A_i \in A$.

Такая функция обобщенного расстояния d называется **порождающим расстоянием Вороного** (или *расстоянием Вороного, V-расстоянием*) и позволяет получить много других функций, кроме обычной метрики на S. Если F является строго возрастающей функцией V-расстояния d, т.е. $F(d(x, A_i)) \leq F(d(x, A_j))$ тогда и только тогда, когда $d(x, A_i) \leq d(x, A_j)$, то обобщенные диаграммы Вороного $V(A, F(d), S)$ и $V(A, d, S)$ совпадают и говорят, что V-расстояние $F(d)$ является *трансформируемым* в V-расстояние d, и что обобщенная диаграмма Вороного $V(A, F(d), S)$ является *тривиальным обобщением* обобщенной диаграммы Вороного $V(A, d, S)$. В приложениях для тривиального обобщения стандартной диаграммы Вороного $V(P, d, \mathbb{R}^n)$ часто пользуются **экспоненциальным расстоянием, логарифмическим расстоянием** и **степенным расстоянием**. Существуют обобщенные диаграммы

Вороного $V(P, d, \mathbb{R}^n)$, определенные с помощью V-расстояний, которые не являются *трансформируемыми* к евклидову расстоянию d_E: **мультипликативно взвешенное расстояние Вороного, аддитивно взвешенное расстояние Вороного** и т.п.

Дополнительные сведения по этой тематике можно найти в [OBS92], [Klei89].

20.1. КЛАССИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ ВОРОНОГО

Экспоненциальное расстояние

Экспоненциальное расстояние – порождающее расстояние Вороного

$$D_{\exp}(x, p_i) = \mathrm{e}^{d_E(x, p_i)}$$

для тривиального обобщения $V(P, D_{\exp}, \mathbb{R}^n)$ стандартной диаграммы Вороного $V(P, d_E, \mathbb{R}^n)$, где d_E – евклидово расстояние.

Логарифмическое расстояние

Логарифмическое расстояние – порождающее расстояние Вороного

$$D_{\ln}(x, p_i) = \ln d_E(x, p_i)$$

для тривиального обобщения $V(P, D_{\ln}, \mathbb{R}^n)$ стандартной диаграммы Вороного $V(P, d_E, \mathbb{R}^n)$, где d_E – евклидово расстояние.

Степенное расстояние

Степенное расстояние – порождающее расстояние Вороного

$$D_\alpha(x, p_i) = d_E(x, p_i)^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

для тривиального обобщения $V(P, D_\alpha, \mathbb{R}^n)$ стандартной диаграммы Вороного $V(P, d_E, \mathbb{R}^n)$, где d_E – евклидово расстояние.

Мультипликативно взвешенное расстояние

Мультипликативно взвешенное расстояние d_{MW} – порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{MW}, \mathbb{R}^n)$ (*мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного*), определенное как

$$d_{MW}(x, p_i) = \frac{1}{w_i} d_E(x, p_i)$$

для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ и любого порождающего элемента $p_i \in P = \{p_i, \ldots, p_k\}$, $k \geq 2$, где $w_i \in w = \{w_i, \ldots, w_k\}$ – заданный положительный *мультипликативный вес* порождающего элемента p_i и d_E – обычное евклидово расстояние.

Для $\mathbb{R}^2$ мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного называется *круговой упаковской Дирихле*. Ребром этой диаграммы является дуга окружности или прямая.

В плоскости $\mathbb{R}^2$ существует обобщение мультипликативно взвешенной диаграммы Вороного, *кристаллическая диаграмма Вороного*, с тем же определением расстояния (где w_i – скорость роста кристалла p_i), но отличающимся разбиением плоскости, поскольку кристаллы могут расти только на свободном пространстве.

Аддитивно взвешенное расстояние

Аддитивно взвешенное расстояние d_{MW} есть порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{AW}, \mathbb{R}^n)$ (*аддитивно взвешенная диаграмма Вороного*), определенное как

$$d_{AW}(x, p_i) = d_E(x, p_i) - w_i$$

для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ и любого порождающего элемента $p_i \in P = \{p_i, \ldots, p_k\}$, , $k \geq 2$, где $w_i \in w = \{w_i, \ldots, w_k\}$ – заданный *аддитивный вес* порождающего элемента p_i, и d_E – обычное евклидово расстояние.

Для $\mathbb{R}^2$ аддитивно взвешенная диаграмма Вороного называется *гиперболической упаковкой Дирихле*. Ребром этой диаграммы является дуга гиперболы или отрезок прямой.

Аддитивно взвешенное степенное расстояние

Аддитивно взвешенное степенное расстояние d_{PW} – порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{PW}, \mathbb{R}^n)$ (*аддитивно взвешенная степенная диаграмма Вороного*), определенное как

$$d_{PW}(x, p_i) = d_E^2(x, p_i) - w_i$$

для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ и любого порождающего элемента $p_i \in P = \{p_i, \ldots, p_k\}$, $k \geq 2$, где $w_i \in w = \{w_i, \ldots, w_k\}$ – заданный *аддитивный вес* порождающего элемента, p_i, и d_E – обычное евклидово расстояние.

Эта диаграмма может рассматриваться как диаграмма кругов Вороного или диаграмма Вороного с *геометрией Лагерра*.

Мультипликативно взвешенное степенное расстояние $d_{MPW}(x, p_i) = \dfrac{1}{w_i} d_E^2(x, p_i)$, $w_i > 0$, трансформируется в **мультипликативно взвешенное расстояние** и дает тривиальное расширение мультипликативно взвешенной диаграммы Вороного.

Комбинировано взвешенное расстояние

Комбинированно взвешенным расстоянием d_{CW} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{CW}, \mathbb{R}^n)$ (*комбинированно взвешенной диаграммы Вороного*), определенное как

$$d_{CW}(x, p_i) = \frac{1}{w_i} d_E(x, p_i) - v_i$$

для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ и любого порождающего элемента $p_i \in P = \{p_i, \ldots, p_k\}$, $k \geq 2$, где $w_i \in w = \{w_i, \ldots, w_k\}$ – заданный положительный *мультипликативный вес* порождающего элемента p_i, $v_i \in v = \{v_i, \ldots, v_k\}$ – заданный *аддитивный вес* порождающего элемента p_i, и d_E – обычное евклидово расстояние.

Ребром двумерной комбинированно взвешенной диаграммы Вороного является часть кривой четвертого порядка, гиперболическая дуга, дуга окружности или прямая.

20.2. РАССТОЯНИЯ ВОРОНОГО НА ПЛОСКОСТИ

Расстояние кратчайшего пути с препятствиями

Пусть $\mathbb{O} = \{O_1,\ldots,O_m\}$ – совокупность попарно непересекающихся многоугольников на евклидовой плоскости, представляющая собой множество препятствий, которые являются непрозрачными и непреодолимыми.

Расстоянием кратчайшего пути с препятствиями d_{sp} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{sp}, \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{O}\})$ (*диаграммы кратчайшего пути Вороного с препятствиями*), определенное для любых $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{O}\}$ как длина кратчайшего из всех возможных непрерывных путей, соединяющих x и y и при этом обходящих препятствия $O_i \setminus \partial O_i$ (путь может проходить через точки на границе O_i препятствия O_i), $i = 1,\ldots,m$.

Кратчайший путь строится с помощью *многоугольника видимости* и *графа видимости диаграммы* $V(P, d_{sp}, \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{O}\})$.

Расстояние видимого кратчайшего пути

Пусть $\mathbb{O} = \{O_1,\ldots,O_m\}$ – совокупность попарно непересекающихся отрезков $O_l = = [a_l, b_l]$ на евклидовой плоскости, $P = \{p_1,\ldots,p_k\}$, $k \geq 2$ – множество порождающих элементов,

$$VIS(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 : [x, p_i] \cap \,]a_l, b_l[\, = \emptyset \quad \text{для всех } l = 1,\ldots,m\}$$

– *многоугольник видимости* образующего элемента p_i, а d_E – обычное евклидово расстояние.

Расстоянием видимого кратчайшего пути d_{vsp} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{vsp}, \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{O}\})$ (*диаграмма видимого кратчайшего пути Вороного с препятствиями*), определенное как

$$d_{vsp}(x, p_i) = \begin{cases} d_E(x, p_i), & \text{если } x \in VIS(p_i), \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Расстояние сети

Сеть на $\mathbb{R}^2$ есть связный плоский геометрический граф $G = (V, E)$ с множеством V вершин и множеством E ребер.

Пусть порождающее множество $P = (p_i, \ldots, p_k)$ является подмножеством множества $V = (p_1, \ldots, p_l)$ вершин графа G и множество L задается как множество всех точек ребер графа G.

Расстояние сети d_{netv} на множестве V есть порождающее расстояние Вороного *диаграммы Вороного узлов сети* $V(P, d_{\mathrm{netv}}, V)$, определенное как кратчайший путь вдоль ребер графа G от $p_i \in V$ до $p_j \in V$. Оно является **метрикой взвешенного пути** графа G, где w_e – евклидова длина ребра $e \in E$.

Расстояние сети d_{netv} на множестве L есть порождающее расстояние *диаграммы Вороного ребер сети* $V(P, d_{\mathrm{netl}}, L)$,, определенное как кратчайший путь вдоль ребер от $x \in L$ до $y \in L$.

Расстояние доступа к сети d_{accnet} на $\mathbb{R}^2$ есть порождающее расстояние Вороного *диаграммы Вороного области сети* $V(P, d_{\mathrm{accnet}}, \mathbb{R}^2)$, определенное как

$$d_{\mathrm{accnet}}(x, y) = d_{\mathrm{netl}}(l(x), l(y)) + d_{\mathrm{acc}}(x) + d_{\mathrm{acc}}(y),$$

где $d_{\mathrm{acc}}(x) = \min_{l \in L} d(x,l) = d_E(x,l(x))$ – *расстояние доступа точки x*. Именно, $d_{\mathrm{acc}}(x)$ есть евклидово расстояние от x до *точки доступа* $l(x) \in L$ для x, которая является ближайшей к x точкой на ребрах графа G.

Расстояние воздушных перевозок

Сеть аэропортов – произвольный плоский граф G на n вершинах (аэропортах) с положительными весами ребер (*время полета*). Вход и выход из графа допускаются только через аэропорты. Перемещение по сети внутри графа G осуществляется с заданной скоростью $v > 1$. Движение вне сети осуществляется с единичной скоростью относительно обычной евклидовой метрики.

Расстояние воздушных перевозок d_{al} есть порождающее расстояние Вороного *диаграммы воздушных перевозок Вороного* $V(P, d_{\mathrm{al}}, \mathbb{R}^2)$,, определенное как время, необходимое для *быстрейшего пути* между x и y при наличии сети аэропортов G, т.е. пути, минизирующего продолжительность путешествия между x и y.

Расстояние города

Сеть городского общественного транспорта, например метро или автобусные перевозки, представляет собой плоский граф G с горизонтальными или вертикальными ребрами. G может состоять из многих связных компонент и содержать циклы. Каждый может войти в G в любой точке, будь то вершина или ребро (возможно назначить также и строго фиксированные точки входа). Внутри G движение осуществляется с заданной скоростью $v > 1$ в одном из доступных направлений. Движение вне сети осуществляется с единичной скоростью относительно **метрики Манхэттена** (в нашем случае подразумевается крупный современный город с прямоугольной планировкой улиц по направлениям север–юг и восток–запад).

Расстоянием города d_{city} называется порождающее расстояние Вороного *диаграммы города Вороного* $V(P, d_{\mathrm{city}}, \mathbb{R}^2)$, определенное как время, необходимое для *быстрейшего пути* между x и y в условиях сети G, т.е. пути. минилизирующего продолжительность путешествия между x и y.

Множество $P = (p_1, \ldots, p_k)$, $k \geq 2$ можно рассматривать как множество неких городских учреждений (например, почтовых отделений или больниц): для многих людей учреждения одного и того же предназначения одинаковы и предпочтительным является то, до которого быстрее добраться.

Расстояние на реке

Расстоянием на реке d_{riv} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{\mathrm{riv}}, \mathbb{R}^2)$ (*диаграммы Вороного на реке*), определенное как

$$d_{\mathrm{riv}}(x,y) = \frac{-\alpha(x_1 - y_1) + \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (1-\alpha^2)(x_2 - y_2)^2}}{v(1-\alpha^2)},$$

где v – скорость лодки в неподвижной воде, $w > 0$ – скорость постоянного потока в положительном направлении x_1-оси и $\alpha = \frac{w}{v} (0 < \alpha < 1)$ – *относительная скорость потока.*

Расстояние парусной лодки

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – область на плоскости (*водная поверхность*), пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ – непрерывное векторное поле на Ω, представляющее скорость потока воды (*поле-потока*); пусть $P = (p_1, \ldots, p_k) \subset \Omega$, $k \geq 2$ – множество k точек в Ω (*гавани*).

Расстоянием парусника ([NiSu03]) d_{bs} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{bs}, \Omega)$ (*диаграмма парусника Вороного*), определенное как

$$d_{bs}(x, y) = \inf_{\gamma} \delta(\gamma, x, y)$$

для всех $x, y \in \Omega$, где $\delta(\gamma, x, y) = \int_0^1 \left| F \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|} + f(\gamma(s)) \right|^{-1} ds$ – время, необходимое для того, чтобы парусник с максимальной скоростью F на неподвижной воде переместился из x в y вдоль кривой $\gamma : \{0,1\} \to \Omega$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, инфимум берется по всем возможным кривым γ.

Расстояние подсматривающего

Пусть $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ – полуплоскость в $\mathbb{R}^2$, пусть $P = (p_1, \ldots, p_k)$, $k \geq 2$, – множеством точек, содержащихся в полуплоскости $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\}$, и пусть *окно определяется как интервал* $]a, b[$ с $a = (0,1)$ и $b = (0, -1)$.

Расстояние подсматривающего d_{pee} есть порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{\text{pee}}, S)$ (*диаграмма подсматривающего Вороного*), определенное как

$$d_{\text{pee}}(x, p_i) = \begin{cases} d_E(x, p_i) & \text{если } [x, p] \cap]a, b[\neq \emptyset, \\ \infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где d_E – обычное евклидово расстояние.

Расстояние снегохода

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – область на x_1x_2-плоскости пространства $\mathbb{R}^3$ (*двумерное отображение*) и $\Omega^* = \{(q, h(q)) : q = (x_1(q), x_2(q)) \in \Omega, h(q) \in \mathbb{R}\}$ – трехмерная *поверхность земли*, поставленная в соответствие изображению Ω. Пусть $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \Omega$, $k \geq 2$ – множество k точек в Ω (*стоянки снегоходов*).

Расстоянием снегохода d_{sm} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{sm}, \Omega)$ (*диаграммы снегохода Вороного*), определенное как

$$d_{sm}(q, r) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{1}{F\left(1 - \alpha \frac{dh(\gamma(s))}{ds}\right)} ds$$

для любых $q, r \in \Omega$ и позволяющее рассчитать минимально необходимое время для перемещения снегохода со скоростью F на ровной поверхности из $(q, h(q))$ в $(r, h(r))$ по *маршруту* $\gamma^* : \gamma^*(s) = (\gamma(s), h(\gamma(s)))$, *ассоциированному с путем по области*

$\gamma : [0,1] \to \Omega$, $\gamma(0) = q$, $\gamma(1) = r$ (инфимум берется по всем возможным путям γ, а α является положительной константой).

Снегоход движется вверх, в гору, медленнее, чем вниз, под гору. Для лесного пожара характерно обратное: фронт огня перемещается быстрее вверх и медленнее вниз. Данную ситуацию можно смоделировать с использованием отрицательного значения α. Полученное расстояние называется **расстоянием лесного пожара** и полученная диаграмма Вороного называется *диаграммой лесного пожара Вороного*.

Расстояние скольжения

Пусть T – наклонная плоскость в $\mathbb{R}^3$, полученная посредством вращения x_1x_2-плоскости вокруг x_1-оси на угол α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, с координатной системой, которая получена посредством аналогичного вращения координатной системы x_1x_2-плоскости. Для точки $q \in T$, $q = (x_1(q), x_2(q))$ определим *высоту* $h(q)$ как ее x_3-координату в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, $h(q) = x_2(q) \cdot \sin\alpha$. Пусть $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset T$, $k \geq 2$.

Расстоянием скольжения ([AACL98]) d_{skew} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{\text{skew}}, T)$ (*диаграмма скольжения Вороного*), определенное как

$$d_{\text{skew}}(q,r) = d_E(q,r) + (h(r) - h(q)) = d_E(q,r) + \sin\alpha(x_2(r) - x_2(q)),$$

или, в общем случае,

$$d_{\text{skew}}(q,r) = d_E(q,r) + k(x_2(r) - x_2(q))$$

для всех $q, r \in T$, где d_E – обычное евклидово расстояние, а $k \geq 0$ – константа.

20.3. ДРУГИЕ РАССТОЯНИЯ ВОРОНОГО

Расстояние Вороного для отрезков

Расстояние Вороного для (множества) **отрезков** d_{sl} есть порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(A, d_{ls}, \mathbb{R}^2)$ (*линейная диаграмма Вороного, порожденная отрезками*), определенное как

$$d_{sl}(x, A_i) = \inf_{y \in A_i} d_E(x, y),$$

где множество порождающих элементов $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$, $k \geq 2$ есть множество попарно непересекающихся отрезков $A_i = [a_i b_i]$ и d_E есть обычное евклидово расстояние. Именно,

$$d_{ls}(x, A_i) = \begin{cases} d_E(x, a_i), & \text{если } x \in R_{a_i}, \\ d_E(x, b_i), & \text{если } x \in R_{b_i}, \\ d_E\left(x - a_i, \dfrac{(x - a_i)^T (b_i - a_i)}{d_E^2(a_i, b_i)}(b_i - a_i)\right), & \text{если } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{R_{a_i} \cup R_{b_i}\}, \end{cases}$$

где $\mathbb{R}_{a_i} = \{x \in \mathbb{R}^2 : (b_i - a_i)^T (x - a_i) < 0\}$, $R_{b_i} = \{x \in \mathbb{R}^2 : (a_i - b_i)^T (x - b_i) < 0\}$.

Расстояние Вороного для дуг

Расстояние Вороного для (множества круговых) **дуг** d_{ca} есть порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(A, d_{ca}, \mathbb{R}^2)$ (*линейная диаграмма Вороного, порожденная дугами окружностей*), определенное как

$$d_{ca}(x, A_i) = \inf_{y \in A_i} d_E(x, y),$$

где порождающее множество $A = \{A_i, \dots, A_k\}$, $k \geq 2$ есть множество попарно непересекающихся дуг окружностей A_i (меньших или равных полуокружностям) с радиусом r_i и центром в x_{c_i}, а d_E – обычное евклидово расстояние. Именно фактически,

$$d_{ca}(x, A_i) = \min\{d_E(x, a_i), d_E(x, b_i), | d_E(x, x_{c_i}) - r_i |\},$$

где a_i и b_i – концевые точки дуги A_i .

Расстояние Вороного для окружностей

Расстоянием Вороного для (множества) **окружностей** d_{cl} называется порождающее расстояние обобщенной диаграммы Вороного $V(A, d_{cl}, \mathbb{R}^2)$ (*линейная диаграмма Вороного, порожденная окружностями*), определенное как

$$d_{cl}(x, A_i) = \inf_{y \in A_i} d_E(x, y),$$

где порождающее множество $A = \{A_1, \dots, A_k\}$, $k \geq 2$ есть множество попарно непересекающихся окружностей A_i с радиусом r_i и центром в x_{c_i}, а d_E – обычное евклидово расстояние. Именно, фактически

$$d_{ca}(x, A_i) = | d_E(x, x_{c_i}) - r_i | .$$

Для линейных диаграмм Вороного, порожденных окружностями, существует много различных порождающих расстояний. Например, $d^*_{cl}(x, A_i) = d_E(x, x_{c_i}) - r_i$ или $d^*_{cl}(x, A_i) = d^2_E(x, x_{c_i}) - r^2_i$ (*диаграмма Вороного по Лагерру*).

Расстояние Вороного для областей

Расстояние Вороного для областей d_{ar} есть порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(A, d_{ar}, \mathbb{R}^2)$ (*диаграмма областей Вороного*), определенное как

$$d_{ar}(x, A_i) = \inf_{y \in A_i} d_E(x, y),$$

где $A = \{A_1, \dots, A_k)$, $k \geq 2$ есть совокупность попарно непересекающихся связных замкнутых множеств (*областей*), и d_E – обычное евклидово расстояние.

Следует обратить внимание на то, что для любого обобщенного порождающего множества $A = \{A_1, \dots, A_k)$, $k \geq 2$ можно использовать в качестве порождающего расстояния Вороного **хаусдорфово расстояние** от точки x до множества A_i : : $d_{\mathrm{Haus}}(x, A_i) = \sup_{y \in A_i} d_E(x, y)$, где d_E – обычное евклидово расстояние.

Цилиндрическое расстояние

Цилиндрическое расстояние d_{cyl} есть **внутренняя метрика** на поверхности цилиндра S, которая используется в качестве порождающего расстояния Вороного для *цилиндрической диаграммы Вороного* $V(A, d_{\text{cyl}}, S)$ Если ось цилиндра единичного радиуса размещена на x_3-оси в $\mathbb{R}^3$, то цилиндрическое расстояние между любыми точками $x, y \in$ S с цилиндрическими координатами $(1, \theta_x, z_x)$ и $(1, \theta_y, z_y)$ задается как

$$d_{\text{cyl}}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(\theta_x - \theta_y)^2 + (z_x - z_y)^2}, & \text{если } \theta_y - \theta_x \le \pi, \\ \sqrt{(\theta_x + 2\pi - \theta_y)^2 + (z_x - z_y)^2}, & \text{если } \theta_y - \theta_x > \pi. \end{cases}$$

Коническое расстояние

Коническим расстоянием d_{con} называется **внутренняя метрика** на поверхности конуса S, которая используется в качестве порождающего расстояния для *конической диаграммы Вороного* $V(P, d_{\text{con}}, S)$. Если ось конуса S размещена на x_3-оси в $\mathbb{R}^3$ и радиус окружности очерчиваемой пересечением конуса S с x_1x_2-плоскостью равен единице, то расстояние конуса между любыми точками $x, y \in S$ задается как

$$d_{\text{con}}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos(\theta'_y - \theta'_x)}, & \text{если } \theta'_y \le \theta'_x + \pi \sin(\alpha/2), \\ \sqrt{r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos(\theta'_x + 2\pi \sin(\alpha/2) - \theta'_y)}, & \text{если } \theta'_y > \theta'_x + \pi \sin(\alpha/2), \end{cases}$$

где (x_1, x_2, x_3) – прямоугольные декартовы координаты точки x на S, α – угол при вершине конуса, θ_x – угол против часовой стрелки от x_1-оси до луча из исходной точки до точки $(x_1, x_2, 0)$, $\theta'_x = \theta_x \sin(\alpha/2)$, $r_x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \coth(\alpha/2))^2}$ – расстояние по прямой от вершины конуса до точки (x_1, x_2, x_3).

Расстояние Вороного порядка m

Рассмотрим конечное множество A объектов метрического пространства (S, d) и целое число $m \ge 1$. Рассмотрим множество всех *m-подмножеств* M_i из A (т.е. $M_i \subset A$ и $|M_i| = m$). *Диаграмма Вороного порядка m* множества A есть разбиение S на *области Вороного* $V(M_i)$ *m-подмножеств* множества A таким образом, чтобы $V(M_i)$ содержала все точки $s \in S$, которые "ближе" к M_i, чем к любому другому m-множеству M_i : $d(s, x) < d(s, y)$ для любых $x \in M_{ii}$ и $y \in S\backslash M_i$. Эта диаграмма указывает первого, второго, ..., m-го ближайшего соседа окрестности точки из S.

Такие диаграммы могут быть определены в терминах некоторой "функции расстояния" $D(s, M_i)$, в частности, некоторое ***m*-хемиметрики** на S. Для $M_i = \{a_i, b_i\}$ рассматривались функции $|d(s, a_i) - d(s, b_i)|$, $d(s, a_i) + d(s, b_i)$, $d(s, a_i) \cdot d(s, b_i)$, а также **2-метрики** $d(s, a_i) + d(s, b_i) + d(a_i, b_i)$ и площадь треугольника (s, a_i, b_i).