Глава 21

Расстояния в анализе образов и звуков

21.1. РАССТОЯНИЯ В АНАЛИЗЕ ОБРАЗОВ

Обработка образов (изображений) имеет дело с такими как фотографии, видеоданные или томографические изображения. В частности, *компьютерная графика* представляет собой процесс синтезирования образов из абстрактных моделей, тогда как *машинное распознавание образов* – это извлечение некой абстрактной информации: скажем, $3D$ (т.е. трехмерного) описания той или иной сцены, используя ее видеосъемку. Начиная где-то с 2000 г. аналоговая обработка изображений (оптическими устройствами) уступает место цифровой обработке и, в частности, цифровому редактированию (например, обработке изображений, полученных с помощью обычных цифровых фотоаппаратов).

Компьютерная графика (и мозг человека) имеет дело с *образами векторной графики*, т.е. такими, которые представлены геометрически кривыми, многоугольниками и т.п. *Изображение растровой графики* (или *цифровое изображение, побитовое отображение*) в $2D$ есть представление $2D$ изображения как конечного множества дискретных величин, называемых *пикселями* (сокращенно от английского "picture element"), размещенных на квадратной гризе $\mathbb{Z}^2$ или шестиугольной гризе. Как правило, растр – это квадратная $2^k \times 2^k$ гриза с $k = 8{,}9$ или 10. Видеоизображения и *томографические* (т.е. полученные как серия поперечных сечений отдельными частями) изображения являются $3D$ изображениями ($2D$ плюс время); их дискретные величины называются *вокселями* (элементами объема).

Дискретное двоичное изображение использует только два значения: 0 и 1; 1 интерпретируется как логическая "истина" и отображается черным цветом; таким образом, само изображение отождествляется с множеством черных пикселей. Элементы бинарного $2D$ изображения можно рассматривать как комплексные числа $x = iy$, где (x, y) – координата точки на действителной плоскости $\mathbb{R}^2$. *Непрерывное бинарное изображение* является (обычно компактным) подмножеством **локально компактного** метрического пространства (обычно евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ с $n = 2{,}3$).

Полутоновые изображения могут рассматриваться как точечно-взвешенные бинарные изображения. В общем случае *нечеткое множество* является точечно-взвешенным множеством с весами (значениями принадлежности) (см. [Bloc99] для обзора нечетких расстояний). Для полутоновых изображений xyi-представление применяется в случае, когда плоскосные координаты (x, y) обозначают форму, в то время как вес i (сокращенно от интенсивности, т.е. яркости) – *текстуру* (распределение интенсивности). Иногда используется также матрица $((i_{xy}))$ полутонов. *Гистограмма яркости* полутонового изображения показывает частоту каждого имеющегося в данном изображении значения яркости. Если изображение имеет m уровней яркости (столбиков гистограммы полутонов), то существуют 2^m различных возможных интенсивностей. Обычно $m = 8$ и числа 0,1,…,255 представляют диапазон интенсивности от белого до черного; другие типичные значения $m = 10$, 12, 14, 16. Глаз человека различает порядка 350 тыс. различных цветов, но только 30 различных полутонов; таким образом, цвет обладает гораздо более высокой разрешающей способностью.

Для цветных изображений наиболее известным является (RGB)-представление, где пространственные координаты R, G, B обозначают уровни красной, зеленой и синей цветовых составляющих; $3D$ гистограмма показывает яркость в каждой точке. Среди многих других $3D$ моделей (пространств) цветов различают: (CMY) куб (цвета голубой, малиновый, желтый), (HSL) конус (тип колорита H, заданный как угол, насыщенность S, заданная в %, освещенность L, заданная в %) и (YUV), (YIQ), используемые соответственно в телевизионных системах PAL и NTSC. Согласно утвержденной Международной комиссией по освещенности (МКО) методике пересчет (RGB) в меру яркости (освещенности) полутона осуществляется как $0{,}299R + 0{,}587G + 0{,}114B$. *Цветовая гистограмма* является *вектором признаков* длины n (обычно $n = 64$ или 256) с компонентами, представляющими либо общее количество пикселей, либо процент пикселей данного цвета в изображении.

Изображения чаще всего представлены *векторами признаков*, включая цветовые гистограммы, цветовую насыщенность текстуры, дескрипторы формы и т.п. Примерами пространств признаков являются: *исходная интенсивность* (значения пикселей), *края* (границы, контуры, поверхности), *отличительные характеристики* (угловые точки, пересечения линий, точки высокойкривизны) и *статистические признаки* (моментные инварианты, центроиды). К типовым видеопризнакам относятся перекрытие кадров, перемещения. *Восстановление изображения* (поиск подобностей) состоит (так же как и для других данных, таких как аудиозаписи, последовательности ДНК, текстовые документы, временные ряды и т.п.) в поиске изображений, признаки которых либо близки между собой, либо близки к конкретному запросу, либо находятся в заданном диапазоне.

Имеется два метода непосредственного сравнения изображений: по интенсивности (цвета и текстуры гистограммы) и по геометрии (описание формы с помощью *серединной оси, склелета* и т.п.). Нечеткий термин *форма* применяется для описания внешнего облика (силуэта) объекта, его локальной геометрии или общего геометрического рисунка (геометрических особенностей, точек, кривых и т.п.) или для такого рисунка с точностью до некторой группы преобразований подобия (переносов, вращений и масштабирования). Нечеткий термин *текстура* означает все, что остается после обработки данных о цвете и форме.

Подобность между векторными представлениями изображений измеряется с помощью обычных, расстояний: **l_p-метрик, метрик взвешенного редактирования, расстояния Танимото, расстояния косинуса, расстояния Махалонобиса** и его обобщений, **расстояния бульдозера**. Из вероятностных расстояний наиболее часто используются: **расстояние Бхаттачарья** 2, **расстояние Хеллинджера, расстояние Кулбака–Лейблера, расстояние Джеффри** и (особенно для гистограмм) **χ^2-расстояние, расстояние Колмогорова–Смирнова, расстояние Куипера.**

Основными расстояниями, применяемыми для компактных подмножеств X и Y множества $\mathbb{R}^n$ (обычно $n = 2{,}3$) или их дискретных вариантов, являются: **метрика Асплунда, метрика Шепарда, полуметрика симметрической разности** $\mathrm{Vol}(X \Delta Y)$ (см. **Метрика Никодима, отклонение площади, Метрика цифрового объема** и их нормализации, а также варианты **хаусдорфова расстояния** (см. ниже по тексту).

Для целей обработки изображений перечисленные ниже расстояния являются расстояниями между "истинным" и приближенным цифровыми изображениями с тем, чтобы оценить качество алгоритмов. Для целей восстановления изображений расстояния измеряются между векторами признаков запроса и ссылок.

Цветовые расстояния

Цветовое пространство – это 3-параметрическое описание цветности. Необходимость именно трех параметров обусловлена существованием в человеческом глазу трех видов рецепторов, воспринимающих коротковолновые, средневолновые и длинноволновые излучения, соответствующие синему, зеленому и красному цвету.

Международная комиссия по освещенности определила в 1931 г. параметры цветового пространства (XYZ) на основе (RGB)-модели и измерений человеческого зрения. Согласно стандарту комиссии в цветовом пространстве (XYZ) величины X, Y и Z приблизительно соответствуют красному, зеленому и синему цветам. Главным предположением колориметрического анализа, экспериментально обоснованным Индоу (1991), является то, что воспринимаемое цветовое пространство допускает существование метрики, истинного **цветового расстояния**. Предполагается, что данная метрика будет локально евклидовой, т.е. **римановой метрикой**. Другим допущением является существование непрерывного отображения из метрического пространства световых стимулов в это метрическое пространство (см. **гипотезу вероятности расстояния** в гл. 23 о том, что вероятность того, что субъект отличит один стимул от другого, является непрерывно возрастающей функцией некоторой субъективной квазиметрики между этими стимулами).

Такой *равноконтрастной цветовой шкалы*, где равные расстояния в цветовом пространстве соответствуют равным расстояниям в цветах, пока еще не получено и существующие **цветовые расстояния** являются различными ее аппроксимациями. Первым шагом в этом направлении являются *эллипсы МакАдама*, т.е области (x, y) на диаграмме *хроматичности,* все содержащиеся цвета которой выглядят неразличимыми для нормального человеческого глаза. Эти 25 эллипсов определяют метрику в цветовом пространстве. Здесь $x = \frac{X}{X+Y+Z}$ и $y = \frac{Y}{X+Y+Z}$ являются проективными координатами, и цвета диаграммы хроматичности занимают некую область вещественной проективной плоскости. Пространство CIE $(L^*a^*b^*)$является адаптацией цветового пространства комиссии МКО (от 1931 г.); оно обеспечивает частичную линеаризацию метрики, заложенной в эллипсах МакАдама. Параметры L^*, a^*, b^* наиболее полной модели – производные от L, a, b, которые являются характеристикой яркости L цвета от черного $L = 0$ до белого $L = 100$, при этом a находится между зеленым $a < 0$ и красным $a > 0$, b – между зеленым $a < 0$ и желтым $b > 0$.

Среднее цветовое расстояние

Для данного $3D$ цветового пространства и перечня n цветов пусть (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}) – представление i-го цвета из перечня в данном пространстве. Для цветовой гистограммы $x = (x_1,\dots,x_n)$ ее *средним цветом* является вектор $(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)})$, где $x_{(j)} = \sum_{i=1}^{n} x_i c_{ij}$ (например, средние значения красного, синего и зеленого в (RGB)).

Среднее цветовое расстояние между двумя цветовыми гистограммами ([HSEFN95]) является евклидовым расстоянием их средних цветов.

Расстояния цветовых компонентов

Пусть дано изображение (как подмножество множества $\mathbb{R}^2$); пусть p_i обозначает (в процентах) область данного изображения цветf c_i. *Цветовой составляющей* изображения является пара (c_i, p_i). **Расстояние Ма–Денга–Манжуната** между цветовыми составляющими (c_i, p_i) и $(c_j p_j)$ определяется как

$$|p_i - p_j| \cdot d(c_i, c_j),$$

где $d(c_i, c_j)$ – расстояние между цветами c_i и c_j в данном цветовом пространстве. Мойсилович и др. ввели модификацию данного расстояния, подобную **расстоянию бульдозера**.

Квазирасстояние пересечений гистограмм

Возьмем две цветовые гистограммы $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ (с x_i, y_i, представляющими количество пикселей в столбике i). **Квазирасстояние пересечений гистограмм Свейна–Балларда** между ними (см. **Расстояние пересечений**, гл. 17) определяется как

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \min(x_i, y_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Для нормализированных гистограмм (общая сумма равна 1) вышеприведенное квазирасстояние становится обычной **l_1-метрикой** $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. *Нормализированная взаимная корреляция* Розенфельда–Кака между x и y является подобностью, определенной как $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i, y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Квадратичное расстояние гистограммы

Для двух гистограмм $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ (обычно $n = 256$ или $n = 64$), представляющих цветность (в процентах) двух изображений, их **квадратичное расстояние гистограммы** (используемое в системе IBM запроса по содержанию изображения) является **расстоянием Махалонобиса**, определенным как

$$\sqrt{(x - y)^T A (x - y)},$$

где $A = ((a_{ij}))$ – симметричная положительно определенная матрица, и вес a_{ij} – некое подтвержденное непосредственным восприятием сходство между цветами i и j. Например (см. [HSEFN95]), $a_{ij} = 1 - \frac{d_{ij}}{\max_{1 \le p,q \le n} d_{pq}}$, где d_{ij} является евклидовым расстоянием между 3-векторами, представляющими i и j в некотором цветовом пространстве. Другое определение задается как $a_{ij} = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}((v_j - v_j)^2 + (s_i \cosh_i - -s_j \cosh_j)^2 + (s_i \sinh_i - s_j \sinh_j)^2)^{1/2}$, где (h_i, s_i, v_i) и (h_j, s_j, v_j) – представления цветов i и j в цветовом пространстве (HSV).

Расстояние полутонового изображения

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – значения яркости двух цифровых полутоновых изображений f и g для пикселя $x \in X$, где X является растром пикселей. Любое расстояние между точно взвешенными множествами (X, f) и (X, g) (например, **расстояние бульдозера**) может быть применено для измерения расстояния между f и g. Однако основными используемыми расстояниями (они называются также *ошибками*) между изображениями f и g являются:

1) *среднеквадратическая ошибка* $RMS(f,g) = \left(\frac{1}{|X|}\sum_{x \in X}(f(x) - g(x))^2\right)^{1/2}$ (как вариант допускается использование l_1*-нормы* $|f(x) - g(x)|$ вместо l_2-нормы);

2) *отношение сигнал-шум* $SNR(f,g) = \left(\frac{\sum_{x \in X} g(x)^2}{\sum_{x \in X}(f(x) - g(x))^2}\right)^{1/2}$;

3) *коэффициент ошибок неправильной классификации пикселей* $\frac{1}{|X|}|\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}|$ (нормализированное **хэммингово расстояние**);

4) среднеквадратическая частотная ошибка $\left(\frac{1}{|U|^2}\sum_{u \in U}(F(u) - G(u))^2\right)^{1/2}$, где F и G – дискретные преобразования Фурье для f и g соответственно и U – частотная область;

5) ошибка порядка δ в номер Соболева $\left(\frac{1}{|U|^2}\sum_{u \in U}(1 + |\eta_u|^2)^\delta (F(u) - G(u))^2\right)^{1/2}$, где $0 < \delta < 1$ фиксировано (обычно $\frac{1}{2}$) и η_u есть частотный вектор, ассоциированный с позицией u в частотной области U.

***L_p*-метрика сжатия изображения**

Возьмем число r, $0 \le r < 1$. ***L_p*-метрика сжатия изображения** является обычной L_p-метрикой на $\mathbb{R}_{\ge 0}^{n^2}$ (множестве полутоновых изображений, рассматриваемых как $n \times n$ матрицы), где p – решение уравнения $r = \frac{p-1}{2p-1} \cdot e^{\frac{p}{2p-1}}$. Так, p = 1,2 или ∞ для $r = 0$, $r = \frac{1}{3}e^{2/3} \approx 0,65$ или $r \ge \frac{\sqrt{e}}{2} \approx 0,82$. Здесь r оценивает *информативную* (т.е. наполненную ненулевыми значениями) часть изображения. Согласно [KKN02], эта метрика является наилучшей по качеству метрикой для выбора схемы сжатия с потерями.

Расстояния скругления

Расстояниями скругления называются расстояния, аппроксимирующие евклидово расстояние как взвешенное расстояние пути в графе $G = (\mathbb{Z}^2, E)$, где два пикселя считаются соседними, если один может быть получен из другого одношаговым ходом по $\mathbb{Z}^2$. При этом даются перечень разрешенных ходов и **простое расстояние**, т.е. положительный вес (см. гл. 19) поставлен в соответствие каждому типу такого хода.

Метрика (α, β)-скругления соответствует двум разрешенным ходам – с l_1-расстоянием и l_∞-расстоянием 1 (только диагональные перемещения) – взвешенных числами α и β соответственно. Основными случаями применения являются $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ (**метрика городского квартала** или **4-метрика**), (**метрика шахматной доски,** или **8-метрика**), $(1, \sqrt{2})$ (**метрика Монтанари**), ((**3,4)-метрика**), (**метрика Хилдича–Рутовица**), (5, 7) (**метрика Вервера**).

Метрика Боргефорс соответствует трем разрешенным ходам – с l_1-расстоянием 1, с l_∞-расстоянием 1 (только диагональные перемещения) и ходом коня – с весами 5,7 и 11 соответственно.

Метрика 3*D*-скругления (или *метрика* (α, β, γ)*-скругления*) является **метрикой взвешенного пути** бесконечного графа с множеством вершин $\mathbb{Z}^3$, в котором две вершины являются соседними, если их l_∞-расстояние равно единице, а веса α, β и γ связаны с 6 соседними гранями, 12 соседними ребрами и 8 соседними вершинами соответственно. Если $\alpha = \beta = \gamma = 1$, то мы имеем l_∞-метрику. Метрики (3, 4, 5)- и (1, 2, 3)-скругления являются наиболее часто применяемыми для работы с 3*D* изображениями.

Метрика Чаудхури–Мурти–Чаудхури между последовательностями $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ определяется как

$$\left|x_{i(x,y)} - y_{i(x,y)}\right| + \frac{1}{1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \sum_{1 \le i \le n, i \ne i(x,y)} |x_i - y_i|,$$

где максимальное значение $x_i – y_i$ получается для $i = i(x,y)$. Для $n = 2$ это метрика $\left(1, \frac{3}{2}\right)$- скругления.

Расстояние бульдозера

Расстояние бульдозера является дискретной формой расстояния **Монжа–Канторовича**. Грубо говоря, это минимальный объем работы, которая необходима для перемещения грунта или массы с одного места (соответствующим образом размещенного в пространстве) на другое (совокупность ям). Для любых двух конечных последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ метрического пространства (X, d) рассмотрим *сигнатуры,* т.е. точечное взвешенные множества $P_1 = (p_1(x_1), \ldots, p_1(x_m))$ и $P_2 = (p_2(x_1), \ldots, p_2(x_n))$. Например (см. [RTG00]), сигнатуры могут представлять кластеры цветов или текстурного содержания изображений: элементы X являются центроидами кластеров, а $p_1(x_1)$, $p_2(y_j)$ – размерами соответствующих кластеров. Исходное расстояние d является некоторым цветовых расстоянием, скажем, евклидовым расстоянием в 3*D* CIE $(L^*a^*b^*)$ цветовом пространстве.

Пусть $W_1 = \sum_i p_1(x_i)$ и $W_2 = \sum_i p_2(y_j)$ являются *суммарными весами* P_1 и P_2 соответственно. Тогда **расстояние бульдозера** (или *расстояние транспортировки*) между сигнатурами P_1 и P_2 определяется как функция

$$\frac{\sum_{i,j} f_{ij}^* d(x_i, y_j)}{\sum_{i,j} f_{ij}^*},$$

где $m \times n$ матрица $S^* = ((f_{ij}^*))$ является *оптимальным,* т.е. минимизирующим $\sum_{i,j} f_{ij} d(x_i, y_j)$, *потоком. Поток* (веса грунта) – это $m \times n$ матрица $S = ((f_{ij}))$, удовлетворяющая следующим ограничениям:

1) все $f_{ij} \geq 0$;

2) $\sum_{ij} f_{ij} = \min\{W_1, W_2\}$;

3) $\sum_i f_{ij} \leq p_2(y_j)$ и $\sum_i f_{ij} \leq p_1(x_i)$.

Итак, данное расстояние является усреднением исходного расстояния d, на которое грузы перемещаются оптимальным потоком.

В случае $W_1 = W_2 = 1$ вышеприведенные два неравенства 3) становятся равенствами. Нормализация сигнатур до $W_1 = W_2 = 1$ (что не изменяет расстояния) позволяет рассматривать P_1 и P_2 как распределения вероятностей случайных величин, скажем, X и Y. Тогда $\sum_{i,j} f_{ij} d(x_i, y_j)$ является просто $\mathbb{E}_S[d(X,Y)]$, т.е. расстояние бульдозера совпадает в этом случае с **метрикой Канторовича–Мэллоуза–Монжа–Вассермана**. А для случая, скажем, $W_1 < W_2$ оно в общем случае не является метрикой. Однако замена в вышеприведенном определении неравенства 3) равенствами

3′) $\sum_i f_{ij} = p_2(y_j)$ и $\sum_i f_{ij} = \frac{p_1(x_1)W_1}{W_2}$

дает **полуметрику пропорционального переноса** Жианнополоса–Вельткампа.

Расстояние параметризованных кривых

Форма может быть представлена параметризованными кривыми на плоскости. Обычно такая кривая является *простой*, т.е. не имеет самопересечений. Пусть $X = X(x(t))$ и $Y = Y(y(t))$ – две параметризованные кривые, у которых (непрерывные) функции параметризации $x(t)$ и $y(t)$ на [0, 1] удовлетворяют условиям $x(0) = y(0) = 0$ и $x(1) = y(1) = 1$.

Наиболее используемым **расстоянием параметризованных кривых** является минимум (который берется по всем монотонно возрастающим параметризациям $x(t)$ и $y(t)$) максимального евклидова расстояния $d_E(X(x(t)),\ Y(y(t)))$. Это – специальный евклидов случай **расстояния собаковода**, которое, в свою очередь, является

метрикой Фреше для случая кривых. Вариантами этого расстояния являются отбрасывание условия монотонности параметризации или нахождение части кривой, от которой другая ее часть отстоит на минимальном таком расстоянии ([VeHa01]).

Расстояния нелинейного гибкого согласования

Рассмотрим дискретное представление кривых. Пусть $r \geq 1$ – константа и $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ – конечные упорядоченные множества последовательных точек на двух замкнутых кривых. Для любого сохраняющего порядок соответствия f между всеми точками A и всеми точками B *участок* $s(a_i, b_j)$ для $(a_i, f(a_i) = b_j)$ равен r, если $f(a_{i-1}) = b_j$ или $f(a_i) = b_{j-1}$, и равен 0, иначе.

Ослабленное расстояние нелинейного гибкого согласования является минимумом по всем таким f величины $\sum (s(a_i, b_j) + d(a_i, b_j))$, где $d(a_i, b_j)$ – разность между касательными углами a_i и b_j. Оно является **почти метрикой** для некоторого r. Для $r = 1$ оно называется **расстоянием нелинейного гибкого согласования**.

Расстояние функции вращения

Для плоского многоугольника P его *функцией вращения* $Tp(s)$ называется угол (против часовой стрелки) между касательной и x-осью как функция длины дуги s. Эта функция возрастает при каждом повороте налево и убывает при повороте направо.

Для двух многоугольников с равными периметрами их **расстоянием функции вращения** является $\boldsymbol{L_p}$**-метрика** между их функциями вращения.

Расстояние функции размера

Для плоского графа $G = (V, E)$ и *измеряющей функции* f на его множестве вершин V (например, расстоянии от $v \in V$ до центра массы V) *функция размера* $S_G(x, y)$ определяется на точках $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ как число связных компонент сужения G на вершины $\{v \in V : f(vl) \leq y\}$, содержащих точку v' с $f(v') \leq x$.

Для двух плоских графов с множествами вершин, принадлежащими растру $R \subset \mathbb{Z}^2$, их **расстоянием функции размера** Ураза–Верри является нормализованное l_1-расстояние между их функциями расстояния над растрами пикселей.

Расстояние отражения

Для конечного объединения A плоских кривых и каждой точки $x \in \mathbb{R}^2$ пусть V_A^x обозначает объединение интервалов $]x, a[$ $a \in A$, которые *видны из* x, т.е. $]x, a[\cap A = \emptyset$. Пусть p_A^x – площадь множества $\{x + v \in V_A^x : x - v \in V_A^x\}$.

Расстоянием отражения Хагедорна–Велькампа между конечными объединениями A и B кривых плоских является нормализованное l_1-расстояние между соответствующими функциями p_A^x и p_B^x, определенное как

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^2} \left| p_A^x - p_B^x \right| dx}{\int_{\mathbb{R}^2} \max \left| p_A^x \cdot p_B^x \right| dx}.$$

Расстоянное преобразование

Возьмем метрическое пространство $(X = \mathbb{Z}^2, d)$ и двоичное цифровое изображение $M \subset X$. **Расстоянным преобразованием** называется функция $f_M : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, где $f_M(x) = \inf_{u \in M} d(x, u)$ является **расстоянием между точкой и множеством** $d(x, M)$. Следовательно, расстоянное преобразование можно рассматривать как полутоновое цифровое изображение, в котором каждому пикселю присваивается метка (уровень полутона), соответствующая расстоянию до ближайшего пикселя фона. Расстоянные преобразования в процессах обработки изображений также называются *расстоянными полями* и, главным образом, **расстоянными картами**; однако последний термин мы резервируем для обозначения этого понятия применительно к любому метрическому пространству. *Расстоянное преобразование формы* – расстоянное преобразование, в котором M – граница изображения. Для $X = \mathbb{R}^2$ граф $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ для $d(x, M)$ называется *поверхностью Вороного* для M.

Срединная ось и скелетная

Пусть (X, d) – метрическое пространство и M – подмножество X. **Срединная ось** X – множество $MA(X) = \{x \in X : |\{m \in M : d(x, m) = d(x, M)\}| \geq 2\}$, т.е. все точки X, имеющие в M не менее двух **элементов наилучшего приближения.** $MA(X)$ состоит из всех точек границ *областей Вороного* для точек из M. **Скелет** $\mathrm{Skel}(X)$ множества X есть множество центров всех шаров (относително расстояния d), которые вписаны в X и являются *максимальными,* т.е. не принадлежат никакому другому такому шару. **Геометрическое место разрезов множества** X – это замыкание $\overline{MA(X)}$ срединной оси. В общем случае $MA(X) \subset \mathrm{Skel}(X) \subset \overline{MA(X)}$. *Преобразования срединной оси, скелета* и *геометрического места разрезов* – это точечтно-взвешенные множествами $\mathrm{MA}(X)$, $\mathrm{Skel}(X)$ и $\overline{MA(X)}$ (сужение **расстоянного преобразования** на эти множества) с $d(x, M)$, рассматриваемым как вес точки $x \in X$.

Обычно $X \subset \mathbb{E}^n$ и M – граница X. В случае когда M является непрерывной границей, срдинная ось может считаться пределом *диаграммы Вороного* по мере того как число порождающих точек становится бесконечным. Для $2D$ бинарных изображений X скелет является кривой толщиной в один пиксель в цифровом случае. Экзоскелет мноежства X – скелет дополнения множества X, т.е. фона изображения, для которого X является передним планом.

Прокрустово расстояние

Очертание формы (конфигурация точек в $\mathbb{R}^2$), которое рассматривается как выражение инвариантных свойств формы относительно переноса, вращения и масштаба, можно представить как последовательность *ориентиров,* т.е. специфических точек на форме, выбранных по определенному правилу. Каждый ориентир a может рассматриваться как элемент $(a', a'') \in \mathbb{R}^2$ или элемент $a' + a''i \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим две формы x и y, представленные их ориентирными векторами $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{C}^n$. Предположим, что x и y корректируются для переноса условием $\sum_t x_t = \sum_t y_t = 0$. Тогда их **прокрустово расстояние** определяется как

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{n} |x_t - y_t|^2},$$

где две формы являются, оптимально (по критерию наименьших квадратов) расположенными по одной линии для корректировки масштаба и их **расстояние очертания Кендалла** определяется как

$$\arccos\sqrt{\frac{\left(\sum_t x_t\bar{y}_t\right)\left(\sum_t y_t\bar{x}_t\right)}{\left(\sum_t x_t\bar{x}_t\right)\left(\sum_t y_t\bar{y}_t\right)}},$$

где $\overline{\alpha} = a' - a''i$ является *комплексно сопряженным числа* $\alpha = a' - a''i$.

Касательное расстояние

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и семейства *преобразований* $t(x, \alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{R}^k$ – вектор k параметров (например, коэффициент масштабирования и угол вращения), множество $M_x = \{t(x,\sigma) : \alpha \in \mathbb{R}^k\} \subset \mathbb{R}^n$ является многообразием размерности не больше чем k. Это кривая, если $k = 1$. Минимальное евклидово расстояние между многообразиями M_x и M_y является полезным расстоянием, поскольку оно инвариантно относительно преобразований $t(x, \alpha)$. Однако рассчитать такое расстояние в общем случае очень трудно; поэтому M_x аппроксимируют как его *касательное подпространство в точке* x: $\{x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_k x^i : \alpha \in \mathbb{R}^k\} \subset \mathbb{R}^n$, где порождающие его касательные векторы x^i, $1 \le i \le k$, являются частными производными $t(x, \alpha)$ относительно α. **Одностороннее** (или *ориентированное*) **касательное расстояние** между элементами x и y из $\mathbb{R}^n$ есть квазирасстояние d, определенное как

$$\sqrt{\min_{\alpha}\left\| x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_k x^i - y \right\|^2}.$$

Касательное расстояние Симара–Ле Кана–Денкера определяется как $\min\{d(x,y),\ d(y,x)\}$.

В общем случае *касательное множество метрического пространства* X *в точке* x определяется (по Громову) как любая предельная точка семейства его растяжений с коэффициентом растяжения, стремящимся к бесконечности, которая берется в точечной топологии Громова–Хаусдорфа (см. **Метрика Громова–Хаусдорфа,** гл. 1).

Расстояние пикселя

Возьмем два цифровых образа, рассматриваемых как бинарные $m \times n$ матрицы $x = ((x_{ij}))$ и $y = ((y_{ij}))$, где пиксель x_{ij} является черным или белым, если он равен 1 или 0 соответственно. Для каждого пикселя x_{ij} *окаймленное расстояное отображение до ближайшего пикселя противоположного цвета* $D_{BW}(x_{ij})$ есть число *окаймлений* (где каждое окаймление состоит из пикселей, равноудаленных (i, j)), протянувшихся от (i, j) до встречи с первым окаймлением, содержащим пиксель противоположного цвета.

Расстояние пикселей (введенное Уайтом и др., 1994) задается как

$$\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le i\le n} |x_{ij} - y_{ij}|\left(D_{BW}(x_{ij}) + D_{BW}(y_{ij})\right).$$

Квазирасстояние коэффициента качества

Возьмем два бинарных изображения, рассматриваемых как непустые конечные подмножества A и B конечного метрического пространства (X, d). Для них **квазирасстояние коэффициента качества** Пратта определяется как

$$\left(\max\{|A|, |B|\}\sum_{x\in B}\frac{1}{1+\alpha d(x,A)^2}\right)^{-1},$$

где α – константа масштабирования (обычно $\frac{1}{9}$) и $d(x,A)=\min_{y\in A} d(x,y)$ – **расстояние между точкой и множеством**.

Примерами подобных квазирасстояний являются *расстояние средней погрешности* Пели-Малаха $\frac{1}{|B|}\sum_{x\in B} d(x,A)$ и *расстояние среднеквадратической погрешности* $\frac{1}{|B|}\sum_{x\in B} d(x,A)^2$.

Среднее хаусдорфово расстояние p-го порядка

Возьмем два бинарных изображения, рассматриваемых как непустые конечные подмножества A и B конечного метрического пространства (скажем, растра пикселей) (X, d). **Их среднее хаусдорфово расстояние p-го порядка есть** ([Badd92]) нормализованное **L_p-расстояние Хаусдорфа,** определенное как

$$\left(\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}|d(x,A)-d(x,B)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $d(x,A)=\min_{y\in A} d(x,y)$ – **расстояние между точкой и множеством**. Обычная хаусдорфова метрика пропорциональна среднему хаусдорфову расстоянию ∞-го порядка.

Σ-хаусдорфово расстояние Венкатасубраминиана $d_{d\,\mathrm{Haus}}(A,B)+d_{d\,\mathrm{Haus}}(B,A)$ равно $\sum_{x\in A\cup B}|d(x,A)-d(x,B)|$, т.е. является вариантом L_1-расстояния Хаусдорфа.

Другим вариантом среднего хаусдорфова расстояния 1-го порядка является *средняя геометрическая погрешность* Линдстрёма-Турка между двумя изображениями, рассматриваемыми как поверхности A и B. Она определяется как

$$\frac{1}{\mathrm{Area}(A)+\mathrm{Area}(B)}\left(\int_{x\in A} d(x,B)dS+\int_{x\in B} d(x,A)dS\right),$$

где $\mathrm{Area}(A)$ – площадь поверхности A. Если рассматривать изображения как конечные множества A и B, то их *средняя геометрическая погрешность* определяется как

$$\frac{1}{|A|+|B|}\left(\sum_{x\in A} d(x,B)+\sum_{x\in B} d(x,A)\right).$$

Модифицированное хаусдорфово расстояние

Возьмем два бинарных изображения, рассматриваемых как непустые конечные подмножества A и B конечного метрического пространства (X, d). Их **модифицированное хаусдорфово расстояние** по Дюбюссону–Джейну определяется как максимум расстояний между точкой и множеством, усредненных по A и B:

$$\max\left\{\frac{1}{|A|}\sum_{x\in A} d(x,B),\ \frac{1}{|B|}\sum_{x\in B} d(x,A)\right\}.$$

Частичное хаусдорфово квазирасстояние

Возьмем два бинарных изображения, рассматриваемых как непустые конечные подмножества A, B конечного метрического пространства (X, d), и целые числа k, l, такие что $1\le k\le |A|$, $1\le l\le |B|$. **Их частичное (k, l)-хаусдорфово квазирасстояние** по Хаттенлокеру–Руклиджу определяется как

$$\max\left\{k^{th}_{k\in A}d(x,B),\ l^{th}_{x\in B}d(x,A)\right\},$$

где $k^{th}_{k\in A}d(x,B)$ означает k-е (вместо, наибольшего A-го, расположенного первым) среди $|A|$ расстояний $d(x, B)$, расположенных в возрастающем порядке. Случай $k=\left\lfloor\frac{|A|}{2}\right\rfloor$, $l=\left\lfloor\frac{B}{2}\right\rfloor$ соответствует *среднему модифицированному хаусдорфову квазирасстоянию*.

Расстояние бутылочного горлышка

Возьмем два бинарных изображения, рассматриваемых как непустые конечные подмножества A, B с $|A|=|B|=m$ конечного метрического пространства (X, d). Их **расстояние бутылочного горлышка** определяется как

$$\min_f \max_{x\in A} d(x, f(x)),$$

где f – любое биективное отображение между A и B.

Вариантами вышеприведенного расстояния являются:

1) соответствие минимального веса: $\min\limits_f \sum\limits_{x\in A} d(x, f(x))$;

2) **равномерное соответствие**: $\left\{\max\limits_{x\in A} d(x, f(x)) - \min\limits_{x\in A} d(x, f(x))\right\}$;

3) **соответствие наименьшего отклонения**:

$$\min_f\left\{\max_{x\in A} d(x, f(x)) - \frac{1}{|A|}\sum_{x\in A} d(x, f(x))\right\}.$$

Для целого числа t, $1\le t\le |A|$, **расстояние t-бутылочного горлышка** между A и B ([InVe00]) равно вышеупомянутому минимуму, если f – любое отображение из A в B, такое что $|\{x\in A: f(x)=e\}|\le t$. Случаи $t = 1$ и $t = |A|$ аналогичны соответственно расстоянию бутылочного горлышка и **ориентированному хаусдорфову расстоянию** $d_{d\,\mathrm{Haus}}(A,B)=\max\limits_{x\in A}\min\limits_{y\in B} d(x,y)$.

Хаусдорфово расстояние с точностью до G

Для группы (G, $\cdot$, id), действующей на евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$, **хаусдорфово расстояние с точностью до** G между двумя компактными подмножествами A и B (используемое при обработке изображений) есть **обобщенное** G**-хаусдорфово расстояние между ними**, т.е. минимум $d_{\mathrm{Haus}}(A, g(B))$ по всем $g \in G$. Обычно G – множество всех изометрий или всех переносов пространства $\mathbb{E}^n$.

Гиперболическое хаусдорфово расстояние

Для любого компактного одмножества A множества $\mathbb{R}^n$ обозначим через $MAT(A)$ его *преобразование срединной оси по Блюму*, т.е. подмножество $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, все элементы которого являются парами $x = (x', r_x)$ центров x' и радиусов r_x максимальных вписанных в A шаров применительно к евклидовому расстоянию d_E в $\mathbb{R}^n$ (см. **Срединная ось и скелет**).

Гиперболическое хаусдорфово расстояние ([ChSe00]) – **хаусдорфова метрика** на непустых компактных подмножествах $MAT(A)$ метрического пространства (X, d), где *гиперболическое расстояние* d на X определяется для его элементов $x = (x', r_x)$ и $y = (y', r_y)$ как

$$\max\{0, d_E(x', y') - (r_y - r_x)\}.$$

Нелинейная хаусдорфова метрика

Для двух компактных подмножеств A и B метрического пространства (X, d) их **нелинейной хаусдорфовой метрикой** (или *волновым расстоянием Затмари–Рекечки–Роска*) называется **хаусдорфово расстояние** $d_{\mathrm{Haus}}(A \cap B, (A \cup B)^*)$, где $(A \cup B)^*$ есть подмножество $A \cap B$, образующее замкнутую непрерывную область с $A \cap B$ и расстояния между точками могут измеряться только вдоль путей, полностью принадлежащих $A \cup B$.

Метрики качества видеоизображения

Данные метрики являются расстояниями между входной и прототипной последовательностями цветных видеокадров, которые обычно предназначены для оптимизации алгоритмов кодирования, сжатия и декодирования. Каждая из них основана на некой модели восприятия в системе человеческого зрения, простейшими из которых являются RMSE (среднеквадратическая ошибка) и PSNR (пиковое соотношение сигнал-шум) меры погрешностей. Среди прочих можно назвать *пороговые метрики*, с помощью которых оценивается вероятность выделения видео *артефактов* (т.е. визуальных искажений изображения, накладывающихся на видеосигнал в процессе цифрового кодирования). В качестве примеров можно привести метрику JND (едва уловимые различия) Сарноффа, PDM метрику (метрика искажения восприятия Винклера) и метрику DVQ (качество цифрового изображения). DVQ – l_p**-метрика** между векторами признаков, представляющих две видеопоследовательности. Некоторые метрики используются для измерения специальных артефактов видеосигнала: появления блоковых структур, размытости изображений, сигналов помех (неопределенность ориентации кромки), искажение текстуры и т.п.

Расстояния временныз рядов видео

Расстояния временных рядов видео – объективные свойствах, пространственно-временные **метрики качества видео,** базирующиеся на вейвлетах. В ходе обработки видеопоток x преобразуется во временной ряд $x(t)$ в виде кривой на координатной плоскости, который затем (кусочно-линейно) аппроксимируется как множество последовательных отрезков, которые можно задать с помощью $n + 1$ конечной точки (x_i, x'_i), $0 \le i \le n$ на координатной плоскости. В работе [WoPi99] представлены следующие (см. **Расстояние Мила**) расстояния между видеопотоками x и y:

1) *очертание* $(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \left|(x'_{i+1} - x'_i) - (y'_{i+1} - y'_i)\right|$;

2) смещение $(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \left|\frac{x'_{i+1} + x'_i}{2} - \frac{y'_{i+1} + y'_i}{2}\right|$.

21.2. РАССТОЯНИЯ В АНАЛИЗЕ ЗВУКОВ

Обработка звуковых (речь, музыка и т.п.) *сигналов* является обработкой аналоговых (непрерывных) или, главным образом, цифровых (дискретных) представлений колебаний давления воздуха от звуковых воздействий. *Звуковая спектрограмма* (или *сонограмма*) является визуальным трехмерным представлением акустического сигнала. Оно формируется либо в результате прохождения через серию полосовых фильтров (аналоговая обработка), либо посредством применения *быстрого преобразования Фурье* к электронному аналогу акустической волны. Три оси представляют время, частоту и *интенсивность* (акустическую энергию). Зачастую эта трехмерная кривая сокращается до двух характеристик посредством представления интенсивности более жирными линиями или более подчеркнутым серым или введением цветовых значений.

Звук называется *тоном,* если он периодический (самая низкая частота *основной гармоники* плюс ей кратные, *гармоники* или *обертоны*), и *шумом,* иначе. Частота измеряется в циклах в секунду (количество полных циклов в секунду) или в герцах. Диапазон слышимых человеческим ухом звуковых частот обычно лежит в пределах 20 Гц–20 кГц.

Мощность сигнала $P(f)$ – энергия на единицу времени; она пропорциональна квадрату амплитуды сигнала $A(f)$. *Децибел* (*дБ*) – единица измерения, показывающая отношение величин двух сигналов. Одна десятая часть 1 дБ называется *белом* (первичная устаревшая единица). Амплитуда звукового сигнала в дБ равна $20\log_{10}\frac{A(f)}{A(f')} = 10\log_{10}\frac{P(f)}{P(f')}$, где f' – опорный сигнал, выбранный обозначать 0 дБ (обычно это предел восприятия человеческого слуха). Порогом болевого ощущения является сила звука в 120–140 дБ.

Высота тона и *громкость* являются субъективными параметрами восприятия частоты и амплитуды сигнала.

Мел-шкала представляет собой перцепционную шкалу частот в соответствии с воспринимаемой на слух высотой тона и основывается на внесистемной единице высоты звука *мел* как единице восприятия частоты (высоты тона). Она соотносится со шкалой акустических частот f (в Гц) как $\mathrm{Mel}(f) = 1127\ln\left(1 + \frac{f}{700}\right)$ или просто как $\mathrm{Mel}(f) = 1000\log 2\left(1 + \frac{f}{700}\right)$, таким образом, 1000 Гц соответствует 1000 мел.

Шкала Барка (названная так в честь Баркгаузена) является психоакустической шкалой восприятия интенсивности (громкости) звука: ее диапазон составляет от 1 до 24, охватывая первые 24 критические полосы слышимых частот (0, 100, 200, …, 1270, 1480, 1720, …, 950, 12000, 15500Гц). Эти полосы соответствуют пространственным областям базилярной мембраны (внутреннего уха), где колебания, вызываемые звуками определенных частот, активизируют волосковые сенсорные клетки и нейроны. Шкала Барка соотносится со шкалой акустических частот f (в кГц) как $\mathrm{Bark}(f) = 13\,\mathrm{arctg}(0,76f) + 3,5\,\mathrm{arctg}\left(\frac{f}{0,75}\right)^2$.

Основным способом управления человеком своим голосом (речь, пение, смех) является регулирование формы *речевого тракта* (горло и рот). Данную форму, т.е. профиль поперечного сечения трубки от складки в голосовой щели (пространства между голосовыми связками) до апертуры (губы), можно представить как функцию площади поперечного сечения Area(x), где x – расстояние до голосовой щели. Речевой тракт выступает своего рода резонатором при произнесении гласных звуков, так как находится в относительно открытом состоянии. Эти резонансные колебания усиливают исходный звук (от выходящего из легких потока воздуха) на особых резонансных частотах (*формантах*) речевого тракта с пиковыми выбросами в *диапазоне* звуковых частот. Каждый гласный звук имеет две характерные форманты в зависимости от вертикального и горизонтального положения языка. Функция исходного звука модулируется функцией амплитудно-частотной характеристики для заданной функции, площади. Если мы аппроксимируем речевой тракт как последовательность соединенных трубок с постоянной площадью сечения, то *коэффициенты отношения площадей* равны частным $\frac{\mathrm{Area}(x_{i+1})}{\mathrm{Area}(x_i)}$ для последовательных трубок; расчет таких коэффициентов можно осуществить по методу кодирования с линейным предсказанием (см. ниже).

Спектр звука – распределение интенсивности (дБ) (а иногда и фаз в частотах (кГц)) компонентов волны. *Огибающая спектра* – гладкая кривая, соединяющая пики спектра. Оценка огибающих спектра производится на основе кодирования с линейным предсказанием (LPC) или быстрого преобразования Фурье (FFT) с использованием действительного кепстра, т.е. логарифма амплитудного спектра звука.

Преобразование Фурье (*FT*) отображает функции временного интервала на представления частотных интервалов. *Кепстр* сигнала $f(t)$ представляет собой $FT(\ln(FT(f(t) + 2\pi mi)))$, где m – целое число, необходимое для развертывания угла или мнимой части комплексной логарифмической функции. Комплексный и действительный кепстр используют, соответственно комплексную и действительную логарифмическую функцию. Действительный кепстр использует только величину исходного сигнала $f(t)$, в то время как комплексный кепстр – также фазовые параметры $f(t)$. Алгоритм быстрого преобразования Фурье (*FFT*) основывается на линейном спектральном анализе. С помощью *FFT* осуществляется преобразование Фурье на сигнале и делается выборка результатов преобразования по искомым частотам обычно по шкале *мел*.

Расстояния основанные на параметрах, применяемых для распознавания и обработки речевых данных, обычно получаются алгоритмом LPC (процесса кодирования с линейным предсказанием), который моделирует речевой спектр как линейную комбинацию предыдущих выборок (подобно авторегрессионному процессу).

Грубо говоря, алгоритм LPC обрабатывает каждое слово речевого сигнала, осуществляя последовательно шесть операций: фильтрование, нормализации энергии, разбиение на кадры, *кадрирование* (для минимизации неоднородностей на границах кадров), получение параметров LPC с линейным методом автокорреляции и преобразование к *кепстральным коэффициентом, полученным алгоритмом* LPC. LPC предполагает, что речевой сигнал формируется из прерывистого звука (зуммера), издаваемого голосовой щелью, с эпизодическим добавлением шипящих, свистящих и взрывных звуков, при этом форманты удаляются в результате фильтрования.

Большинство мер искажений между сонограммами являются разновидностями **квадрата евклидова расстояния** (в том числе ковариационно-взвешенного, т.е. **расстояния Махалонобиса**) и вероятностных расстояний, принадлежащих следующим общим типам: **метрике** обобщенной **полной вариации**, ***f*-расхождению Чизара** и **расстоянию Чернова**.

Приведенные ниже расстояния для обработки звуков есть расстояния между векторами x и y, представляющими два сигнала сравниваемых. Для целей распознавания они являются эталонным и входным сигналами, а для шумоподавления – исходным (опорным) и искаженным сигналами (см., например, [OASM03]). Зачастую расстояния рассчитываются для небольших отрезков между векторами, представляющими кратковременные спектры, а затем осредняются.

Сегментированное соотношение сигнал/шум

Сегментированное отношение сигнал/шум $SNR_{\text{seg}}(x, y)$ между сигналами $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$ определяется как

$$\frac{10}{m}\sum_{m=0}^{M-1}\left(\log_{10}\sum_{i-nm+1}^{nm+n}\frac{x_i^2}{(x_i-y_i)^2}\right),$$

где n – количество кадров и M – количество сегментов.

Обычное *отношение сигнал/шум* $SNR(x, y)$ между x и y задается как

$$10\log_{10}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\sum_{i-1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

Другой мерой для сравнения двух форм колебаний сигнала x и y во временной области является их **расстояние Чекановского–Дайса,** определенное как

$$\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}\left(1-\frac{2\min\{x_i-y_i\}}{x_i+y_i}\right).$$

Спектральное искажение интенсивность фаза

Спектральне искажение интенсвность фаза между сигналами $x = (w)$ и $y = (w)$ определяется как

$$\frac{1}{n}\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}(|x(w)|-|y(w)|)^2+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}(\angle x(w)-\angle y(w))^2\right),$$

где $|x(w)|$, $|y(w)|$ – спектры интенсивность $\angle x(w)$, и $\angle y(w)$ – фазовые спектры x и y соответственно, при этом параметр λ, $0 \le \lambda \le 1$, выбран с целью придания соразмерных весов к составляющим интенсивности и фазы. Случай $\lambda = 0$ соответствует **расстоянию спектральной фазы**.

Для сигнала $f(t) = a\,\mathrm{e}^{-bt}\,U(t),\ a, b > 0$ с преобразованием Фурье $x(w) = \dfrac{a}{b+iw}$ его *спектр интенсивности* (или *амплитуды*) равен $|x| = \dfrac{a}{\sqrt{b^2+w^2}}$, и его *фазовый* спектр (в радианах) равен $\alpha(x) = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{w}{b}$, т.е. $x(w) = |x|\,\mathrm{e}^{i\alpha} = |x|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Среднеквадратическое логарифмическое спектральное расстояние

Среднеквадратическое логарифмическое спектральное расстояние (или *среднеквадратическое расстояние*) $LSD(x, y)$ между дискретными спектрами $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$ представляет собой следующее евклидово расстояние:

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \ln y_i)^2}.$$

Квадрат этого расстояния, используя представление кепстра $\ln x(w) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j\,\mathrm{e}^{-ijw}$ (где $x(w)$ – спектр мощности, т.е. преобразование Фурье квадрата интенсивности), становится в комплексном пространстве кепстра, **расстоянием кепстра**.

Расстояние логарифма отношения площадей $LAR(x, y)$ между x и y определяется как

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}10(\log_{10}\mathrm{Area}(x_i) - \log_{10}\mathrm{Area}(y_i))^2},$$

где $\mathrm{Area}(z_i)$ – площадь сечения сегмента трубки речевого тракта, соответствующего z_i.

Спектральное расстояние Барка

Спектральное расстояние Барка – перцепционное расстояние, определенное как

$$BSD(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2,$$

т.е. **квадрат евклидова расстояния** между *спектрами Барка* (x_i) и (y_i) спектров x и y, где i-й компонент соответствует i-й критической полосе слуха по шкале Барка.

Существует модификация спектрального расстояния Барка, которая исключает критические полосы i, на которых искажения громкости $|x_i - y_i|$ меньше, чем порог маскировки шума.

Квазирасстояние Итакуры–Саито

Квазирасстояние Итакуры–Саито (или *расстояние наибольшего правдоподобия*) $IS(x, y)$ между огибающими спектра $x = x(w)$ и $y = y(w)$ (полученными алгоритмом LPC) определяется как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln\frac{x(w)}{y(w)}+\frac{y(w)}{x(w)}-1\right)dw.$$

Расстояние гиперболического косинуса определяется как $IS(x,y)+IS(y,x)$, т.е. равно

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x(w)}{y(w)}+\frac{y(w)}{x(w)}-2\right)dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\cosh\left(\ln\frac{x(w)}{y(w)}-1\right)dw.$$

где $\cosh(t)=\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}$ – гиперболический косинус.

Квазирасстояние логарифма отношения правдоподобия

Квазирасстояние коэффициента логарифма отношения правдоподобия (или **расстояние Куллбака–Лейблера**) $KL(x, y)$ между огибающими спектра $x=x(w)$ и $y=y(w)$ (полученными алгоритмом LPC) определяется как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(w)\ln\frac{x(w)}{y(w)}dw.$$

Применяется также и **расхождение Джефри** $KL(x,y)+KL(y,x)$.

Расстояние взвешенного отношения правдоподобия между огибающими спектра $x=x(w)$ и $y=y(w)$ определяется как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\left(\ln\left(\frac{x(w))}{y(w)}\right)+\frac{y(w)}{x(w)}-1\right)x(w)}{p_x}+\frac{\left(\ln\left(\frac{y(w))}{x(w)}\right)+\frac{x(w)}{y(w)}-1\right)y(w)}{p_y}\right)dw,$$

где $P(x)$ и $P(y)$ обозначают соответственно мощность спектров $x(w)$ и $y(w)$.

Кепстральное расстояние

Кепстральное расстояние (или *квадрат евклидовой кепстральной метрики*) $CEP(x, y)$ между огибающими спектра $x = x(w)$ и $y = y(w)$ (полученными алгоритмом LPC) определяется как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln\frac{x(w)}{y(2)}\right)^{2}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\ln x(w)-\ln y(w))^{2}dw=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(c_j(x)-c_j(y)),$$

где $c_j(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}e^{iwj}\ln|z(w)|\,dw$ есть j-й кепстральный (действительный) коэффициент z, полученный с помощью преобразования Фурье или LPC).

Расстояние частота-взвешенного кепстра

Расстояние чатоста-взвешенного кепстра (или *расстояние взвешенного наклона*) между x и y определяется как

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} i^2(c_i(x)-c_i(y))^2.$$

"Чатоста" (Quefrency) и "кепстр" являются анаграммами терминов "частота" и "спектр" соответственно.

Расстояние кепстра Мартина между AR (авторегрессионными) моделями определяется применительно к их кепстрам как

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} i(c_i(x)-c_i(y))^2}$$

(см. общее **Расстояние Мартина** (гл. 12) определенное как **угловое расстояние между подпространствами**, и **Метрика Мартина** (гл. 11) между строками, которая является его l_∞-аналогом).

Метрика наклона Клэтта между дискретными спектрами $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$ с n канальными фильтрами определяется как

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}((x_{i+1}-x_i)-(y_{i+1}-y_i))^2}.$$

Фоновые расстояния

Фон – это звуковой сегмент, который обладает своими особыми акустическими свойствами и является базовой звуковой единицей (см. *фонема*, т.е. семейство фонов, которые обычно воспринимаются на слух как один звук; количество фонем весьма обширно с учетом имеющихся на земле 6000 различных языков, от 11 в языке ротокас до 112 в !Xó/õ (языки, на которых говорят около 4000 человек, проживающих в Папуа-Новой Гвинее, и в Ботсване соответственно).

Двумя основными классами **фоновых расстояний** (расстояния между двумя фонами x и y) являются:

1) *расстояния на основе спектрограмм*, которые являются мерой физико-акустических расхождений между звуковыми спектрограммами x и y;

2) *фоновые расстояния, основанные на признаках*, которые обычно являются **расстоянием Манхэттена** $\sum_i |x_i - y_i|$ между векторами (x_i) и (y_i), представляющими фоны x и y относительно заданного набора фонетических признаков (как, например, носовой характер звука, стриктура, палатализация, округление).

Фонетическое словарное расстояние

Фонетическое словарное расстояние между двумя словами x и y – **взвешенная метрика редактирования**, т.е. минимальная цена преобразования x в y посредством замены, удаления и вставки фонов). Слово рассматривается как строка фонов. Для данного **фонового расстояния** $r(u, v)$ в международном фонетическом алфавите с добавлением фона 0 (тишина) цена замены фона u на v равна $r(u, v)$, тогда как $r(u, 0)$ – цена вставки или удаления u (см. расстояния для протеиновых данных на основе **расстояния Дейхофа** (гл. 23) на множестве из 20 аминокислот).

Лингвистическое расстояние

В вычислительной лингвистике **лингвистическим расстоянием** (или **расстоянием диалектологии**) между диалектами X и Y является среднее для данной выборки S понятий **фонетическо словарное расстояние** между *родственными* (т.е. имеющими одинаковое значение) словами s_X и s_Y, представляющими одно и то же понятие $s \in X$ в X и Y соответственно.

Расстояние Стоувера (см. http://sakla.net/concordances/index.html) между фразами с одинаковыми ключевыми словами является суммой $\sum_{-n \le i \le +n} a_i x_i$, где $0 < a_i < 1$ и x_i – относительное число несовпадающих слов между фразами в движущемся окне. Фразы сначала выравниваются по общему ключевому слову на основе сравнения его контекстного использования; кроме того, наиболее редко употребляемые слова заменяются общим псевдознаком.

Расстояние тона

Тон – субъективный коррелят фундаментальной частоты (см. выше *шкалу Барка*) громкости (воспринимаемой интенсивности) и *мел-шкалы* (воспринимаемой высоты тона). *Музыкальная шкала* обычно представляет собой линейно упорядоченную совокупность звуков (нот). **Расстояние тона** (или **интервал, музыкальное расстояние**) – размер участка линейно-воспринимаемого непрерывного тона, ограниченного двумя тонами, как показано на данной шкале. Расстояние тона между двумя последовательными нотами на шкале называется *ступенью звукоряда*.

Сегодня в западной музыке чаще всего применяется *хроматическая шкала* (октава из 12 нот) с равномерной темперацией, т.е. разделенная на 12 одинаковых ступеней с соотношением между любыми двумя соседними частотами, равным $\sqrt[12]{2}$. Ступенью звукоряда в этом случае является *полутон*, т.е. расстояние между двумя соседними клавишами (черной и белой) пианино. **Расстояние между нотами**, имеющими частоты f_1 и f_2, составляет $12\log_2\left(\frac{f1}{f2}\right)$ полутонов.

Число MIDI (цифровой интерфейс для музыкальных инструментов) для фундаментальной частоты f определяется как $p(f) = 69 + 12\log_2\frac{f}{440}$. Расстояние между нотами, выраженное в числах MIDI, становится **натуральной метрикой** $|m(f_1) - m(f_2)|$ на $\mathbb{R}$. Это удобное расстояние тона, поскольку оно соответствует физическому расстоянию на клавишных инструментах и психологическому расстоянию, как это измерено экспериментально и понимается музыкантами.

Расстояния между ритмами

Временная шкала ритма (музыкальная структура), помимо стандартной нотной записи, представляется следующими способами, применяемыми в вычислительном анализе музыки.

1. Как бинарный вектор $x = (x_1, ..., x_m)$, состоящий из m временных интервалов (одинаковых на временной шкале), где $x_i = 1$ обозначает продолжительность звучания ноты, а $x_i = 0$ – паузу. Так, например, пять 12/8 метрических временных шкал музыки фламенко представлены как пять бинарных последовательностей длины 12.

2. Как *вектор тона* $q = (q_1, ..., q_n)$ абсолютной высоты тона q_i и вектор разности тона $p = (p_1, ..., p_{n+1})$, где $p_i = q_{i+1} - q_i$ представляет количество полутонов (положительных или отрицательных) от q_i до q_{i+1}.

3. Как *интервальный* вектор *между вступлениями* $t = (t_1, ..., t_n)$, состоящий из n интервалов между последовательными вступлениями.

4. Как *хронотомическое представление*, которое в виде гистограммы отображает t как последовательность квадратов со сторонами $t_1, ..., t_n$; такое отображение можно рассматривать как кусочно-линейную функцию.

5. Как *вектор различия ритмов* $r = (r_1, ..., r_{n-1})$, где $r_i = \frac{t_{i+1}}{t_i}$.

Примерами общих **расстояний между ритмами** является хэммингово расстояние, **метрика свопа** (см. гл. 11), **расстояние бульдозера** между их заданными векторными представлениями.

Евклидово расстояние интервальных векторов есть евклидово расстояние для двух интервальных векторов между вступлениями. **Хронотонное расстояние** Густафсона является разновидностью l_1-расстояния между этими векторами с использованием хронотонного представления.

Расстояние отношения интервалов Койла–Шмулевича определяется как

$$1 - n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\max\{r_i, r_i'\}}{\min\{r_i, r_i'\}}.$$

где r и r' – векторы разности ритмов двух ритмов (см. обратная **Подобность Ружички**, гл. 17).

Акустические расстояния

Длина волны – расстояние, которое звуковая волна проходит до завершения полного цикла. Это расстояние измеряется по перпендикуляру к фронту волны в направлении ее распространения между пиком синусоидальной волны и следующим соответствующим пиком. Длину волны любой частоты можно определить путем деления скорости звука (331,4 м/с на уровне моря) в среде на фундаментальную частоту.

Поле в дальней зоне – часть поля акустической волны, в которой звуковые волны могут рассматриваться как плоские и звуковое давление уменьшается обратно пропорционально расстоянию от источника звука. Оно соответствует уменьшению силы звука примерно на 6 дБ на каждое удвоение расстояния.

Поле в ближней зоне – часть поля акустической волны (обычно на удалении двух длин волн от источника), где отсутствует простое отношение между уровнем звука и расстоянием.

Близостный эффект – аномалия низких частот, характеризующаяся их усилением при поднесении направленного микрофона слишком близко к источнику звука.

Критическое расстояние – расстояние от источника звука, на котором прямой звук (непосредственно от источника) и реверберирующий звук (прямой звук, отраженный от стен, потолка, пола и др.) одинаковы по уровню интенсивности.

Расстояние нечувствительности – минимальное расстояние чувствительности ультразвукового **датчика близости**.

Акустическая метрика – термин, используемый иногда для обозначения некоторых расстояний между гласными звуками; например, евклидова расстояния между векторами формантных частот произнесенного и заданного гласного звука (не смешивать с понятием акустических метрик в общей теории относительности и квантовой гравитации, гл. 24).

Глава 22

Расстояния в Интернете и родственных сетях

22.1. СЕТИ, НЕ ЗАВИСИМЫЕ ОТ ШКАЛ

Сеть – это граф, ориентированный или неориентированный, с положительным числом (весом), поставленным в соответствие каждой из его дуг или ребер. Реальные сложные сети обычно обладают огромным количеством вершин N и являются разреженными, т.е. с относительно малым количеством ребер.

Интерактивные сети (Интернет, Web, социальные сети и т.п.) имеют тенденцию быть сетями "тесного мира" [Watt99], т.е. находятся между обычными геометрическими решетками и случайными графами в следующем смысле: обладают большим *коэффициентом кластеризации* (т.е. вероятностью того, что два различных соседа данной вершины являются соседними) как решетки, тогда как среднее расстояние пути между двумя вершинами будет малым, около $\ln N$, как в случайном графе.

Основным частным случаем сети тесного мира является **сеть, независимая от шкалы** [Bara01], в которой распределение вероятностей, скажем, для вершины иметь степень k равно $k^{-\gamma}$ для некоей положительной константы γ, которая обычно принадлежит отрезку [2, 3]. Эта *степенная зависимость* влечет за собой то, что очень немногие вершины, называемые хабами (коннекторами, супер-распределителями), являются более связанными, чем другие вершины. Распределения со степенной зависимостью (или **зависимостью большой дальности**, *тяжелым* "*хвостом*") в пространстве или времени наблюдались у многих явлений природы (как физических, так и социальных).

Расстояние соавторства

Расстояние соавторства – это **метрика пути** (http://www.ams.org/msnmain/cgd/) *графа коллективного соавторства*, имеющего порядка 0,4 млн вершин (авторов, содержащихся в базе данных Mathematical Reviews), где xy является ребром, если авторы x и y – соавторы публикации из общего количества 2 млн, занесенных в эту базу данных. Вершина наибольшей степени, 1486 соответствует математику Полю Эрдешу; *индекс Эрдеша* того или иного математика – это его расстояние соавторства до Поля Эрдеша.

Метрика соавторства Бара (http://www.okland.edu/enp/barr.pdf) является **расстоянием сопротивления** (из гл. 15) в следующем расширении графа сотрудничества. Сначала ставится сопротивление 1 Ом между любыми двумя авторами для каждой публикации двух соавторов. Затем для каждой совместной публикации n авторов, $n > 2$, добавляется новая вершина и соединяется через $\frac{n}{4}$-омное сопротивление с каждым из соавторов.

Расстояние со-звездность

Расстояние со-звездности – это **метрика пути** *голливудского графа*, который имеет 250 тыс. вершин (актеров по перечню базы данных фильмов в Интернете), где xy является ребром, если актеры x и y снимались вместе в одном художественном кинофильме. Вершинами наибольшего порядка являются Кристофер Ли и Кевин Бэкон; например, в игре "Эффект Кевина Бэкона" (*Six degrees of Kevin Bacon*) используется *индекс Бэкона*, т.е. расстояние со-звездности до этого актера.

В качестве аналогичных популярных примеров таких социальных не зависимых от шкал сетей можно привести графы музыкантов (которые играли в составе одного ансамбля), бейсболистов (игравших в одной команде), научных публикаций (которые цитируют друг друга), шахматистов (игравших друг с другом), графы обмена письмами, знакомств между студентами в колледже, членства в совете директоров коммерческой организации, сексуальных отношений между членами данной группы. Метрика пути последней сети называется **сексуальным расстоянием**. Другими исследуемыми сетями, не зависимыми от шкал, являются сети авиасообщений, сети сочетаний слов в языке, сеть энергетической системы Запада США, сети датчиков, сеть нейронов червя, сети генной коэкспрессии, сети реакций между протеинами и метаболические сети (между двумя веществами ставится ребро, если между ними происходит реакция посредством энзимов).

Опережающее квазирасстояние

В ориентированной сети, в которой реберные веса соответствуют некоторой точке во времени, **опережающим квазирасстоянием** (**запаздывающим квазирасстоянием**) называется длина кратчайшего ориентированного пути, но только среди таких, на которых реберные веса последовательно увеличиваются (уменьшаются соответственно). Опережающее квазирасстояние применяется при построении эпидемиологических сетей (распространение болезни контактным способом или, скажем, распространение ереси в религиозном движении), тогда как обратное квазирасстояние свойственно файлообменным сетям P2P (peer-to-peer).

Центральность промежуточности

Для **геодезического** метрического пространства (X, d) (в частности, для **метрики пути** графа) **центральность промежуточности** точки $x \in X$ определена как

$$g(x) = \sum_{y,z \in X} \frac{\text{число наикратчайших } (y-z) \text{ путей через } x}{\text{число наикратчайших } (y-z) \text{ путей}}$$

и **функция расстояния-массы** есть функция $M: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{Q}$, определенная как

$$M(a) = \frac{|\{y \in X : d(x,y) + d(y,z) = a \text{ для некоторых } x, y \in X\}|}{|\{(x,z) \in X \times X : d(x,z) = a\}|}.$$

Как предполагается в [GOJKK02] многие независимые от шкал сети удовлетворяют степенному закону $g^{-\gamma}$ (для вероятности, что вершина имеет центральность промежуточности g), где γ равно 2 или ≈2,2 с функцией расстояния-массы $M(a)$, которая линейна или нелинейна соответственно. В случае линейности, например, $\frac{M(a)}{a} \approx 4,5$ для **метрики AS Интернета** и ≈1 для **квазиметрики Web гиперссылок**.

Расстояние дрейфа

Расстояние дрейфа – абсолютное значение разности между наблюдаемыми и фактическими координатами узла в NVE (виртуальном пространстве сети).

В моделях такого большого виртуального однорангового (peer-to-peer) пространства сети (например, в сетевых играх с большим количеством участников) пользователи представлены как координатные точки на плоскости (узлы), которые могут перемещаться дискретно *по времени* и каждая из которых обладает зоной видимости, называемой *областью интереса*. В NVE создается синтетический $3D$ мир, в котором каждому пользователю присваивается *аватара* (видеообраз абонента) для взаимодействия с другими пользователями или компьютером.

Термин **расстояние дрейфа** используется также применительно к потоку, проходящему сквозь материал в процессе производства автопокрышек.

Семантическая близость

Для слов в документе имеются синтаксические отношения ближнего действия и семантические корреляции дальнего действия. Основными сетями для работы с документами являются Web и библиографические базы данных (цифровые библиотеки, Web базы научных данных и т.п.); документы в них взаимосвязаны соответственно через гиперссылки, цитирование или соавторство.

Кроме того, некоторые семантические дескрипторы (ключевые слова) могут придаваться к документам для их индексации (классификации): по выбранной автором терминологии, титульным надписям, заголовкам журналов и т.п.

Семантическая близость между двумя ключевыми словами x и y есть их **подобность Танимото** $\frac{|X \cap Y|}{|X \cup Y|}$, где X и Y – множества документов с присвоенными индексами x и y соответственно. Их **расстояние ключевого слова** определяется как $\frac{|X \Delta Y|}{|X \cap Y|}$ и не является метрикой.

22.2. СЕМАНТИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ В СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ

Среди основных лексикографических сетей (таких, например, как WordNet, поисковая система Medical Search Headings, Тезаурус Рожта, Словарь современного английского языка Лонгмана) сеть WordNet является наиболее популярным лексическим ресурсом, используемым в процессах обработки естественного языка и компьютерной лингвистике. Сеть WordNet (см. http://wordnet.princeton.edu) – интерактивная словарная база данных, в которой существительные, глаголы, прилагательные и наречия английского языка организованы в *синонимические множества*, каждое из которых представляет одно базовое лексическое понятие. Два таких множества могут быть связаны семантически одной из следующих связок: связка снизу вверх x (*гипоним*) *ЕСТЬ* y (*гипероним*), связка сверху вниз х (мероним) *СОДЕРЖИТ* y (*холоним*), горизонтальная связка, выражающая большую часть совместного употребления x и y (*антонимия*), и т.д. связки ЕСТЬ (*IS-A*) индуцируют частичный порядок, называемый *IS-A* таксономией. Версия 2.0 WordNet содержит 80 000 понятий существительного и 13 500 понятий глагола, организованных в 9 и 554 отдельных *IS-A* иерархических структуры соответственно. В полученном ориентированном ацикличном графе понятий для любых двух синонимических множеств (или понятий) x и y пусть $l(x, y)$ – длина кратчайшего пути между ними с использованием только связок *IS-A* и пусть $LPS(x, y)$ – их наименьший общий предшествующий элемент (предок) в *IS-A* таксономии. Пусть $d(x)$ – глубина x (т.е. его расстояние от корня в *IS-A* таксономии) и пусть $D = \max_x d(x)$. Ниже приводится перечень основных семантических подобностей и расстояний.

Подобность пути

Подобность пути между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{path}(x, y) = (l(x, y))^{-1}.$$

Подобность Ликока–Чодороу

Подобность **Ликока–Чодороу** между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{lch}(x, y) = -\ln\frac{l(x, y)}{2D},$$

и **расстояние понятий** между ними определяется как $\frac{l(x, y)}{D}$.

Подобность Ву–Палмера

Подобность Ву–Палмера между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{wup}(x, y) = \frac{2d(LPS(x, y))}{d(x) + d(y)}.$$

Подобность Резника

Подобность Резника между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{res}(x, y) = -\ln p(LPS(x, y)),$$

где $p(z)$ – вероятность встретить понятие z в большом объеме, а $-\ln p(z)$ – *информационное содержание* z.

Подобность Лина

Подобность Лина между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{lin}(x, y) = \frac{2\ln p(LPS(x, y))}{\ln p(x) + \ln p(y)}.$$

Расстояние Цзяня–Конрата

Расстояние Цзяня–Конрата между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{jcn}(x, y) = 2\ln p(LPS(x, y)) - (\ln p(x) + \ln p(y)).$$

Подобности Леска

Глоссарием синонимичного множества z является элемент этого множества, который определяет или поясняет основное понятие. **Подобности Леска** – такие подобности, которые определяются как функция наложения глоссариев соответствующих понятий; так, например, **наложением глоссариев** называется величина

$$\frac{2t(x, y)}{t(x) + t(y)},$$

где $t(z)$ – количество слов синонимического множества z, а $t(x, y)$ – количество общих слов в x и y.

Подобность Херста–Сент–Онджа

Подобность Херста–Сент–Онджа между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\mathrm{hso}(x, y) = C - L(x, y) - ck,$$

где $L(x, y)$ – длина кратчайшего пути между x и y при использовании всех связок, k – количество изменений направления этого пути и C, c – константы.

Расстояние Херста–Сент–Онджа определяется как $\frac{L(x,y)}{k}$.

22.3. РАССТОЯНИЯ В ИНТЕРНЕТЕ И WEB

Рассмотрим подробно графы веб-сети и Web Интернета, которые обладают свойством "тесного мира" и независимости от шкал.

Интернет – общедоступная глобальная компьютерная сеть, которая сформировалась на базе Арпанет (сети коммутации пакетов, созданной в 1969 г. для нужд Министерства обороны США), NSFNet, Usenet, Bitnet и ряда других сетей. В 1995 г. Национальный научный фонд США отказался от обладания сетью Интернет.

Ее узлами являются маршрутизаторы, т.е. устройства, которые пересылают пакеты данных по сетевым каналам от одного компьютера к другому с использованием протоколов IP (Интернет-протокол межсетевого взаимодействия), TCP и UDP (протоколы передачи данных) и построенных над ними протоколов HTTP, Telnet, FTP и многих других *протоколов* (т.е. технических спецификаций передачи данных). Маршрутизаторы размещаются в местах *межсетевых шлюзов*, т.е. в таких местах, где соединяются не менее двух сетей. Связи, соединяющие узлы – различные физические соединители, такие как телефонные провода, оптоволоконные кабели и спутниковые каналы. В Интернете используется *пакетная коммутация*, т.е. данные (фрагментированные, если требуется) пересылаются не по предварительно установленному пути, а с учетом оптимального использования имеющейся *полосы частот* (со скоростью передачи информации в млн бит/с) и минимизации *времени запаздывания* (времени в миллисекундах, необходимого для получения запроса).

Каждому подключенному к Интернету компьютеру обычно присваивается индивидуальный "адрес", называемый *IP адресом*. Количество возможных IP адресов ограничено величиной $2^{32} \approx 4{,}3$ млрд. Наиболее популярными приложениями, поддерживаемыми Интернетом, являются электронная почта, передача файлов, Web и некоторые мультимедиа.

Множеством вершин *графа IP адресов Интернета* являются IP адреса всех подключенных к Интернету компьютеров; две вершины являются смежными, если они подключены напрямую через маршрутизатор, т.е. дейтаграмма передачи проходит только через один *прыжок* (*сетевой сегмент*).

Сеть Интернет может быть разбита на административно автономные системы (AS) или домены. В каждой AS внутридоменная маршрутизация осуществляется по протоколу IGP (внутренний протокол маршрутизации), тогда как междоменная маршрутизация обеспечивается по протоколу BGP (пограничный протокол маршрутизации), который присваивает ASN (16-битовый) номер) каждой AS. AS *граф Интернета* имеет в качестве вершин AS (приблизительно 25 тыс. в 2007 г.), а его ребра представляют наличие одноранговых BGP связи между соответствующими AS.

Web ("Всемирная паутина", *WWW* или веб-сеть) является крупной частью содержания Интернета, состоящей из взаимосвязанных документов (ресурсов). Она соответствует протоколу HTTP (протокол передачи гипертекста) между браузером и сервером, протоколу HTML (язык гипертекстовой маркировки) кодирования информации для дисплея и URL (унифицированные указатели ресурсов), дающим единственный "адрес" Web страниц. Web начала свое существование в Европейском центре по ядерным исследованиям в 1989 г. и была передана в общественное пользование в 1993 г.

Web орграф – виртуальная сеть, узлы которой являются *документами* (т.е. статичными HTML страницами или их URL), которые соединены входящими или исходящими HTML гиперссылками.

Количество узлов Web орграфа составляло, по разным оценкам, между 15 и 30 млрд в 2007 г. Более того, рядом находится так называемая *глубокая* или *невидимая* Web, т.е. доступные для поиска базы данных (~300 тыс.) с количеством страниц (даже без учета содержания), предположительно в 500 раз превышающим количество статических Web страниц. Эти страницы не индексированы серверами поиска, их URL динамичные, и поэтому они могут быть вызваны только прямым запросом в реальном масштабе времени.

30 июня 2007 г. 1 143 109 925 пользователей (17,8% мировой популяции, включая 69,5% в Северной Америке и 39,8% в Европе) воспользовались Интернетом.

Существует несколько сотен тысяч *кибер-сообществ*, т.е. кластеров вершин Web орграфа, где плотность связей между членами сообщества гораздо выше аналогичного показателя для связей членов сообщества с остальным миром. Кибер-сообщества (группы клиентов, участники социальной сети, понятия в технической статье и т.п.) обычно концентрируются вокруг определенной тематики и содержат двудольный подграф *хабов-авторитетных источников*, в котором все хабы (меню и перечни ресурсов) указывают на все авторитетные источники (полезные страницы по данной тематике). Примерами новых медиа, созданных Web, являются: *блоги* (опубликованные в сети дневники), Википедия (открытая энциклопедия) и проектируемая консорциумом Web связь с метаданными.

В среднем вершины Web орграфа имеют размер 10 Кбит, степень выхода 7,2 и вероятность k^{-2} того, что степень выхода или степень входа равна k. Проведенное исследование [BKMR00] более 200 млн Web сраниц позволило приблизительно выделить наибольшую связную компоненту – "ядро" из 56 млн страниц и еще 44 млн связанных C ядром страниц (новичков?). Для случайно выбранных узлов x и y вероятность существования ориентированной цепи от x к y была равна 0,25 и средняя длина такой кратчайшей цепи (если таковая существует) была равна 16, тогда как максимальная длина кратчайшей цепи равнялась 28 в ядре и более 500 во всем графе.

Приведенные ниже расстояния являются примерами маршрутных метрик между *хвостами*, т.е. величинами, использующимися в алгоритмах маршрутизации в Интернете для сравнения возможных маршрутов. Примерами других таких мер являются задействование полосы частот, стоимость связи, надежность (вероятность потери пакетных данных). Упоминаются также основные **метрики качества**, связанные с компьютерами.

IP метрика Интернета

IP метрика Интернета (или *счет прыжков, метрика протокола RIP, длина IP пути*) – это **метрика пути** в *IP графе Интернета*, т.е. минимальное число прыжков (или, эквивалентно, маршрутизаторов, представленных их IP адресами), необходимых для передачи пакета данных. Протоколом *RIP* предписывается максимальное расстояние в сети – 15, и недостижимость обозначается как путь длины 16.

AS метрика Интернета

AS метрика Интернета (или *BGP-метрика*) – это **метрика пути** в *AS графе Интернета*, т.е. минимальное число ISP независимых (поставщиков услуг в сети Интернет), представленных своими AS, необходимыми для пересылки пакета данных.

Географическое расстояние

Географическим расстоянием называется **расстояние по дуге большого круга** на поверхности Земли от клиента x (получатель) до сервера y (источник). Однако в силу экономических соображений передача данных не всегда осуществляется по такой геодезической линии; например, большая часть данных из Японии в Европу поступает через США.

Расстояние RTT

Расстояние RTT является временем полной передачи между x и y в миллисекундах, измеренным за предыдущий день; (см. [HFPMC02] о разновидностях данного расстояния и связи с вышеприведенными тремя метриками).

Расстояние административных расходов

Расстоянием административных расходов называется номинальное число (оценивающее надежность информации о маршруте), присваиваемое сетью маршруту между x и y. Например, компания Cisco присваивает значения 0, 1, …, 200, 225 для подключенного интерфейса, статического маршрута, …, внутреннего протокола BGP, Неизвестного соответственно.

Метрики DRP

В структуре системного администрирования (DD) компании Cisco используется (с приоритетами и весами) **расстояние административных расходов, метрика случайности** (выбор случайного номера для каждого IP адреса) и метрики **DRP** (протокол прямого отклика). Метрики DRP запрашивают у всех маршрутизаторов с протоколом DRP одно из следующих расстояний:

1) **внешнюю метрику DRP**, т.е. количество прыжков (хопов) по протоколу BGP (пограничный протокол маршрутизации) между запрашивающим услугу пользователем и агентом сервера DRP;

2) **внутреннюю метрику DRP**, т.е. количество прыжков по протоколу IGP (внутренний протокол маршрутизации) между агентом сервера DRP и ближайшим пограничным маршрутизатором на ребре автономной системы;

3) **метрику сервера DRP**, т.е. количество прыжков по протоколу IGP между агентом сервера DRP и ассоциированным сервером.

Метрики томографии сети

Рассмотрим сеть с фиксированным протоколом маршрутизации, т.е. *сильно связный орграф* $D = (V, E)$ с единственным ориентированным путем $T(u, v)$, выбранным для любой пары (u, v) вершин. Протокол маршрутизации описывается бинарной *матрицей маршрутизации* $A = ((a_{ij}))$, где $a_{ij} = 1$, если дуга $e \in E$ с индексом i принадлежит ориентированному пути $T(u, v)$ с индексом j. Хэммингово расстояние между двумя строками (столбцами) матрицы A называется **расстоянием между соответствующими дугами** (ориентированными путями) сети.

Возьмем две сети с одинаковыми орграфами, но различными протоколами маршрутизации с матрицами маршрутизации A и A' соответственно. Тогда **полуметрика протокола маршрутизации** [Var04] есть наименьшее хэммингов расстояние между матрицей A и матрицей B, полученной из путем A' перестановок строк и столбцов (обе матрицы рассматриваются как строки).

Квазиметрика Web гиперссылки

Квазиметрикой Web гиперссылки (или *счетчиком кликов*) называется длина кратчайшего ориентированного пути (если таковое существует) между двумя Web страницами (вершинами Web орграфа), т.е. минимально необходимое число кликов мышки в данном графе.

Web квазирасстояние среднего числа кликов

Web квазирасстояние среднего числа кликов между двумя Web страницами x и y в Web орграфе [YOI03] есть минимум $\sum_{i=1}^{m} \ln p \frac{z_i^+}{\alpha}$ по всем ориентированным путям $x = z_0, z_1, ..., z_m = y$, соединяющим x и y, где z_i^+ – степень выхода страницы z_i. Параметр α равен 1 или 0,85, тогда как p (средняя степень выхода) равна 7 или 6.

WebX квазирасстояние Доджа–Шиоде

WebX квазирасстояние Доджа–Шиоде между двумя Web страницами x и y в Web орграфе есть число $\frac{1}{h(x,y)}$, где $h(x, y)$ – число кратчайших ориентированных путей, соединяющих x и y.

Метрики Web подобности

Метрики Web подобности образуют семейство индикаторов, применяемых для измерения степени взаимосвязи (содержания, в связях ссылок или/и использовании) между двумя Web страницами x и y. Например, тематическое сходство частично совпадающих терминов, *совместные ссылки* (количество страниц, где обе даются как гиперссылки), *спаренность библиографичеких данных* (количество общих гиперссылок) и *частотность совместного появления* $\min\{P(x \mid y), P(y \mid x)\}$, где $P(x \mid y)$ есть вероятность того, что посетивший страницу y посетит также страницу x.

В частности, **метрики поисково-центрического изменения** – метрики, используемые поисковыми серверами в Web сети для измерения степени различия между двумя версиями x и y Web страницы. Если X и Y являются множествами всех слов (исключая маркировку HTML) в x и y соответственно, то **словарное расстояние между страницами** есть **расстояние Дайса**, т.е. равно

$$\frac{|X \Delta Y|}{|X|+|Y|} = 1 - \frac{2|X \cup Y|}{|X|+|Y|}.$$

Если v_x и v_y являются взвешенными **TF-IDF** (частотность – обратная частотность документа) векторными представлениями x и y, то их **расстояние косинуса между страницами** дается как

$$1 - \frac{\langle v_x, v_y \rangle}{\| v_x \|_2 \cdot \| v_y \|_2}.$$

Метрика потерянности

Пользователи, "путешествующие" по гипертекстовым системам, нередко испытывают *дезориентацию* (тенденцию к потере чувства местоположения и направления в нелинейном документе) и *когнитивную перегрузку* (требуются дополнительные усилия и концентрация внимания для одновременной работы по нескольким задачам / направлениям). Пользователь теряет общее представление о структуре документа и своем рабочем пространстве.

Метрика потерянности Смита измеряет это как

$$\left(\frac{n}{s}-1\right)^2+\left(\frac{r}{n}-1\right)^2,$$

где s – общее число узлов, посещенных в ходе поиска, n – количество различных узлов среди них и r – количество узлов, которые необходимо посетить для выполнения задачи.

Метрики доверия

В компьютерной безопасности **метрика доверия** – мера для оценки сертификатов множества одноранговых узлов сети, а в социологии – мера определения степени доверия членов группы к одному из них. Так, например, метрика доступа в системе UNIX представляет собой комбинацию только трех видов доступа к ресурсу: *чтение, запись* и *выполнение*. Более детальная метрика доверия *Advogato* (используемая для ранжирования в среде разработчиков программного обеспечения с открытыми исходными кодами) основывается на силе доверия, обеспечиваемой тем, что одно лицо выдает сертификат о другом. Другими примерами служат метрики доверия Technorati, TrustFlow, Richardson и др., Mui и др., eBay.

Метрики программного обеспечения

Метрика программного обеспечения – мера качества программного обеспечения, характеризующая уровень сложности, понятности, проверяемости и доступности кода.

Метрика архитектуры – мера оценки качества архитектуры программного обеспечения (разработки сложных систем программного обеспечения), которая указывает на связность (стыкуемость составных объектов), сцепление (внутреннее взаимодействие), абстрактность, нестабильность и т.п.

Метрики локальности

Метрикой локальности называется физическая метрика, измеряющая в глобальном масштабе местоположение программных компонентов, их вызовы и глубину вложенных вызовов как

$$\frac{\sum_{i,j} f_{ij}d_{ij}}{\sum_{i,j} f_{ij}},$$

где d_{ij} – расстояние между вызывающими компонентами i и j, f_{ij} – частота вызовов от i до j. Если компоненты программы примерно одинаковы по размерам, то берется $d_{ij} = |i-j|$. В общем случае, как предложили Чзан и Горла, надо различать *опережающие* вызовы по отношению к запрашиваемой компоненту и *запаздывающие* (другие) вызовы. Пусть $d_{ij} = d'_i + d'_{ij}$, где d'_i – количество линий кода между вызовом и окончанием i, если вызов опережающий, и между началом i и вызовом, иначе, при этом $d''_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j-1} L_k$, если вызов опрежающий, и $d''_{ij} = \sum_{k=i+1}^{i-1} L_k$, иначе. Здесь L_k – количество линий компоненты k.

Дистанционное действие (в вычислительных процессах)

В вычислительных процессах **дистанционное действие** является классом проблем программирования, в котором состояние одной части программной структуры данных варьируется из-за труднораспознаваемых операций в другой части программы (см. **закон Деметра**, гл. 28).

Часть VI

РАССТОЯНИЯ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

Глава 23

Расстояния в биологии

Расстояния в *биологии* используются главным образом для целей фундаментальной классификации, например, для реконструкции эволюционного развития организмов, в виде филогенетических деревьев. При классическом подходе эти расстояния базировались на сравнительной морфологии и физиологии. Прогресс современной молекулярной биологии позволил использовать нуклеатидные и/или аминокислотные последовательности для оценки расстояний между генами, белками, геномами, организмами, видами и т.д.

ДНК представляет собой последовательность *нуклеотидов* (или кислот ядра) A, T, G и C и может рассматриваться как слово над алфавитом из четырех букв. Нуклеотиды A, G (сокращенно от слов *аденин* и *гуанин*) называются *пуринами*, тогда как T, G (сокращенно от тимин и цитозин) называются *пирамидинами* (в РНК это урацил U вместо T). Две нити ДНК удерживаются вместе (в виде двойной спирали) слабыми водородными связями между соответствующими нуклеотидами (непременно *пурином* и *пиримидином*) в структуре нитей. Эти пары называются *парами оснований*.

Транзиция – замещение пары оснований таким образом, что одна пара пурин/пирfмидин заменяется на другую; например, GC заменяется на AT. *Трансверсия* – замещение пары оснований таким образом, что одна пара пурин/пирамидин заменяется парой пирамидин/пирин или наоборот; например, GC заменяется на TA.

Молекулы ДНК встречаются (в ядре клеток эукариота) в виде длинных нитей, которые называются *хромосомами*. Большинство клеток человеческого организма содержат 23 пары хромосом, по одному набору из 23 хромосом от каждого родителя; *гамета* человека (мужская половая клетка или яйцо) есть *гаплоид*, т.е. содержит только один набор из 23 хромосом. У (нормальных) мужчины и женщины различается только 23-я пара хромосом: *XY* у мужчин и *XX* у женщин.

Ген – отрезок ДНК, который кодирует (посредством транскрипции на РНК и последующего переноса) белок или молекулу РНК. Местоположение гена на его специальной хромосоме называется *локусом*. Различные разновидности (состояния) гена называются *аллелями*. Гены занимают не более 2% человеческой ДНК; функциональность, если таковая имеется, остальной части неизвестна.

Белок – большая молекула, являющаяся цепочкой *аминокислот*; среди них присутствуют гормоны, катализаторы (энзимы), антитела и т.д. Всего имеется 20 аминокислот; трехмерная конфигурация белка определяется (линейной) последовательностью аминокислот, т.е. словом алфавита из 20 букв.

Генетический код есть универсальное для (почти) всех организмов соответствие между некоторыми *кодонами* (т.е. упорядоченными тройками нуклеотидов) и 20 аминокислотами. Он выражает *генотип* (информацию, содержащуюся в генах, т.е. в ДНК) как *фенотип* (белки). Три терминирующих кодона (UAA, UAG и UGA) означают окончание белка; любые два из остальных 61 кодона называются *синонимичными*, если соответствуют одним и тем же аминокислотам.

В *геноме* заложена вся генетическая структура вида или живого организма. Например, геном человека представляет собой набор из 23 хромосом, включающих около 3 млрд пар оснований ДНК и организованных в 20–25 тыс. генов.

Модель эволюции, опирающаяся на бесконечные аллели (*IAM*) предполагает, что аллель может изменяться из любого конкретного состояния в любое другое состояние. Это соответствует первичной роли генетического дрейфа (т.е. случайных вариаций частоты генов от поколения к поколению), особенно характерного для небольших популяций в ходе естественного отбора (поэтапных мутаций). Модель *IAM* удобна для получения данных по аллозимам (*аллозим* – форма белка, который кодирован одним аллелем в конкретном локусе гена). Модель эволюции, основанная на поэтапных мутациях (*SMM*) более удобна для работы с данными микросателлитов (наиболее популярными в последнее время). *Микросателлиты* – сильно различающиеся повторяющиеся короткие последовательности ДНК. Частота их мутаций равна 1 на 1000–10 000 репликаций, а для аллозимов этот показатель составляет 1/1 000 000. Оказывается, что микросателлиты сами по себе содержат достаточно информации для построения генеалогического дерева организма. Данные микросателлитов (например, по отпечаткам ДНК) состоят из ряда повторяющихся микросателлитов для каждого аллеля. Другим распространенным молекулярным маркером является малая субъединица рибосомной РНК (SSU рРНК), поскольку гены рРНК играют существенную роль для выживания любого организма и их последовательности почти не изменяются.

Эволюционное расстояние между двумя популяциями (или таксонами) является мерой генетического разнообразия на основе оценки *времени расхождения*, т.е. времени, прошедшего с тех пор, когда данные популяции существовали как одно целое.

Филогенетическое расстояние (или **генеалогическое расстояние**) между двумя таксонами – *длина ветви*, т.е. минимальное число ребер, разделяющих их на филогенетическом дереве.

Иммунологическое расстояние между двумя популяциями – мера эффективности реакций антиген – антитело, показывающая эволюционное расстояние между ними.

23.1. ГЕНЕТИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ ДЛЯ ДАННЫХ О ЧАСТОТЕ ГЕНОВ

В этом разделе **генетическое расстояние** между популяциями используется как способ измерения степени эволюционного различия путем подсчета количества аллельных замещений по локусам.

Популяция представлена вектором двойной индексации $x = (x_{ij})$ с $\sum_{j=1}^{n} m_j$ компонентами, где x_{ij} – частота i-го *аллеля* (индекс состояния гена) при j-м локусе гена (положения гена на хромосоме), m_j – количество аллелей j-го локуса, а n – количество рассматриваемых локусов.

Обозначим через $\sum$ сумму по всем i и j. Поскольку x_{ij} есть частота, то выполняются условия $x \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{m_j} x_{ij} = 1$.

Расстояние общих аллелей Стефенса и др.

Расстояние общих аллелей Стефенса и др. между популяциями определяется как

$$1-\frac{\overline{SA(x,y)}}{\overline{SA(x)}+\overline{SA(y)}},$$

где для двух отдельных индивидов a и b SA(a, b) обозначает число общих аллелей, суммированные по всем n локусам и поделенное на $2n$, тогда как $\overline{SA(x)}$, $\overline{SA(y)}$ и $\overline{SA(x,y)}$ есть $SA(a, b)$, усредненное по всем парам (a, b) с индивидами a и b в популяциях, представленных как x и y и соответственно между ними.

Расстояние Dps

Расстояние Dps между популяциями определяется как

$$-\ln\frac{\sum\min\{x_{ij},y_{ij}\}}{\sum_{j-1}^{n}m_j}.$$

Расстояние Превости–Оканы–Алонсо

Расстояние Превости–Оканы–Алонсо между популяциями определяется (см. L_1-метрика, гл. 1) как

$$\frac{\sum|x_{ij}-y_{ij}|}{2n}.$$

Расстояние Роджера

Расстояние Роджера – метрика между популяциями, определенная как

$$\frac{1}{\sqrt{2n}}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{m_j}(x_{ij}-y_{ij})^2}.$$

Расстояние хорды Кавальи–Сфорза–Эдвардса

Расстояние хорды Кавальи–Сфорза–Эдвардса между популяциями определяется как

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1-\sum_{i=1}^{m_j}\sqrt{x_{ij}y_{ij}}}.$$

Это расстояние является метрикой (см. **расстояние Хеллинджера**, гл. 17).

Расстояние дуги Кавальи–Сфорза

Расстояние дуги Кавальи–Сфорза между популяциями определяется как

$$\frac{2}{\pi}\arccos\left(\sum\sqrt{x_{ij}y_{ij}}\right)$$

(см. **расстояние Фишера**, гл. 14).

Расстояние Нея–Таджимы–Татено

Расстояние Нея–Таджимы–Татено между популяциями определяется как

$$1-\frac{1}{n}\sum\sqrt{x_{ij}y_{ij}}.$$

Минимальное генетическое расстояние Нея

Минимальное генетическое расстояние Нея между популяциями определяется как

$$\frac{1}{2n}\sum(x_{ij}-y_{ij})^2.$$

Стандартное генетическое расстояние Нея

Стандартное генетическое расстояние Нея между популяциями определяется как

$$-\ln I,$$

где I – *нормализованная идентификация гена* по Нею, определенная как $\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|_2 \cdot \|y\|_2}$ (см. **расстояния Бхаттачарья** (гл. 14) и **угловая полуметрика** (гл. 17).

χ^2 расстояние Сангви

χ^2 расстояние Сангви между популяциями определяется как

$$\frac{2}{n}\sum\frac{(x_{ij}-y_{ij})^2}{x_{ij}+x_{ij}}.$$

Расстояние *F*-статистики

Расстояние *F*-статистики между популяциями определяется как

$$\frac{\sum(x_{ij}-y_{ij})^2}{2\left(n-\sum x_{ij}y_{ij}\right)}.$$

Расстояние нечеткого множества

Расстояние нечеткого множества Дюбуа–Прейда между популяциями определяется как

$$\frac{\sum 1_{x_{ij}\neq y_{ij}}}{\sum_{j=1}^{n} m_j}.$$

Расстояние родства

Расстояние родства между популяциями определяется как

$$-\ln\langle x, y\rangle,$$

где скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ называется *коэффициентом родства*.

Расстояние Рейнольдса–Вейра–Кокерхэма

Расстояние Рейнольдса–Вейра–Кокерхэма (или *расстояние родословной*) между популяциями определяется как

$$-\ln(1-\theta),$$

где **коэффициент родословной** θ двух индивидов (или двух популяций) является вероятностью того, что случайно выбранный аллель одного индивида (или генетического фонда одной популяции) будет *идентичен по наследованию* (т.е. соответствующие гены являются физическими копиями одного и того же анцестрального гена) случайно выбранному аллелю другого. Два гена могут быть идентичными по состоянию (т.е. аллелями с одинаковым индексом), но не идентичными по наследованию. Коэффициент родословной θ двух индивидов является **коэффициентом инбридинга** (родственного спаривания) их последующих поколений.

Расстояние Гольдштейна и др.

Расстояние Гольдштейна и др. между популяциями определяется как

$$\frac{1}{n}\sum(ix_{ij} - iy_{ij})^2.$$

Расстояние среднего квадрата

Расстояние среднего квадрата между популяциями определяется как

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{1\le i<j\le m_j}(i-j)^2 x_{ik}y_{jk}\right).$$

Пошаговое пространство Шрайвера–Бурвинкля

Пошаговое пространство Шрайвера–Бурвинкля между популяциями определяется как

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le i,j\le m_k}|i-j|(2x_{ik}y_{jk} - x_{ik}x_{jk} - y_{ik}y_{jk}).$$

23.2. РАССТОЯНИЯ ДЛЯ ДАННЫХ О ДНК

Расстояния между ДНК или белковыми последовательностями обычно измеряются в виде замещений, т.е. мутаций между ними. ДНК-*последовательность* рассматривается как последовательность $x = (x_1, ..., x_n)$ над алфавитом из четырех букв – нуклеотидов A, T, C, G; $\sum$ обозначает $\sum_{i=1}^{n}$.

Число различий

Число различий ДНК – просто метрика Хэмминга между последовательностями ДНК:

$$\sum 1_{x_i \ne y_i}.$$

***p*-Расстояние**

***p*-Расстояние** d_p между ДНК-последовательностями определяется как

$$\frac{\sum 1_{x_i \ne y_i}}{n}.$$

Нуклеотидное расстояние Джукеса–Кантора

Нуклеотидное расстояние Джукеса–Кантора между ДНК-последовательностями определяется как

$$-\frac{3}{4}\ln\left(1-\frac{4}{3}d_p(x,y)\right),$$

где d_p – ***p*-расстояние**. Если скорость замещения изменяется в соответствии с гамма-распределением и a является параметром, описывающим форму распределения, то **гамма-расстояние для модели Джукеса–Кантора** определяется как

$$\frac{3a}{4}\left(\left(1-\frac{4}{3}d_p(x,y)\right)^{-1/a}-1\right).$$

Расстояние Таджимы–Нея

Расстояние Таджимы–Нея между ДНК-последовательностями определяется как

$$-b\ln\left(1-\frac{d_p(x,y)}{b}\right),$$

где

$$b=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{j=A,T,C,G}\left(\frac{1_{x_i=y_i=j}}{n}\right)^2+\frac{1}{c}\sum\left(\frac{1_{x_i\neq y_i}}{n}\right)^2\right)$$

и

$$c=\frac{1}{2}\sum_{i,k\in\{A,T,G,C\}j\neq k}\frac{\left(\sum 1_{(x_i,y_i)-(j,k)}\right)^2}{\left(\sum 1_{x_i=y_i=j}\right)\left(\sum 1_{x_i=y_i=k}\right)}.$$

Пусть $P=\frac{1}{n}|\{1\leq i\leq n:\{x_i,y_i\}=\{A,G\}$ или $\{T,\ C\}\}|$, и $Q=\frac{1}{n}|\{1\leq i\leq n:$ $\{x_i,y_i\}=\{A,T\}$ или $\{G,\ C\}\}|$, т.е. P и Q являются частотами соответственно транзиции и трансверсии оснований между x и y. Приводимые ниже четыре расстояния даются в терминах величин P и Q.

Гамма-расстояние Джина–Нея

Гамма-расстояние Джина-Нея между последовательностями ДНК определяется как

$$\frac{a}{2}\left(1-2P-Q)^{1/a}+\frac{1}{2}(1-2Q)^{-1/a}-\frac{3}{2}\right),$$

где скорость замещения варьируется вместе с гамма-распределением и a является параметром, описывающим форму распределения.

2-параметрическое расстояние Кимуры

2-параметрическое расстояние Кимуры между последовательностями ДНК определяется как

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2P-Q)-\frac{1}{2}\ln\sqrt{1-2Q}.$$

3-параметрическое расстояние Тамуры

3-параметрическое расстояние Тамуры между последовательностями ДНК определяется как

$$-b\ln\left(1-\frac{P}{b}-Q\right)-\frac{1}{2}(1-b)\ln(1-2Q),$$

где $f_x=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n: x_i=G \text{ или} C\}|$, $f_y=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n: y_i=G \text{ или} C\}|$ и $b=f_x+$ $+f_y-2f_xf_y$.

В случае $f_x=f_y=\frac{1}{2}$ (следовательно, для $b=\frac{1}{2}$) это является **2-параметрическим расстоянием Кимуры**.

Расстояние Тамуры–Нея

Расстояние Тамуры–Нея между последовательностями ДНК определяется как

$$-\frac{2f_Af_G}{f_R}\ln\left(1-\frac{f_R}{2f_Af_G}P_{AG}-\frac{1}{2f_R}P_{RY}\right)-\frac{2f_Tf_C}{f_Y}\ln\left(1-\frac{f_Y}{2f_Tf_C}P_{TC}-\frac{1}{2f_Y}P_{RY}\right)-$$

$$-2\left(f_Rf_Y-\frac{f_Af_Gf_Y}{f_R}-\frac{f_Tf_Cf_R}{f_Y}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2f_Rf_Y}P_{RY}\right),$$

где $f_j=\frac{1}{2n}\sum(1_{x_i=j}+1_{y_i=j})$ для $j=A,\ G,\ T,\ C$ и $f_R=f_A+f_G$, f_T+f_C, тогда как $P_{RY}=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n:|\{x_i,y_i\}\cap\{A,G\}=|\{x_i,y_i\}\cap\{T,C\}|=1\}|$ (относительное число различий в трансверсиях). $P_{AG}=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n:|\{x_i,y_i\}=\{A,G\}\}|$ (относительное число траназиций в пуринах) и $P_{TC}=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n:|\{x_i,y_i\}=\{T,C\}\}|$ (относительное число транзиций в пирамидинах).

Метрика гибридизации Гарсона и др.

H-мера между двумя *n*-последовательностями ДНК *x* и *y* определяется как

$$H(x,y)=\min_{-n\le k\le n}\sum 1_{x_i\ne y^*_{i=k}},$$

где индексы $i+k$ взяты по модулю n, а y^* – реверсия y с последующей *комплементацией Ватсона–Крика*, т.е. обменом местами всех *A, T, G, C* и *T, A, C, G* соответственно.

ДНК-*куб* – любое максимальное множество n-последовательностей ДНК, в котором выполняется условие $H(x,\ y)=0$ для любых двух последовательностей. **Метрика гибридизации Гарсона и др.** между ДНК-кубами *A* и *B* определяется как

$$\min_{x\in A, y\in B} H(x,y).$$

23.3. РАССТОЯНИЯ ДЛЯ ДАННЫХ О БЕЛКАХ

Белковая последовательность (или первичная белковая структура) рассматривается как последовательность $x = (x_1, ..., x_n)$ над 20-буквенным алфавитом из 20 видов аминокислот; $\sum$ обозначает $\sum_{i=1}^{n}$.

Существует несколько понятий подобности/расстояния на множестве 20 видов аминокислот, которые основываются, например, на характеристиках гидрофильности, полярности, заряде, форме и т.п. Наиболее важной является 20×20 матрица *PAM250 Дейхофф*, которая выражает относительную мутабельность 20 видов аминокислот.

Расстояние PAM

Расстояние PAM (или **расстояние Дейхофф–Экка**, *величина PAM*) между белковыми последовательностями определяется как минимальное число принятых (т.е. уставшихся) точечных мутаций на 100 видов аминокислот, необходимых для преобразования одного белка в другой. 1 PAM – единица эволюции; она соответствует одной точечной мутации на 100 аминокислот. PAM значения 80, 100, 200, 250 соответствуют расстоянию (в процентах) 50, 60, 75, 92 между белками.

Число белковых различий

Число белковых различий – просто **метрика Хэмминга** между белковыми последовательностями:

$$\sum 1_{x_i \neq y_i}.$$

Амино *p*-расстояние

Амино *p*-расстояние (или *нескорректированное расстояние*) d_p между белковыми последовательностями определяется как

$$\frac{\sum 1_{x_i \neq y_i}}{n}.$$

Амино расстояние коррекции Пуассона

Амино расстояние коррекции Пуассона между белковыми последовательностями определяется с помощью **амино *p*-расстояния** d_p как

$$-\ln(1 - d_p(x, y)).$$

Амино γ-расстояние

Амино γ-расстояние (или *коррекция γ-расстояния Пуассона*) между белковыми последовательностями определяется с помощью **амино *p*-расстояния** d_p как

$$a((1 - d_p(x, y))^{-1/a} - 1),$$

где скорость замещения варьируется с $i = 1, ..., n$ в соответствии с γ-распределением и a является параметром, описывающих форму распределения. Для $a = 2{,}25$ и $a = 0{,}65$ получаем соответственно **расстояния Дейхофф** и **Гришина**. В некоторых приложениях это расстояние с $a = 2{,}25$ называется просто **расстоянием Дейхофф**.

Белковое расстояние Джукеса–Кантора

Белковое расстояние Джукеса–Кантора между белковыми последовательностями определяется с помощью **амино *p*-расстояния** d_p как

$$-\frac{19}{20}\ln\left(1-\frac{20}{19}d_p(x,y)\right).$$

Белковое расстояние Кимуры

Белковое расстояние Кимуры между белковыми последовательностями определяется с помощью **амино *p*-расстояния** d_p как

$$-\ln\left(1-d_p(x,y)-\frac{d_p^2(x,y)}{5}\right).$$

Расстояние Гришина

Расстояние Гришина d между белковыми последовательностями определяется с помощью **амино *p*-расстояния** d_p по формуле

$$\frac{\ln(1+2d(x,y))}{2d(x,y)}=1-d_p(x,y).$$

Расстояние *k*-мера Эдгара

Расстояние *k*-мера Эдгара между последовательностями $x = (x_1, ..., x_m)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ над сжатым аминокислотным алфавитом определяется как

$$\ln\left(\frac{1}{10}+\frac{\sum_a \min\{x(a),y(a)\}}{\min\{m,n\}-k+1}\right),$$

где a – любой *k-мер* (слово длины k над вышеуказанным алфавитом), при этом $x(a)$ и $y(a)$ являются количеством появлений a в x и y соответственно в виде блоков (непрерывных подпоследовательностей) (см. ***q*-грам подобность**, гл. 11).

23.4. ДРУГИЕ БИОЛОГИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ

Расстояние структуры РНК

Последовательность РНК – нить нуклеотидов (оснований), т.е. последовательность над алфавитом $\{A, C, G, U\}$. Внутри клетки такая нить сворачивается в $3D$ пространстве из-за конъюгации нуклеотидных оснований (обычно это связи типа $A–U$, $G–C$ и $G–U$). *Вторичная структура* РНК является, грубо говоря, множеством спиралей (или перечнем спаренных оснований), из которых состоит РНК. Эту структуру можно представить в виде плоского графа и даже корневого дерева. *Третичная структура* – это геометрическая форма РНК в пространстве.

Расстоянием между двумя РНК-последовательностями называется расстояние между их вторичными структурами. Примерами таких расстояний РНК служат: **расстояние редактирования дерева** (и другие расстояния на корневых деревьях, см. гл. 15) и **расстояние пары оснований**, т.е. **метрика симметрической разности** между вторичными структурами, рассматриваемыми как множества спаренных оснований.

При компьютерном (*in silico*) моделировании эволюции РНК **приспособленность** РНК-последовательности x есть **метрическое преобразование** $f(d(x, x_T))$, где f: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ есть функция масштаба и $d(x, x_T)$ – структурное расстояние РНК между последовательностью x и фиксированной контрольной РНК-последовательностью x_T.

Метрика нечетко определенного полинуклеотида

Метрикой нечетко определенного полинуклеотида (или **NTV-метрикой**) называется метрика, предложенная Ньето, Торресом и Валькез Трасанде (2003) на 12-мерном единичном кубе I^{12}. Четыре нуклеотида U, C, A и G алфавита РНК были кодированы как (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) и (0,0,0,1) соответственно. Все 64 возможные кодонные тройки генетического кода можно считать вершинами куба I^{12}. Следовательно, любую точку $(x_1, ..., x_{12}) \in I^{12}$ можно рассматривать как *нечетко определенный кодон*, каждая компонента x_i которого выражает степень принадлежности элемента i, $1 \leq i \leq 12$, нечетко определенному множеству x. Вершины куба называются *четкими множествами*.

NTV-метрика между различными точками $x, y \in I^{12}$ определяется как

$$\frac{\sum_{1 \leq i \leq 12} |x_i - y_i|}{\sum_{1 \leq i \leq 12} \max\{x_i, y_i\}}.$$

Дресс и Локот доказали, что $\frac{\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|}{\sum_{1 \leq i \leq n} \max\{|x_i|, |y_i|\}}$ является метрикой на всем $\mathbb{R}^n$.

На $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ данная метрика равна $1 - s(x, y)$, где $s(x,y) = \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} \min\{x_i, y_i\}}{\sum_{1 \leq i \leq n} \max\{x_i, y_i\}}$ является **подобностью Ружички** (см. гл. 17).

Расстояния перестройки генома

Геномы родственных однохромосомных видов или однохромосомных органелл (таких как мелкие вирусы и митохондрии) представлены порядком генов вдоль хромосом, т.е. как *перестановки* (или *ранжирования*) данного множества n гомологичных генов. Если принять во внимание ориентированность генов, то хромосому можно описать как *перестановку со знаком*, т.е. как вектор $x = (x_1, ..., x_n)$, где $|x_i|$ – различные числа 1, …, n и любой элемент x_i может быть положительным или отрицательным. Кольцевые геномы представлены кольцевыми (со знаком) перестановками $x = (x_1, ..., x_n)$, где $x_{n+1} = x_1$ и т.д.

Для множества рассматриваемых движений мутации соответствующее *геномное расстояние* между двумя такими геномами есть **метрика редактирования** (см. гл. 11), где операциями редактирования выступают эти движения мутации, т.е. минимальное количество движений (ходов) необходимых для преобразования одной перестановки (со знаком) в другую.

В дополнение (а обычно и вместо) событий локальной мутации, таких как вставка/удаление букв или замещения символов в ДНК-последовательности, рассматриваются *большие* (т.е. затрагивающие значительную часть хромосомы) мутации и соответствующие метрики геномного редактирования называются **расстояниями перестройки геномов**. Из-за редкости таких перестроечных мутаций эти расстояния точнее оцениваются истинные расстояния геномной эволюции. Основная реорганизация геномов (хромосом) осуществляется посредством *инверсий* (обращений блоков), *транспозиций* (обмена местами двух соседних блоков) в перестановке, а также *инвертированной транспозиции* (инверсии в сочетании с транспозицией) и реверсий со знаком, но только для перестановок со знаком (реверсия со знаком в сочетании с инверсией).

Основными расстояниями перестройки геномов между двумя однохромосомными геномами являются:

– **метрика реверсии и метрика реверсии со знаком** (см. гл. 11);

– **расстояние транспозиции**: минимальное число транспозиций, необходимых для преобразования (представляющей перестановки) одного из них в другой;

– **ITT-расстояние**: минимальное количество инверсий, транспозиций и инвертированных транспозиций, необходимых для преобразования одного из них в другой.

Для двух кольцевых перестановок со знаком $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ (следовательно, $x_{n+1} = x_1$ и т.д.) *точечный разрыв* – такое число i, $1 \le i \le n$, что $y_{n+1} \neq x_{j(i)+1}$, где число $j(i)$, $1 \le j(i) \le n$, определяется из равенства $y_i = x_{j(i)}$. **Расстояние точечного разрыва** (Уотерсон–Ивенс–Холл–Морган, 1982) между геномами, представленными как x и y, равно числу точечных разрывов. Это расстояние и **метрика редактирования перестановок** (**метрика Улама**, гл. 11: минимально необходимое количество перемещений букв, т.е. однобуквенных транспозиций) применяются для аппроксимации расстояний перестройки геномов.

Синтеничное расстояние

Это *геномное расстояние* между многохромосомными геномами, которые рассматриваются как неупорядоченные наборы *синтеничных* групп генов, в которых два гена *синтеничны*, если присутствуют в одной и той же хромосоме. **Синтеничное расстояние** (Ферретти–Надью–Санкофф, 1996) между двумя такими геномами является минимальным числом мутационных ходов – *транслокаций* (обмен генами между двумя хромосомами), *объединений* (слияния двух хромосом в одну) и *фрагментаций* (расщепление одной хромосомы на две) – необходимых для преобразования одного генома в другой. Все (входящие и выходящие) хромосомы этих мутаций должны быть непустыми и не дуплицированными. Вышеприведенные три мутационных хода соответствуют межхромосомным перестройкам генома, которые встречаются гораздо реже, чем внутрихромосомные; следовательно, они дают нам более глубокую информацию об истории эволюционного развития.

Расстояние генома

Расстояние генома между двумя локусами на хромосоме является числом пар оснований, разделяющих их на хромосоме.

Расстояние на генетической карте

Расстояние на генетической карте между двумя локусами на генетической карте – частота рекомбинаций, выраженная в процентах; оно измеряется в сантиморганах сМ (или *единицах генетической карты*), где 1 сМ соответствует их статистически откорректированной частоте рекомбинации 1%.

Обычно расстояние на генетической карте в 1 сМ (по *генетической шкале*) соответствует **расстоянию генома** (по *физической шкале*) порядка одной *мегабазы* (миллион парных оснований).

Метаболическое расстояние

Метаболическим расстоянием (или *расстоянием перехода*) между энзимами называется минимальное число метаболических стадий, разделяющих два энзима в метаболических переходах.

Расстояние Гендрона и др.

Расстояние Гендрона и др. между двумя взаимодействующими основаниями, представленными 4×4 *матрицами однородного преобразования* X и Y, определяется как

$$\frac{S(XY^{-1}) + S(X^{-1}Y)}{2},$$

где $S(M) = \sqrt{l^2 + (\theta / \alpha)^2}$, l – длина трансляции, θ – угол вращения и α – коэффициент масштабирования между трансляцией и вращением.

Расстояние биотопа

Биотопы здесь представлены как бинарные последовательности $x = (x_1, ..., x_n)$, где $x_i = 1$ означает присутствие вида i. **Расстояние биотопа** (или **расстояние Танимото**) между биотопами x и y определяется как

$$\frac{|\{1 \le i \le n : x_i \ne y_i\}|}{|\{1 \le i \le n : x_i + y_i > 0\}|}.$$

Расстояние Виктора–Пурпура

Последовательность всплесков x представляет собой временную последовательность $(x_1, ..., x_n)$ n событий (например, нейронных всплесков или биений сердца). Временная последовательность отражает либо абсолютные временные данные всплесков либо временные интервалы между ними. Мозг человека имеет около 100 млрд *нейронов* (нервных клеток). Нейрон реагирует на воздействие тем, что генерирует последовательность всплесков, являющуюся последовательностью коротких электрических импульсов.

Расстояние Виктора–Пурпура между двумя последовательностями всплесков x и y – **метрика редактирования** с ценой (т.е. минимальная цена преобразования x в y), с применением следующих операций (и сопутствующих им цен): вставить всплеск (цена 1), удалить всплеск (цена 1), сместить всплеск на величину времени t (цена qt, где $q > 0$ – параметр).

Виктор и Пурпура предложили это расстояние в 1996 г.; **нечеткое хэммингово расстояние** (см. гл. 11), введенное в 2001 г., использует ценовую функцию перемещений, сохраняющую неравенство треугольника.

Для сравнения реакции популяции нейронов на два различных стимула применяется **расстояние Чернова** между соответствующими распределениями всплесков.

Расстояние восприятия Оливы и др.

Пусть $\{s_1, ..., s_n\}$ – множество стимулов и пусть q_{ij} – условная вероятность того, что объект воспримет стимул s_j, когда будет продемонстрирован стимул s_i; следовательно, $q_{ij} \ge 0$ и $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 1$. Пусть q_i – вероятность появления стимула s_i.

Расстояние восприятия Оливы и др. [OSLM04] между стимулами s_i и s_j определяется как

$$\frac{1}{q_i + q_j} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{q_{ik}}{q_i} - \frac{q_{jk}}{q_j} \right|.$$

Гипотеза вероятности расстояния

В психофизике **гипотеза вероятностни расстояния** представляет собой гипотезу о том, что вероятность различения двух стимулов есть (непрерывно возрастающая) функция некоторой субъективной квазиметрики между этими стимулами [Dzha01]. Согласно этой гипотезе такая субъективная метрика является **финслеровой метрикой** тогда и только тогда, когда она совпадает в малом с **внутренней метрикой** (т.е. инфимумом длин всех путей, соединяющих два стимула).

Супружеское расстояние

Супружеским расстоянием называется расстояние между местами рождения супругов (или их зигот).

Изоляция расстоянием

Изоляция расстоянием есть биологическая модель, предсказывающая, что генетическое расстояние между популяциями увеличивается экспоненциально по отношению к географическому расстоянию. Таким образом, появление региональных различий (рас) и новых видов объясняется ограниченным потоком генов и адаптивным варьированием. Вопрос изоляции расстоянием исследовался, в частности, на структуре существующих фамилий (см. **расстояние Ласкера**).

Дистанционная модель Малекота

Дистанционной моделью Малекота называется миграционная модель изоляции расстоянием, выражаемая следующим *уравнением Малекота* зависимости аллелей в двух локусах (*аллельной ассоциации* или *нарушенного баланса связей*) ρ_d:

$$\rho_d = (1 - L) M e^{\varepsilon d} + L.$$

где d – расстояние между двумя локусами (либо **расстояние генома** в парах оснований, либо **расстояние на генетической карте** в сантиморганидах), ε – константа для данного региона, $L = \lim_{d \to 0} \rho_d$ и $M \le 1$ – параметр, характеризующий частоту мутаций.

Расстояние Ласкера

Расстоянием Ласкера (Родригес–Ларральде и др., 1989) между двумя человеческими популяциями x и y, характеризующимися векторами частоты фамилий (x_i) и (y_i), является число $-\ln 2R_{x,y}$, где $R_{x,y} = \frac{1}{2} \sum_i x_i y_i$ есть *коэффициент изонимии* Ласкера. Фамильная структура связана с инбридингом и (в определяемых по мужской линии обществах) со случайным генетическим дрейфом, мутациями и миграциями. Фамилии можно рассматривать как аллели одного локуса, и их распределение может быть проанализировано по теории нейтральных мутаций; изонимия указывает на возможность общего происхождения.

Модель фамильного расстояния

Модель фамильного расстояния была применена в [COR05] для оценки передаваемости предпочтения от родителей к детям на основе данных по 47 провинциям материковой Испании путем сравнения 47×47 матриц расстояний **фамильного расстояния** с матрицами **потребительского** и **культурного расстояний**. Эти расстояния определялись как l_1-расстояния $\sum_i |x_i - y_i|$ между векторами частоты (x_i), (y_i) провинций x и y, где z_i для провинции z являлось либо частотой i-й фамилии (**фамильное расстояние**), либо долей в бюджете i-го продукта (**потребительское расстояние**) либо (для **культурного расстояния**) рейтингом среди населения i-го культурного фактора (коэффициент свадеб, читательская аудитория и т.п.).

Исследовались также и другие расстояния (матрицы расстояний), в том числе:

– *географическое расстояние* (в километрах между столицами двух провинций);

– *расстояние доходов* $|m(x) - m(y)|$, где $m(z)$ – средний доход населения в провинции z;

– *климатическое расстояние* $\sum_{1 \le i \le 12} |x_i - y_i|$, где z_i – средняя температура в провинции z в i-м месяце;

– *миграционное расстояние* $\sum_{1 \le i \le 12} |x_i - y_i|$, где z_i – процент людей (проживающих в провинции z), родившихся в провинции i.

Строгая *вертикальная передача предпочтений*, т.е. взаимосвязь между фамилиями и потребительскими расстояниями, была выявлена только в отношении продуктов питания.

Дистанционная модель альтруизма

В эволюционной экологии альтруизм толкуется как семейный отбор или групповой отбор и считается основной движущей силой перехода от одноклеточных организмов к многоклеточным. **Дистанционная модель альтруизма** [Koel00] предполагает, что альтруисты распространяются локально, т.е. с небольшими расстояниями взаимодействия и расстояниями дисперсии потомства, тогда как для эволюционной реакции эгоистов свойственно стремление увеличить эти расстояния. Промежуточные типы поведения являются неустойчивыми, и эволюция ведет к стабильной бимодальной пространственной модели.

Дистанционная модель бега

Дистанционной моделью бега называется модель антропогенеза, предложенная в [BrLi04]. Бипедализм (хождение на двух ногах) является ключевой поведенческой адаптацией гоминидов, появившейся 4,5–6 млн лет назад. Однако австралопитеки все еще оставались животными. Род *Homo*, появившийся около 2 млн лет назад, уже умел изготавливать примитивные орудия. Модель Брамбле–Либермана объясняет этот переход с рядом адаптаций, характерных для бега на большие расстояния по саванне. Они показывают, как приобретенная способность *Homo* к длительному бегу предопределила форму человеческого тела, обеспечив сбалансированное положение головы, низкие и широкие плечи, узкую грудную клетку, короткие предплечья, длинные бедра и т.д.

Глава 24

Расстояния в физике и химии

24.1. РАССТОЯНИЯ В ФИЗИКЕ

Физика изучает поведение и свойства материи в самом широком диапазоне, от субмикроскопических частиц, из которых построена вся обычная материя (*физика элементарных частиц*), до поведения материальной вселенной в целом (космология). Физическими силами, действие которых проявляется на расстоянии (т.е. отталкивание или притягивание без непосредственного "физического контакта"), являются силы ядерного и молекулярного притяжения, а за атомным уровнем – сила тяготения (дополняемая, возможно, силой антигравитации), статическое электричество и магнетизм. Последние две силы могут одновременно отталкивать и притягивать. В данной главе речь идет о сравнительно малых расстояниях, а расстояния большой протяженности (в астрономии и космологии) будут рассматриваться в главах 25 и 26. Вообще говоря, расстояния, имеющие физический смысл, лежат в пределах от $1{,}6 \times 10^{-35}$ м (длина Планка) до $7{,}4 \times 10^{26}$ м (предполагаемые размеры наблюдаемой вселенной). В настоящее время теория относительности, квантовая теория и законы Ньютона позволяют описывать и предсказывать поведение физических систем, измеряемых в пределах 10^{-15}–10^{25} м. Гигантские ускорители позволяют регистрировать частицы размером 10^{-18} м.

Механическое расстояние

Механическим расстоянием называется положение частицы как функция времени t. Для частицы с начальной координатой x_0, начальной скоростью v_0, и постоянным ускорением a оно задается как

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Расстояние в результате падения с равномерным ускорением a для достижения скорости v определяется как $x = \dfrac{v^2}{2a}$.

Свободно падающее тело – тело, на которое в падении воздействует только сила тяготения g. Расстояние падения тела за время t равно $\dfrac{1}{2} g t^2$; оно называется **расстоянием свободного падения**.

Остановочное расстояние

Остановочное расстояние – расстояние, на которое объект перемещается в среде с сопротивлением от исходной точки до остановки.

Для объекта с массой m, движущегося в среде с сопротивлением (где сила торможения на единицу массы пропорциональна скорости с константой пропорциональности β, и каких-либо других воздействий на данный объект нет), положение $x(t)$ тела с начальной координатой x_0 и начальной скоростью v_0 задается как $x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$. Скорость тела $v(t) = x'(t) = v_0 e^{-\beta t}$ уменьшается постепенно до нуля и тело достигает **максимального остановочного расстояния**

$$x_{\text{terminal}} = \lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\beta}.$$

Для снаряда, вылетевшего из начальной точки (x_0, y_0) с начальной скоростью (v_{x_0}, v_{y_0}), положение $(x(t), y(t))$ задается как $x(t) = x_0 + \frac{v_{x_0}}{\beta}(1 - e^{\beta t})$, $y(t) = \left(y_0 + \frac{v_{y_0}}{\beta} - \frac{g}{\beta^2}\right) + \frac{v_{y_0}^{\beta - g}}{\beta^2} e^{-\beta t}$. Горизонтальное перемещение прекращается после достижения телом максимального остановочного расстояния

$$x_{\text{terminal}} = x_0 + \frac{v_{x_0}}{\beta}.$$

Баллистические расстояния

Баллистика занимается изучением движения *снарядов*, т.е. тел, которые приведены в движение (или брошены) с некоей начальной скоростью, и которые затем испытывают воздействие сил тяготения и торможения.

Горизонтальное расстояние полета называется **дальностью**, максимальная высота полета – **высотой**, а пройденный путь – **траекторией**.

Для снаряда, пущенного со скоростью v_0 под углом θ, дальность определяется как

$$x(t) = v_0 t \cos\theta,$$

где t – время движения. Полная дальность на плоскости при условии падения снаряда на высоте, одинаковой с высотой места выстрела, составляет

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g},$$

которая будет максимальной при $\theta = \pi/4$. Если высота точки падения на Δh выше точки запуска, то

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}\left(1 + \left(1 - \frac{2\Delta h g}{v_0^2 \sin^2\theta}\right)^{1/2}\right).$$

Высота задается как

$$\frac{v_0 \sin^2\theta}{2g}$$

и будет максимальной, если $\theta = \pi/2$.

Длина дуги **траектории** определяется как

$$\frac{v_0^2}{g}(\sin\theta + \cos^2\theta gd^{-1}(\theta)),$$

где $gd(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t}$ – *функция Гудермана*. Длина дуги будет максимальной, если $gd^{-1}(\theta)\sin\theta = \left(\int_0^\theta \frac{dt}{\cos t}\right)\sin\theta = 1$ и приближенное решение имеет вид $\theta \approx 0{,}9855$.

Расстояние взаимодействия

Расстояние взаимодействия между двумя частицами – наибольшее расстояние между ними в ходе сближения, когда становится очевидно, что они продолжат движение в том же направлении и с той же скоростью.

Гирорадиус

Гирорадиус (или *радиус циклотронных колебаний, радиус Лармора*) – радиус круговой орбиты заряженной частицы (например, испускаемых Солнцем быстрых электронов), которая вращается вокруг своего скользящего центра.

Законы обратной пропорциональности квадрата расстояния

Расстоянный закон обратных квдаратов – любой закон, утверждающий, что некая физическая величина обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника этой величины.

Закон всемирного тяготения (Ньютона–Буллиальдуса): гравитационное притяжение между двумя точечными объектами с массами m_1, m_2 на расстоянии d определяется как

$$G\frac{m_1 m_2}{d^2},$$

где G – универсальная *гравитационная постоянная* Ньютона. Существование дополнительных измерений пространств, предлагаемое М-теорией, будет экспериментально проверено в 2007 г. на открывающемся в ЦЕРНе близ Женевы Большом адронном коллайдере (LHC). В основе эксперимента лежит обратная пропорциональность гравитационного притяжения в n-мерном пространстве и $(n-1)$-й степени расстояния между объектами; если во вселенной существует четвертое измерение, коллайдера LHC покажет обратную пропорциональность кубу малого расстояния между частицами.

Закон Кулона: сила притяжения или отталкивания между двумя точечными объектами с зарядами e_1, e_2 на расстоянии d определяется как

$$k\frac{e_1 e_2}{d^2},$$

где k – *постоянная Кулона*, зависящая от среды, в которую погружены заряженные объекты. Гравитационные и электростатические силы двух тел, обладающих *массами Планка* $m_P \approx 2{,}176 \times 10^{-8}$ кг и единичным электрическим зарядом, одинаковы по величине.

Интенсивность (мощность на единицу площади в направлении распространения) фронта сферической волны (света, звука и т.п.), исходящей из точечного источника, убывает (если не принимать во внимание потери от поглощения и рассеяния) обратно пропорционально квадрату d^2 расстояния d до этого источника. Однако для радиоволн это уменьшение соответствует $\frac{1}{d}$.

Дальность действия фундаментальных сил

Фундаментальными силами (или взаимодействиями) являются сила тяготения, электромагнитная сила, слабые и сильные ядерные силы. **Дальность** действия силы считается *короткой*, если она слабеет (приближается к 0) экспоненциально, по мере увеличения d. Как электромагнитная, так и гравитационная силы являются силами бесконечной дальности действия, подчиняющимися законам **обратной пропорциональности квадрата расстояния**. Чем меньше расстояние, тем больше энергия. Как слабая, так и сильная ядерные силы действуют на очень близких расстояниях (около 10^{-18} и 10^{-15} м), ограниченных принципом неопределенности.

На субатомных расстояниях в теории квантового поля сильные и слабые взаимодействия описываются одной и той же совокупностью формул, но с разными константами; при очень больших энергиях они почти совпадают.

Дальний порядок

Физическая система обладает свойством **дальнего порядка**, если удаленные друг от друга части одного и того же образца демонстрируют коррелированное поведение. Например, в кристаллах и некоторых жидкостях положение одного и соседних с ним атомов определяет положение всех других атомов. Примерами дальнего порядка являются сверхтекучесть и намагниченность в твердых телах, волны плотности заряда, сверхпроводимость. **Ближний порядок** – это первый или второй ближайшие соседи данного атома. Точнее говоря, система обладает свойством дальнего порядка, *квазидальнего порядка* или является разупорядоченной, если соответствующая функция корреляции убывает на больших расстояниях, до константы, до нуля полиномиально или до нуля экспоненциально (см. **Зависимость от большой дальности**, гл. 28).

Дистанционное действие (в физике)

Дистанционное действие – взаимодействие между двумя объектами в пространстве без участия известного посредника. Эйнштейн использовал термин *дистанционное* "*призрачное действие*" для квантового механического взаимодействия (как, например, *зацепления* и *квантумной нелокальности*), которое является мгновенным, независимо от расстояния (см. **Принцип локальности**, гл. 28). В 2004 г. Зеллингер и др. провели эксперимент по телепортации (на расстояние 600 м) некоторой квантовой информации – свойства поляризации фотона – его парному объекту во взаимодействующей паре фотонов. При этом, однако, *сильной нелокальности*, т.е. измеримого дистанционного действия (сверхсветового распространения реальной физической информации) не наблюдалось, да, собственно, и не ожидалось.

Спорное само по себе (в силу того что скорость света есть максимум) неквантовое взаимодействие на большой дальности приобретает статус маргинального по отношению к проблеме "дистанционного ментального действия" (телепатия, предвидение, психокинез и т.п.). Однако, если интуитивное предчувствие Пенроуза, что мозг человека использует квантумные механические процессы, верно, то такая "нелокальная телепатическая" передача представляется возможной.

Термин *взаимодействие на малой дальности* также используется для обозначения передачи дистанционного действия какой-либо материальной средой из одной точки в другую с определенной скоростью, зависящей от свойств среды. Кроме того, в области хранения информации термином *взаимодействие в ближнем поле* обозначается взаимодействие на очень малых расстояниях с использованием технологии сканирующей головки.

Расстояние прыжка

Прыжок – динамическое воздействие на большой, по атомной шкале, дальности, регулирующее диффузию и электропроводность. Так, например, окисление ДНК (потеря одного электрона) порождает радикальный катион, который может мигрировать на большое расстояние (более 20 нм), которое называется **расстоянием прыжка** между сайтами ("прыгать" от одной комбинации к другой), прежде чем он будет пойман реакцией с водой.

Глубина проникновения

Глубиной проникновения вещества называется расстояние, на которое проникает случайная электромагнитная радиация. Глубина скин-слоя записывается как

$$\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}},$$

где c – скорость света, σ – удельная электропроводность, μ – проницаемость и ω – угловая частота.

Длина пространственной когерентности

Длина пространственной когерентности – расстояние распространения от когерентного источника до наиболее удаленной точки, где электромагнитная волна еще сохраняет специфическую степень когерентности. Данное понятие используется в технике дальней связи (обычно в системах оптической связи) и синхротронных устройствах с рентгеновской оптикой (современные синхротронные источники обеспечивают весьма высокую когерентность рентгеновских лучей). Длина пространственной когерентности составляет около 20 см, 100 м и 100 км для гелий-неоновых, полупроводниковых и волоконных лазеров соответственно (см. *длина временной когерентности*, которая описывает соотношение между сигналами, наблюдаемыми в разные моменты времени).

Длина смыкания

Для сверхтекучей жидкости **длиной смыкания** является длина, на протяжении которой волновая функция может изменяться, продолжая предельно уменьшать энергию.

Для *конденсатов Бозе–Эйнштейна* длина смыкания – пограничная область с шириной, на протяжении которой плотность вероятности конденсата сводится к нулю.

Оптическое расстояние

В оптических и телекоммуникационных системах связи **оптическим расстоянием** (или *оптической длиной пути*) называется пройденное светом расстояние: произведение физической длины пути в среде на показатель преломления этой среды. По *принципу Ферма* свет всегда распространяется по наикратчайшему оптическому пути.

Для последовательности непрерывных слоев с показателем преломления $n(s)$ как функции расстояния s оптическое расстояние записывается как

$$\int_C n(s)\,ds.$$

Для последовательности дискретных слоев с показателями преломления n_i и толщины s_i оптическое расстояние равно

$$\sum_{i=1}^{N} n_i s_i = \frac{\delta}{k_0},$$

где δ – сдвиг по фазе и k_0 – длина волны в вакууме.

Акустическая метрика

В акустике **акустическая** (или **звуковая**) **метрика** характеризует свойства распространения звука в конкретных средах: воздухе, воде и т.п.

В общей теории относительности и квантовой гравитации она характеризует свойства распространения сигнала в данной *аналоговой модели* (относительно физики сжатой материи), где, например, распространение скалярного поля в искривленном *пространстве-времени* моделируется (см. для примера исследования [BLV05] распространением звука в движущейся жидкости или замедлением света в движущейся диэлектрической жидкости или в *сверхтекучей жидкости* (квазичастицы в квантовой жидкости) и т.п. Прохождение сигнала через акустическую метрику изменяет саму метрику; например, распространение звука в воздушной среде вызывает перемещение воздуха и приводит к локальному изменению скорости звука. Такая эффективная (т.е. идентифицируемая по ее эффекту) **метрика Лоренца** (см. гл. 7) регулирует вместо фоновой метрики распространение колебаний: вовлеченные в пертурбации частицы перемещаются по геодезическим этой метрики.

Именно, если жидкость является баротропной и невязкой, а поток безвихревым, то распространение звука описывается **акустической метрикой**, которая зависит от плотности ρ потока, вектора скорости $\mathbf{v}$ потока и локальной скорости s звука в жидкости. Она может быть выражена как *акустический тензор*

$$g = g(t, \mathbf{x}) = \frac{\rho}{s}\begin{pmatrix} -(s^2 - v^2) & \vdots & -\mathbf{v}^T \\ \cdots & & \cdots \\ -\mathbf{v} & \vdots & 1_3 \end{pmatrix},$$

где 1_3 – единичная 3×3 матрица и $v = \| \mathbf{v} \|$. *Акустический линейный элемент* можно записать как

$$ds^2 = \frac{\rho}{s}(-(s^2 - v^2)\,dt^2 - 2\mathbf{v}\,d\mathbf{x}\,dt + (d\mathbf{x})^2) = \frac{\rho}{s}(-s^2 dt^2 + (d\mathbf{x} - \mathbf{v}\,dt)^2).$$

Сигнатура этой метрики равна (3, 1), т.е. она является **метрикой Лоренца**. Если скорость жидкости становится сверхзвуковой, то звуковые волны уже не могут возвратиться назад, т.е. существует некая *немая дыра*, акустический аналог *черной дыры*.

Оптические метрики также используются в аналоговом представлении гравитации и техниках эффективных метрик; они соответствуют представлению гравитационного поля как эквивалентной оптической среды, где магнитная проницаемость равна электрической.

Метрическая теория гравитации

Метрическая теория гравитации предполагает существование симметричной метрики (рассматриваемой как свойство самого пространства), которой соответствуют материя и негравитационные поля. Эти теории различаются по типу дополнительных гравитационных полей, скажем, в зависимости или независимости от местоположения и/или скорости локальных систем. Одной из таких и является общая теория относительности; она рассматривает только одно гравитационное поле, саму пространственно-временную метрику, и подчиняется эйнштейновскому дифференциальному уравнению с частными производными. Эмпирическим путем было определено, что, помимо *конформно плоской скалярной теории* Нордстрема (1913), любая другая метрическая теория гравитации привносит дополнительные гравитационные поля.

Квантовые метрики

Квантовая метрика – общий термин, используемый для метрики, с помощью которой предполагается описать пространство-время по квантовой шкале (т.е. порядка длины Планка l_P). Экстраполируя расчеты как квантовой механики, так и общей теории относительности, метрическая структура пространства-времени определяется как колебания вакуума с весьма высокой энергией (10^{19} ГэВ, соответствующей массе Планка m_P), что создает черные дыры с радиусами порядка l_P. Пространство-время становится "квантовой пеной" с мощными деформациями и турбулентностью. Оно теряет гладкую непрерывную структуру (наблюдаемую на макроскопическом уровне), *риманова многообразия*, и становится дискретным, фрактальным, недифференцируемым: на уровне величины l_P происходит разрыв функционального интеграла в классических уравнениях поля.

Примеры квантового метрического пространства представлены **компактным квантовым метрическим пространством** Риффеля, **метрикой Фубини–Штуди** на квантовых состояниях, статистической геометрией нечетко определенных масс [ReRo01] и квантованием **метрического конуса** (гл. 1) [IsKuPe90].

Квантальные расстояния

Квантальным расстоянием называется расстояние между квантовыми состояниями, представленными в виде *операторов плотности* (т.е. положительных операторов с единичным следом) в комплексном проективном пространстве над бесконечномерным гильбертовым пространством. Его m-мерный вариант соответствует *m-кубитовым квантумным состояниям*, представленным $2^m \times 2^m$ матрицами плотности.

Пусть X обозначает множество всех операторов плотности в данном гильбертовом пространстве. Для двух данных квантумных состояний, представленных операторами плотности $x, y \in X$, упомянем следующие расстояния на X.

Метрика нормы Гильберта–Шмидта (см. гл. 13) равна $\sqrt{\mathrm{Tr}((x-y)^2)}$, где $\| A \|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^t A)}$ есть *норма Гильберта–Шмидта* оператора A.

Метрика следовой нормы (см. гл. 12) равна $\| x - y \|$, где $\| A \|_{tr} = \mathrm{Tr}\sqrt{(A^T A)}$ есть следовая норма оператора A. Максимальная вероятность того, что с помощью квантового измерения можно будет отличить x от y, равна $\frac{1}{2}\| x - y \|_{tr}$.

Расстояние Буреса равно $\sqrt{2(1 - Tr((\sqrt{xy}\sqrt{x})^2))}$ (см. **Метрика Буреса**, гл. 7).

Достоверная подобность равна $Tr((\sqrt{xy}\sqrt{x})^2))$.

Расстояние Гаддера равно $\inf\{\lambda \in [0, 1]: (1-\lambda)x + \lambda x' = (1-\lambda)x + \lambda x';\ x'y' \in X\}$. В действительности, X является выпуклым, т.е. $\lambda x + (1-\lambda) y \in X$ всякий раз, когда $x, y \in X$ и $\lambda \in (0, 1)$.

Примерами других расстояний, применяемых в этой области, являются **метрика нормы Фробениуса** (см. гл. 12), **метрика Соболева** (см. гл. 13), **метрика Монжа–Канторовича** (см. гл. 21).

24.2. РАССТОЯНИЯ В ХИМИИ

Основные химические вещества являются ионными (т.е. скреплены ионными связями), металлическими (большими структурами с плотной упаковкой кристаллической решетки, скрепленными металлическими связями), гигантскими ковалентными (как, например, алмазы и графиты) или молекулярными (малыми ковалентными). Молекулы состоят из определенного количества атомов, скрепленных между собой ковалентными связями; их размеры колеблются от малых (одноатомных молекул редких газов) до гигантских молекул (типа полимеров или ДНК). **Межатомное расстояние** между двумя атомами – расстояние (в ангстремах или пикометрах) между их ядрами.

Атомный радиус

Квантовая механика предполагает, что атом не является шаром с четко обозначенными границами. Соответственно **атомный радиус** определяется как расстояние от ядра атома до наиболее стабильного электрона, обращающегося на орбите вокруг атома, находящегося в уравновешенном состоянии. Атомные радиусы представляют собой размеры отдельных, электрически нейтральных атомов, на которые не воздействуют никакие связи.

Атомные радиусы рассчитываются по **расстояниям химической связи**, если атомы элемента образуют связи; в иных случаях (например, для редких газов) используются только **радиусы Ван-дер-Ваальса**.

Атомные радиусы увеличиваются для тех элементов, которые расположены ниже по столбцу (или левее по строке) Периодической таблицы Менделеева.

Расстояние химической связи

Расстояние химической связи (или *длина связи*) – расстояние между ядрами двух связанных атомов. Так, например, типовыми расстояниями связи для углерод-углеродистых связей в органической молекуле являются 1,53, 1,34 и 1,20 Å для одиночной, двойной и тройной связей соответственно.

В зависимости от типа связи элемента его атомный радиус называется *ковалентным* или *металлическим*. *Металлический радиус* равен половине **металлического расстояния**, т.е. наименьшего ядерного расстояния в *металлическом кристалле* (плотно упакованной кристаллической решетке металлического элемента).

Ковалентные радиусы атомов (элементов, образующих ковалентные связи) рассчитываются по расстоянием химической связи между парами атомов, связанных ковалентно: эти расстояния связи равны сумме ковалентных радиусов двух атомов. Если два атома являются однотипными, то их ковалентный радиус равен половине их расстояния химической связи. Ковалентные радиусы для элементов, атомы которых не могут связываться друг с другом, вычисляются посредством комбинирования в различных молекулах, радиусов тех атомов, которые связываются, с расстоянием химической связи между парами атомов различных типов.

Контактное расстояние Ван-дер-Ваальса

При изучении межмолекулярных расстояний атомы рассматриваются как твердые сферы. Предполагается, что сферы двух соседних несвязанных атомов (в соприкасающихся молекулах или атомах), лишь касаются друг друга. Следовательно, их межатомное расстояние, называемое **контактным расстоянием Ван-дер-Ваальса**, является суммой радиусов, называемых **радиусами Ван-дер-Ваальса**, их твердых сфер. Радиус Ван-дер-Ваальса для углерода составляет 1,7 Å, тогда как его ковалентный радиус – 0,76 Å. Контактное расстояние Ван-дер-Ваальса соответствует "слабой связи", когда силы отталкивания электронных оболочек превышают силы Лондона (электростатического притягивания).

Межионное расстояние

Ион – это атом, обладающий положительным или отрицательным зарядом. **Межионное расстояние** есть расстояние между центрами двух соседних (связанных) ионов. **Ионный радиус** рассчитывается по расстоянию ионной связи в реальных молекулах и кристаллах.

Ионный радиус *катионов* (положительных ионов, например, натрия Na^+) меньше атомного радиуса атомов, из которых они вышли, тогда как анионы (отрицательные ионы, например, хлора Cl^-) по размеру больше соответствующих атомов.

Гидродинамический радиус

Гидродинамический радиус молекулы в момент диффузии в растворе является гипотетическим радиусом твердой сферы, которая растворяется с той же скоростью.

Дальность действия молекулярных сил

Молекулярные силы (или силы межмолекулярного взаимодействия) включают в себя следующие электромагнитные силы: ионная связь (заряд), водородная связь (биполярная), двухдипольное взаимодействие, силы Лондона (притягивающая составляющая сил Ван-дер-Ваальса) и стерического отталкивания (отталкивающая составляющая сил Ван-дер-Ваальса). Если расстояние (между двумя молекулами или атомами) равно d, то (определено экспериментально) функция потенциальной энергии P обратно пропорциональна d^n с $n = 1, 3, 3, 6, 12$ для пяти вышеприведенных сил соответственно. **Дальность** (или *радиус*) взаимодействия считается *короткой*, если P быстро приближается к 0 по мере увеличения d. Она также называется *короткой*, если равна не превосходит 3 Å; следовательно, короткой является только дальность стерического отталкивания (см. **дальность действия фундаментальных сил**).

Например: для полиэлектролитических растворов дальнодействующая ионная сила вода-растворитель соперничает с меньшей по дальности связующей силой вода-вода (водородная связь).

Химическое расстояние

Различные химические системы (единичные молекулы, их фрагменты, кристаллы, полимеры, кластеры) хорошо представляются в виде графов, у которых вершины (скажем, атомы, молекулы, действующие как мономеры, фрагменты молекул) связаны ребрами – химическими связями, межмолекулярными взаимодействиями Ван-дер-Ваальса, водородной связью, путями реакций и т.п.

В органической химии *молекулярный граф* $G(x) = (V(x), E(x))$ – граф, представляющий молекулу x таким образом, что вершины $v \in V(x)$ являются атомами, а ребра $e \in E(x)$ соответствуют связям электронных пар. **Число Винера** молекулы равно половине суммы всех попарных расстояний между вершинами их молекулярного графа.

BE-матрица (связей и электронов) молекулы x есть $|V(x)| \times |V(x)|$-матрица $((e_{ij}(x)))$, где $e_{ij}(x)$ – число свободных необобщенных валентностью электронов атома A_i и для $i \neq j$, $e_{ij}(x) = e_{ji}(x) = 1$, если существует связь между атомами A_i и A_j, и $e_{ij}(x) = e_{ji}(x) = 0$, иначе.

Для двух молекул x и y *стехиометрического состава* (т.е. с одинаковым количеством атомов) **химическим расстоянием Дагунджи–Уги** между ними является хеммингова метрика

$$\sum_{1 \le i, j \le |V|} |e_{ij}(x) - e_{ij}(y)|,$$

и **химическое расстояние Поспишала–Квашнички** между ними выражается как

$$\min_P \sum_{1 \le i, j \le |V|} |e_{ij}(x) - e_{P(i)P(j)}(y)|,$$

где P – любая перестановка атомов.

Вышеприведенное расстояние равно $|E(x)| + |E(y)| - 2|E(x, y)|$, где $E(x, y)$ – множество ребер максимального общего подграфа (в общем случае не индуцированного) молекулярных графов $G(x)$ и $G(y)$ (см. **Расстояние Зелинки**, гл. 15 и **Расстояние Махалонобиса**, гл. 17).

Расстояние реакции Поспишала–Квашнички, поставленное в соответствие молекулярному преобразованию $x \to y$, есть минимальное число *элементарных преобразований*, необходимых для превращения $G(x)$ в $G(y)$.

RMS Молекулярный радиус

RMS Молекулярный радиус (или *радиус вращения*) – среднеквадратичное расстояние атомов в молекуле от их общего центра тяжести; этот радиус определяется как

$$\sqrt{\frac{\sum_{1 \le i \le n} d_{0i}^2}{n+1}} = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j d_{ij}^2}{(n+1)^2}},$$

где n – количество атомов, d_{0i} – евклидово расстояние i-го атома от центра тяжести молекулы (в конкретной конфигурации), а d_{ij} – евклидово расстояние между i-м и j-м атомами.

Средний молекулярный радиус

Средний молекулярный радиус – число $\frac{r_i}{n}$, где n – количество атомов в молекуле, а r_i – евклидово расстояние -го атома от геометрического центра $\frac{\sum_j x_{ij}}{n}$ молекулы (здесь x_{ij} является i-й декартовой координатой j-го атома).

Глава 25

Расстояния в географии, геофизике и астрономии

25.1. РАССТОЯНИЯ В ГЕОГРАФИИ И ГЕОФИЗИКЕ

Расстояние большого круга

Расстояние большого круга (или **сферическое расстояние, ортодромическое расстояние**) является наикратчайшим расстоянием между точками x и y на земной поверхности, измеренное вдоль пути на поверхности Земли. Это длина дуги большого круга, проходящей через точки x и y на сферической модели планеты.

Пусть δ_1 и ϕ_1 являются соответственно широтой и долготой x, а δ_2 и ϕ_2 – аналогичными параметрами y; пусть r – радиус Земли. Тогда расстояние большого круга равно

$$r \arccos(\sin\delta_1 \sin\delta_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)).$$

Для сферических координат (θ, ϕ), где ϕ – азимутальный угол и θ – колатитьюда (дополненная широта) расстояние большого круга между $x = (\theta_1, \phi_1)$ и $y = (\theta_2, \phi_2)$ равно

$$r \arccos(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)).$$

Для $\phi_1 = \phi_2$ вышеприведенная формула сокращается до $r\,|\,\theta_1 - \theta_2\,|$.

Сфероидальным расстоянием называется расстояние между двумя точками земной поверхности в сфероидальной модели планеты. Земля по своей форме больше похожа на сплюснутый сфероид с максимальными значениями радиусов кривизны 6336 км на экваторе и 6399 км на полюсах.

Локсодромическое расстояние

Локсодрома (румб) – кривая по поверхности Земли, пересекающая каждый меридиан под одинаковым углом. Это путь, при котором сохраняется постоянное направление по компасу.

Локсодромическое расстояние – расстояние между двумя точками на поверхности Земли по локсодроме, соединяющей их. Оно никогда не бывает короче пути по дуге большого круга.

Морским расстоянием называется длина *локсодромы* соединяющей любые два места на поверхности Земли, выраженная в морских милях. Одна морская миля равна 1852 м.

Расстояние континентального шельфа

Статья 76 Конвенции ООН по морскому праву (1999) определяет *континентальный шельф прибрежного государства* (его суверенное владение) как морское дно и недра подводных районов, простирающихся за пределы его территориального моря на всем протяжении естественного продолжения его сухопутной территории до внешней границы подводной окраины материка. Конвенцией установлено, что **расстояние континентального шельфа**, т.е. **дальность** от исходных линий, от которых отмеряется ширина территориального моря, до вышеуказанной границы, должно находиться в пределах 200–350 морских миль, а также предписаны правила (почти) точного его определения.

Статьей 47 этой же Конвенции обусловлено, что для государств-архипелагов отношение площади водной поверхности (суверенное владение) к площади их суши, включая атоллы, составляет от 1 : 1 до 9 : 1 и выработаны правила применительно к конкретным случаям.

Расстояния радиосвязи

Расстояние горизонта – расстояние на поверхности Земли, на которое распространяется прямая волна; в результате отражения волн от атмосферы это расстояние может превышать дальность прямой видимости. В телевидении **расстоянием горизонта** называется расстояние до наиболее удаленной точки на поверхности Земли, находящейся в пределах видимости передающей антенны.

Зона молчания – наименьшее расстояние, на котором обеспечивается прием радиосигнала (определенной частоты) от передатчика после его отражения (прыжка) от ионосферы.

Расстояние прямой видимости – расстояние, которое проходит радиосигнал от одной антенны к другой при условии, что антенны находятся в прямой видимости и на пути радиосигнала нет никаких препятствий. Именно, радиоволны могут распространяться и за горизонт, поскольку они взаимодействуют с земной поверхностью и/или ионосферой.

При использовании двух радиочастот (например, 12,5 и 25 кГц в морской связи) **расстояние функциональной совместимости** и **расстояние разнесения соседних каналов (частот)** определяют дальность, на которой все приемники будут принимать сигналы передатчиков и соответственно минимальное расстояние между узкополосным передатчиком и широкополосным приемником, с тем чтобы избежать помех.

DX обозначает на слэнге радиолюбителей (и в морзянке) дальний прием; работать в режиме **DX** – это вести радиообмен на большой дальности (для чего необходимы соответствующие усилители мощности).

Допускаемое расстояние

В компьютерной геоинформационной системе (GIS) **допустимым расстоянием** является максимальное расстояние между двумя точками, которое устанавливается таким образом, чтобы обеспечивалась коррекция мертвых зон и промахов (зафиксированные вместе линии) по мере того как они оказываются в рамках допускаемого расстояния.

Расстояние на карте

Расстояние на карте – расстояние между двумя точками на карте (не путать с расстоянием отображения между двумя локусами на генетической карте.

Горизонтальное расстояние определяется умножением расстояния на карте на ее масштаб.

Горизонтальное расстояние

Горизонтальное расстояние (расстояние на местности) – расстояние на плоскости между двумя точками, как изображено на карте (без учета особенностей рельефа местности между этими точками). Различают два типа горизонтального расстояния: **прямолинейное расстояние** (длина отрезка прямой, соединяющей данные точки, измеренная в масштабе карты) и **расстояние путешествия** (длина кратчайшего маршрута между двумя точками, измеренная в масштабе карты с учетом существующих дорог, рек и т.п.).

Наклонное расстояние

Наклонным расстоянием (или н**аклонной дальностью**) называется (в отличие от истинно горизонтального или вертикального) расстояние между двумя точками, измеренное с учетом наклона.

Расстояние движения по дороге

Расстоянием движения по дороге (или **фактическим расстоянием, колесным расстоянием,** *дорожным расстоянием*) между двумя точками (например, городами) некоторого региона называется длина кратчайшей дороги, соединяющей эти точки. Поскольку чаще всего измерить фактическое расстояние не представляется возможным, обычно используются *оценочные расстояния.* Эмпирические данные показывают, что расстояние движения по дороге зачастую является линейной функцией **расстояния большого круга**; в городах Швеции можно считать, что дорожное расстояние приблизительно равно $1{,}25 \cdot d$, где d – расстояние большого круга. В США такой множитель равен примерно 1,15 в направлении с востока на запад и примерно 1,21 в направлении с севера на юг.

Ниже приведены некоторые родственные понятия.

Время движения между объектами; городская дорожная сеть 20 крупнейших городов Германии является *безмасштабной* именно для этой меры (возможно, наиболее близкой для водителей).

Официальное расстояние – признанное расстояние езды на автомобиле между двумя пунктами, которое используется для расчета пути и оплаты за перевозку (не путать с **расстоянием стоимости системного администрирования** в Интернете).

Расстояние между почтовыми индексами (в общем случае это почтовые и телефонные коды городов) – расчетное расстояние езды на автомобиле (или время езды на автомобиле) между двумя соответствующими пунктами.

Расстояние Мохо

Расстояние Мохо – расстояние от точки на поверхности Земли до *границы раздела двух сред по Мохоровичичу* (или *сейсмической границы Мохоровичича*) под этой точкой. *Границей раздела двух сред по Мохоровичичу* называется граница между хрупкой верхней частью земной коры и более горячей и мягкой мантией. Расстояние Мохо составляет порядка 5–10 км под дном океана и 35–65 км в глубь материков (глубочайшая в мире пещера Крубера-Воронья на Кавказе – 2,14 км, глубочайшая шахта на золотых приисках "Western Deep Levels", ЮАР – около 4 км и сверхглубокая буровая шахта на Кольском полуострове – 12,3 км). Температура обычно поднимается на один градус на каждые 33 м глубины. Японское исследовательское буровое судно "Тикю" ("Chikyu") в период с сентября 2007 г. начало осуществлять бурение в 200 км от побережья г. Нагоя на глубину до сейсмической границы Мохоровичича.

Мантия Земли простирается от сейсмической границы Мохоровичича до границы между мантией и ядром на глубине около 2890 км. Мантия Земли разделяется на верхнюю и нижнюю мантии, граница между которыми проходит на глубине около 660 км. Другие сейсмические границы отмечаются на глубинах 60–90 км (граница Хэле), 50–150 км (граница Гуттенберга), 220 км (граница Лемана), 410 км, 520 км и 710 км.

Расстояния в сейсмологии

Земная кора состоит из тектонических плит, которые перемещаются (на несколько сантиметров в год) под воздействием тепловой конвекции от глубинной мантии и сил тяготения. Края этих плит обычно давят друг на друга, и иногда резко смещаются относительно друг друга. *Землетрясение*, т.е. внезапное (в течение нескольких секунд) движение или дрожание Земли, вызванное резким высвобождением постепенно накопленного напряжения, начиная с 1906 г. рассматривалось как образование разлома (внезапное появление, образование активных центров и распространение новых трещин и сдвигов) по причине упругого восстановления после деформации. Однако с 1996 г. землетрясение рассматривается в контексте скольжения тектонических плит вдоль уже существующих разломов или стыков между ними как результат прерывистого сдвига пород в условиях фрикционной нестабильности. Соответственно землетрясение происходит, когда динамическое трение становится меньше статического трения. Движущаяся граница области скольжения называется *фронтом разрыва*. Обычно предполагается, что сдвиг – это определенная поверхность направленного по касательной скачка смещений, заключенных в прослойке упругой коры.

90% землетрясений имеют тектоническую природу, однако они могут также быть результатом вулканического извержения, ядерного взрыва, строительства крупных плотин или горных работ. Сила землетрясения может измеряться **глубиной очага** землетрясения, скоростью смещения, интенсивностью (по модифицированной шкале Меркалли эффектов землетрясений, величиной, ускорением (основной фактор разрушения) и т.п. Сила землетрясения по логарифмической шкале Рихтера рассчитывается с учетом амплитуды и частоты ударных волн, которые регистрируются сейсмографом, настроенным на **эпицентральное расстояние.** Увеличение силы землетрясения на 0,1 балла по шкале Рихтера соответствует 10-кратному увеличению амплитуды волн; наибольшей зарегистрированной величиной является 9,5 баллов (землетрясение в Чили в 1960 г.).

Модели затухания колебаний в зависимости от расстояния, используемые при проектировании сейсмостойких сооружений (зданий и мостов), обычно основываются на параметрах затухания ускорения при увеличении **расстояния между источником и объектом**, т.е. расстояния между сейсмологической станцией и критической (для конкретной модели) "центральной" точкой землетрясения.

Простейшей моделью является *гипоцентр* (или очаг), т.е. точка внутри Земли, откуда исходит землетрясение (сначала возникают колебания, затем происходит сейсмический разрыв или начинается подвижка). *Эпицентром* называется точка на поверхности Земли непосредственно над гипоцентром. Приведенная ниже терминология также используется для обозначения других катастроф, таких как падение или взрыв ядерной боеголовки, метеорита или кометы, однако для воздушных взрывов термин *гипоцентр* относится к точке на земной поверхности непосредственно под взрывом. Далее приводится перечень основных сейсмологических расстояний.

Глубина очага землетрясения – расстояние между гипоцентром и эпицентром; средняя глубина очага землетрясения составляет 100–300 км.

Гипоцентральное расстояние: расстояние от сейсмостанции до гипоцентра.

Эпицентральное расстояние (или **расстояние землетрясения**) – расстояние **большого круга** от сейсмостанции до эпицентра.

Расстояние Джойнера-Бура – расстояние от сейсмостанции до ближайшей точки на земной поверхности, расположенной над *поверхностью разрыва*, т.е. вспоротой частью плоскости тектонического нарушения.

Расстояние разлома – расстояние от сейсмостанции до ближайшей точки на поверхности разлома.

Расстояние сейсмогенной глубины – расстояние от сейсмостанции до ближайшей точки поверхности разрыва в пределах сейсмогенной зоны, т.е. глубины возможных очагов землетрясений; обычно это 8–12 км.

Кроме того, используются расстояния от сейсмостанции до:

– центра выброса статической энергии и центра статической деформации плоскости тектонического сдвига;

– точки на поверхности с максимальной макросейсмической интенсивностью, т.е. максимальным ускорением грунта (может не совпадать с эпицентром);

– эпицентра, такое, на котором объемные волны, отражающиеся от сейсмической границы Мохо (раздел между корой и мантией), вызывают более значительные колебания грунта, чем вторичные волны (называется *критическим расстоянием Мохо*);

– источников шума и помех: океанов, озер, рек, железных дорог, зданий.

Расстояние пространственно-временной связи между двумя землетрясениями x и y определяется как

$$\sqrt{d^2(x,y) + C\,|\,t_x - t_y\,|^2},$$

где $d(x, y)$ – расстояние между их эпицентрами или гипоцентрами, $|t_x - t_y|$ – различие по времени и C – масштабная константа, необходимая для корреляции расстояния $d(x, y)$ и времени.

Другой пространственно-временной мерой для катастрофических событий является **расстояние** Ландренау **между ураганами** (для ураганов, накрывающих конкретный американский штат). Оно равно протяженности береговой линии данного штата, поделенной на количество ураганов, ударам которых штат подвергся с 1899 г.

25.2. РАССТОЯНИЯ В АСТРОНОМИИ

Термином *небесный объект* (или *небесное тело*) обозначаются такие астрономические объекты, как звезды и планеты. *Небесная сфера* – проекция небесных объектов на их кажущееся положение на небосводе при наблюдении с Земли. *Небесный экватор* – проекция земного экватора на небесной сфере. *Полюсами мира* называются проекции Северного и Южного полюсов Земли на небесной сфере. *Небесным меридианом (часовым кругом)* небесного объекта является большой круг небесной сферы, проходящий через данный объект и полюсы мира. *Эклиптика* – пересечение плоскости, содержащей орбиту Земли, с небесной сферой: для наблюдателя с Земли она видится как путь, по которому Солнце перемещается по небосводу в течение года. *Точкой весеннего равноденствия* называется одна из двух точек небесной сферы, в которой небесный экватор пересекается с плоскостью эклиптики: это положение Солнца на небесной сфере в момент весеннего равноденствия.

Горизонт – линия, "отделяющая" небо от Земли. Она делит небо на верхнюю полусферу, которую мы видим, и нижнюю полусферу, которую мы наблюдать не можем. Полюс верхней полусферы (точка небосвода непосредственно над головой) называется *зенитом*, полюс нижней полусферы – *надиром*.

В общем случае **астрономическим расстоянием** называется расстояние от одного небесного тела до другого (измеренное в световых годах, парсеках или астрономических единицах). Среднее расстояние между звездами (в галактиках, подобных нашей) составляет несколько световых лет. Среднее расстояние между галактиками (в созвездии) равняется примерно 20 их диаметрам, т.е. нескольким мегапарсекам.

Широта

В сферических координатах (r, θ, ϕ) **широтой** называется **угловое расстояние** δ от xy-плоскости (*фундаментальной плоскости*) до объекта, измеренное от начала координат; $\delta = 90° - \theta$, где θ – колатитьюда (дополнение широты).

В *географической системе координат* (или *картографической системе координат*) **широтой** называется угловое расстояние от экватора Земли до объекта, измеренное от центра Земли. Широта измеряется в градусах от –90° (Южный полюс) до +90° (Северный полюс). *Параллели* – линии постоянной широты.

В астрономии **небесной широтой** называется широта небесного объекта на небесной сфере от пересечения фундаментальной плоскости с небесной сферой, выраженная в определенной *системе небесных координат.* В *экваториальной системе координат* фундаментальной плоскостью является плоскость земного экватора, в *эклиптической системе координат* – плоскость эклиптики; в *галактической системе координат* – плоскость Млечного Пути; в *системе горизонтальных координат* – горизонт наблюдателя. Небесная широта измеряется в градусах.

Долгота

В сферических координатах (r, θ, ϕ) **долготой** называется **угловое расстояние** ϕ в xy-плоскости от x-оси до пересечения большого круга, проходящего через объект, с xy-плоскостью.

В *географической системе координат* (или *картографической системе координат*) **долготой** называется угловое расстояние, измеренное в направлении на восток вдоль экватора Земли от *гринвичского меридиана* (или *нулевого меридиана*) до пересечения с меридианом, проходящим через объект. Долгота измеряется в градусах от 0° до 360°. *Меридиан* – большой круг, проходящий через Северный и Южный полюсы Земли; меридианы являются линиями постоянной долготы.

В астрономии **небесной долготой** называется долгота небесного объекта на небесной сфере, измеренная в направлении на восток вдоль пересечения фундаментальной плоскости с небесной сферой в данной системе небесных координат от выбранной фиксированной точки. В *экваториальной системе координат* фундаментальной плоскостью является плоскость земного экватора; в *эклиптической системе координат* – плоскость эклиптики; в *галактической системе координат* – плоскость Млечного Пути и в *горизонтальной системе координат* – горизонт наблюдателя. Небесная долгота измеряется в единицах времени.

Колатитьюда

В сферических координатах (r, θ, ϕ) **колатитьюдой** (**дополнением широты**) называется **угловое расстояние** от δ-оси до объекта, измеренное от начала координат; $\theta = 90° - \delta$, где δ – **широта.**

В *географической системе координат* (или *картографической системе координат* **колатитудой (дополнением широты)** называется угловое расстояние от Северного полюса Земли до объекта, измеренное от центра Земли. Колатитуда измеряется в градусах.

Склонение

В *экваториальной системе координат* (или *геоцентрической системе координат*) **склонением** δ называется **небесная широта** небесного объекта на небесной сфере, измеренная от небесного экватора. Склонение измеряется в градусах от –90 до +90°.

Прямое восхождение

В *экваториальной системе координат* (или *геоцентрической системе координат*), привязанной к звездам, **прямым восхождением** RA называется **небесная долгота** небесного объекта на небесной сфере, измеренная в направлении на восток вдоль небесного экватора от точки весеннего равноденствия до пересечения с часовым кругом объекта. Прямое восхождение измеряется в единицах времени (часах, минутах и секундах), при этом один час равен примерно 15°.

Время, необходимое для одного полного периода прецессии равноденствия, называется *Платоническим годом* (или *Великим годом*); он длится примерно 257 столетий и незначительно сокращается. Данный цикл имеет важное значение для календаря Майя и в астрологии.

Часовой угол

В *экваториальной системе координат* (или *геоцентрической системе координат*), привязанной к Земле, **часовым углом** называется небесная долгота небесного объекта на небесной сфере, измеренная по небесному экватору от меридиана наблюдателя до пересечения с часовым кругом небесного объекта. Часовой угол измеряется в единицах времени (часах, минутах и секундах). Он показывает время, истекшее с момента последнего пересечения небесным объектом меридиана наблюдателя (для положительного часового угла), или время следующего пересечения (для отрицательного часового угла).

Полярное расстояние

В *экваториальной системе координат* (или *геоцентрической системе координат*) **полярным расстоянием** PD называется колатитьюда (**дополнение широты**) небесного объекта, т.е. **Угловое расстояние** от небесного полюса до небесного объекта на небесной сфере. Подобно тому, как склонение δ измеряется от небесного экватора: $PD = 90° \pm \delta$. Полярное расстояние выражается в градусах, и его величина не может быть больше 90°. Объект на небесном экваторе имеет полярное расстояние $PD = 90°$.

Эклиптическая широта

В *эклиптической системе координат* **эклиптической широтой** называется **небесная широта** небесного объекта на небесной сфере, измеренная от плоскости эклиптики. Эклиптическая широта измеряется в градусах.

Эклиптическая долгота

В *эклиптической системе координат* **эклиптической долготой** называется **небесная долгота** небесного объекта на небесной сфере, измеренная в направлении на восток по плоскости эклиптики от точки весеннего равноденствия. Эклиптическая долгота измеряется в единицах времени.

Высота

В *горизонтальной системе координат* **высота** ALT – **небесная широта** объекта относительно горизонта. Она дополняет **зенитный угол** ZA: $ALT = 90° - ZA$. Высота измеряется в градусах.

Азимут

В *горизонтальной системе координат* **азимутом** называется **небесная долгота** объекта, измеренная в направлении на восток по горизонту от полярной точки. Азимут измеряется в градусах от 0° до 360°.

Зенитный угол

В *горизонтальной системе координат* **зенитным углом** *Z A* называется колатитьюда (**дополнение широты**) объекта, измеренная от зенита.

Лунное расстояние

Лунным расстоянием называется угловое расстояние между луной и другим небесным объектом.

Расстояние эллиптической орбиты

Расстоянием эллиптической орбиты называется расстояние от тела массы m, находящегося на эллиптической орбите, до тела массы M в фокусе орбиты. Это расстояние задается как

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

где a – *большая полуось*, e – *эксцентриситет* и θ – орбитальный угол.

Большая полуось a эллипса (или эллиптической орбиты) равна половине ее большой оси; это среднее (относительно эксцентрической аномалии) расстояние эллиптической орбиты. Среднее расстояние относительно **истинной аномалии** является *малой полуосью*, т.е. половиной малой оси эллипса (или эллиптической орбиты). *Эксцентриситет* e эллипса (или эллиптической орбиты) – это отношение половины расстояния c между фокусами и большой полуосью a: $e=\frac{c}{a}$. Для эллиптической орбиты $e=\frac{r_+ - r_-}{r_+ + r_-}$, где r_+ – **расстояние апоапсиды** и r_- – **расстояние периапсиды**.

Расстояние периапсиды

Расстоянием периапсиды называется расстояние r_- максимального сближения тела массы m с массой M, вокруг которой оно вращается по эллиптической орбите. $r_- = a(1-e)$, где a – *большая полуось* и e – *эксцентриситет.*

Перигей – периапсида эллиптической орбиты вокруг Земли. **Перигелий** – периапсида эллиптической орбиты вокруг Солнца. **Периастрий** – точка орбиты двойной звездной системы в момент максимального сближения звезд.

Расстояние апоапсиды

Расстоянием апоапсиды называется расстояние r_- наибольшего удаления тела массы m от тела массы M, вокруг которой оно вращается по эллиптической орбите. $r_+ = a(1+e)$, где a – *большая полуось* и e – *эксцентриситет.*

Апогей – апоапсида эллиптической орбиты вокруг Земли. Афелий – апоапсида эллиптической орбиты вокруг Солнца. **Апоастрий** – точка орбиты двойной звездной системы в момент максимального удаления между звездами.

Истинная аномалия

Истинной аномалией называется **угловое расстояние** точки на орбите после прохождения точки периапсиды, измеренное в градусах.

Закон Титиуса-Боде

Закон Титиуса-Боде является эмпирическим (еще недостаточно хорошо объясненным) законом, аппроксимирующим среднее планетарное расстояние от Солнца (т.е. орбитальную *большую полуось планеты*) как $\frac{3k+4}{10}$ AU (астрономических единиц). Здесь 1 AU обозначает среднее планетарное расстояние от Солнца до Земли (т.е. около $1{,}5 \times 10^8$ км ≈ 8,3 км световых минуты) и $k = 0, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7$ для Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Цереры (крупнейший астероид астероидного пояса), Юпитера, Сатурна, Урана, Плутона. При этом Нептун не соответствует данному закону – место Нептуна ($k = 2^7$) занимает Плутон.

Расстояния между доминирующим телом и спутником

Рассмотрим два небесных тела: *доминирующее* M и меньшее m (спутник на орбите вокруг M, или вторичная звезда, или пролетающая комета).

Средним расстоянием является среднее арифметическое максимального и минимального расстояний тела m от тела M.

Пусть ρ_M, ρ_m и R_M, R_m обозначают плотности и радиусы тел M и m. Тогда **пределом Роша** пары (M, m) называется максимальное расстояние между ними, в рамках которого происходит разрушение m под воздействием приливообразующих сил M, превосходящих внутренние гравитационные силы m. Данное расстояние равно $R_M\sqrt[3]{2\frac{\rho_M}{\rho_m}} \approx 1,26R_M\sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_m}}$, если является твердым сферическим телом и составляет около $2,423R_M\sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_m}}$, если тело m является жидким. Предел Роша имеет смысл только тогда, когда он превышает значение R_M. Предел Роша имеет значения $0{,}8R_M$, $1{,}49R_M$ и $2{,}8R_M$ соответственно для пар Солнце–Земля, Земля–Луна и Земля–комета. Вероятной причиной появления колец Сатурна могла стать его луна, которая сблизилась с Сатурном, превысив свой предел Роша.

Пусть $d(m, M)$ – расстояние между m и M, а S_m и S_M – массы m и M. Тогда **сфера Хилла** для m **в присутствии** M есть аппроксимация гравитационной *сферы влияния* m в условиях возмущающего влияния M. Ее радиус примерно равен $d(m, M)\sqrt[3]{\frac{S_m}{3S_M}}$. Например, радиус сферы Хилла для Земли равен 0,01 AU; Луна, удаленная на 0,0025 AU от Земли, полностью находится в пределах сферы Хилла Земли.

Пару (M, m) можно охарактеризовать посредством пяти **точек Лагранжа** L_i, $1 \leq i \leq 5$, где третье значительно меньшее тело (например, космический аппарат) имеет относительно стабильное состояние, поскольку его центробежная сила равна суммарной силе притяжения M и m. Такими точками будут следующие:

– L_1, L_2 и L_3, лежащие на прямой, проходящей через центры M и m так, что $d(L_3, m) = 2d(M, m), d(M, L_2) = d(M, L_1) + d(m, L_2)$ и $d(L_1, m) = d(m, L_2)$;

– L_4 и L_5, принадлежащие орбите m вокруг M и образующие равносторонние треугольники с центрами M и m. Эти две точки являются наиболее стабильными; каждая из них составляет с M и m частное решение (пока нерешенной) гравитационной *задачи трех тел*. Возникновение Луны предполагается как следствие бокового удара по Земле медленно приблизившегося из точки Лагранжа L_4 в системе Солнце–Земля планетоида размером с Марс.

Глава 26

Расстояния в космологии и теории относительности

26.1. РАССТОЯНИЯ В КОСМОЛОГИИ

Вселенная определяется как полный пространственно-временной континуум, в котором мы существуем вместе со всей заключенной в нем энергией и веществом.

Космология занимается изучением крупномасштабной структуры вселенной. Специфическими проблемами космологической тематики являются *изотропия* вселенной (в крупнейшем масштабе вселенная представляется одинаковой по всем направлениям, т.е. инвариантной по отношению к вращениям), *однородность* вселенной (любые измеряемые свойства вселенной одинаковы повсюду, т.е. инвариантны по отношению к переносам), плотность вселенной, соразмерность вещества и антивещества, а также источник колебаний плотности в галактиках.

В 1929 г. Хаббл открыл, что галактики обладают положительным *красным смещением*, т.е. все галактики, за исключением нескольких близлежащих галактик типа Андромеды, удаляются от Млечного Пути. Исходя из принципа Коперника (о том, что мы не находимся в особом месте вселенной), можно заключить, что все галактики также удаляются друг от друга, т.е. мы живем в динамическом, расширяющемся мире и чем дальше от нас находится галактика, тем быстрее она движется (это называется теперь *законом Хаббла* (*красного смещения*). Потоком Хаббла движение называется общее разбегание галактик и скоплений галактик в результате расширения вселенной. Оно происходит по радиальным направлениям от наблюдателя и подчиняется закону красного смещения. Галактики могут преодолевать это расширение в масштабах, меньших, чем скопления галактик, однако скопления галактик всегда будут стремиться к разбеганию в соответствии с законом красного смещения.

В космологии преобладающей научной теорией о возникновении и форме вселенной является теория *"большого взрыва"*. Наблюдение того, что галактики кажутся удаляющимися друг от друга, можно совместить с общей теорией относительности и экстраполировать состояние вселенной в обратном отсчете времени. Основанные на этой методике построения показывают, что по мере удаления в прошлое вселенная становится плотнее и ее температура увеличивается. В конечном итоге возникает гравитационная сингулярность, при которой все расстояния сводятся к нулю, а давление и температура возрастают до бесконечности. Термин *"большой взрыв"* используется для обозначения некой гипотетической точки во времени, когда наблюдаемое началось расширение вселенной. На основе проведенных измерений параметров расширения в настоящее время предполагается, что возраст вселенной равен $13{,}7 \pm 0{,}2$ млрд лет. Этот период должен быть больше, если разбегание, как предполагалось недавно, идет с ускорением. Дофас на основе данных об относительном содержании урана и тория в хондритовых метеоритах предположил [Dau05], что вселенная существует уже $14{,}5 \pm 2$ млрд лет.

В космологии (или, точнее, в *космографии*, науке об измерении вселенной) существует много способов для определения расстояния между двумя точками, поскольку в условиях расширяющейся вселенной расстояния между движущимися объектами постоянно изменяются, и для наблюдателей на Земле смотреть вдаль означает смотреть в прошлое. Объединяющим фактором при этом является то, что все меры расстояний так или иначе оценивают разделение между событиями по *радиально нулевым траекториям*, т.е. траекториям фотонов, заканчивающихся в точке наблюдения. В общем случае **космологическое расстояние** – это расстояние, выходящее далеко за пределы нашей галактики.

Геометрия вселенной определяется рядом *космологических параметров*: *параметром расширения* (или *коэффициентом масштабирования*) *a, константой Хаббла H, плотностью* ρ и *критической плотностью* ρ_{crit} (плотностью, обусловливающей прекращение расширения вселенной и, в конечном счtте, ее обратный коллапс), *космологической постоянной* Λ, *кривизной вселенной k*. Многие из этих величин могут быть связаны между собой предположениями в рамках конкретной космологической модели. Наиболее общими космологическими моделями являются открытая и закрытая *космологические модели Фридманна–Леметра* и *космологическая модель Эйнштейна-де Ситтера* (см. также *космологическая модель Эйнштейна, космологическая модель де Ситтера, космологическая модель Эддинтона-Леметра*). Космологическая модель Эйнштейна–де Ситтера исходит из того, что вселенная является однородной, изотропной, имеет постоянную кривизну с нулевой космологической постоянной Λ и давлением P. Для постоянной массы вселенной M $H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho$, $t = \frac{2}{3}H^{-1}, a = \frac{1}{R_C}\left(\frac{9GM}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}$, где $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ м^3/кг$^{-1}$/с$^{-2}$ – *гравитационная постоянная*, $R_C = |k|^{-1/2}$ – абсолютное значение радиуса кривизны и t – возраст вселенной.

Параметр расширения $a = a(t)$ является *коэффициентом масштабирования,* связывающим размер вселенной $R = R(t)$ во времени t с размером вселенной $R_0 = R(t_0)$ во времени t_0, по какому $R = aR_0$. В настоящее время его обычно рассматривают безразмерным с $a(t_{obser}) = 1$, где t_{obser} – текущий возраст вселенной.

Константа Хаббла H – коэффициент пропорциональности между скоростью расширения v и размерами вселенной R, т.е. $v = HR$. Это равенство выражает *закон Хаббла* (*красного смещения*) с константой Хаббла $H = \frac{a'(t)}{a(t)}$. Текущее значение константы Хаббла, по недавним оценкам, равно $H_0 = 71 \pm 4$ кмс$^{-1}$ Мпк$^{-1}$, где нижний индекс 0 означает современную эпоху, так как в общем случае H изменяется со временем. *Время Хаббла* и **расстояние Хаббла** определяются как $t_H = \frac{1}{H_0}$ и $D_H = \frac{c}{H_0}$ (здесь c – скорость света) соответственно.

Плотность массы ρ (равная ρ_0 в настоящую эпоху) и значение космологичекой постоянной Λ являются динамическими характеристиками вселенной. Их можно преобразовать в безразмерные параметры плотности Ω_M и Ω_Λ: как $\Omega_M = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^3}$, $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^3}$. Третий параметр плотности Ω_R измеряет "кривизну пространства" и может быть определен из отношения $\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_R = 1$.

Этими параметрами в полной мере определяется геометрия вселенной, если она однородна, изотропна и преимущественно материальна.

Скорость галактики измеряется по *доплеровскому сдвигу*, т.е. эффекту по факту изменения длины волны испускаемого светового излучения в зависимости от движения источника. Релятивистская форма доплеровского сдвига существует для объектов, движущихся с очень большой скоростью: она выражается как $\frac{\lambda_{\text{obser}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$, где λ_{emit} – длина испускаемой волны и λ_{obser} – сдвинутая наблюдаемая длина волны. Разница длин волн по отношению к неподвижному источнику называется *красным смещением* (если источник удаляется) и обозначается буквой z. Релятивистское красное смещение z для частицы записывается как $z = \frac{\Delta\lambda_{\text{obser}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{\lambda_{\text{obser}}}{\lambda_{\text{emit}}} - 1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1.$

Космологическое красное смещение непосредственно связано с параметром расширения $a = a(t) : z + 1 = \frac{a(t_{\text{obser}})}{a(t_{\text{emit}})}$. Здесь $a(t_{\text{obser}})$ является значением параметра расширения в период наблюдения приходящего от объекта света, а t_{emit} – значением параметра расширения в период его излучения.

Расстояние Хаббла

Расстояние Хаббла есть константа

$$D_H = \frac{c}{H_0} = 4220 \text{ Мпк} \approx 1{,}3 \times 10^6 \text{ м} \approx 1{,}377 \times 10^{10} \text{ световых лет},$$

где c – скорость света и $H_0 = 71 \pm 4$ кмс$^{-1}$ Мпк$^{-1}$ – *константа Хаббла.*

Это расстояние от Земли до *космического светового горизонта*, которым обозначается край видимой вселенной, т.е. радиус сферы, центром которой является Земля, протяженностью около 13,7 млрд световых лет. Это расстояние часто называют **ретроспективным расстоянием**, поскольку астрономы, наблюдающие удаленные объекты, фактически "смотрят назад" в историю вселенной.

Для небольшого v/c или малого расстояния d в расширяющейся вселенной скорость пропорциональна расстоянию и все меры расстояний, например **расстояние углового диаметра, фотометрическое расстояние** и т.п., сходятся к одному значению. Взяв линейную аппроксимацию, получим $d = zD_H$, где z – *красное смещение.* Однако эта формула справедлива только для небольших значений красного смещения.

Расстояние совместного движения

В стандартной модели "большого взрыва" используются координаты *совместного движения*, где пространственная система координат привязана к среднему местоположению галактик. Такая система координат позволяет пренебречь параметрами времени и расширения вселенной, и форма пространства может быть представлена как пространственная гиперповерхность с постоянным космологическим временем.

Расстоянием совместного движения (или *координатным расстоянием, космологическим расстоянием* χ) называется расстояние в координатах совместного движения между двумя точками в пространстве в одно и то же космологическое время, т.е. расстояние между двумя соседними объектами во вселенной, которое остается неизменным относительно эпохи, если оба объекта движутся в потоке Хаббла. Это расстояние между ними измеренное масштабной линейкой в момент их наблюдения (**собственное расстояние**), деленное на отношение коэффициентов масштабирования вселенной в исходный текущий периоды. Иными словами, это собственное расстояние, умноженное на $(1 + z)$, где z – красное смещение:

$$d_{\text{comov}}(x,y) = d_{\text{proper}}(x,y)\cdot\frac{a(t_{\text{obser}})}{a(t_{\text{emit}})} = d_{\text{proper}}(x,y)\cdot(1+z).$$

Во время t_{obser}, т.е. в настоящую эпоху, $a = a(t_{\text{obser}}) = 1$ и $d = d_{\text{proper}}$, т.е. расстояние совместного движения между двумя соседними событиями (с близкими значениями красного смещения или расстояния) является собственным расстоянием между ними. В общем случае для космологического времени t выполняется равенство $d_{\text{comov}} = \dfrac{d_{\text{proper}}}{a(t)}$.

Полное **расстояние совместного движения по линии прямой видимости** D_C от Земли до удаленного объекта рассчитывается посредством интегрирования бесконечно малых $d_{\text{comov}}(x,\ y)$ между соседними событиями вдоль луча времени, начиная с времени t_{emit}, когда свет был излучен объектом, до момента $t_{\text{obser},}$ когда осуществлялось наблюдение объекта:

$$D_C = \int_{t_{\text{emit}}}^{t_{\text{obser}}} \frac{c\,dt}{a(t)}.$$

На языке красного смещения расстояние D_C от Земли до удаленного объекта рассчитывается посредством интегрирования бесконечно малых $d_{\text{comov}}(x,\ y)$ между соседними событиями вдоль радиального луча времени от $z = 0$ до объекта: $D_C = D_H\displaystyle\int_0^z \frac{dz}{E(z)}$, где D_H есть **расстояние Хаббла**, и $E(z) = (\Omega_M(1+z)^3 + {}$ $+\Omega_R(1+z)^2 + \Omega_\Lambda)^{1/2}$.

В некотором смысле расстояние совместного движения является фундаментальной мерой расстояния в космологии, поскольку все другие расстояния могут быть выражены через него.

Собственное расстояние

Собственным расстоянием (или *физическим расстоянием, ординарным расстоянием*) называется расстояние между двумя соседними событиями в системе, в которой они происходят в одно время. Это расстояние будет измеряться масштабной линейкой в момент наблюдения. Следовательно, для космологического времени t выполняется равенство

$$d_{\text{proper}}(x,\ y) = d_{\text{comov}}\cdot a(t),$$

где d_{comov} – **расстояние совместного движения** и $a(t)$ – *коэффициент масштабирования.*

В современную эпоху (т.е. во время t_{obser}) выполняется условие $a = a(t_{\text{obser}}) = 1$ и $d_{\text{proper}} = d_{\text{comov}}$. Таким образом, собственным расстоянием между двумя соседними событиями (т.е. событиями с близкими значениями красного смещения или расстояния) является расстояние, которое мы будем измерять локально между двумя событиями сегодня, если эти две точки связаны потоком Хаббла.

Расстояние собственного движения

Расстоянием собственного движения (или расстоянием совместного поперечного движения, *современным расстоянием углового диаметра*) D_M называется расстояние от Земли до удаленного объекта, которое определяется как отношение актуальной поперечной скорости (в расстоянии по времени) объекта к его *собственному движению* (в радианах за единицу времени). Оно выражается как

$$D_M = \begin{cases} D_H \dfrac{1}{\sqrt{\Omega_R}} \sinh(\sqrt{\Omega_R} D_C / D_H), & \Omega_R > 0, \\ D_C, & \Omega_R = 0, \\ D_H \dfrac{1}{\sqrt{\Omega_R}} \sin(\sqrt{|\Omega_R|} D_C / D_H), & \Omega_R < 0, \end{cases}$$

где D_H – **расстояние Хаббла** и D_C – **расстояние совместного движения по линии прямой видимости.** Для $\Omega_\Lambda = 0$ существует аналитическое решение (z – *красное смещение*):

$$D_M = D_H \frac{2(2 - \Omega_M(1 - z) - (2 - \Omega_M)\sqrt{1 + \Omega_M z})}{\Omega_M^2 (1 + z)}.$$

Расстояние собственного движения D_M совпадает с расстоянием совместного движения по линии прямой видимости D_C тогда и только тогда, когда кривизна вселенной равна нулю. **Расстояние совместного движения** между двумя событиями при одинаковых красном смещении или расстоянии, но разнесенными по небосводу на некоторый угол $\delta\theta$, равно $D_M\delta\theta$.

Расстояние D_M связано с **фотометрическим расстоянием** D_L как $D_M = \dfrac{D_L}{1+z}$ и с **расстоянием углового диаметра** D_A как $D_M = (1 + z)D_A$.

Фотометрическое расстояние

Фотометрическое расстояние D_L есть расстояние от Земли до удаленного объекта, определяемое отношением между наблюдаемым потоком S и яркостью L:

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}.$$

Данное расстояние связано с **расстоянием собственного движения** D_M как $D_L = (1 + z)D_M$ и **расстоянием углового диаметра** D_L как $D_L = (1 + z)^2 D_A$, где z – красное смещение.

Фотометрическое расстояние учитывает то обстоятельство, что наблюдаемая светимость ослаблена факторами релятивистского красного смещения и доплеровского сдвига излучения, каждый из которых дает $(1 + z)$ – ослабление:

$$L_{\text{obser}} = \frac{L_{\text{emit}}}{(1+z)^2}$$

Скорректированное фотометрическое расстояние D'_L определяется как $D'_L = \dfrac{D_L}{1+z}$.

Модуль расстояния

Модулюс расстояния DM определяется как $DM = 5\ln\left(\frac{D_L}{10pc}\right)$, где D_L – **фотометрическое расстояние.** Модулюс расстояния – разность между абсолютной величиной и наблюдаемой величиной астрономического объекта. Модулюсы расстояний обычно используются для выражения расстояний до других галактик. Так, например, модулюс расстояния галактики Большого Магелланова Облака составляет 18,5; галактики Андромеда – 24,5; скопление Девы имеет модулюс расстояния, равный 31,7.

Расстояние углового диаметра

Расстоянием углового диаметра (или *расстоянием угловой протяженности*) D_A называется расстояние от Земли до удаленного объекта, определенное как отношение физического поперечного размера объекта к его угловому размеру (в радианах). Оно используется для преобразования угловых разделений в телескопических изображениях в собственные разделения источника. Специфика этого расстояния состоит в том, что оно не увеличивается бесконечно при $z \to \infty$, оно начинает уменьшаться при $z \sim 1$, и после этого более удаленные объекты видятся как имеющие большие угловые размеры. Расстояние углового диаметра связано с **расстоянием собственного движения** D_M как $D_A = \frac{D_M}{1+z}$ и **фотометрическим расстоянием** D_L как

$$D_A = \frac{D_L}{(1+z)^2},$$

где z – красное смещение.

Если расстояние углового диаметра основано на представлении диаметра объекта как произведения угла и расстояния (угол $\times$ расстояние), то **расстояние площади** определяется аналогичным образом из представления площади объекта как произведения пространственного угла и квадрата расстояния (телесный угол $\times$ расстояние^2).

Расстояние светового пути

Расстоянием светового пути (или *расстоянием времени светового пути*) D_{lt} называется расстояние от Земли до удаленного объекта, определенное как $D_{lt} = c(t_{\text{obser}} - t_{\text{emit}})$, где t_{obser} – время, когда объект наблюдался, и t_{emit} – время, кода свет был излучен объектом.

Это расстояние используется редко, поскольку весьма трудно определить время t_{emit} – возраст вселенной в момент излучения света, который мы видим.

Расстояние параллакса

Расстоянием параллакса D_P называется расстояние от Земли до удаленного объекта, определенное измерением *параллаксов*, т.е. кажущихся изменений положения объекта на небосводе в результате перемещения наблюдателя с Землей вокруг Солнца.

Космологический параллакс измеряется как разность углов линии видимости объекта из двух конечных точек диаметра орбиты Земли, которая используется в качестве *опорной линии.* Для данной опорной линии параллакс $\alpha - \beta$ зависит от расстояния и, зная его и длину опорной линии (две астрономические единицы AU, где AU ≈ 150 млн км – расстояние между Солнцем и Землей), расстояние до звезды можно вычислить по формуле

$$D_P = \frac{2}{\alpha - \beta},$$

где D_P – выражено в парсеках, а α и β – в арксекундах.

В астрономии "параллакс" означает обычно *годовой параллакс* p, который является разницей в углах наблюдения звезды со стороны Земли и со стороны Солнца. Соответственно расстояние до звезды (в парсеках) определяется как $D_P = \frac{1}{p}$

Кинематическое расстояние

Кинематическое расстояние – расстояние до галактического источника, которое определяется из вращения галактики, когда известна *радиальная скорость* источника. *Неоднозначность кинематического расстояния* возникает (только в нашей галактике), поскольку вдоль данной линии видимости каждое значение радиальной скорости соответствует двум расстояниям одинаково удаленных от точки касания. Данная проблема решается для некоторых галактических регионов посредством измерения их спектра поглощения в том случае, если между наблюдателем и регионом имеется межзвездное облако.

Расстояние, радара

Расстоянием, радара D_R называется расстояние от Земли до удаленного объекта, измеренное с помощью *радара.*

Радиолокационный сигнал – обычно высокочастотный радиоимпульс, посылаемый в течение короткого промежутка времени. При встрече с проводящим объектом достаточное количество энергии отражается от него обратно и принимается радиолокационной системой. Поскольку радиоволны в воздухе распространяются практически с той же скоростью, что и в вакууме, расстояние D_R до обнаруженного объекта можно вычислить по временному интервалу t между переданным и возвратившимся импульсами по формуле

$$D_R = \frac{1}{2}ct,$$

где c – скорость света.

Лестница космологических расстояний

Для измерения расстояний до астрономических объектов используется своего рода "лестница" различных методов; каждый из них обеспечивает вычисления только для ограниченного множества расстояний, а каждый метод, используемый для больших расстояний, базируется на данных, полученных в ходе предыдущих этапов.

Исходной точкой является знание расстояния от Земли до Солнца; это расстояние называется *астрономической единицей* (AU) и равно примерно 150 млн км. Коперник был первым, кто сделал (Dobovolutionibus, 1543) приблизительную модель Солнечной системы, основываясь на данных, полученных в древние времена. Расстояния внутри Солнечной системы измеряются посредством сравнения временных интервалов между излучаемыми радиолокационными радиоимпульсами и их отражениями от планет или астероидов. Современные модели отличаются высокой точностью измерений.

Следующая ступенька лестницы включает в себя простые геометрические методы; они позволяют продвинуться вперед на несколько сотен световых лет. Расстояние до ближайших звезд может быть измерено с помощью их *параллаксов*; используя орбиту Земли в качестве опорной линии, расстояние до звезд можно определить методом триангуляции. Данный метод имеет погрешность около 1% на дальности до 50 световых лет и около 10% на дальности до 500 световых лет.

На основе данных, полученных геометрическими методами и дополненных *фотометрией* (т.е. измерением параметров яркости) и спектроскопией, можно достигнуть следующей ступеньки к звездам, расположенным настолько далеко, что их параллаксы пока еще не поддаются измерениям. Поскольку яркость убывает пропорционально квадрату расстояния, мы можем, если известны *абсолютная яркость* звезды (т.е. ее яркость на стандартном опорном расстоянии 10 пк) и ее *видимая яркость* (т.е. истинная яркость, наблюдаемая на Земле), сказать, как далеко от нас находится эта звезда. Для определения абсолютной яркости можно воспользоваться *диаграммой Герцшпрунга–Рассела:* звезды одинакового типа имеют одинаковую яркость; следовательно, если известен тип звезды (по цвету и/или спектру), можно рассчитать расстояние до нее методом сравнения ее видимой яркости с абсолютной; последняя может быть получена из геометрических параллаксов соседних звезд.

Для определения еще больших расстояний во вселенной требуется дополнительный элемент: *стандартные свечи,* т.е. несколько типов космологических объектов, для которых можно определить их абсолютную яркость не зная расстояния до них. *Первичными стандартными свечами* являются *цефеиды*. Они периодически изменяют свои размеры и температуру. Существует связь между яркостью этих пульсирующих звезд и периодом их колебаний, и эту взаимосвязь можно использовать для определения их абсолютной яркости. Цефеиды можно найти на удалении до скопления Девы (60 млн световых лет). Еще одним типом стандартной свечи (*вторичные стандартные свечи*), которые ярче цефеид и соответственно могут использоваться для определения расстояний до галактик, находящихся на удалении даже сотен миллионов световых лет, являются суперновые и целые галактики.

Для действительно больших расстояний (сотен миллионов или даже миллиардов световых лет) используются космологическое красное смещение и закон красного смещения (закон Хаббла). Однако не совсем ясно, что считать здесь "расстоянием", и в космологии существуют несколько разновидностей расстояний (**фотометрическое расстояние, расстояние собственного движения, расстояние углового диаметра** и др.).

Для разных ситуаций в космологии применяются самые разнообразные и специфические способы измерения расстояний, например **расстояние отраженного света, расстояние радара Бонди, расстояние типа RR Лиры,** а также расстояния *векового, статистического* и *спектрального* параллаксов.

26.2. РАССТОЯНИЯ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Пространство-время по Минковскому (или *пространство Минковского, пространство-время по Лоренцу, плоское пространство-время*) – обычная геометрическая модель для специальной теории относительности Эйнштейна. В такой модели три обычных измерения пространства дополняются одним измерением времени и все вместе образуют четырехмерное *пространство-время* $\mathbb{R}^{1,3}$ в отсутствие тяготения.

Векторы в $\mathbb{R}^{1,3}$ называются *4-векторами* (или *событиями*). Они могут быть записаны как (ct, x, y, z), где первая компонента называется *временноподобной компонентой* (c – скорость света и t – время), тогда как другие три компоненты называются *пространственными компонентами.* В *сферических координатах* эти векторы записываться как (ct, r, θ, ϕ). В теории относительности *сферические координаты* есть система криволинейных координат (ct, r, θ, ϕ), где c – скорость света, t – время, r – *радиус*, проведенный из начала координат в данную точку с $0 \le r < \infty$, ϕ – азимутальный угол в xy-плоскости от x-оси измеренный с $0 \le \le \varphi < 2\pi$ (долгота), а θ – полярный угол, измеренный от z-оси с $0 \le \theta \le \pi$ (*дополнение широты*). 4-Векторы классифицируются по знаку квадрата их *нормы*

$$\| v \|^2 = \langle v, v \rangle = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Они являются *временноподобными, пространственноподобными* и *изотропными,* если квадраты их нормы положительны, отрицательны или равны нулю соответственно.

Множество всех изотропных векторов образуют *световой конус*. Если исключить начало координат, то пространство можно разделить на три области: области *абсолютного будущего* и *абсолютного прошлого,* попадающие в световой конус, точки которых связаны с началом координат временноподобными векторами с положительными или отрицательными значениями координаты времени соответственно, и область *абсолютного небытия*, выпадающую из светового конуса, точки которой связаны с началом координат пространственноподобными векторами.

Мировая линия объекта – последовательность событий, обозначающая временную историю объекта. Мировая линия показывает путь данной точки в пространстве Минковского. Это одномерная *кривая,* представленная координатами как функция одного параметра. Мировая линия является *временноподобной* кривой в пространстве-времени, т.е. в любой точке *ее касательный вектор* является временноподобным четырехмерным 3-вектором. Все мировые линии попадают световой конус, образованный *изотропными* кривыми, т.е. кривыми, касательные векторы которых являются изотропными 4-векторами, соответствующими движению света и других частиц с нулевой массой покоя.

Мировые линии частиц с постоянной скоростью (другими словами, свободно падающих частиц) называются *геодезическими.* В пространстве Минковского они являются прямыми линиями.

Геодезическая в пространстве Минковского, соединяющая два данных события x и y, является самой длинной кривой из всех мировых линий, соединяющих два эти события. Это следует из **обратного неравенства треугольника** (или *неравенства времени Эйнштейна*)

$$\| x + y \| \ge \| x \| + \| y \|,$$

в соответствии с которым временноподобная кривая, соединяющая два события, всегда короче соединяющей их временноподобной геодезической, т.е. собственное время частицы, свободно двигающейся от x к y, превышает собственное время любой другой частицы, чья мировая линия соединяет эти события. Данный факт обычно называют *парадоксом близнецов.*

Пространство-время – четырёхмерное многообразие, которое является обычной математической моделью для общей теории относительности Эйнштейна. Здесь три пространственные компоненты и одна временноподобная компонента образуют четырехмерное пространство-время при наличии гравитации. Гравитация является эквивалентом геометрических свойств пространства-времени, и при наличии гравитации геометрия пространства-времени искривлена. Следовательно, пространство-время является четырехмерным искривленным многообразием, для которого касательное пространство в любой точке есть пространство Минковского, т.е. *псевдоримановым многообразием* с сигнатурой (1, 3).

В общей теории относительности гравитация описывается свойствами локальной геометрии пространства-времени. В частности, гравитационное поле может быть построено с помощью **метрического тензора**, который количественно описывает геометрические свойства пространства-времени, такие как расстояние, площадь и угол. Материя описывается с помощью ее *тензора энергии напряжения* – величины, характеризующей плотность и давление материи. Сила взаимодействия между материей и гравитацией определяется *постоянной силы тяжести.*

Уравнением поля Эйнштейна называется уравнение общей теории относительности, которое описывает, как материя создает силу тяготения и наоборот, как сила тяготения воздействует на материю. Решением уравнения поля Эйнштейна является некая **метрика Эйнштейна**, соответствующая данной массе и распределенного давления материи.

Черная дыра – массивный астрофизический объект, который (теоретически) возникает при коллапсе нейтронной звезды. Силы тяготения черной дыры настолько велики, что преодолевают даже давление нейтронов, и объект стягивается в точку (называемую *сингулярностью*). Даже свет не может преодолеть силу притяжения черной дыры в пределах так называемого *радиуса Шварцчайльда* (или *гравитационного радиуса*) черной дыры. Незаряженные черные дыры с нулевым угловым моментом называются *черными дырами Шварцчайльда.* Незаряженные черные дыры с ненулевым угловым моментом называются *черными дырами Керра.* Невращающиеся заряженные черные дыры называются *черными дырами Рейсснера–Нордстрома.* Заряженные вращающиеся черные дыры называются *черными дырами Керра–Ньюмана.* Соответствующие метрики описывают, как пространство-время искривляется материей в присутствии этих черных дыр.

Дополнительную информацию можно найти, например, в [Wein72].

Метрика Минковского

Метрика Минковского – псевдориманова метрика, определяемая на *пространстве Минковского* $\mathbb{R}^{1,3}$, т.е. на четырехмерном действительном векторном пространстве, которое рассматривается как псевдоевклидово пространство с сигнатурой (1, 3). Она определяется **метрическим тензором**

$$((g_{ij})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Линейный элемент ds^2 и *элемент* ds *пространственно-временного интервала* данной метрики задаются как

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

В *сферических координатах* $(ct,\ r,\ \theta,\ \phi)$ мы получаем $ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2$.

Псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{1,3}$ с сигнатурой (3,1) и *линейным элементом*

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

может также использоваться как пространственно-временная модель специальной теории относительности Эйнштейна. Обычно *сигнатура* (1, 3) используется в физике элементарных частиц, а *сигнатура* (3, 1) – в теории относительности.

Метрика Лоренца

Метрикой Лоренца (или **лоренцевой метрикой**) называется **псевдориманова метрика** с сигнатурой $(1, p)$.

Лоренцево многообразие – многообразие, снабженное метрикой Лоренца. Искривленное пространство-время общей теории относительности может быть смоделировано как лоренцево многообразие M с сигнатурой (1, 3). *Пространство Минковского* $\mathbb{R}^{1,3}$ с плоской **метрикой Минковского** является моделью плоского лоренцева многообразия.

В *лоренцевой геометрии* обычно используется следующее понятие расстояния. Для спрямляемой не пространственноподобной кривой γ: $[0, 1] \to M$ в пространстве-времени M *длина* кривой γ определяется как $l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{-\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle} dt$. Для пространственноподобной кривой $l(\gamma) = 0$. Тогда расстояние Лоренца между двумя точками $p, q \in M$ определяется как

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} l(\gamma),$$

если $p \prec q$, т.е., если множество Γ *направленных в будущее* не пространственноподобных кривых от p до q является непустым. В остальных случаях расстояние Лоренца равняется 0.

Расстояние аффинного пространства-времени

Для пространства-времени (M^4, g) существует единственная аффинная параметризация $s \to \gamma(s)$ для каждого светового луча (т.е. изотропной геодезической), проходящего через событие наблюдения p_{obser}, такое что $\gamma(0) = p_{\text{obser}}$ и $g\left(\frac{d\gamma}{dt}, U_{\text{obser}}\right) = 1$, где U_{obser} – 4-скорость наблюдателя в p_{obser} (т.е. вектор с $g(U_{\text{obser}}, U_{\text{obser}}) = -1$).

В таком случае **расстоянием аффинного пространства-времени** называется *аффинный параметр* s, рассматриваемый в качестве меры расстояния.

Расстояние аффинного пространства-времени является монотонным, увеличивающимся вдоль каждого луча; оно совпадает в бесконечно малой окрестности p_{obser} с евклидовым расстоянием в покоящейся системе координат U_{obser}.

Кинематическая метрика

Для заданного множества X **кинематической метрикой** (или **временноподобной метрикой**) является такая функция τ: $X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, что для всех $x, y, z \in X$ имеют место условия:

1) $\tau(x, x) = 0$;

2) если $\tau(x, y) > 0$ то $\tau(y, x)$ (*антисимметрия*);

3) если $\tau(x, y)$, $\tau(y, z) > 0$ то $\tau(x, z) > \tau(x, y) + \tau(y, z)$ (**обратное неравенство треугольника**).

Пространственно-временное множество X состоит из *событий* $x = (x_0, x_1)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$ обычно является *временем*, а $x_1 \in \mathbb{R}$ – *пространственным местоположением* события x. Неравенство $\tau(x, y) > 0$ означает *обусловленность,* т.е. x может влиять на y; обычно оно эквивалентно неравенству $y_0 > x_0$ и значение $\tau(x, y) > 0$ может считаться наибольшим (поскольку зависит от скорости) собственным (т.е. *субъективным*) временем движения от x до y.

Если силой тяготения можно пренебречь, то из неравенства $\tau(x, y) > 0$ следует, что $y_0 - x_0 \geq \| y_1 - x_1 \|_2$ и $\tau(x, y) = ((y_0 - x_0)p - \| y_1 - x_1 \|_2^p)^{1/p}$ (как введено Буземаном в 1967 г.) является действительным числом. Для $p \approx 2$ оно совместимо с наблюдениями специальной теории относительности.

Кинематическая метрика не является обычной в нашем понимании метрикой и никак не связана с **кинематическим расстоянием** в астрономии.

Расстояние Лоренца–Минковского

Расстоянием Лоренца–Минковского называется расстояние на $\mathbb{R}^n$ (или C^n), определенное как

$$\sqrt{| x_1 - y_1 |^2 - \sum_{i-2}^{n} | x_i - y_i |^2}.$$

Галилеево расстояние

Галилеево расстояние – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$| x_1 - y_1 |,$$

если $x_1 \neq y_1$, и как

$$\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

если $x_1 = y_1$. Пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное галилеевым расстоянием, называется *галилеевым пространством.* Для $n = 4$ оно является математической моделью для пространства-времени классической механики по Галилею–Ньютону, в котором расстояние между двумя событиями, происходящими в точках p и q в моменты времени t_1 и t_2, определяется как временной интервал $|t_1 - t_2|$, тогда как в случае одновременности этих событий оно определяется как расстояние между точками p и q

Метрика Эйнштейна

В общей теории относительности, которая описывает, как материя искривляет пространство-временя, **метрика Эйнштейна** есть решение *уравнения поля Эйнштейна*

$$R_{ij} - \frac{g_{ij} R}{2} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij},$$

т.е. **метрический тензор** $((g_{ij}))$ с сигнатурой (1, 3), соответствующий данной массе и распределению давления вещества. Здесь $E_{ij} = R_{ij} - \frac{g_{ij} R}{2} + \Lambda g_{ij}$ – *тензор кривизны Эйнштейна*, R_{ij} – *тензор кривизны Риччи,* R – скаляр величиной Риччи, Λ – *космологическая постоянная*, G – *гравитационная постоянная* и T_{ij} – *тензор энергии напряжения. Пустое пространство* (*вакуум*) соответствует случаю нулевого тензора Риччи: $R_{ij} = 0$.

Статическая метрика Эйнштейна для однородной и изотропной вселенной задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{(1-kr^2)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где k – кривизна пространства-времени и коэффициент масштабирования равен 1.

Метрика де Ситтера

Метрикой де Ситтера называется максимально симметричное вакуумное решение *уравнения поля Эйнштейна* с положительной космологической постоянной Λ, определенное *линейным элементом*

$$ds^2 = dt^2 + e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2).$$

Без космологической постоянной (т.е. при $\Lambda = 0$) наиболее симметричным решением уравнения поля Эйнштейна в вакууме является плоская **метрика Минковского**.

Метрика анти-де Ситтера соответствует отрицательному значению Λ.

Метрика Шварцчайльда

Метрика Шварцчайльда – решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) вокруг сферически симметричного распределения массы; данная метрика дает описание вселенной вокруг черной дыры с данной массой, из которой невозможно извлечение энергии. Эта метрика была получена К. Шварцчайльдом в 1916 г., всего через несколько месяцев после опубликования уравнения поля Эйнштейна, и стала первым точным решением данного уравнения.

Линейный элемент этой метрики задается как

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где $r_g = \frac{2Gm}{c^2}$ – *радиус Шварцчайльда*, m – масса черной дыры и G – *гравитационная постоянная.*

Данное решение действительно только для радиусов, которые больше r_g, поскольку при $r = r_g$ мы получаем координатную сингулярность. Данной проблемы можно избежать посредством приведения к другим пространственно-временным координатам, которые называются координатами *Крускала–Чекереса.* При $r \to +\infty$ метрика Шварцшильда стремится к **метрике Минковского.**

Метрика Крускала–Чекереса

Метрика Крускала–Чекереса есть решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) вокруг статического сферически симметричного распределения массы, заданное *линейным элементом*

$$ds^2 = 4\frac{r_g}{r}\left(\frac{r_g}{R}\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{r}{r_g}}(c^2dt'^2 - dr'^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где $r_g = \frac{2Gm}{c^2}$ – *радиус Шварцчайльда*, m – масса черной дыры, G – гравитационная постоянная, R – постоянная, и *координаты Крускала–Чекереса* (t', r', θ, ϕ) получены из *сферических координат* (*ct, r,* θ, ϕ) с помощью *преобразования Крускала–Чекереса* $r'^2 - ct'^2 = R2\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)e^{\frac{r}{r_g}}$, $\frac{ct'}{r'} = \mathrm{tgh}\left(\frac{ct}{2r_g}\right)$.

Именно, метрика Крускала–Чекереса является **метрикой Шварцчайльда,** записанной в координатах Крускала–Чекереса. Она показывает, что сингулярность пространства-времени в метрике Шварцчайльда у радиуса Шварцчайльда r_g не является реальной физической сингулярностью.

Метрика Коттлера

Метрикой Коттлера называется единственное решение *уравнения поля Эйнштейна* для сферического симметричного вакуума с космологической постоянной Λ. Эта метрика задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Она называется также **метрикой Шварцайльда-де Ситтера** для $\Lambda > 0$ и **метрикой Шварцшильда–анти-де Ситтера** для $\Lambda < 0$.

Метрика Райсснера–Нордстрома

Метрика Райсснера-Нордстома – решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) вокруг сферически симметричного распределения массы в присутствии заряда; данная метрика дает нам представление вселенной вокруг черной дыры с зарядом.

Линейный элемент данной метрики задается как

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где m – масса дыры, e – заряд ($e < m$); здесь использованы единицы измерения, в которых скорость света c и гравитационная постоянная G равны единице.

Метрика Керра

Метрика Керра (или **метрика Керра–Шайльда**) есть точное решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) вокруг осесимметричного вращающегося распределения массы; эта метрика дает нам представление вселенной вокруг вращающейся черной дыры.

Линейный элемент этой метрики задается (в *форме Бойера–Линдквиста*) как

$$ds^2 = \rho^2\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right) + (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\phi^2 - dt^2 + \frac{2mr}{\rho^2}(a\sin^2\theta d\phi - dt)^2,$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ и $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$. Здесь m – масса черной дыры, и a – угловая скорость, измеренная с позиции удаленного наблюдателя.

Обобщение метрики Керра для заряженной черной дыры известно как **метрика Керра–Ньюмана.** Когда $a = 0$, метрика Керра становится **метрикой Шварцчайльда.**

Метрика Керра–Ньюмана

Метрика Керра–Ньюмана есть точное, единственное и полное решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) вокруг осесимметричного вращающегося распределения массы в присутствии заряда; данная метрика дает представление вселенной вокруг вращающейся зараженной черной дыры.

Линейный элемент внешней метрики задается как

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2+a^2)d\phi - adt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ и $\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + e^2$. Здесь m – масса черной дыры, e – ее заряд и a – угловая скорость. Когда $e = 0$, метрика Керра–Ньюмана становится **метрикой Керра.**

Статичная изотропная метрика

Статичная изотропная метрика – наиболее общее решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума); эта метрика дает представление статичного изотропного гравитационного поля. *Линейный элемент* данной метрики задается как

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где $B(r)$ и $A(r)$ – произвольные функции.

Метрика Эддингтона–Робертсона

Метрика Эддингтона–Робертсона – обобщение **метрики Шварцчайльда** в предположении, что масса m, *гравитационная постоянная* G и плотность ρ изменяются под воздействием неизвестных безразмерных параметров α, β и γ (которые равны 1 в *уравнении поля Эйнштейна*).

Линейный элемент этой метрики задается как

$$ds^2 = \left(1 - 2\alpha\frac{mG}{r} + 2(\beta - \alpha\gamma)\left(\frac{mG}{r}\right)^2 + \ldots\right)dt^2 - \left(1 + 2\gamma\frac{mG}{r} + \ldots\right)dr^2 -$$

$$-r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Метрика Джаниса–Ньюмана–Винкура

Метрика Джаниса–Ньюмана–Винкура есть наиболее общее сферически симметричное статичное и асимптотически плоское решение *уравнения поля Эйнштейна*, сопряженное с безмассовым скалярным полем. *Линейный элемент* данной метрики задается как

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{\gamma r}\right)^{\gamma} dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{\gamma r}\right)^{-\gamma} dr^2 + \left(1 - \frac{2m}{\gamma r}\right)^{1-\gamma} r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где m и γ – постоянные. Для $\gamma = 1$ получаем **метрику Шварцчайльда.** В этом случае скалярное поле является нулевым.

Метрика Робертсона–Уолкера

Метрика Робертсона–Уолкера (или **метрика Фридмана–Леметра–Робертсона-Уолкера**) есть решение *уравнения поля Эйнштейна* для изотропной и однородной вселенной с постоянной плотностью и пренебрежимо малым давлением; данная описывает преимущественно материальную вселенную, заполненную пылью без давления. *Линейный элемент* этой метрики обычно записывается в *сферических координатах* (ct, r, θ, ϕ):

$$ds^2 = c^2dt^2 - a(t)^2 \cdot \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right),$$

где $a(t)$ – *коэффициент масштабирования* и k – кривизна пространства-времени.

Для *линейного элемента* существует и другая форма:

$$ds^2 = c^2dt^2 - a(t)^2 \cdot (dr'^2 + \tilde{r}^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)),$$

где r' обозначает **расстояние совместного движения** с позиции наблюдателя и $\tilde{r}$ – **расстояние собственного движения,** т.е. $\tilde{r} = R_C \sinh(r'/R_C)$ или r', или $R_C\sinh(r'/R_C)$ для отрицательной, нулевой или положительной кривизны соответственно, где $R_C = 1/\sqrt{|k|}$ есть абсолютное значение *радиуса кривизны.*

Метрики Бианки

Метрики Бианки – *решения уравнения поля Эйнштейна* для космологических моделей, которые имеют пространственно однородные участки, инвариантные относительно воздействия трехмерных групп Ли, т.е. действительные четырехмерные метрики с трехмерной группой изометрий, транзитивной на 3-поверхностях. Применяя классификацию Бианки трехмерных алгебр Ли над векторными полями Киллинга, мы получаем девять типов метрик Бианки.

Каждая модель Бианки B определяет транзитивную группу G_B на некотором трехмерном односвязном многообразии M; таким образом, пара (где G – максимальная группа, воздействующая на X и содержащая C_B) есть одна из восьми *модельных геометрий* Терстона, если M/G' является компактным для дискретной подгруппы G' группы G. В частности, тип IX Бианки соответствует модельной геометрии S^3.

Метрика Бианки типа I есть решение *уравнения поля Эйнштейна* для анизотропной однородной вселенной, заданное *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2 + b(t)^2 dy^2 + c(t)^2 dz^2,$$

где функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ определены уравнением Эйнштейна.

Эта метрика соответствует плоским пространственным участкам, т.е. является обобщением **метрики Робертсона–Уолкера.**

Метрика Бианки типа IX (или **метрика Миксмастера**) характеризуется сложной динамикой поведения вблизи сингулярностей ее кривизны.

Метрика Каснера

Метрика Каснера – одна из метрик Бианки типа I, которая является вакуумным решением *уравнения поля Эйнштейна* для анизотропной однородной вселенной, определенным *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1} dx^2 + t^{2p_2} dy^2 + t^{2p_3} dz^2,$$

где $p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$

Метрику Каснера можно записать иначе как

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2/3}\left(t^{1/3\cos(\phi+\pi/3)}dx^2 + t^{1/3\cos(\phi-\pi/3)}dy^2 + t^{-1/3\cos\phi}dz^2\right).$$

В этом случае она называется *кругом Каснера.*

Одна из метрик Каснера, часто называемая *каснер-подобной метрикой*, задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2q}(dx^2 + dy^2) + t^{2-4q}dz^2.$$

Асимметричная метрика Каснера задается линейным элементом

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{\sqrt{t}} + \frac{dx^2}{\sqrt{t}} + tdy^2 + tdz^2.$$

Метрика Кантовского–Сахса

Метрика Кантовского–Сахса – одно из решений *уравнения поля Эйнштейна,* задаваемое *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dz^2 + b(t)^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2),$$

где функции $a(t)$ и $b(t)$ определяются уравнением Эйнштейна. Это единственная однородная модель без трехмерной транзитивной подгруппы.

В частности, метрика Кантовского–Сахса с *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\sqrt{\Lambda 1}} dz^2 + \frac{1}{\Lambda}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

описывает вселенную с двумя сферическими измерениями, сохраняющими свои размеры в ходе космической эволюции, и третьим измерением, расширяющимся экспоненциально.

Метрика GCSS

Метрика GCSS (общая цилиндрически симметричная стационарная метрика) – решение *уравнения поля Эйнштейна,* задаваемое *линейным элементом*

$$ds^2 = -fdt^2 + 2kdtd\phi + e^{\mu}(dr^2 + dz^2) + ld\phi^2,$$

где пространство-время разделено на две области: внутреннюю (с $0 \le r \le R$) к цилиндрической поверхности с радиусом R, центрированной вдоль оси z, и внешнюю (с $R \le r < \infty$). Здесь f, k, μ и l являются функциями только от r, $-\infty < t$, $z < \infty$, $0 \le \phi \le 2\pi$, гиперповерхности $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi$ отождествлены.

Метрика Льюиса

Метрика Льюиса – стационарная цилиндрически симметричная метрика, которая является решением *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) во внешней области цилиндрической поверхности. *Линейный элемент* данной метрики имеет форму

$$ds^2 = -fdt^2 + 2kdtd\phi - e^{\mu}(dr^2 + dz^2) + ld\phi^2,$$

где $f = ar^{-n+1} - \frac{c^2}{n^2 a}r^{n+1}$, $k = -Af$, $l = \frac{r^2}{f} - A^2 f$, $e^{\mu} = f^{1/2(n2-1)}$ с $A = \frac{cr^{n+1}}{naf} + b.$

Постоянные и с могут быть либо действительными, либо комплексными, и соответствующие решения принадлежат *классу Вейла* или *классу Льюиса*. В последнем случае метрические коэффициенты имеют вид $f = r(a_1^2 - b_1^2)\cos(m\ln r) + 2ra_1b_1\sin(m\ln r)$, $k = -r(a_1a_2 - b_1b_2)\cos(m\ln r) - r(a_1b_2 - a_2b_1)\sin(m\ln r)$, $l = -r(a_2^2 - b_2^2)\cos(m\ln r) - 2ra_2b_2\sin(m\ln r)$, $e^{\mu} = r^{-1/2(m2+1)}$, где m, a_1, a_2, b_1 и b_2 – действительные постоянные с $a_1b_2 - a_2b_1 = 1$. Такие метрики составляют подкласс класса *Каснера-подобных метрик.*

Метрика Ван Стокума

Метрика Ван Стокума – стационарное цилиндрически симметричное решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) с жестко вращающимся бесконечно длинным пылевым цилиндром. *Линейный элемент* этой метрики для внутренности цилиндра задается (в совместно движущихся, т.е. совместно вращающихся координатах) как

$$ds^2 = -dt^2 + 2ar^2dtd\phi + e^{-a^2r^2}(dr^2 + dz^2) + r^2(1 - a^2r^2)d\phi^2,$$

где $0 \le r \le R$, R – радиус цилиндра и a – угловая скорость частиц пыли. Существует три варианта внешних решений для вакуума (т.е. **метрик Льюиса**), которые находятся в соответствии с внутренними решениями и зависят от массы пыли на единицу длины внутреннего пространства (*случай малой массы, нулевой случай* и *ультрарелятивистский случай*). При некоторых условиях (например, если $ar > 1$) допускается существование замкнутых временноподобных кривых (и, следовательно, путешествия во времени).

Метрика Леви-Чивита

Метрика Леви-Чивита является статичным цилиндрически симметричным решением для вакуума *уравнения поля Эйнштейна с линейным элементом*, заданным (в форме Вейля) как

$$ds^2 = -r^{4\sigma}dt^2 + r^{4\sigma(2\sigma-1)}(dr^2 + dz^2) + C^{-2}r^{2-4\sigma}d\phi,$$

где постоянная C относится к дефициту угла, а параметр σ интерпретируется в соответствии с ньютоновской аналогией решения Леви–Чивита: это гравитационное поле бесконечной однородной линейной массы (*бесконечный провод*) с линейной плотностью массы σ. В случае $\sigma = -\frac{1}{2}, C = 1$ данную метрику можно преобразовать либо в *плоскую симметричную метрику Тауба*, либо в *метрику Робинсона-Тротмана.*

Метрика Вейля-Папапетру

Метрикой Вейля-Папапетру называется стационарное осесимметричное решение *уравнения поля Эйнштейна,* выраженное *линейным элементом*

$$ds^2 = Fdt^2 - e^{\mu}(dz^2 + dr^2) - Ld\phi^2 - 2Kd\phi dt,$$

где F, K, L и μ являются функциями только r и z, $LF + K^2 = r^2$, $\infty < t, z < \infty, 0 \le r < \infty$ и $0 \le \phi \le 2\pi$, гиперповерхности $\phi = 0$ и $\phi - 2\pi$ отождествлены.

Пылевая метрика Боннора

Пылевая метрика Боннора является решением *уравнения поля Эйнштейна* и представляет собой осесимметричную метрику, которая описывает облако жестко вращающихся частиц пыли, движущихся по кольцевым геодезическим вокруг z-оси в гиперплоскостях z = const. *Линейный элемент* этой метрики задается как

$$ds^2 = dt^2 + (r^2 - n^2)d\phi^2 + 2ndtd\phi + e^{\mu}(dr^2 + dz^2),$$

где в совместно движущихся (т.е. совместно вращающихся) координатах Боннора $n = \frac{2hr^2}{R^3}$, $\mu = \frac{h^2r^2(r^2 - 8z^2)}{2R^8}$, $R^2 = r^2 + z^2$ и h – параметр вращения. По мере того как $R \to \infty$, метрические коэффициенты стремятся к значениям Минковского.

Метрика Вейля

Метрика Вейля является общим статичным осесимметричным вакуумным решением *уравнения поля Эйнштейна*, выраженным в канонических координатах Вейля *линейным элементом*

$$ds^2 = e^{2\lambda}\,dt^2 - e^{2\lambda}(e^{2\mu}(dr^2 + dz^2) + r^2d\phi^2),$$

где λ и μ являются функциями только r и z, такими что $\frac{\partial^2\lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial r} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial\mu}{\partial r} = r\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial r} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial z}\right)$ и $\frac{\partial\mu}{\partial r} = 2r\frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial\lambda}{\partial z}$.

Метрика Зипой-Вурхиза

Метрика Зипой-Вурхиза (или γ-**метрика**) – **метрика Вэйля,** полученная для $e^{2\lambda} = \left(\frac{R_1 + R_2 - 2m}{R_1 + R_2 + 2m}\right)^{\gamma}$, $e^{2\mu} = \left(\frac{(R_1 + R_2 + 2m)(R_1 + R_2 - 2m)}{4R_1R_2}\right)^{\gamma^2}$, где $R_1^2 = r^2 + (z - m)^2$, $R_2^2 = r^2 + (z + m)^2$. Здесь соответствует ньютонову потенциалу линейного отрезка плотности $\gamma/2$ и длины $2m$, симметрично распределенному вдоль z-оси. Случай $\gamma = 1$ соответствует метрике Шварцчайльда, случаи $\gamma > 1$ ($\gamma < 1$) соответствуют сжатому (растянутому) сфероиду, а для $\gamma = 0$ мы получим плоское пространство-время Минковского.

Метрика прямой вращающейся струны

Метрика прямой вращающейся струны задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -(dt - ad\phi)^2 + dz^2 + dr^2 + k^2r^2d\phi^2,$$

где a и $k > 0$ – постоянные. Она описывает пространство-время вокруг прямой вращающейся вокруг собственной оси струны. Постоянная k связана с массой струны на единицу длины μ как $k = 1 - 4\mu$, и постоянная a является мерой вращения струны вокруг собственной оси. Для $a = 0$ и $k = 1$ мы получаем **метрику Минковского** в цилиндрических координатах.

Метрика Томиматсу-Сато

Метрика Томиматсу-Сато [ToSa73] – одна из метрик бесконечного семейства решений *уравнения поля Эйнштейна* для вращающихся масс, каждая из которых имеет форму $\xi = U/W$, где U и W и являются многочленами. В простейшем решении $U = p^2(x^4 - 1) + q^2(y^4 - 1) - 2ipqxy(x^2 - y^2)$, $W = 2px(x^2 - 1) - 2iqy(1 - y^2)$, где $p^2 +$

$+q^2=1$. *Линейный элемент* для данного решения задается как

$$ds^2=\Sigma^{-1}((\alpha dt+\beta d\phi)^2-r^2(\gamma dt+\delta d\phi)^2)-\frac{\Sigma}{p^4(x^2-y^2)^4}(dz^2+dr^2),$$

где $\alpha=p^2(x^2-1)^2+q^2(1-y^2)^2$, $\beta=-\frac{2q}{p}W(p^2(x^2-1)(x^2-y^2)+2(px+1)W)$, $\gamma=$ $=-2pq(x^2-y^2)$, $\delta=\alpha+4((x^2-1)+(x^2+1)(px+1))$, $\Sigma=\alpha\delta-\beta\gamma=|U+W|^2$.

Метрика Гёделя

Метрика Гёделя – точное решение *уравнения поля Эйнштейна* с космологической постоянной для вращающейся вселенной, выраженное *линейным элементом*

$$ds^2=-(dt^2+C(r)d\phi)^2+D^2(r)d\phi^2+dr^2+dz^2,$$

где (t,r,ϕ,z) – обычные цилиндрические координаты. Вселенная по Гёделю является однородной, если $C(r)=\frac{4\Omega}{m^2}\sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right), D(r)=\frac{1}{m}\sinh(mr)$, где m и Ω – постоянные. Вселенная Гёделя предполагает возможность *замкнутых временноподобных кривых* и соответственно путешествий во времени. Необходимым условием отсутствия таких кривых является условие $m^2>4\Omega^2$.

Конформно стационарная метрика

Конформно стационарными метриками называются модели гравитационных полей, которые независимы от времени с точностью до общего конформного множителя. Если выполняются некоторые глобальные условия регулярности, то пространство-время должно быть произведением $\mathbb{R}\times M^3$ с (хаусдорфовым и пара-компактным) трехмерным многообразием M^3, а *линейный элемент* метрики задается как

$$ds^2=e^{2f(t,x)}(-(dt+\sum_{\mu}\phi_\mu(x)dx_\mu)^2+\sum_{\mu,\nu}g_{\mu\nu}(x)dx_\mu dx_\nu),$$

где μ, $\nu=1, 2, 3$. Конформный фактор e^{2f} не воздействует на изотропные геодезические, за исключением их параметризации, т.е. пути лучей света полностью определяются римановой метрикой $g=\sum_{\mu,\nu}g_{\mu\nu}(x)dx_\mu dx_\nu$ и 1-формой $\phi=\sum_\mu\phi_\mu(x)dx_\mu$ на M^3.

В этом случае функция f называется *потенциалом красного смещения,* метрика g – **метрикой Ферма** и 1-форма ϕ – 1-*формой Ферма.*

Для статического пространства-времени геодезические метрики Ферма являются проекциями нулевых геодезических пространства-времени.

В частности, **сферически симметричные и статичные метрики,** включая модели не вращающихся звезд и черных дыр, пространственных воронок, монополей однополюсных зон, голых сингулярностей и (бозонных или фермионных) звезд, задаются *линейным элементом*

$$ds^2=e^{2f(r)}(-dt^2+S(r)^2dr^2+R(r)^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)).$$

Здесь 1-форма ϕ обращается в нуль, и метрика Ферма g приобретает особый вид

$$g = S(r)^2 dr^2 + R(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Так, например, конформный фактор $e^{2f(r)}$ метрики Шварцчайльда равен $1 - \frac{2m}{r}$, а соответствующая метрика Ферма приобретает вид

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} r^2 (d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2).$$

Метрика pp-волны

Метрика pp-волны является точным решением *уравнения поля Эйнштейна*, в котором радиация распространяется со скоростью света. *Линейный элемент* этой метрики задается (в координатах Бринкмана) как

$$ds^2 = H(u, x, y)du^2 + 2dudv + dx^2 + dy^2,$$

где H – любая гладкая функция.

Наиболее важным классом особо симметричных pp-волн являются **метрики плоских волн,** у которых H квадратично.

Метрика луча Боннора

Метрика луча Боннора является точным решением *уравнения поля Эйнштейна,* моделирующим бесконечно длинный прямой луч света. Это пример **метрики pp-волны.**

Внутренняя часть решения (во внутренней области равномерно плоской волны, имеющей форму твердого цилиндра) определяется *линейным элементом*

$$ds^2 = -8\pi m r^2 du^2 - 2dudv + dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

где $-\infty < u, \nu < \infty$, $0 < r < r_0$ и $-\pi < \theta < \pi$. Это решение может рассматриваться как некогерентное электромагнитное излучение.

Внешняя часть решения определяется как

$$ds^2 = -8\pi m r_0^2 (1 + 2\log(r / r_0))du^2 - 2dudv + dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

где $-\infty < u, \nu < \infty$, $r_0 < r < \infty$ и $-\pi < \theta < \pi$.

Луч Боннора можно обобщить, рассматривая несколько параллельных лучей, распространяющихся в одном направлении.

Метрика плоской волны

Метрика плоской волны является решением *уравнения поля Эйнштейна* в вакууме и задается *линейным элементом*

$$ds^2 = 2dwdu + 2f(u)(x^2 + y^2)du^2 - dx^2 - dy^2.$$

Она является конформно плоской и описывает в поле чистой радиации. Пространство-время применительно к этой метрике называется *плоской гравитационной волной.* Данная метрика является примером **метрики pp-волны.**

Метрика Вилса

Метрика Вилса – решение *уравнения поля Эйнштейна,* выраженное *линейным элементом*

$$ds^2 = 2xdwdu - 2wdudx + (2f(u)x(x^2+y^2) - w^2)du^2 - dx^2 - dy^2.$$

Она является конформно плоской и описывает поле чистой радиации, которое не является *плоской волной.*

Метрика Кутраса-Макинтоша

Метрика Кутраса-Макинтоша является решением *уравнения поля Эйнштейна*, выраженным *линейным элементом*

$$ds^2 = 2(ax+b)dwdu - 2awdudx + (2f(u)(ax+b)(x^2+y^2) - a^2w^2)du^2 - dx^2 - dy^2.$$

Она является конформно плоской и описывает поле чистой радиации, которое в общем случае не является *плоской волной.* При $a = 0$ и $b = 0$ получим **метрику плоской волны,** а при $a = 0$ и $b = 0$ – **метрику Вилса.**

Метрика Эдгара-Людвига

Метрика Эдгара-Людвига является решением *уравнения поля Эйнштейна,* выраженным линейным элементом

$$ds^2 = 2(ax+b)dwdu - 2awdudx +$$
$$+(2f(u)(ax+b)(g(u)y + h(u) + x^2 + y^2) - a^2w^2)du^2 - dx^2 - dy^2.$$

Она является обобщением метрики **Кутраса-Макинтоша.** Это наиболее общая метрика, описывающая конформно плоское поле чистой радиации, которое в общем случае не является *плоской волной.* Если исключить плоские волны, то она будет иметь вид

$$ds^2 = 2xdwduu - 2wdudx + (2f(u)x(g(u)y + h(u) + x^2 + y^2) - w^2)du^2 - dx^2 - dy^2.$$

Метрика излучения Бонди

Метрика излучения Бонди описывает асимптотическую форму радиационного решения *уравнения поля Эйнштейна,* которая задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -\left(\frac{V}{r}\mathrm{e}^{2\beta} - U^2r^2\,\mathrm{e}^{2\gamma}\right)du^2 -$$
$$-2\,\mathrm{e}^{2\beta}\,dudr - 2Ur^2\,\mathrm{e}^{2\gamma}\,dud\theta + r^2(\mathrm{e}^{2\gamma}\,d\theta^2 + \mathrm{e}^{2\gamma}\sin^2\theta d\theta^2),$$

где u – время запаздывания, r – **фотометрическое расстояние,** $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$ и U, V, β, γ являются функциями u, r и θ. Эта метрика используется в теории гравитационных волн.

Метрика Тауба–НУТ–де Ситтера

Метрика Тауба–НУТ–деСиттера является положительно определенным (т.е. римановым) решением *уравнения поля Эйнштейна* с космологической постоянной Λ, заданным *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{r^2 - L^2}{4\Delta}dr^2 + \frac{L^2\Delta}{r^2 - L^2}\left(d\psi + \cos\theta d\phi\right)^2 + \frac{r^2 - L^2}{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где $\Delta = r^2 2Mr + L^2 + \frac{\Lambda}{4}\left(L^4 + 2L^2r^2 - \frac{1}{3}r^4\right)$, L и M – параметры, и θ, ϕ, ψ – *углы Эйлера.* Если $\Lambda = 0$, то мы получим метрику **Тауба-НУТ,** используя некоторые условия регулярности.

Метрика Эгучи–Хансона–де Ситтера

Метрика Эгучи–Хансона–де Ситтера является положительно определенным (т.е. римановым) решением *уравнения поля Эйнштейна* с космологической постоянной Λ, заданным *линейным элементом*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a^4}{r^4} - \frac{\Lambda r^2}{6}\right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{4}\left(1 - \frac{a^4}{r^4} - \frac{\Lambda r^2}{6}\right)(d\psi + \cos\theta d\phi)^2 +$$

$$+\frac{r^2}{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где a – параметр, а θ, ϕ, ψ – *углы Эйлера.* Если $\Lambda = 0$, то получаем **метрику Эгучи–Хансона.**

Метрика монополей Барриолы–Виленкина

Метрика монополей Барриолы-Виленкина задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + k^2r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

с постоянной $k > 1$. При $r = 0$ возникают дефицит телесного угла и сингулярность; плоскость $t = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ имеет геометрию конуса. Данная метрика является примером конической сингулярности; она может быть использована в качестве модели для *монополей* (однополюсных зон), которые могут существовать во вселенной.

Магнитный монополь есть гипотетический изолированный магнитный полюс "магнит с одним полюсом". Теоретически предполагается, что такое явление может вызываться мельчайшими частицами, подобными электронам или протонам, которые появляются в результате топологических дефектов точно так же, как и космические струны, однако подобных частиц пока в природе не найдено.

Метрика Бертотти–Робинсона

Метрика Бертотти–Робинсона является решением *уравнения поля Эйнштейна* для вселенной с равномерным магнитным полем. *Линейный элемент* этой метрики задается как

$$ds^2 = Q^2(-dt^2 + \sin^2 t dw^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

где Q – постоянная, $t \in [0, \pi]$, $w \in (-\infty, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ и $\phi \in [0, 2\pi]$.

Метрика Морриса–Торна

Метрика Морриса–Торна – решение *уравнения поля Эйнштейна* для *пространственной воронки с линейным элементом*

$$ds^2 = e^{\frac{2\Phi(w)}{c^2}} c^2dt^2 - dw^2 - r(w)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где $w \in (-\infty, +\infty)$, r – функция от w, которая достигает минимального значения большего нуля при некоторой конечной величине w, и $\Phi(w)$ – гравитационный потенциал, обусловленный геометрией пространства-времени.

Пространственная воронка – гипотетическая "труба" в пространстве, соединяющая удаленные друг от друга точки вселенной. Для существования пространственных воронок требуется необычный материал с отрицательной энергетической плотностью, чтобы воронки все время были открыты.

Метрика Миснера

Метрика Миснера – метрика, представляющая две черные дыры. Миснер сформулировал в 1960 г. методику описания метрики, связывающей пару черных дыр в состоянии покоя, жерла которых соединены *пространственной воронкой. Линейный элемент* этой метрики записывается в виде

$$ds^2 = -dt^2 + \psi^4(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

где конформный фактор ψ задается как

$$\psi = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\sin h(\mu_0 n)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \coth(\mu_0 n))^2}}.$$

Параметр μ_0 является мерой отношения массы к расстоянию между жерлами (эквивалентно, мерой расстояния петли на поверхности, проходящей через одно жерло и выходящей из другого). Предел суммирования N стремится к бесконечности.

Топология *пространства-времени Миснера* аналогична паре асимптотически плоских листов, соединенных несколькими мостами Эйнштейна–Роузена. В простейшем случае пространство Миснера можно рассматривать как двумерное пространство с топологией $\mathbb{R} \times S^1$, в котором свет постепенно отклоняется по мере движения во времени и после определенной точки имеет *замкнутые временноподобные кривые.*

Метрика Алкубьерра

Метрика Алкубьерра – решение *уравнения поля Эйнштейна* представляющее *движение по принципу деформации пространства-времени,* допускающее существование *замкнутых временноподобных кривых.* В этом случае нарушается только релятивистский принцип, суть которого состоит в том, что движение в космосе может осуществляться с любой скоростью, сколь угодно близкой, но не равной и не превышающей скорость света. Построение Алкубьерра соответствует варп-движению в том смысле, что перед космическим кораблем происходит свертывание пространства-времени, а за кораблем – расширение, чем космическому кораблю сообщается скорость, которая может значительно превышать скорость света по отношению к удаленным объектам, в то время как на локальном уровне скорость корабля никогда не будет больше скорости света.

Линейный элемент этой метрики имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + (dx - vf(r)dt)^2 + dy^2 + dz^2,$$

где $v = \dfrac{dx_s(t)}{dt}$ кажущаяся скорость космического корабля с двигателем деформации пространства, $x_s(t)$ – траектория космического корабля вдоль координаты x (при этом радиальная координата определяется как $r = ((x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$), и $f(r)$ – произвольная функция, подчиненная граничным условиям: $f = 1$ при $r = 0$ (местоположение космического корабля) и $f = 0$ в бесконечности.

Вращающаяся *C*-метрика

Вращающаяся *C*-метрика является решением *уравнений Эйнштейна–Максвелла,* которое описывает две противоположно заряженные черные дыры, разбегающиеся с равномерным ускорением в разные стороны друг от друга. *Линейный элемент* этой метрики имеет вид

$$ds^2 = A^{-2}(x+y)^{-2}\left(\frac{dy^2}{F(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + k^{-2}G(X)d\phi^2 - k^2A^2F(y)dt^2\right),$$

где $F(y) = -1 + y^2 - 2mAy^3 + e^2A^2y^4, G(x) = 1 - x^2 - 2mAx^3 - e^2A^2x^4$, m, e и A – параметры, связанные с массой, зарядом и ускорением черных дыр, а k – постоянная, определенная условиями регулярности.

Эту метрику не следует путать с ***C*-метрикой** в гл. 11.

Метрика Майерса–Перри

Метрикой Майерса–Перри описывается пятимерная вращающаяся черная дыра. Ее *линейный элемент* задается как

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{2m}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta d\phi - b\cos^2\theta d\psi)^2 +$$

$$+\frac{\rho^2}{R^2}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\phi^2 + (r^2 + b^2)\cos^2\theta d\psi^2,$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ и $R^2 = \frac{(r^2 + a^2)(r^2 + b^2) - 2mr^2}{r^2}$.

Метрика Калузы–Клейна

Метрика Калузы–Клейна является метрикой в *модели Калузы-Клейна* пятимерного (в общем случае многомерного) пространства-времени, предназначенной объединить классическую гравитацию с электромагнетизмом.

Калуза высказал в 1919 г. идею о том, что если теорию Эйнштейна о чистой гравитации распространить на пятимерное пространство-время, то *уравнения поля Эйнштейна* можно разделить на обычное четырехмерное гравитационное тензорное поле и дополнительное векторное поле, которое эквивалентно уравнению Максвелла для электромагнитного поля плюс дополнительное скалярное поле (известное как "расширение"), эквивалентное безмассовому уравнению Клейна–Гордона.

Клейн предположил в 1926 г., что пятое измерение имеет круговую топологию, такую что пятая координата является периодичной и дополнительное измерение скручено до ненаблюдаемого размера. Альтернативным предположением является то, что дополнительное измерение (дополнительные измерения) является расширенным. Такой подход аналогичен четырехмерной модели – все измерения являются расширенными и первоначально одинаковыми, а сигнатура имеет форму $(p, 1)$.

В модели расширенного дополнительного измерения 5-мерную метрику вселенной можно записать в нормальных гауссовых координатах в виде

$$ds^2 = -(dx_5)^2 + \lambda^2(x_5)\sum_{\alpha,\beta}\eta_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta,$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ является четырехмерным **метрическим тензором** и $\eta^2(x_5)$ – произвольная функция пятой координаты.

Метрика Понсе де Леона

Метрика Понсе де Леона – 5-мерная метрика, заданная *линейным элементом*

$$ds^2 = l^2dt^2 - (t/t_0)^2\, pl^{\frac{2p}{p-1}}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{t^2}{(p-1)^2}dl^2,$$

где l – пятая (пространственноподобная) координата. Эта метрика описывает пятимерный вакуум, но не является плоской.

Часть VII

РАССТОЯНИЯ В РЕАЛЬНОМ МИРЕ

Глава 27

Меры длины и шкалы

В данной главе приводится избранная информация по наиболее важным единицам длины и представлен на языке длин перечень ряда интересных объектов.

27.1. МЕРЫ ДЛИНЫ

Основными системами измерения длины являются: метрическая, "имперская" (английская и американская), японская, тайская, китайская имперская, старорусская, древнеримская, древнегреческая, библейская, астрономическая, морская и полиграфическая.

Существует много других специализированных шкал длины; например, для измерения одежды, размеров обуви, калибров (внутренних диаметров стволов огнестрельного оружия, проводов, ювелирных колец), размеров абразивных кругов, толщины металлических листов и т.п. Многие единицы измерений служат для выражения относительных или обратных расстояний.

Международная метрическая система

Международная метрическая система (или сокращенно система СИ) является современным вариантом метрической системы единиц, установленных международным соглашением (Метрическая конвенция, подписанная 20 мая 1875 г.), которым была определена логическая и взаимосвязанная основа для всех измерений в науке, промышленности и коммерции. В основе системы заложены семь основных единиц, которые считаются взаимозависимыми.

1. Длина: **метр** (м) – равна расстоянию, проходимому светом в вакууме за 1/299792458 долей секунды.
2. Время: *секунда* (с).
3. Масса: *килограмм* (кг).
4. Температура: *Кельвин* (K).
5. Сила тока: *ампер* (А).
6. Сила света: *кандела* (кд).
7. Количество вещества: *моль* (моль).

Первоначально, 26 марта 1791 г., *,metre* метр по-французски был определен как 1/10 000 000 часть расстояния от Северного полюса Земли до экватора по парижскому меридиану. В 1799 г. стандартным *метром* стал платиново-иридиевый стержень метровой длины ("архивный метр"), хранившийся во французском городе Севре (пригород Парижа) и служивший для любого желающего эталоном для сравнения с собственным измерительным инструментом. (Введенная в 1793 г. метрическая система была настолько непопулярна, что Наполеону пришлось отказаться от нее, и Франция вновь вернулась к метру только в 1837 г.). В 1960 г. эталонный метр был официально привязан к длине волны.

Метризация

Метризация – процесс перехода к *Международной метрической системе* (СН). Он еще не завершен (особенно в США и Великобритании). Официально пока еще только США, Либерия и Мьянмар не перешли на систему СИ. Так, например, в США на дорожных знаках для обозначения расстояний используются только мили. Высоты в авиации даются, как правило, в футах; на флоте используются морские мили и узлы. Разрешающая способность устройств вывода данных зачастую указывается в количестве точек на дюйм (*dpi*).

Твердая метрика означает применение метрической системы с самого начала и соответствие, насколько это приемлемо, международным размерам и стандартам.

Мягкая метрика означает умножение на коэффициент преобразования количества дюймов – фунтов и округление результата до приемлемой степени точности; таким образом, при мягкой метризации размеры предметов не изменяются. *Американская метрическая система* предполагает преобразование традиционных единиц в десятичную систему, используемую в метрической системе. Такими гибридными единицами имперской системы и системы СИ, применяемыми в мягкой метризации, являются, например, *килоярд* (914,4 м), *килофут* (304,8 м), миль или *милли дюйм* (24,5 микрон) и *микродюйм* (25,4 нанометров).

Родственные метру термины

В дополнение к системным единицам длины ниже представлено большое семейство нематематических терминов для обозначения длины.

Метр в поэзии (или *каденция*): ритмическая форма, служащая мерой ритмики, лингвистической размеренности звукового образа стихотворения. *Гиперметр* – это часть стиха, содержащая лишний слог.

Метр в музыке (или *ритм*): размеренность ритмического рисунка музыкальной строки, деление композиции на равные по времени части и дальнейшее их разбиение. *Изометрия* – использование *импульсов* (непрерывной последовательности периодических кратковременных воздействий) без какой-либо упорядоченности, а *полиметрия* – использование двух метров одновременно.

Метрометр в медицине – инструмент для измерения размера матки. В наименованиях различных измерительных инструментов в конце слова присутствует термин *метр*.

Метрическая рейка – эмпирическое правило для приближенных подсчетов на основе повседневной практики, например, сторона спичечного коробка равна 5 см, а 1 км – примерно 10 минут ходьбы.

Отмеривание – термин, эквивалентный измерению; *микрометрия* – измерение под микроскопом.

Метрология – научная дисциплина, исследующая понятие измерения.

Метрономия – инструментальное измерение времени.

Метрософия – космология, основанная на строго числовых соответствиях.

Аллометрия – наука об изменении пропорций различных частей организма в процессе роста.

Археометрия – наука о точном датировании археологических находок, относящихся к далекому прошлому и т.п.

Изометропия – одинаковость рефракции в обоих глазах.

Изометрическое упражнение – упражнение с физической нагрузкой на мышцы, когда сила прикладывается к статичному объекту.

Изометрическая частица – вирус, который (в состоянии капсида вириона) обладает икосаэдральной симметрией.

Изометрический процесс – термодинамический процесс при постоянном объеме.

Изометрическая проекция – представление трехмерных объектов в двух измерениях, в котором углы между тремя осями проекции одинаковы или равны $\frac{2\pi}{3}$.

Изометрическая система кристаллов – кубическая кристаллографическая система.

Метрическая асимметрия кристаллической решетки – симметрия без учета расположения атомов в базисной клетке.

Метрические меры длины

Километр (км) = 1000 метров = 10^3 м.
Метр (м) = 10 дециметров = 10^0 м.
Дециметр (дм) = 10 сантиметров = 10^{-1} м.
Сантиметр (см) = 10 миллиметров = 10^{-2} м.
Миллиметр (мм) = 1000 микрометров = 10^{-3} м.
Микрометр (или микрон, μ) = 1000 нанометров = 10^{-6} м.
Нанометр (нм) = 10 Å = 10^{-9} м.

Длины 10^{3t} м, $t = -8, -7, ..., -1, 1, ..., 7, 8$ указываются с приставками: йокто, цепто, атто, фемто, пико, нано, микро, милли, кило, мега, гига, тера, пета, экса, цетта, йотта соответственно.

Имперские меры длины

Имперскими мерами длины (слегка упорядоченными международным соглашением от 1 июля 1959 г.) являются следующие:

– *лига* = 3 мили;
– (*американская геодезическая) миля* = 5280 футов ≈ 1609,347 м;
– *международная миля* = 1609,344 м;
– *ярд* = 3 фута = 0,9144 м;
– *фут* = 12 дюймов = 0,3048 м;
– *дюйм* = 2,54 см (для огнестрельного оружия, *калибр*);
– *линия* = 1/12 дюйма;
– *агат* = 1/14 дюйма;
– *мики* = 1/200 дюйма;
– *мил* (британская *тысячная*) =1/1000 дюйма (*мил* является также угловой мерой $\pi/3200 \approx 0{,}01$ радиана).

Существуют также старинные меры: *ячменное зерно* – 1/3 дюйма; *палец* – 3/4 дюйма; *ладонь* – 3 дюйма; *рука* – 4 дюйма; *шафтмент* – 6 дюймов, *пядь* – 9 дюймов, *локоть* – 18 дюймов.

Дополнительно имеются *меры землемерной цепи*: *фарлонг* = 10 чейнов = 1/8 мили; *чейн* = 100 линков = 66 футов; *шнур* = 20 футов; *род* (или *поль*) = 16,5 футов; *линк* = 7,92 дюймов. Миля, фарлонг и сажень (6 футов) произошли от несколько более коротких греко-римских милей, стадий и оргий, упоминаемых в Новом Завете.

Библейскими мерами аналогичного типа были: *локоть* и его производные единицы, кратные 4, 1/2, 1/6 и 1/24, называемые соответственно *саженью, пядью, ладонью* и *пальцем*. При этом базовая длина библейского локтя остается неизвестной; в настоящее время предполагается, что она составляет около 17,6 дюймов для общей (используемой в коммерции) меры локтя и около 20–22 дюймов для официального использования (применялся в строительстве). *Талмудический локоть* равен 56,02 см, т.е. несколько длиннее 22 дюймов.

Как указано на http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Strange_units_of_measurement, старинная единица длины, называвшаяся *дистанцией* и равная 221763 дюймам (около 5633 м), определялась весьма необычно, как равная 3 мили + 3 фарлонга + + 9 чейнов + 3 рода + 9 футов + 9 шафтментов + 9 рук + 9 ячменных зерен.

Для обозначения размеров материи и одежды используются старые единицы: *рулон* – 40 ярдов; *локоть* – 5/4 ярда; *голд* – 3/2 ярда; *четверть* (или *пядь*) – 1/4 ярда; *палец* – 1/8 ярда; *ноготь* – 1/16 ярда.

Морские единицы длины

Морские единицы длины (применяемые также и в воздушной навигации):
– *морская лига* = 3 морских мили;
– *морская миля* = 1852 м;
– *географическая миля* 1852 м (среднее расстояние на поверхности Земли, представленное одной минутой широты);
– *кабельтов* = 120 саженей = 720 футов = 219,456 м;
– *короткий кабельтов* = 1/10 морской мили 608 футов;
сажень = 6 футов.

Бумажные форматы МОС

В широко используемой системе бумажных форматов МОС отношение высоты листа к его ширине является *отношением Лихтенберга,* т.е. $\sqrt{2}$. Система включает в себя форматы An, Bn и (используемый для конвертов) формат Cn с $0 \leq n \leq 10$ и шириной листа $2^{-1/4-n/2}, 2^{-n/2}$ и $2^{-1/8-n/2}$ соответственно. Все размеры указаны в метрах, и соответственно площадь An равна 2^{-n} м^2. Они округляются и обычно выражаются в миллиметрах, например, формат A4 – 210×297, а формат B7 (используемый также для паспортов европейских стран и США) имеет размеры 88×125.

Полиграфические единицы длины

Пункт (*PostScript*) = 1/72 дюйма = 100 гутенбергов = 3,527777778 см.

Пункт (*TeX*) (или *пункт принтера*) = 1/72,27 дюйма = 3,514598035 см.

Пункт (*ATA*) = 3,514598 см.

Ку (*японская*) (или *Q*, *четверть*) = 2,5 см.

Пункт (*Дидо*) = 1/72 французского королевского дюйма = 3,761 см и *цицеро* = = 12 пунктов Дидо.

Пика (*PostScript*, *TeX* или *ATA*) = 12 пунктов в соответствующей системе.

Твип = 1/20 пункта в соответствующей системе.

Очень малые единицы длины

Ангстрем (Å) = 10^{-10} м.

Ангстрем звезда (или *единица Бердена*): Å ≈ 1,0000148 ангстрем (используется с 1965 г. для измерения длин волн рентгеновского и гамма излучения, а также расстояний между атомами в кристаллах).

X единица (или *зигбанова единица*) $\approx 1{,}0021 \times 10^{-13}$ м (ранее использовалась для измерения длин волн рентгеновского и гамма излучения).

Бор (атомная единица длины): α_0, средний радиус $\approx 5{,}291772 \times 10^{-11}$ м орбиты электрона атома водорода (в модели Бора).

Приведенная комптоновская длина волны электрона (т.е. $\frac{\hbar}{mc}$) для массы электрона m_e: $\vec{\lambda}_C = \alpha\alpha_0 \approx 3,862 \times 10^{-13}$ м, где $\hbar$ – *приведенная* (т.е. деленная на 2π) *постоянная Планка*, c – скорость света и $\alpha \approx \frac{1}{137}$ – *постоянная тонкой структуры*.

Классический радиус электрона: r_e: $\alpha\vec{\lambda}_C = \alpha^2\alpha_0 \approx 2,81794 \times 10^{-15}$ м.

Комптоновская длина волны протона: $\approx 1,32141 \times 10^{-15}$ м; большая часть измерений длин в ходе экспериментов, связанных с фундаментальными ядерными силами, является ее кратными.

Длина Планка (наименьшая физическая длина): $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,6162 \times 10^{-35}$ м, где G – универсальная *гравитационная постоянная* Ньютона. Она является также приведенной комптоновской длиной волны и половиной радиуса Шварцчайльда для массы *Планка* $m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{c^3}} \approx 2,176 \times 10^{-8}$ кг. Время Планка $t_p = \frac{l_P}{c} \approx 5,4 \times 10^{-44}$ с.

Именно, $10^{38} l_P \approx 1$ миле США, $10^{43} t_P \approx 54$ с и $10^9 m_P \approx 21,76$ кг, т.е. близко к 1 *таланту* (26 кг серебра, мера веса в Древней Греции). Котрелл (http://planck.com/humanscale.htm) предложил "постметрический" вариант адаптированной под человека системы единиц Планка на основе трех вышеуказанных единиц, назвав их (планковскими) *милей*, *минутой* и *талантом*.

Астрономические единицы длины

Расстояние Хаббла (граница космического светового горизонта) равна $D_H = \frac{c}{H_0} \approx 4,22$ пк $\approx 13,7$ световых гигалет (используется для измерения расстояний $d > \frac{1}{2}$ Мпк в терминах красного смещения z: $d = zD_H$, если $z \leq 1$, и $d = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} D_H$, иначе).

Гигапарсек (Гпк) = 10^3 мегапарсеков (Мпк).

Хаббл (или светогигагод, световой гигагод, световой Ga) = 10^9 (млрд) световых лет $\approx$ 306,595 Мпк.

Мегапарсек = 10^3 килопарсеков $\approx$ 3,262 *MLY* (млн св. лет).

MLY (*миллион световых лет*) = 10^6 (млн) св. лет.

Килопарсек = 10^3 парсеков.

Парсек $= \frac{648000}{\pi}$ AU (астрономических единиц, а.е.) $\approx$ 3,261624 св. года $\approx 3,08568 \times 10^{16}$ м (расстояние от воображаемой звезды, когда прямые, проведенные от нее до Земли и до Солнца, образуют максимальный угол, т.е. *параллакс*, величиной в секунду).

Световой год $\approx 9,46073 \times 10^{15}$ м $\approx 5,2595 \times 10^5$ световых минут $\approx \pi \times 10^7$ (расстояние, которое в вакууме свет проходит за один год; используется для измерения расстояний между звездами).

Спат (устаревшая единица) ≈ 10^{12} м ≈ 6,6846 AU (астрономических единиц).

Астрономическая единица (AU) = 1,49597871 × 10^{11} м ≈ 8,32 световых минуты (среднее расстояние между Землей и Солнцем; используется для измерения расстояний в пределах Солнечной системы).

Световая секунда ≈ 2,998 × 10^8 м.

Пикопарсек ≈ 30,86 км (см. также другие забавные единицы, как, например, *микростолетие* ≈ 52,5 минуты, обычная продолжительность доклада, и *наностолетие* ≈ π секунд).

27.2. ШКАЛЫ ФИЗИЧЕСКИХ ДЛИН

В данном разделе рассматривается набор различных порядков величины длин, выраженных в метрах.

1,616 × 10^{-35} – *длина Планка* (наименьшая возможная физическая длина): на этой шкале ожидается наличие "квантумной пены" (мощное искривление и турбуленция *пространства-времени*, нет гладкой пространственной геометрии); доминирующими структурами являются малые (многосвязные) *пространственные воронки* и *пузыри*, возникающие и исчезающие.

10^{-34} – длина предполагаемой *струны*: М-теория предполагает, что все силы и все 25 элементарных частиц объясняются вибрацией таких струн и стремится объединить квантовую механику с общей теорией относительности.

10^{-24} = 1 **йоктометр**.

10^{-21} = 1 **цептометр**.

10^{-18} = 1 **аттометр**: область слабых ядерных сил, размер кварка.

10^{-15} = 1 **фемтометр** (бывшая *ферми*).

1,3 × 10^{-15} – область больших ядерных сил, ядра средних размеров.

10^{-12} = 1 **пикометр** (ранее назывался *бикрон* или *стигма*): расстояние между атомными ядрами в белых карликовых звездах.

10^{-11} – длина волны наиболее жесткого (коротковолнового) рентгеновского излучения и наибольшая длина волны гамма излучения.

5 × 10^{-11} – диаметр наименьшего атома (водорода H); 1,5 × 10^{-10} – диаметр наименьшей молекулы (водород H_2).

10^{-10} = 1 **ангстрем** – диаметр типового атома, предел разрешающей способности электронного микроскопа.

1,54 × 10^{-10} – длина типовой ковалентной связи (C–C).

10^{-9} = 1 **нанометр** – диаметр типовой молекулы.

2 × 10^{-9} – диаметр спирали ДНК.

10^{-8} – длина волны наиболее мягкого рентгеновского излучения и самого крайнего ультрафиолетового излучения.

1,1 × 10^{-8} – диаметр приона (наименьшей биологической сущности, способной к самовоспроизведению).

4,5 × 10^{-8} – наименьшая деталь компьютерной микросхемы в 2007 г.

9 × 10^{-8} – вирус иммунодефицита человека (ВИЧ); в общем случае размеры известных вирусов колеблются в пределах от 2 × 10^{-8} (аденоассоциированные вирусы) до 8 × 10^{-7} (мимивирус).

10^{-7}: размер хромосомы, максимальный размер частицы, которая может пройти через хирургическую маску.

2×10^{-7}: предел разрешающей способности оптического микроскопа.

3,8–$7{,}4 \times 10^{-7}$: длина волны видимого (глазом человека) света, т.е. цветовой спектр от фиолетового до красного.

10^{-6} = 1 **микрометр** (бывший *микрон*).

10^{-6}–10^{-5}: диаметр типовой бактерии; в общем случае размеры известных (не находящихся в состоянии покоя) бактерий колеблются в пределах от $1{,}5 \times 10^{-7}$ (микоплазма гениталиум: "минимальная клетка") до 7×10^{-4} ("Серная жемчужина Намибии" – *Thiomargarita of Namibia*).

7×10^{-6}: диаметр ядра типовой эукариотной клетки.

8×10^{-6}: средний диаметр человеческого волоса (колеблется от $1{,}8 \times 10^{-6}$ до 18×10^{-6}).

10^{-5}: типовой размер капли воды (туман, водяная пыль, облако).

10^{-5}, $1{,}5 \times 10^{-5}$ и 2×10^{-5}: диаметры волокон хлопка, шелка и шерсти.

2×10^{-4}: приблизительно нижний предел различения предмета человеческим глазом.

5×10^{-4}: диаметр человеческой яйцеклетки, микропроцессор MEMS (микромашинная технология).

10^{-3} = 1 **миллиметр**: крайняя длина волны инфракрасного диапазона.

5×10^{-3}: длина среднего красного муравья; в общем случае размеры насекомых находятся в пределах от $1{,}7 \times 10^{-4}$ (наездник мегафрагма – *Megaphragma caribea*) до $3{,}6 \times 10^{-1}$ (палочник – *Pharnacia kirbyi*).

$8{,}9 \times 10^{-3}$: радиус Шварцчайльда ($\frac{2Gm}{c^2}$ – наименьший предел, после которого масса *m* коллапсирует в черную дыру) для Земли.

10^{-2} = 1 **сантиметр**.

10^{-1} = 1 **дециметр**: длины волны самой низкой частоты микроволнового спектра и самой высокой частоты диапазона УВЧ (ультравысоких частот), 3 ГГц.

1 **метр**: длина волны самой низкой частоты УВЧ диапазона и самой высокой частоты диапазона ОВЧ (очень высоких частот), 300 МГц.

1,435: стандартная колея железнодорожного пути.

2,77–3,44: длина волны широковещательного УКВ радиодиапазона с частотной модуляцией сигнала, 108–87 МГц.

5,5 и 30,1: рост самого высокого животного (жирафа) и длина самого длинного животного (голубого кита).

10 = 1 **декаметр**: длина волны самой нижней частоты диапазона высоких радиочастот (ВЧ) и самой высокой частоты коротковолнового (КВ) диапазона, 30 МГц.

26: самая высокая (измеренная) океанская волна. При этом расчетная высота волны мегацунами, вызванного 65 млн лет назад столкновением Земли с астероидом K-T, в результате которого, вероятно, погибли все динозавры, составила около 1 км.

100 = 1 **гектометр**: длина волны самой низкой частоты КВ диапазона и самая высокая частота средневолнового (СВ) диапазона, 3 МГц.

115,5: высота самого высокого в мире дерева, калифорнийского мамонтового дерева.

137, 300, 508 и 541: высоты Великой пирамиды в Гизе, Эйфелевой башни, небоскреба Тайбэй 101 (самого высокого здания на 2007 г.) и Небоскреба Свободы, который предполагается построить на месте бывшего комплекса Всемирного торгового центра.

187–555: длина волны широковещательного диапазона частот с амплитудной модуляцией, 1600–540 кГц.

340: расстояние, на которое перемещается звук в атмосфере за одну секунду.

10^3 = 1 **километр**.

$2{,}95 \times 10^3$: радиус Шварцчайльда для Солнца.

$3{,}79 \times 10^3$: средняя глубина океанов.

10^4: длина волны самой нижней радиочастоты СВ диапазона, 300 кГц.

$8{,}8 \times 10^3$ и $10{,}9 \times 10^3$: высота самой высокой горы Эверест и глубина Впадины Минданао.

5×10^4 = 50 км: максимальное расстояние, на котором можно увидеть пламя спички (минимум 10 фотонов достигают сетчатки глаза в течение 0,1 с).

$1{,}11 \times 10^5$ = 111 км: один градус широты на Земле.

$1{,}5 \times 10^4$–$1{,}5 \times 10^7$: диапазон частот слышимого человеком звука (20 Гц–208 кГц).

$1{,}69 \times 10^5$: длина гидротехнического туннеля Делавэр (Нью-Йорк), самого длинного в мире.

2×10^5: длина волны (расстояние между подошвами последовательных волн) типового цунами.

$4{,}83 \times 10^5$: диаметр кратера Земли Уилкса (Антарктика), образовавшегося 250 млн лет назад в результате падения небесного тела; самый большой из найденных на Земле (предполагается, что эта катастрофа повлекла за собой массовое уничтожение жизни в пермский период); считается также, что столкновение Земли с гипотетическим планетоидом "Тейя", по размерам сходным с Марсом (теория "Большого Всплеска"), привело 4533 млрд лет назад к образованию Луны.

10^6 = 1 **мегаметр**.

$3{,}48 \times 10^6$: диаметр Луны.

5×10^6: диаметр LHS 4033, наименьшей известной звезды – белого карлика.

$6{,}4 \times 10^6$ и $6{,}65 \times 10^6$: длина Великой Китайской Стены и длина реки Нил.

$1{,}28 \times 10^7$ и $4{,}01 \times 10^7$: диаметр Земли в экваториальной зоне и длина экватора Земли.

$3{,}84 \times 10^8$: орбитальное расстояние Луны от Земли.

10^9 = 1 **гигаметр**.

$1{,}39 \times 10^9$: диаметр Солнца.

$5{,}8 \times 10^{10}$: орбитальное расстояние Меркурия.

$1{,}496 \times 10^{11}$ (1 астрономическая единица, AU): среднее расстояние между Землей и Солнцем (орбитальное расстояние Земли).

$5{,}7 \times 10^{11}$: длина наибольшего наблюдаемого кометного хвоста (кометы Хуакутаке, C/1996 B2).

10^{12} = 1 **тераметр** (бывший *спат*).

$2{,}9 \times 10^{12} \approx 7$ AU: диаметр самой большой известной сверхгигантской звезды VY Canis Majoris.

4,5 × 1012 ≈ 30 AU: орбитальное расстояние Нептуна.

30–50 AU: расстояние от Солнца до астероидного пояса Куипера.

10^{15} = 1 **петаметр**.

50 000–100 000 AU: расстояние от Солнца до облака Оорта (предполагаемое сферическое скопление комет).

$3{,}99 \times 10^{16}$ = 266715 AU = 4,22 св. года = 1,3 пк: расстояние до ближайшей к Солнцу звезды Проксима Центавра.

10^{18} = 1 **эксаметр**.

$1,57 \times 10^{18} \approx 50,9$ пк: расстояние до сверхновой 1987А.

$9.46 \times 10^{18} \approx 306,6$ пк св. лет: диаметр галактического диска нашей галактики Млечный Путь.

$2,62 \times 10^{20} \approx 8,5$ кпк св. лет): расстояние от Солнца до галактического центра (в созвездии Стрельца A^*).

$3,98 \times 10^{20} \approx 12,9$ кпк: расстояние до ближайшей карликовой галактики Большого Пса.

10^{21} = 1 **зеттаметр**.

$2,23 \times 10^{22} - 725$ кпк: расстояние до Туманности Андромеды, ближайшей крупной галактики.

$5 \times 10^{22} = 1,6$ Мпк: диаметр Местной группы галактик.

$5,7 \times 10^{23} = 60$ млн св. лет: расстояние до созвездия Девы, ближайшего крупного скопления (которое является доминирующим в Местном сверхскоплении и в котором были обнаружены первая галактика темной материи и первые внегалактические звезды).

10^{24} = 1 **йоттаметр**.

$2 \times 10^{24} = 60$ Мпк: диаметр Местного сверхскопления (или Сверхскопления Девы).

$2,36 \times 10^{24} = 250$ млн св. лет: расстояние до Великого аттрактора (гравитационной аномалии в Местном сверхскоплении).

500 млн св. лет: длина Великой Стены галактик и альфа пузырей Лимана, самых больших наблюдаемых суперструктур во вселенной (пространство выглядит тем более равномерным, чем крупнее масштаб).

12 080 млн св. лет = 3704 Мпк: расстояние до наиболее удаленного известного квазара SDSS J1148 + 5251 (красное смещение 6,43, в то время как 6,5 является предположительно "стеной невидимости" для видимого света).

$1,3 \times 10^{26} = 13,7$ св. гигалет = 4,22 Гпк: расстояние (рассчитанное с помощью зонда микроволновой анизотропии Уилкинсона), пройденное фоновым космическим излучением с момента "Большого взрыва" (радиус Хаббла $D_H = \frac{c}{H_0}$, космический световой горизонт, возраст вселенной). С учетом того что это число имеет порядок радиуса Шварцчайльда для массы вселенной, некоторые физики рассматривают всю вселенную как гигантскую вращающуюся черную дыру. Данное число имеет также порядок $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ (если *космологическая постоянная* $\Lambda \approx 1,36 \times 10^{-56}$ см$^{-2}$), что некоторые ученые считают максимальной длиной подобно минимальной длине Планка.

$7,4 \times 10^{26}$: нынешнее расстояние (совместного) движения до края наблюдаемой вселенной (размеры наблюдаемой вселенной превышают длину радиуса Хаббла, поскольку вселенная продолжает расширяться). Согласно теории параллельных вселенных, предполагается, что на удалении порядка $10^{10^{118}}$ м существует другая, идентичная копия нашей вселенной.

Глава 28

НЕМАТЕМАИЧЕСКИЕ И ОБРАЗНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ РАССТОЯНИЯ

28.1. РАССТОЯНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ОТЧУЖДЕННОСТЬЮ

Приблизительные расстояния по шкале человека

Расстояние руки – расстояние (около 0,7 м, т.е. так называемое **личное расстояние**), которое предупреждает фамильярность или конфликт (аналогами являются итальянское *bracio*, турецкий *pik* и старорусская сажень). **Расстояние досягания** – разница между пределом досягаемости и расстоянием руки.

Расстояние плевка – весьма короткое расстояние.

Расстояние окрика – короткое, легко досягаемое расстояние.

Расстояние удара – расстояние, в пределах которого объект может быть досягаем для нанесения удара.

Расстояние броска камня измеряется расстоянием примерно 25 саженей (46 м).

Расстояние слышимости голоса – дальность, в пределах которой может быть услышан человеческий голос.

Расстояние пешком – расстояние, которое обычно можно (в зависимости от конкретной ситуации) пройти пешком. Так, например, в некоторых школах Великобритании расстояние 2 и 3 мили считается нормативным расстоянием ходьбы пешком для детей в возрасте до и после 11 лет.

Расстояния между людьми

В работе Холла [Hall69] предлагается в сфере межличностных физических отношений между людьми выделить следующие четыре зоны: *интимной близости* – для объятий и разговора шепотом (15–45 см), *расстояние личной близости* – для разговора с хорошими друзьями (45–120 см), *расстояние социального контакта* – для беседы со знакомыми (1,2–3,6 м) и *расстояние общественной дистанции* – для публичных выступлений (более 3,6 м). Какое из этих *проксемических расстояний* будет приемлемым в конкретной социальной ситуации, определяется культурой, полом и личными предпочтениями человека. Например, в исламских странах близкий контакт (нахождение в одном помещении или укромном месте) между мужчиной и женщиной допускается только в присутствии их *махрама* (супруга или какого-нибудь лица того же пола, или несовершеннолетнего лица противоположного пола). Для среднего представителя западной цивилизации его личным пространством считается расстояние спереди 70 см, сзади – 40 см и 60 см с любого бока.

Поведение людей, определяемое расстоянием между ними, можно измерять, например, *расстоянием* торможения (когда объект останавливается, поскольку дальнейшее сближение вызывает у нее/него чувство неловкости) или показателем *приближения*, т.е. процентным отношением шагов, сделанных для сокращения межличностного расстояния, к общему количеству шагов.

Угловые расстояния в осанке людей – измеренная в градусах ориентация в пространстве положения плечей одного человека по отношению к другому; положе= ние верхней части туловища говорящего по отношению к слушателю (например, находиться лицом к нему или обращаться в сторону); положение корпуса говорящего относительно корпуса слушающего, измеренное в вертикальной плоскости, которая разделяет тело на две половины (переднюю и заднюю). Данное расстояние позволяет судить о том, как человек относится к окружающим его людям: верхняя часть туловища непроизвольно разворачивается в сторону от тех, кто не нравится или в случае разногласий.

Эмоциональное расстояние

Эмоциональное расстояние (или *психическое расстояние*) показывает степень эмоциональной отстраненности (по отношению к человеку, группе людей или событиям), отчужденность и равнодушие посредством замкнутости и необщительности.

Шкала социальной дистанции Богардуса в действительности измеряет не социальные, а именно такие расстояния; по данной шкале различаются следующие восемь градаций "чуждости" для респондентов – представителей других этнических групп и готовность к взаимодействию с ними в том или ином качестве: могли бы породниться, могли бы принять гостем в доме, могли бы жить соседями, могли бы жить в ближайшей окрестности, могли бы жить в одном городе, не желали бы жить в одном городе, выслали бы, убили бы. Додд и Нехневасия в 1954 г. поставили в соответствие восьми уровням шкалы Богарда возрастающие расстояния 10^t м, $0 \le t \le 7$.

Эффект соседства – тенденция людей эмоционально сближаться, вступать в дружеские или романтические отношения с теми, кто находится ближе к ним (физически и психологически), т.е. с теми, с кем они часто встречаются. Уолмсли предложил считать, что эмоциональная вовлеченность сокращается как $d^{-1/2}$ по мере увеличения **субъективного расстояния** d.

Социальная дистанция

В социологии **социальной дистанцией** называется степень отстраненности отдельных лиц или групп людей от участия в жизни друг друга; степень понимания и тесная связь, характеризующие личные и социальные отношения в целом. Данное понятие было введено Симмелом в 1903 г.; по его мнению, социальные формы являются стабильными итогами расстояний между субъектом и объектом (который, в свою очередь, является разделением самого себя).

Отсчет по шкале социальных расстояний Богардуса (см. **эмоциональное расстояние**) ведется таким образом, что ответы для каждой этнической/расовой группы усредняются по всем респондентам, что дает нам показатель RDQ (коэффициент расового расстояния) в пределах от 1,00 до 8,00.

Примером соответствующих моделей являются: [Aker97], определяющий *агента* x как пару (x_1, x_2) чисел, где x_1 представляет исходное, т.е. унаследованное, социальное положение, и x_2 – положение, которое предположительно будет занято в будущем. Агент x выбирает значение x_2, с тем чтобы максимизировать

$$f(x_1) + \sum_{y \neq x} \frac{e}{(h + |x_1 - y_1|)(g + |x_2 - y_1|)},$$

где e, h, g – параметры, $f(x_1)$ – собственная стоимость x и $|x_1 - y_1|$ $|x_2 - y_1|$ – унаследованная и приобретенная *социальные дистанции* x до любого агента y (с социальным положением y_1) конкретного общества.

Социо-культурные дистанции Руммеля

По определению Руммеля [Rumm76], основными социально-культурными дистанциями между двумя людьми являются следующие.

1. **Личная дистанция** – такое расстояние, сокращая которое люди начинают вторгаться на территорию личного пространства друг друга.

2. **Психологическая дистанция** – воспринимаемое различие мотиваций, темпераментов, способностей, настроений и состояний (включая отдельной категорией *интеллектуальную дистанцию*).

3. **Дистанция интересов** – воспринимаемое различие в желаниях, средствах и целях (включая **идеологическую дистанцию** по социально-политическим программам).

4. **Аффинная дистанция** – степень симпатии, расположения или привязанности между двумя людьми.

5. **Дистанция социальных атрибутов** – различие в доходах и образовании, расовые и сексуальные различия, различия в профессиональной деятельности и т.п.

6. **Дистанция статуса** – различие в благосостоянии, могуществе и престиже (включая **дистанцию власти**).

7. **Классовая дистанция** – степень общего авторитетного превосходства одного лица над другим, находящимся в его подчинении.

8. **Культурная дистанция** – различия понимания смысла, значений и норм, отображенные в философско-религиозных установках, науке, этических нормах, языке и изобразительном искусстве.

Культурное расстояние

В работе [KoSi88] **культурное расстояние между двумя странами** $x = (x_1, ..., x_5)$ и $y = (y_1, ..., y_5)$ (обычно это США) получается в виде следующего обобщенного индекса:

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{(x_i - y_i)^2}{5V_i},$$

где V_i – отклонение индекса i, а сами индексы по методике [Hofs80] обозначают:

1) расстояние власти;

2) предотвращение неуверенности (степень ощущения членами одной культуры угрозы от неопределенных или неизвестных ситуаций);

3) индивидуализм против коллективизма;

4) мужественность против женственности;

5) конфуцианский динамизм (охватывает долгосрочные и краткосрочные установки).

Указанное выше **расстояние власти** измеряет то, насколько облеченные меньшей властью члены учреждений и организаций в стране ожидают и признают неравное распределение власти, т.е. насколько высока культура уважения к власти. Так, например, Латинская Америка и Япония по этим показателям находятся в середине шкалы.

Расстояние эффективной торговли

Расстояние эффективной торговли между странами x и y с населением $x_1,...,x_m$ и $y_1,...,y_n$ основных их городских агломераций определяется в работе [HeMa02] как

$$\left(\sum_{1\le i\le m}\frac{x_i}{\Sigma_{1\le t\le m}x_i}\sum_{1\le j\le n}\frac{y_j}{\Sigma_{1\le i\le m}y_i}d_{ij}^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

где d_{ij} – взаимное расстояние (в километрах) соответствующих агломераций и r – мера чувствительности торговых потоков торговли к d_{ij} .

В качестве **внутреннего расстояния страны**, измеряющего среднее расстояние между производителями и потребителями, предлагается использовать величину $0,67\sqrt{\frac{\textit{площадь}}{\pi}}$ (см. [HeMa02]).

Технологические расстояния

Технологическим расстоянием между двумя фирмами является расстояние (обычно это χ^2 или **расстояние косинуса**) между их *портфелями патентов*, т.е. векторами количества полученных патентов в технологических (обычно 36) подкатегориях. Другие измерения основаны на количестве ссылок на патенты, соавторские разработки и т.п.

Когнитивное расстояние Гранстрэнда между двумя компаниями – **расстояние Штейнхауса** $\frac{\mu(A\,\Delta\,B)}{\mu(A\cup B)}=1-\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A\cup B)}$ между их технологическими профилями (наборами идей) A и B, рассматриваемыми как подмножества *пространства с мерой* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Экономическая модель Олссона определяет метрическое пространство (I, d) всех идей (подобно человеческому мышлению), где $I\subset\mathbb{R}^n_+$, с некоторым *интеллектуальным расстоянием d*. Замкнутое, ограниченное и связное *множество знаний* $A_t\subset I$ расширяется в течение времени t. Новые элементы обычно являются выпуклыми комбинациями предыдущих: *обновлениями* в процессе постепенного технологического совершенствования. В исключительных случаях происходят открытия (смещения парадигмы Куна). Аналогичное понятие *мысленного пространства* (материализованного ментального пространства идей/знаний и взаимоотношений между ними в процессе мышления) использовали Суми, Хори и Ошуга в 1997 г. для компьютерного моделирования мыслительной работы с текстом; ими была предложена система отображения текстовых объектов в метрических пространствах.

Экономическое расстояние Патела между двумя странами – время (число лет), которое потребуется отстающей стране для выхода на тот же уровень доходов на душу населения, какой имеет в настоящее время развитая страна. **Технологическое расстояние** Фукучи–Сато между странами – время (число лет), необходимое отстающей стране для создания аналогичной технологической структуры, которой обладает в данный момент развитая страна. Основным допущением популярной *гипотезы конвергенции* является то, что технологическое расстояние между двумя странами меньше, чем экономическое.

В экономике производства *технология* моделируется как множество пар (x, y), где $x\in\mathbb{R}^m_+$ является вектором *затрат*, а $y\in\mathbb{R}^m_+$ – вектором *выпуска* и x может производить y. Такое множество T должно удовлетворять условиям стандартной экономической закономерности. **Функция ориентированного технологического расстояния** затрат/выпуска x, y в (запланированном и расчетном) направлении $(-d_x, d_y) \in \mathbb{R}_-^m \times \mathbb{R}_+^m$ выражена как $\sup\{k \geq 0 : ((x - kd_x), (y + kd_y)) \in T\}$. **Функция расстояния выпуска Шепарда** записывается как $\sup\left\{k \geq 0 : \left(x, \frac{y}{k}\right) \in T\right\}$. *Граница* $f_s(x)$ есть максимальный допустимый выпуск продукции при данных затратах x в условиях конкретной системы или года s. **Расстояние до границы** точки производства $(y = g_s(x), x)$ составляет $\frac{g_s(x)}{f_s(x)}$. *Индекс Малмквиста* для измерения изменения совокупной производительности факторов производства между периодами s и s' (или сравнения с другой единицей в то же время) имеет вид $\frac{g_s'(x)}{f_s(x)}$. Термин *расстояние до границы* используется также для обращения совокупной производительности факторов производства конкретной промышленности (или ВВП на одного работающего в конкретной стране) по отношению к существующему максимуму (в качестве границы обычно берутся США).

Смерть расстояния

Смерть расстояния, так называется авторитетная книга [Cair01], в которой утверждается, что революция в сфере телекоммуникаций (Интернет, мобильная телефония, цифровое телевидение и т.п.) привела к "смерти расстояния" и породила фундаментальные перемены: трехсменную работу, снижение налогов, возвышение английского языка, аутсорсии (привлечение внешних ресурсов для решения внутренних задач), новые возможности контроля за деятельностью правительства, расширение гражданской связи и т.п. В сфере международных отношений заметно возросла доля общения на больших расстояниях. Однако "смерть расстояния" способствовала одновременно и совершенствованию методов управления на расстоянии, и сосредоточению элиты в городах "молочного пояса".

Аналогичным образом [Ferg03] пароходы и телеграф (как железные дороги раньше и автомобили позже) привели вслед за падением стоимости транспортных перевозок к "ликвидации расстояния" в XIX и XX вв. В еще более далеком прошлом, как свидетельствуют археологические данные (около 140 тыс. лет назад), появилась регулярная меновая торговля на больших расстояниях, а изобретение метательного оружия (около 40 тыс. лет назад) позволило человеку убивать крупную дичь (и других людей), находясь на безопасном удалении.

Однако в настоящее время современные технологии затмили расстояние только тем, что значительно сократилось время пути до объекта назначения. В действительности расстояния (культурное, политическое, географическое и экономическое) еще не утратили своей значимости, например, при выработке стратегии компании на развивающихся рынках, в вопросах политической легитимности и т.п.

Моральная дистанция

Моральная дистанция – мера моральной индифферентности или сопереживания по отношению к одному человеку, группе людей или событиям.

Дистанциирование – разделение во времени или пространстве, снижа.ott сопереживание, которое человек мог бы испытывать к страданиям других, т.е. увеличивающее моральную дистанцию. Термин *дистанцирование* используется также (в книгах Кантора) для психологической характеристики замкнутой личности: боязнь близких отношений и обязательств (убежденные холостяки, роковые женщины и т.п.).

Дистанцирование, связанное с технологией

Теория морального дистанцирования утверждает, что технология способствует предрасположенности к неэтическому поведению тем, что формирует **моральную дистанцию** между действием и моральной ответственностью за него.

Печатные технологии разделили людей на отдельные системы связи и дистанцировали их от общения лицом к лицу, живого разговора и прикосновения. Телевидение задействует наши слуховые ощущения и делает расстояние менее довлеющим фактором, однако при этом усилиdftn *когнитивное дистанцирование*: сюжет и изображение не стыкуются с пространством/местоположением и временем/памятью. Это дистанцирование не уменьшилось с внедрением компьютерной техники, хотя интерактивность возросла. Говоря словами Хантера, технология лишь по-новому реорганизовала содержание *расстояния коммуникации*, поскольку его также следует рассматривать как пространство между пониманием и непониманием. Ликвидация пространственных барьеров уменьшает только экономические, но никак не социальные и когнитивные расстояния.

С другой стороны, модель *психологического дистанцирования* [Well86] связывает сиюминутность общения с количеством информационных каналов: сенсорные ощущения уменьшаются в прогрессивной пропорции, по мере того как люди переходят от личного общения к общению по телефону, видеофону электронной почте. Общение через Интернет имеет тенденцию к отсеиванию сигналов, в характуризующих социальный смысл или личные отношения. Кроме того, отсутствие немедленной ответной реакции собеседника, обусловленное особенностями электронной почты, ведет к временным несовпадениям и может вызвать чувство изолированности. Например, моральные и познавательные последствия дистанцирования в процессе обучения в режиме онлайн до сих пор остаются неизученными.

Трансакционная дистанция

Трансакционная дистанция – воображаемая степень разделенности в ходе взаимодействия между студентами и преподавателями и внутри каждой группы субъектов. Данная дистанция сокращается при наличии *диалога* (преднамеренного положительного взаимодействия с целью улучшения понимания), а также при предоставлении обучаемому большей свободы действия и менее предопределенной структуры образовательной программы. Данное понятие было введено Муром в 1993 г. в качестве парадигмы *обучения на расстоянии*.

Расстояние дистанция

Расстояние дистанция – расстояние между массивом информации, генерируемым системой активного бизнес-анализа (Business Intelligence), и множеством действий, приемлемых для конкретной деловой ситуации. Расстояние дистанция действия является мерой усилий, необходимых для уяснения информации и воздействия этой информации на последующие действия. Она может выражаться в физическом расстоянии между отображаемой информацией и управляемым действием.

Антиномия расстояния

Антиномия расстояния, как она была введена в [Bull12] для сферы эстетических ощущений зрителей и актера, заключается в том, что они оба должны найти такую правильную **эмоциональную дистанцию** (не слишком вовлеченную и не слишком бесстрастную), чтобы быть в состоянии творить или оценивать искусство. Эту тонкую линию раздела между объективностью и субъективностью можно легко преступить, и величина самой дистанции может со временем изменяться.

Эстетическая дистанция – степень эмоциональной вовлеченности индивидуума, который, глядя на произведение искусства, оказывается под его впечатлением. В качестве примера такой дистанции можно привести перспективу зрителя в зале по отношению к представлению на сцене, психологическое и эмоциональное расстояние между текстом и читателем, **дистанцию между актером и ролью**, как она трактуется в театральной системе Станиславского.

Варианты антиномии расстояния проявляются в критическом мышлении: существует необходимость установить определенную эмоциональную и интеллектуальную дистанцию между самим собой и идеей, чтобы иметь возможность более точной оценки ее значимости. Другой вариант рассматривается в *парадоксе доминирования: дистанция и связь* (http://www.leatherpage.com/rscurrent.htm/).

Историческая дистанция по терминологии [Tail04] является положением, которое историк занимает по отношению к своим объектам – далекую, близкую или где-нибудь между ними; это – воображение, посредством которого живой ум историка, встречая инертное и невосстановимое, стремится представить материалы реально живыми. Антиномия расстояния здесь вновь проявляется в том, что историки обращаются к прошлому не только интеллектуально, но и переживают моральную и эмоциональную вовлеченность. Формальные свойства исторических писаний зачастую оказываются под влиянием их эмоциональных, идеологических и когнитивных установок.

Смежной проблемой является то, насколько большой должна быть дистанция между людьми и их прошлым, чтобы человек оставался психологически приспособленным к жизни. Фрейд показал, что зачастую между нами и детством такой дистанции не существует.

Неметрическое пространство Кристевой

По мнению Кристевой (1980), основные психоаналитические различия выражаются в терминах пре-эдипова или эдипова аспектов развития личности. Признаки самовлюбленности и зависимости от матери, анархических мотивов поведения, полиморфический эротогеницизм и первичные процессы характерны для пре-эдиповой организации. Соперничество и отождествление с отцом, специфические и мотивации поведения, фаллический эротогеницизм, вторичные процессы более характерны для эдиповой ориентации. Кристева описывает пре-эдипову женскую фазу как обволакивающее аморфное **неметрическое пространство** (*хора* Платона), которое одновременно и кормит, и угрожает; оно также определяет и ограничивает тождественность самому себе. При этом эдипову мужскую фазу она характеризует как метрическое пространство (*топос* Аристотеля); собственная личность и отношение личности к пространству более точно и качественно определены в топосе. Кристева утверждает также, что корни семиотического процесса лежат в женском либидо, пре-эдиповой энергии, которую необходимо направлять в русло социального сплочения.

Делюзе и Гуаттари (1980) разделили свои *мультиплетности* (сети, многообразия, пространства) на *бороздчатые* (метрические, иерархические, центрированные и числовые) и *гладкие* (неметрические, корневые и ацентрированные, которые занимают пространство без какого-либо учета и могут быть исследованы только "ногами").

Эти французские постструктуралисты использовали метафору *неметрический* точно так же, как психоаналитик Лакан систематически пользовался топологической терминологией. В частности, он представлял пространство *J* (от французского *Jouissance*) сексуальных отношений как ограниченное метрическое пространство.

Возвращаясь к математике, **неметрический тензор** – это *ковариантная производная* **метрического тензора**. Она может быть ненулевой для **псевдоримановых метрик** и обращаться в нуль для **римановых метрик**.

Расстояние Симоны Вейль

"**Расстояние**" – это заголовок философско-теологического эссе Симоны Вейль из ее книги "В ожидании Бога" (Нью-Йорк: Путман, 1951). Она связывает любовь Бога с расстоянием; таким образом, его отсутствие может рассматриваться как присутствие: "любое разъединение есть связь" (*метаксю Платона*). Соответственно, утверждает она, распятие Христа (наибольшая любовь/расстояние) было необходимо "для того, чтобы мы смогли осознать расстояние от нас до Бога..., поскольку мы не осознаем расстояние, кроме как по нисходящей линии" (см. понятия Лурианской каббалы *цимцум* ("самосокращение" Бога), "разбиение сосудов" (зло как сила разобщения, которое утратило свою функцию разобщения и превратилось в черепки).

Взять также песню "Издалека", написанную Юлией Голд, в которой поется о Боге, который наблюдает за нами, и о том, как, несмотря на расстояние (физическое и эмоциональное), искажающее восприятие, в нашем мире еще осталь место для мира и любви.

Небесные расстояния Сведенборга

Известный ученый и мечтатель Сведенборг в своем главном труде "*Небеса и Ад*" (Лондон, 1952, первое издание на латинском языке в 1758 г.) утверждает (см. гл. 22 "*Пространство на небесах*", с. 191–199), что "расстояния и таким образом пространство находятся в полной зависимости от внутреннего состояния ангелов". Движение на небесах – лишь изменение этого состояния, когда длина пути измеряется желанием идущего, а сближение отражает схожесть состояний. В духовной сфере и загробной жизни, считает он, "вместо расстояний и пространства существуют только состояния и их изменения".

Расстояние далекого близкого

Расстояние далекого близкого – название программы Дома мировых культур в Берлине, которая представляет панораму современного позиционирования всех художников иранского происхождения. Примерами аналогичного использования термина расстояния в современной поп-культуре являются: "Some Near Distance" (где-то близко) – название художественной выставки Марка Льюиса (Бильбао, 2003), "A Near Distance" (близкое расстояние) – бумажный коллаж Перле Файна (Нью-Йорк, 1961), "Quiet Distance" (тихое расстояние) – художественная репродукция Эдда Мела, "Distance" (расстояние) – японский кинофильм Хироказу Корееды (2001), "The Distance" (это расстояние) – альбом американской рок-группы "Серебряная пуля", "Near Distance" (близкое расстояние) – музыкальная композиция Чен Юи (Нью-Йорк, 1988), "Near Distance" (близкое расстояние) – лирическая песня манчестерского квартета "Пьюрессенсе".

Термины *ближнее расстояние* и *дальнее расстояние* также используются в офтальмологии и для настройки некоторых сенсорных устройств.

Изречения с использованием "ближнего-дальнего" расстояний

"Лучше сосед вблизи, нежели брат вдали" (Библия).

"Люди испытывают сочувствие только когда страдания кажутся им близкими; бедствия, отстоящие от них на десятки тысяч лет в прошлом или в будущем, люди предчувствовать не могут и либо не сострадают, либо во всяком случае не испытывают соизмеримого сочувствия" (Аристотель).

"Путь долга лежит в том, что близко, а человек ищет его в том, что далеко" (Менций).

"Не вглядывайся в близкое, если смотришь вдаль" (Эврипидий).

"Хорошим правительство будет тогда, когда те, кто близко, будут счастливы, а те, кто далеко, заинтересуются" (Конфуций).

"Какая дорога", – спросил я маленького мальчика, сидящего около перекрестка, – "ведет в город?" "Эта", – ответил он, – "она короткая, но длинная, а та – длинная, но короткая". Я пошел по той, что "короткая, но длинная". Когда я подошел к городу, я обнаружил, что он был окружен садами и огородами. Вернувшись к мальчику, я сказал ему: "Сын мой, разве ты не говорил мне, что эта дорога короткая?" И он ответил: "А разве я не сказал тебе также: "но длинная"? Я поцеловал его голову и сказал: "Счастлив ты, о Израиль, все вы мудрые, и молодые, и старые" (Эрубин, Талмуд).

Пророку Мухаммеду приписывают слова: "Наименьшим вознаграждением для людей в раю будет пристанище с 80 000 слуг и 72 женами, над которым возвышается купол, украшенный жемчугом, аквамаринами и рубинами, такой же ширины, как расстояние от Аль-Джабийя (пригород Дамаска) до Саны (Йемен)" (Хадит, Исламская традиция).

"Нет настолько большого предмета, …который на большом расстоянии не казался бы меньше, чем маленький предмет вблизи" (Леонардо да Винчи).

"Ничто не позволяет Земле выглядеть такой просторной, как друзья на расстоянии; именно они составляют широты и долготы" (Генри Дэвид Торо).

Первый закон географии Толбера: все связано между собой, но более близкие предметы более связаны, чем дальние. **Принцип близости** (или *принцип наименьших усилий*): для имеющегося распределения одинаково желанных мест чаще всего выбираться будет самое близкое.

В физике **принцип локальности** Эйнштейна утверждает: удаленные объекты не могут непосредственно влиять друг на друга, объект подвержен прямому влиянию только со стороны объектов в непосредственной близости.

В области программирования **закон Деметры** Холланда содержит установку в отношении стиля программирования "обращаться только к ближайшим друзьям" (объектам, "тесно" связанным с данным объектом) и каждый объект должен иметь ограниченную информацию о других.

28.2. РАССТОЯНИЕ ЗРИТЕЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ

Расстояния видимости

Расстояние между зрачками (или *межлинзовое расстояние*): в офтальмологии расстояние между центрами зрачков двух глаз при параллельных осях визирования. Обычно 2,5 дюйма (6,35 см).

Острота зрения (ближняя) – способность глаза различать форму предмета и его детали на близком расстоянии порядка 40 см; **острота зрения (дальняя)** – способность глаза делать это на большем расстоянии порядка 6 м.

Оптические приборы для работы с близкими предметами служат для увеличения изображения предмета и печати; **оптические приборы для работы с предметами на расстоянии** служат для приближения удаленных объектов (от трех метров и дальше).

Близкое расстояние: в офтальмологии это расстояние между плоскостью объекта и плоскостью очков.

Расстояние вершины: в офтальмологии расстояние между роговицей и плоскостью очков.

Бесконечное расстояние: в офтальмологии расстояние порядка 20 футов (6,1 м) и более; оно называется так, поскольку попадающие в глаз лучи от объекта, находящегося на этом удалении, практически параллельны, аналогично лучам, приходящим из точки в бесконечности. **Дистанционное зрение** – зрительное восприятие объектов, находящихся на удалении не менее 6 м от наблюдателя.

Угловое расстояние глаза – апертюра угла, образуемого линиями, проведенными от глаза к двум объектам.

Расстояние RPV (или *точки схождения в покое*) – расстояние, при котором глаза начинают *сходиться* (сдвигаться к переносице), когда отсутствует какой-либо близкий объект, вызывающий такое схождение. Оно составляет в среднем 45 дюймов (1,14 м), если смотреть прямо, и уменьшается до 35 дюймов (0,89 м), если смотреть вниз под углом 30°.

С точки зрения эргономики при продолжительной работе с компьютером рекомендуется выдерживать расстояние RPV до экрана, чтобы минимизировать напряжение глаз.

Расстояние свободной аккомодации (или *точка аккомодации в покое, расстояние RPA*) – расстояние до точки, на которую фокусируются глаза, когда нет конкретного предмета наблюдения.

Фокусные расстояния

Рабочее расстояние – расстояние от передней линзы микроскопа до объекта при правильной фокусировке прибора.

Расстояние до объекта – расстояние от объектива камеры до фотографируемого объекта, т.е. объекта, на который наводится фокус.

Расстояние изображения – расстояние от объектива до изображения (картинки на экране); если между объектом и экраном размещается увеличительная линза, то сумма величин, обратных расстоянию до объекта и расстоянию изображения, равно величине, обратной фокусному расстоянию.

Фокусное расстояние (*фокальная длина*): расстояние от оптического центра линзы (или изогнутого зеркала) до точки фокуса (до изображения). Его обратная величина, измеренная в метрах, называется *диоптрией* и используется в качестве единицы измерения (оптической) силы линзы.

Глубина резкости – расстояние перед объектом и позади объекта, находящееся в фокусе, т.е. зона с допустимой нечеткостью изображения.

Гиперфокальное расстояние – расстояние от объектива до ближайшей точки (*гиперфокальной точки*), которая находится в фокусе при наведении на бесконечность; далее этой точки все объекты определены ясно и четко. Это самое близкое расстояние, за пределами которого глубина резкости становится бесконечной (см. **бесконечное расстояние видимости**).

Феномены размера-расстояния

Законом размера-расстояния Эммерта определено, что изображение на сетчатке глаза является пропорциональным по воспринимаемому размеру (кажущейся высоте) воспринимаемому расстоянию до поверхности, на которую оно проецируется. Этот закон основывается на том факте, что воспринимаемый размер объекта удваивается каждый раз, когда воспринимаемое расстояние от наблюдателя делится пополам и, наоборот. Законом Эммерта объясняется также *постоянство масштабирования*, т.е. того, что размер объекта воспринимается как величина постоянная, несмотря на изменение изображения на сетчатке (по мере удаления объекты, с учетом визуальной перспективы, кажутся все меньше и меньше).

Согласно **гипотезе инвариантности размера-расстояния** соотношение воспринимаемого размера и воспринимаемого расстояния является тангенсом физического визуального угла. В частности, объекты, которые кажутся ближе, должны также и выглядеть меньше. Однако в отношении *лунной иллюзии* мы имеем **парадокс размера-расстояния**. С Луной (точно так же, как и с Солнцем) иллюзия заключается в том, что, несмотря на постоянство ее визуального угла (примерно 0,52°), размеры Луны, находящейся над уровнем горизонта, могут казаться в 2 раза больше, чем размеры Луны, находящейся в зените. Суть этой иллюзии еще не до конца понятна; одна из предполагаемых причин когнитивная: размеры Луны в зените недооцениваются, поскольку она воспринимается как приближающийся объект.

Наиболее общим случаем оптической иллюзии является искажение размеров или длины; например, иллюзии Мюллера–Лейера, Сандера и Понзо.

Эффект символической дистанции

В психологии мозг осуществляет сравнение двух концепций (или объектов) тем точнее и быстрее, чем больше они различаются в соответствующем измерении.

Субъективное расстояние

Субъективное расстояние (или *когнитивное расстояние*) – мысленное представление действительного расстояния, сформированние в зависимости от социального, культурного и общего жизненного опыта индивидуума. Ошибки когнитивного расстояния возникают либо по причине отсутствия кодирования/хранения информации о двух точках в одной и той же ветви памяти, либо из-за ошибки вызова этой информации. Например, длина пути с многочисленными поворотами и ориентирами обычно переоценивается.

Эгоцентрическое расстояние

В психофизиологии **эгоцентрическое расстояние** определяется как воспринимаемое абсолютное расстояние от личности (наблюдателя или слушателя) до объекта или раздражителя (например, источника звука). Как правило, визуальное эгоцентрическое расстояние оценивается короче действительного физического расстояния до удаленных объектов и длиннее до близких. При зрительном восприятии *пространство действия* объекта охватывает 1–30 м; меньшее и большее пространства называются *личным пространством* и *пространством перспективы* соответственно.

Экзоцентрическим расстоянием называется воспринимаемое относительное расстояние между объектами.

Ориентиры для оценки расстояния

Ориентиры для оценки расстояния – ориентиры, используемые для оценки **эгоцентрического расстояния**.

Для слушателя с фиксированным местоположением главными акустическими ориентирами для оценки расстояния являются: *интенсивность* (на открытом воздухе она падает на 5 дБ для каждого удвоения расстояния (см. **Акустические рас-**

стояния, гл. 21)), *соотношение прямой к отраженной энергии* (при наличии звукоотражающих поверхностей), спектральные и *стереофонические различия*.

Для наблюдателя основными визуальными ориентирами для оценки расстояния являются:

– *относительный размер, относительная яркость, свет* и *тень*;

– *высота в поле зрения* (для случаев плоских поверхностей, лежащих ниже уровня глаз, более удаленные объекты кажутся выше);

– *интерпозиция* (когда один объект частично загораживает вид на другой);

– *бинокулярные расхождения, схождение* (в зависимости от угла оптической оси глаз), *аккомодация* (состояние фокусировки глаз);

– *воздушная перспектива* (объекты на расстоянии ставятся более голубыми и бледными), *потускнение от расстояния* (объекты на расстоянии менее контрастны и их очертания более размыты);

– *перспектива движения* (стационарный объект воспринимается движущимся наблюдателем как плавно пролетающий мимо него).

Далее приводятся некоторые технические приемы, использующие указанные выше ориентиры для создания оптических иллюзий для зрителей:

– *туман расстояния*: элемент трехмерной компьютерной графики для создания эффекта размытости (затуманивания) объектов по мере их удаления от камеры;

– *принудительная перспектива*: кинематографический прием, делающий так, чтобы объекты казались более далекими или наоборот в зависимости от их местоположения относительно камеры и друг друга.

Киносъемки, связанные с расстоянием

Киносъемка – это фильмовые материалы, отснятые с момента начала работы камеры (по команде режиссера "мотор") и до момента ее остановки (по команде "снято").

Основными **кадрами, связанными с расстоянием** (настройками камеры), являются:

– *съемка общим планом*: кадры в начале эпизода, с помощью которых устанавливается место действия и/или время суток;

– *съемка дальним планом*: кадры, снятые с расстояния не менее 50 футов (45,72 м) от места действия;

– *средний план*: кадры, снятые с расстояния 5–15 ярдов (4,57–13,75 м), включая целиком небольшую группу, показ группы людей/объектов относительно окрестностей;

– *крупный план*: кадры, показывающие актера с уровня шеи и выше или объект с аналогично близкого расстояния;

– *двойной план*: кадры, снятые с двумя людьми на переднем плане;

– *вставка*: вставленные кадры (обычно крупным планом) для более детального показа объекта.

Расстояния в стереоскопии

Одним из способов получения трехмерного изображения является съемка пары двухмерных изображений с помощью системы спаренных камер.

Расстояние между камерами (или *длина базисной линии, расстояние между окулярами камер*) – расстояние между двумя камерами, делающими снимки в роли левого и правого глаз.

Расстояние схождения – расстояние между центром *базисной линии* камеры до *точки схождения*, где две линзы должны совместиться для получения стереоскопического эффекта. Это расстояние должно быть в 15–30 раз больше **расстояния между камерами**.

Расстояние плоскости изображения – расстоянием, на котором объект кажется находящимся на (но не позади или перед) *плоскости изображения* (кажущейся поверхности изображения). *Рамка* – граница каширования рамки экрана таким образом, чтобы появляющиеся на нем (не за и не вне его) объекты казались находящимися на том же расстоянии от зрителя, что и сама рамка. Для визуального восприятия человека расстояние плоскости изображения равно примерно 30 расстояниям между камерами.

Расстояния дорожной видимости

Дальность видимости (или *расстояние видимости*) – длина обозреваемого водителем участка шоссе. **Безопасная дальность видимости** определяется как дальность видимости, необходимая водителю для того, чтобы выполнить конкретную задачу; основными безопасными расстояниями, используемыми при проектировании дорог, являются следующие:

– **расстояние тормозного пути** – дальность видимости, обеспечивающая остановку автомобиля перед неожиданно появившимся препятствием;

– *безопасная для маневрирования видимость* – расстояние, обеспечивающее возможность объезда неожиданного небольшого препятствия на дороге;

– *безопасная для обгона видимость* – расстояние, необходимое для выполнения безопасного обгона;

– *видимость обзора дороги* – расстояние, позволяющее предвидеть изменение осевого направления (как повороты, так и подъемы и спуски) полотна дороги (например, для выбора скоростного режима движения).

Кроме того, соответствующая дальность видимости необходима и в локальном масштабе: для оценки ситуации на перекрестках и реагирования на сигналы светофоров.

28.3. РАССТОЯНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ

Расстояния, связанные с транспортными средствами

Тормозной путь – расстояние, которое проходит автомобиль с момента нажатия тормозов до полной остановки.

Расстояние реагирования – расстояние, которое автомобиль проходит с момента, когда водитель увидит опасность на дороге, до момента начала торможения (складывается из времени восприятия и скорости реакции человека) (не путать с **дистанцией реакции животного**).

Расстояние торможения – расстояние, которое проходит автомобиль с того момента, когда водитель решает затормозить, до момента полной остановки транспортного средства (определяется скоростью реакции системы торможения и эффективностью тормозных устройств).

Обозначаемый по расстоянию номер развязки дорог – номер, присваиваемый перекрестку (обычно это развязка на автостраде), который отображает в милях (или километрах) расстояние от начала автострады до развязки. *Мильный камень* (или *километровый столб*) является элементом последовательности нумерованных указателей, установленных с равными интервалами вдоль дороги. Нулевой столб в столичном Вашингтоне считается началом отсчета для всех дорожных расстояний в США.

Расстояние прерванного взлета – длина взлетно-посадочной полосы плюс длина концевой полосы безопасности, которая пригодна и которую разрешено использовать для разгона при взлете и торможения самолета в случае прерывания взлета.

Расстояние срока действия – общее расстояние, которое проходит самодвижущийся наземный или морской транспорт с заданной экономичной скоростью движения.

Фактически пройденное расстояние (морской термин) – расстояние, пройденное после корректировки текущих отклонений от курса, бокового сноса (дрейфа корабля в подветренную сторону) и прочих ошибок, которые могли быть не учтены при начальном измерении расстояния. *Лаг* – прибор для отсчета пройденного на воде расстояния, показания которого затем корректируются для выведени я фактически пройденного расстояния.

***GM*-расстояние** (или *метациклическая высота*) **судна** – расстояние между центром его тяжести G и *метацентром*, т.е. проекцией *центра водоизмещения* (гравитационного центра выталкиваемого корпусом судна объема воды) на диаметральную линию судна в момент крена. Это расстояние (обычно 1–2 м) характеризует остойчивость судна на воде.

Оттяжка – при погружениях под воду является временным маркером (обычно это 50-метроввый тонкий полипропиленовый трос), обозначающим кратчайший путь между двумя точками. Она предназначена для ориентирования в условиях плохой видимости при возвращении водолаза к отправной точке.

Расстояния в системах обнаружения

Расстояние невидимости (или **расстояние первой засечки**) – расстояние, пройденное движущимся объектом (нарушителем) до момента фиксации его активными средствами системы обнаружения (см. **Квазирасстояния контакта**, гл. 19); *время невидимости* характеризует соответствующие временные параметры.

Расстояние задержки данных обнаружения – расстояние, пройденное движущимся объектом (нарушителем) до момента получения контрольным органом данных от системы обнаружения.

Ошибка по дальности – расстояние между двумя линиями места цели, полученными от двух различных станций обнаружения (см. **Расстояние между прямыми**, гл. 4).

Предельная дальность обнаружения – расстояние, в пределах которого ошибки местоопределения считаются допустимыми для практического использования данных (см. **Предельная дальность**, гл. 25).

Дистанция выноса

В войне с применением ядерного оружия **дистанцией выноса** называется величина, на которую расчетный (или реальный) эпицентр взрыва отклонился от центра района (или точки) цели.

В вычислительных операциях **выносом** называется расстояние от начала строки до конца участка строки. Для автомобиля **выносом** колеса называется расстояние от поверхности ступицы до осевой линии колеса.

Расстояние удаленности

Расстояние удаленности – расстояние объекта от источника взрыва (в боевых действиях) или от точки наведения лазерного луча (в производстве лазерных материалов). В механике и электронике оно является расстоянием, отделяющим одну часть от другой; например, изолирующим расстоянием (см. **безопасное расстояние**) или расстоянием от неконтактного датчика длины до измеряемой материальной поверхности.

Расстояние окаймления

Обычно **расстоянием окаймления** называется длина интервала между *окаймлениями* (например, темные и светлые области на интерференционном узоре световых лучей; компоненты, на которые распадается спектральная линия под воздействием электрического или магнитного поля – *эффекты Старка и Зимана* в физике).

При этом, скажем, для неконтактного измерителя длины расстоянием окаймления является величина $\frac{\lambda}{2\sin\alpha}$, где λ – длина волны лазера и α – угол луча.

В области анализа изображений существует также броуновское **расстояние окаймления** между бинарными изображениями (см. **Расстояние пикселя**, гл. 21).

Дистанционный взрыватель

Дистанционный взрыватель осуществляет подрыв взрывчатого вещества автоматически при достаточном сближении с целью.

Датчики ближней локации

Датчики ближней локации представляют собой разнообразные ультразвуковые, лазерные, фотоэлектрические и оптоволоконные датчики, предназначенные для измерения расстояния от самого датчика до объекта (цели).

Сравните со следующим простым способом оценки расстояния (для распознавания добычи), используемым некоторыми насекомыми: скорость движений головы богомола в момент всматривания остается постоянной и, следовательно, расстояние до цели будет обратно пропорционально скорости изображения на сетчатке.

Точное измерение расстояния

Разрешение ТЭМ (просвечивающего электронного микроскопа) составляет около 0,2 нм (2×10^{-10} м), т.е. типовое расстояние между двумя атомами в твердом теле. Такое разрешение в 1000 раз больше, чем у оптического микроскопа, и почти в 500 тыс. раз больше, чем у человеческого глаза. Однако в поле зрения электронного микроскопа могут попасть только наночастицы.

Методы, основанные на измерении длины волны лазерного излучения, применяются для определения макроскопических расстояний, которые нельзя измерить с помощью электронного микроскопа. Неточность измерений такими способами равна минимум длине волны света, т.е. порядка 633 нм.

Современная адаптация *интерферометра Фабри–Перо* (для измерения частоты света, заключенного между двумя зеркалами с высокой отражательной способностью) в виде лазерного устройства позволяет измерять относительно большие расстояния (до 5 см) с погрешностью всего 0,01 нм.

Радиоизмерение расстояния

Оборудование для измерения расстояний (DME) – аэронавигационная аппаратура для измерения расстояний как времени прохождения УКВ сигналов до *ответчика* (радиолокационного приемоответчика, генерирующего ответный сигнал на правильный запрос) и обратно. Аппаратура DME скорее всего будет вытеснена глобальными спутниковыми навигационными системами: системой GPS и планируемым вводом в строй в 2009 г. систем Галилео (стран Европейского Союза) и ГЛОСНАСС (Россия/Индия).

Система GPS (глобальная система навигации и определения местоположения) является радионавигационной системой, позволяющей каждому определять его местоположение на земном шаре (в любое время и в любом месте). В состав системы входят 24 спутника и наземные средства управления, находящиеся в ведении министерства обороны США. Гражданские пользователи получают доступ к системе, покупая специализированный приемник сигналов GPS, который обеспечивает определение местоположения с точностью до 10 м.

Псевдорасстояние GPS от приемника до спутника – это время прохождения радиосигнала меток времени от спутника до приемника, умноженное на скорость распространения радиоволн (около скорости света). Оно называется *псевдорасстоянием*, с учетом неизбежной погрешности в расчетах: часы приемника далеко не так точны, как сверхточные часы на спутнике. Приемник GPS рассчитывает свое местоположение (по широте, долготе, высоте и т.д.) посредством решения системы уравнений с использованием псевдорасстояний, получаемых минимум от четырех спутников, местоположение которых заранее известно (см. **Расстояния радиосвязи**, гл. 25).

Дальность передачи

Дальность передачи – определенное для конкретной (волоконно-оптической, проводной, беспроводной и т.п.) системы передачи расстояние, которое является максимальным в смысле допустимости уровня потерь в полосе пропускания.

Для конкретной сети контактов, которая может передавать инфекцию (или, скажем, идею в системе убеждений, рассматриваемой как иммунная система), **дальностью передачи** является **метрика пути** графа ребра которого соответствуют событиям инфицирования через наиболее близкого общего предка и между зараженными индивидуумами.

Инструментальные расстояния

Расстояние груза – расстояние (на рычаге) от центра вращения до груза. **Расстояние приложенной силы** (или *расстояние сопротивления*): расстояние (на рычаге) от центра вращения до точки приложения силы.

К-расстояние – расстояние от внешней нитки прокатного стального прута до шейки галтели прокатного профиля.

Расстояние до обрезной кромки – расстояние от болта, винта или гвоздя до конца (доски) элемента конструкции. **Расстояние до края** – расстояние от болта, винта или гвоздя до края (доски) элемента конструкции.

Расстояния зубчатых передач

Для двух шестерней в зацеплении, расстояние между их центрами называется **межосевым расстоянием**. Ниже приводятся другие расстояния, используемые в основных формулах зубчатых передач (таких как $b = a + c$).

Высота головки зуба шестерни (a) – радиальное расстояние между окружностью центров шарниров (окружностью, радиус которой равен расстоянию от оси шестерни до полюса зацепления) и вершиной зуба.

Высота ножки зуба зубчатого колеса (b) – радиальное расстояние между дном впадины между зубьями шестерни и вершиной зуба.

Зазор (c) – расстояние между вершиной зуба и дном впадины другой шестерни в зацеплении.

Полная высота – расстояние между вершиной зуба и дном впадины между зубьями.

Люфт – свободный ход (шатание) между сопряженными зубьями шестерен.

Расстояние утечки

Расстояние утечки – кратчайший путь по поверхности изоляционного материала между двумя токопроводящими элементами.

Безопасное расстояние – кратчайшее (по прямой линии) расстояние между двумя токопроводящими элементами.

Расстояние переноса растворителя

В хроматографии **расстоянием переноса растворителя** называется расстояние, проходимое фронтом жидкости или газа, подающегося в хроматографическую установку для элюирования (процесса, использующего растворяющие вещества для извлечения адсорбированного элемента из твердой среды).

Дистанция распыления

Дистанцией распыления называется установленное технологическое расстояние между оконечностью сопла металлизационного аппарата и напыляемой поверхностью.

Вертикальное эшелонирование

Вертикальным эшелонированием называется расстояние между дном поля фильтрации канализационной очистной системы и лежащим ниже горизонтом грунтовых вод. Это эшелонирование позволяет удалять патогенные микроорганизмы (вирусы, болезнетворные бактерии и т.п.) посредством фильтрации сточных вод через почву, прежде чем они достигнут грунтовых вод.

Расстояние защитных мероприятий

Расстояние защитных мероприятий – расстояние в направлении ветра от места происшествия (излив на поверхность опасных продуктов, вызывающих отравление при вдыхании), в пределах которого люди могут получить поражение.

28.4. ПРОЧИЕ РАССТОЯНИЯ

Расстояния дальности

Расстояниями дальности называются практические расстояния, указывающие максимальное расстояние эффективного действия, например, пробег автомобиля без дозаправки топливом, дальность полета пули, видимости, пределов движения, участка обитания животного и т.п.

В частности, **расстояние распространия** в биологии может относиться к разбрасыванию семян посредством опыления, натальному расселению, племенному разведению, миграционному распространению и т.п.

Дальность воздействия факторов риска (токсических веществ, взрывов и т.п.) указывает минимальное **безопасное дистанцирование**. Дальность действия какого-либо устройства (например, пульта дистанционного управления), указанная в спецификации производителя в качестве ориентировки для потребителя, называется **рабочим расстоянием** (*номинальной дальностью измерения датчика*). Максимальное расстояние активации сенсорного включателя называется **дальностью включения**. Для того чтобы подчеркнуть большую дальность действия, некоторые производители выносят эту характеристику в название продукта: например, *мячики предельной дальности для гольфа* (бита для софтбола, спиннинги и т.п.).

Расстояние зазора

Следующие примеры иллюстрируют обширный класс используемых на практике расстояний, указывающих на минимальное рассеяние (см. **Минимальное расстояние** в кодировании. **Расстояние первого соседа** для атомов в твердых телах и т.п.).

Расстояние по фронту – установленное минимальное расстояние в морских милях между самолетами в воздухе.

Расстояние изоляции –установленное минимальное расстояние, которое (с учетом возможности опыления) должно быть между посевами разновидностей одного и того же вида культур, с тем чтобы сохранить (генетическую) чистоту семян (например, для риса оно составляет около 3 м).

Расстояние между остановками – интервалы между остановками автобуса; среднее расстояние между остановками в США (для легкого рельсового транспорта) колеблется от 500 м (в Филадельфии) до 1742 м (в Лос-Анджелесе).

Интервал между знаками – расстояние между знаками конкретного компьютерного шрифта.

Порог различимости (JND) – мельчайшее изменение меры (расстояния, положения и т.п.), котороее может быть достоверно воспринято (см. **Допускаемое расстояние**, гл. 25).

Метрики качества

Это обширное семейство мер (или стандартов измерений) характеризует различные свойства объектов (обычно оборудования). По этой терминологии наши расстояния и подобности являются "метриками подобности", т.е. метриками (мерами), характеризующими степень связанности между двумя объектами. Ниже приведены примеры таких метрик, которые не связаны с оборудованием и более абстрактны в смысле качественных оценок.

Метрика симметрии (Бханджи и др., 1995) служит для измерения эстетики графических представлений как $\frac{\sum_{i=1}^{m}(a_{1i}+a_{2i}+a_{3i})}{a} \times \sum_{i=1}^{m}\left(a_{1i}+\frac{a_{2i}+n_i}{2}\right)$, где a – число всех дуг, m – число *осей симметрии* и n для заданной *оси* i – число вершин, которые зеркально отображаются от других вершин относительно i, тогда как a_{1i}, a_{2i} и a_{3i} являются числом дуг, которые, соответственно делятся пополам под прямыми углами осью i, зеркально отображаются от другой дуги относительно i и проходят вдоль i. В качестве *осей симметрии* берутся все прямые i с $n_i, a_{1i}, a_{2i} \geq 1$.

Ландшафтные метрики используются, например, для оценки участков озеленения конкретного ландшафта как *плотности участков* (количества таких участков на квадратный километр), *плотности краев* (общей длины границ участков на гектар), *индекса формы* $\frac{E}{4\sqrt{A}}$ (где A – общая площадь и E – общая длина краев), связности, разнообразия и т.п.

Управленческие метрики включают в себя обзоры (скажем, доли на рынке, увеличения сбыта, удовлетворения запросов потребителей), прогнозы (например, доходов, непредвиденных продаж, инвестиций), эффективности НИОКР, соблюдения рабочей дисциплины и т.п.

Метрики риска применяются в сфере страхования и в финансовой сфере для анализа портфеля (например, заказов или ценных бумаг).

Коэффициент воздействия является метрикой качества, которая ранжирует относительное влияние, например, в следующем порядке:

– *ранг страницы (PageRank)* в порядке ранжирования Web страниц в системе Google;

– *коэффициент воздействия* по методике ISI (институт ISI переименован в Thomson Scientific) используется для оценки популярности журнала за двухлетний период, сколько раз обычная статья данного журнала упоминалась в какой-нибудь другой статье, публиковавшейся в следующем году;

– *h-индекс* Гирша для ученого, соответствующий максимальному числу публикаций его авторских статей, каждая из которых была столько же раз процитирована другими авторами.

Убывание расстояния

Убывание расстояния (или *вертикальный градиент расстояния*) – ослабление характеристики или процесса в зависимости от расстояния. В пространственном взаимодействии оно является математическим представлением обратного отношения между количеством полученного вещества и удалением от его источника. Такое убывание измеряет влияние расстояния на доступность: оно может свидетельствовать о сокращении потребности из-за увеличения стоимости проезда. Примерами кривых убывания расстояния являются: модель Парето $\ln I_{ij} = a - b\ln d_{ij}$ и модель $\ln I_{ij} = a - bd_{ij}^p$ с $p = \frac{1}{2}$, 1 или 2 (здесь I_{ij} и d_{ij} являются взаимодействием и расстоянием между точками i и j, тогда как a и b – параметры).

Кривая расстояния

Кривая расстояния – график данного параметра по отношению к расстоянию. Примерами кривых расстояния, в терминах рассматриваемого процесса, являются: **кривая время-расстояние** (для времени распространения серии волн, сейсмических сигналов и т.п.), *кривая высота-путь* (для высоты волны цунами по отношению к расстоянию распространения волны от точки удара), *кривая расстояние-депрессия*, *кривая расстояние-таяние* и *кривая расстояние-объем износа*.

Кривая расстояние-сила является в микроскопии зондового сканирования графиком вертикальной силы, приложенной иглой измерительной головки к поверхности образца в момент, когда производится контактная съемка изображения атомно-силовым микроскопом (АСМ). Кроме того, в микроскопии зондового сканирования используются кривые *частота-расстояние* и *амплитуда-расстояние*.

Термин *кривая расстояния* применяется для составления диаграмм роста, например, регистрации детского роста или веса в каждый день рождения. График скорости роста по отношению к возрасту называется кривой **скорость-расстояние**. Последний термин используется и как определение скорости самолетов.

Функция масса-расстояние

Функцией масса-расстояние называется функция, пропорциональная $\frac{xy}{d(x,y)}$. Ее называют также *функцией гравитации*, поскольку она выражает гравитационное притяжение между массами x и y на (евклидовом) расстоянии $d(x, y)$ (см. **Закон обратных квадратов**, гл. 24). Подобные функции чаще всего применяются в социальных науках, например, они могут выражать связь между x и y, которые могут рассматриваться как население отправляющей и принимающей сторон, где $d(x, y)$ выступает как физическое расстояние между ними.

Убывающая кривая масса-расстояние – график убывания "массы" при увеличении расстояния до центра "гравитации". Подобные кривые используются для нахождения *места укрытия преступника* (исходной точки; см. **Расстояния в криминологии**), массы галактики в пределах заданного радиуса от ее центра (с использованием *кривых вращения-расстояния*) и т.п.

Зависимость большой дальности

Стохастический (стационарный второго порядка) процесс X_k, $k \in \mathbb{Z}$, называется **зависимым большой дальности** (или *долгой памяти*), если существуют такие числа α, $0 < \alpha < 1$ и $c_\rho > 0$, что $\lim_{k \to \infty} c_\rho k^\alpha \rho_k = 1$, где $\rho(k)$ – автокорреляционная функция. Следовательно, корреляции убывают очень медленно (по асимптотически гиперболическому типу) до нуля, что влечет за собой $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\rho_k| = \infty$ и корреляцию далеко отстоящих друг от друга событий (долгая память). Если вышеприведенная сумма конечна и убывание идет экспоненциально, то процесс называется процессом *малой дальности*. Примерами таких процессов являются экспоненциальный, нормальный и пуассоновский процессы, которые не имеют памяти и, говоря физическим языком, являются системами в термодинамическом равновесии. Указанное выше убывание степенной зависимости для корреляций как функции времени преобразуется в убывание степенной зависимости спектра Фурье как функция частоты f и называется $\frac{1}{f}$ *шумом*.

Процесс обладает *экспонентой самоподобия* (или *параметром Хаста*) H, если X_k и $t^{-H}X_{tk}$ имеют одинаковые конечномерные распределения для любого положительного t. Случаи $H = \frac{1}{2}$ и $H = 1$ относятся соответственно к чисто случайному процессу и точному самоподобию одинаковое поведение на всех шкалах (см. **Фрактал**, гл. 1 и **Сети, независимые от шкал**, гл. 22). Процессы с $\frac{1}{2} < H < 1$ являются зависимыми большой дальности с $\alpha = 2(1 - H)$.

Зависимость большой дальности соответствует распределениям с *тяжелым "хвостом"* (или со *степенным законом*). *Функция распределения* и "*хвост*" неотрицательной случайной переменной X равны $F(x) = P(X \le x)$ и $\overline{F(x)} = P(X > x)$. Распределение $F(X)$ имеет *тяжелый "хвост"*, если существует такое число α, $0 < \alpha < 1$, что $\lim_{x \to \infty} x^\alpha \overline{F(x)} = 1$. Многие такие распределения имеют место в реальной действительности (например, в физике, экономике, в Интернете), а также в пространстве (расстояния) и во времени (продолжительности). Типовым примером является распределение Парето $\overline{F(x)} = x^{-\alpha}$, $x \ge 1$, где $\alpha > 0$ – параметр (см. **Убывание расстояния**).

Расстояния в медицине

Расстояние внутреннего прикуса: в стоматологии межокклюзионная щель между поверхностями верхнечелюстных и нижнечелюстных зубов в момент нахождения челюсти в состоянии покоя.

Межокклюзионная высота: в стоматологии расстояние по вертикали между верхнечелюстной и нижнечелюстной дугами. **Расстояние между альвеолярными отростками** – расстояние по вертикали между верхнечелюстным и нижнечелюстным альвеолярными отростками.

Межзубной промежуток – расстояние зазора между соседними зубами; *пассивное смещение* – медленное движение зубов к передней части рта по мере сокращения межзубного промежутка с возрастом.

Расстояние между стебельками – расстояние между вертебральными стебельками, измеренное по рентгеновскому снимку.

Расстояние источник-кожа – расстояние от фокусного пятна на объекте рентгеновской трубки до кожи пациента, измеренное по центральному лучу.

Междуушное расстояние – расстояние между ушами. **Межокулярное расстояние** – расстояние между глазами.

Аногенитальное расстояние – длина *промежности*, т.е. анатомической области между анусом и областью половых органов (передним основанием мужского пениса). У мужчин это расстояние обычно в два раза больше, чем у женщин; таким образом, это расстояние является мерой физического маскулинизма. Другими подобными расстояниями являются отношение второго к четвертому (указательного к безымянному) пальцу, которое меньше у мужчин одной и той же популяции, и пространственное мышление, которое выше у мужчин.

Расстояние оседания (или РОЭ, *реакция оседания эритроцитов*) – расстояние, которое проходят красные кровяные тельца за один час при осаждении на дно пробирки с взятой на анализ кровью. РОЭ указывает на воспалительные процессы и в случае заболевания повышается.

Основными расстояниями, применяемыми в ультразвуковой биомикроскопии (особенно при лечении глаукомы) являются **расстояние раскрытия угла** (от роговичного эндотелия до предстоящей радужной оболочки глаза) и **расстояние трабекулярного и цилиарного процессов** (от конкретной точки на *трабекулярной сети* до *цилиарного процесса*).

Примерами расстояний, рассматриваемых при снятии изображений мозга по методике МРТ (магнитно-резонансной томографии) и получении кортикальных карт (т.е. визуализированных областей внешней корки полушарий головного мозга, отображающих входные сигналы от датчика или моторные отклики) являются: **карта расстояний** МРТ от границы раздела серого/белого вещества, **кортикальное расстояние** (скажем, между участками активации пространственно смежных стимулов), *кортикальная толщина* и *метрики латерализации.*

Дистальность

Прилагательное **дистальный** (или *периферийный*) используется как анатомический термин местоположения (на теле и отдельных его частях).

Как противоположность **проксимальному** (или *центральному*) оно означает расположение далеко от, на удалении от точки ориентирования (начала, центра, точки прикрепления, торса). Как противоположность *срединному* оно означает расположение или направление от средней линии или медиальной плоскости тела.

Иногда термин *дистальный* используется в более абстрактном смысле. Так, например, проект Т-Вижн (визуальное отображение Земли) предполагает формирование восприятия Земли как отдаленного объекта, что ранее было понятно только космонавтам.

Расстояния измерения тела

В соответствии с Европейским единым стандартом размеров одежды EN 13402 в разделе EN 13402-1 определен перечень 13 элементов измерений и методика этих измерений на человеке. В перечень включены: масса тела, рост, длина ноги, длина руки, длина ноги с внутренней стороны, объем головы, шеи, груди, бюста, объем под грудью, обхват талии, бедер, кисти руки. Ниже следуют примеры этих определений.

Длина стопы – горизонтальное расстояние между перпендикулярами, касающимися конца самого длинного пальца ноги и наиболее выступающей части пятки.

Длина руки – расстояние измеренное мерной лентой от плечевого сустава (акромиона) по локтю до оконечности запястья (локтевой кости), при этом правая рука должна быть сжата в кулак и лежать на бедре в наполовину согнутом положении.

Длина внутренней части ноги – расстояние между пахом и подошвой ноги, измеренное по вертикали, при этом человек должен стоять прямо, слегка расставив ноги и распределив на них поровну вес тела.

Последний раздел EN 13402-4, касающийся кодирования размеров одежды, должен стать обязательным в Европе после 2007 г. Ожидается, что с выходом в свет этой части будет устранена ситуация, когда средний типовой размер (34–28–37 дюймов, т.е. 88–72–96 см бюст–талия–бедра) в США проходит под номером 10, в Великобритании – 12, в Норвегии, Швеции и Финляндии – C38, в Германии и Нидерландах – 38, в Бельгии и Франции – 40, в Италии – 44, в Португалии и Испании – 44/46.

Аналогичные множества расстояний используются также (например, для скелетных измерений) в судебной медицине, антропологии и т.п.

Расстояния в криминологии

Составление **географического профиля** (или *анализ географической привязки*) имеет целью связать пространственное поведение (выбор жертв и особенно наиболее вероятную *исходную точку*, т.е. место проживания или работы) серийного преступника с пространственным распределением мест его преступлений.

Буферная зона преступника (или *эффект угольного мешка*) – район, окружающий место *пребывания преступника* (исходную точку), в пределах которого отмечается незначительная или вообще не отмечается преступная деятельность; в обычных случаях такая зона характерна для преступников, заранее обдумывающих свои действия. Основные улицы и магистрали, ведущие в эту зону, чаще всего пересекаются вблизи убежища преступника. Для серийных насильников в Великобритании выявлена буферная зона, составляющая порядка 1 км. При этом большинство преступлений против личности происходят на удалении около 2 км от убежища преступника, тогда как для краж имущества характерно большее удаление.

Убывающая функция пути к месту преступления представляет собой графическую **кривую расстояния**, показывающую, как число совершенных преступлений постепенно сокращается по мере удаления от места проживания преступника. Подробные функции являются разновидностями функций центра тяжести, основанных на законе Ньютона о взаимном притяжении двух тел.

Если имеется число n мест преступления (x_i, y_i), $1 \le i \le n$ (где x_i и y_i являются широтой и долготой i-го места), то с помощью *модели Ньютона–Свопа* место убежища преступника определяется в пределах круга с центром в точке $\left(\frac{\sum_i x_i}{n} \cdot \frac{\sum_i y_i}{n}\right)$ с радиусом поиска равным

$$\sqrt{\frac{\max|x_{i1} - x_{i2}| \cdot \max|y_{i1} - y_{i2}|}{\pi(n-1)^2}},$$

где максимумы представлены как (i_1, i_2), $1 \le i_1 < i_2 \le n$. *Круговая модель Гантера–Грегори* позволяет предполагать место убежища преступника в пределах круга, центром которого является место первого преступления, а диаметром – максимальное расстояние между двумя местами преступлений.

Центрографические модели рассматривают место убежища преступника как *центр*, т.е. точку, от которой конкретная функция расстояния пути до любых мест преступления имеет минимальную величину; расстояниями в этом случае будут евклидово расстояние, расстояние Манхэттена, **колесное расстояние** (т.е. реальный путь пробега), воспринимаемое время пути и т.п. Многие из этих моделей являются действующими в обратную сторону моделями теории местоположения, (целью которой является максимальное наращивание распределительной сети в интересах сокращения путевых расходов. Эти модели (*многоугольники Вороного* и др.) базируются на **принципе близости** (*принципе минимального усилия*).

Для выявления криминальных, террористических и других скрытых сетей используются также многие другие средства сбора данных, с помощью которых получают сведения о латентных взаимосвязях (расстояниях и **почти метриках** между людьми), исследуя графы приближения их совместных появлений в соответствующих документах, событиях и т.п.

Расстояния в мире животных

Индивидуальное расстояние – удаление, на котором одно животное стремится держаться от другого.

Групповое расстояние – расстояние, на котором одна группа животных держится от другой.

Расстояние реагирования – расстояние, на котором животное реагирует на появление добычи; *расстояние атаки*: расстояние, в пределах которого хищник может напасть на свою жертву.

Расстояние бегства – расстояние, на котором животное реагирует на появление хищника или доминирующего животного того же вида.

Расстояние ближайшего соседа – более или менее постоянное расстояние, которого придерживаются животные между собой при движении в одном направлении в составе больших групп (таких, как косяки рыб, стаи птиц). Механизм аллеломиметического поведения ("делай так, как сосед") способствует сохранению целостности структуры группы и позволяет осуществлять кажущиеся разумными групповые маневры уклонения при появлении хищников.

Расстояние связи с использованием звуков (включая человеческую речь) – максимальное расстояние, на котором принимающий может услышать сигнал; животные могут менять амплитуду сигнала в зависимости от *удаления принимающего* для обеспечения передачи сигнала

Расстояние до берега – расстояние до побережья, используемое, например, для изучения сосредоточений мест выбрасывания китов на мель из-за искаженной эхолокации, аномалий магнитного поля и т.п.

Дистанционный феромон – растворимое (например, в моче) и/или испаряемое вещество, испускаемое животным в качестве ольфакторного химического раздражителя (метки) для подачи сигналов (тревоги, сексуальных намерений, приманки жертвы, узнавания и т.п.) другим особям этого же вида. В отличие от него *контактный феромон* является веществом нерастворимым и неиспаряющимся; он покрывает тело животного и является контактной меткой.

Расстояние на лошадиных скачках

На лошадиных скачках **корпус** является условной единицей длины для обозначения расстояния между соперниками (на лодочных гонках мерой длины является корпус лодки).

Расстояния на скачках измеряются в длинах корпуса лошади, т.е. около 8 футов (2,44 м). Преимущество на финише измеряется в **корпусах**, начиная от половины корпуса до 20 корпусов; корпус обычно приравнивают к временному интервалу в 0,2 с. Более мелкими длинами являются *короткая голова, голова* или *шея*. Применяется также мера *рука*, т.е. 4 дюйма (10,2 см), которую используют для измерения высоты лошадей.

Дистанции в триатлоне

Соревнования на **железную дистанцию** (впервые проведены на Гавайях в 1978 г.) включают 3,86 км плавания по открытой воде, 180 км велогонки и 42,2 км бега (марафонская дистанция).

Международная **олимпийская дистанция** (первые соревнования состоялись на Олимпийских Играх в Сиднее в 2000 г.) включает 1,5 км плавания (метрическая миля), 40 км велогонки и 10 км бега.

Существует также *спринтерская дистанция* (750 м плавания, 20 км велогонки и 5 км бега) и *длинная дистанция* (3 км плавания, 80 км велогонки и 20 км бега).

Расстояние шабата

Расстоянием шабата (или *раввинской милей*) называется дальность в 2000 талмудических кубитов (1120,4 м), разрешенное расстояние, за пределы которого верующему еврею запрещается выходить в день шабата.

Другими талмудическими мерами длины являются: суточный переход, парса и стадия (40, 4 и 0,8 раввинской мили соответственно), а также пядь, хасит, ладонь, большой палец, средний палец, мизинец ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{36}$ от талмудического кубита соотвтественно).

Галактоцентрическое расстояние

Галактоцентрическое расстояние звезды – ее удаленность от галактического центра. Галактоцентрическое расстояние Солнца составляет около 8,5 кпк, т.е. 27 700 св. лет.

Космический световой горизонт

Космический световой горизонт (или **расстояние Хаббла**, *возраст вселенной*) есть постоянно увеличивающееся **расстояние дальности**: максимальное расстояние, которое свет прошел с момента Большого взрыва, начала существования вселенной. В настоящее время он составляет 13–14 св. лет, т.е. около 46×10^{60} длин Планка.

Литература

[Abel91] Abels H. *The Gallery Distance of Flags*, Order, Vol. 8, pp. 77–92, 1991.

[AAH00] Aichholzer O., Aurenhammer F. and Hurtado F. *Edge Operations on Non-crossing Spanning Trees*, Proc. 16-th European Workshop on Computational Geometry CG'2000, pp. 121–125, 2000.

[AACL98] Aichholzer O., Aurenhammer F., Chen D.Z., Lee D.T., Mukhopadhyay A. and Papadopoulou E. *Voronoi Diagrams for Direction-sensitive Distances*, Proc. 13-th Symposium on Computational Geometry, ACM Press, New York, 1997.

[Aker97] Akerlof G.A. *Social Distance and Social Decisions*, Econometrica, Vol. 65, Nr. 5, pp. 1005–1027, 1997.

[Amar85] Amari S. *Differential-geometrical Methods in Statistics*, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, 1985.

[Amba76] Ambartzumian R. *A Note on Pseudo-metrics on the Plane*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, Vol. 37, pp. 145–155, 1976.

[ArWe92] Arnold R. and Wellerding A. *On the Sobolev Distance of Convex Bodies*, Aeq. Mathematicae, Vol. 44, pp. 72–83, 1992.

[Badd92] Baddeley A.J. *Errors in Binary Images and an L^p Version of the Hausdorff Metric*, Nieuw Archief voor Wiskunde, Vol. 10, pp. 157–183, 1992.

[Bara01] Barabasi A.L. *The Physics of the Web*, Physics World, July 2001.

[Barb35] Barbilian D. *Einordnung von Lobayschewskys Massenbestimmung in either Gewissen Allgemeinen Metrik der Jordansche Bereiche*, Casopis Mathematiky a Fysiky, Vol. 64, pp. 182–183, 1935.

[BLV05] Barcelo C., Liberati S. and Visser M. *Analogue Gravity*, **arXiv: gr-qc/0505065**, Vol. 2, 2005.

[BLMN05] Bartal Y., Linial N., Mendel M. and Naor A. *Some Low Distorsion Metric Ramsey Problems*, Discrete and Computational Geometry, Vol. 33, pp. 27–41, 2005.

[Bata95] Batagelj V. *Norms and Distances over Finite Groups*, J. of Combinatorics, Information and System Sci., Vol. 20, pp. 243–252, 1995.

[Beer99] Beer G. *On Metric Boundeness Structures*, Set-Valued Analysis, Vol. 7, pp. 195–208, 1999.

[BGLVZ98] Bennet C.H., Gacs P., Li M., Vitanai P.M.B. and Zurek W. *Information Distance*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 44, Nr. 4, pp. 1407–1423, 1998.

[BGT93] Berrou C., Glavieux A. and Thitimajshima P. *Near Shannon Limit Error-correcting Coding and Decoding: Turbo-codes*, Proc. of IEEE Int. Conf. on Communication, pp. 1064–1070, 1993.

[BFK99] Blanchard F., Formenti E. and Kurka P. *Cellular Automata in the Cantor, Besicovitch and Weyl Topological Spaces*, Complex Systems, Vol. 11, pp. 107–123, 1999.

[Bloc99] Bloch I. *On fuzzy distances and their use in image processing under unprecision*, Pattern Recognition, Vol. 32 pp. 1873–1895, 1999.

[BCFS97] Block H.W., Chhetry D., Fang Z. and Sampson A.R. *Metrics on Permutations Useful for Positive Dependence*, J. of Statistical Planning and Inference, Vol. 62, pp. 219–234, 1997.

[Blum70] Blumenthal L.M. *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea Publ., New York, 1970.

[Borg86] Borgefors G. *Distance Transformations in Digital Images*, Comp. Vision, Graphic and Image Processing, Vol. 34, pp. 344–371, 1986.

[BrLi04] Bramble D.M. and Lieberman D.E. *Endurance Running and the Evolution of Homo*, Nature, Vol. 432, pp. 345–352, 2004.

[BKMR00] Broder A.Z., Kumar S.R., Maaghoul F., Raghavan P., Rajagopalan S., Stata R., Tomkins A. and Wiener G. *Graph Structure in the Web: Experiments and Models*, Proc. 9-th WWW Conf., Amsterdam, 2000.

[BGL95] Brualdi R.A., Graves J.S. and Lawrence K.M. *Codes with a Poset Metric*, Discrete Math., Vol. 147, pp. 57–72, 1995.

[Brya85] Bryant V. *Metric Spaces: Iteration and Application*, Cambridge Univ. Press, 1985.

[Bull12] Bullough E. *"Psychical Distance" as a Factor in Art and as an Aestetic Principle*, British J. of Psychology, Vol. 5, pp. 87–117, 1912.

[BuIv01] Burago D., Burago Y. and Ivanov S. *A Course in Metric Geometry*, Amer. Math. Soc., Graduate Studies in Math., Vol. 33, 2001.

[BuKe53] Busemann H. and Kelly P.J. *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press, New York, 1953.

[Buse55] Busemann H. *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, New York, 1955.

[BuPh87] Busemann H. and Phadke B.B. *Spaces with Distinguished Geodesics*, Marcel Dekker, New York, 1987.

[Cair01] Cairncross F. *The Death of Distance 2.0: How the Communication Revolution will Change our Lives*, Harvard Business School Press, 2-nd edition, 2001.

[CSY01] Calude C.S., Salomaa K. and Yu S. *Metric Lexical Analysis*, Springer-Verlag, 2001.

[CJT93] Chartrand G., Johns G.L. and Tian S. *Detour Distance in Graphs*, Ann. of Discrete Math., Vol. 55, pp. 127–136, 1993.

[ChLu85] Cheng Y.C. and Lu S.Y. *Waveform Correlation by Tree Matching*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., Vol. 7, pp. 299–305, 1985.

[Chen72] Chentsov N.N. *Statistical Decision Rules and Optimal Inferences*, Nauka, Moscow, 1972.

[ChFi98] Chepoi V. and Fichet B. *A Note on Circular Decomposable Metrics*, Geom. Dedicata, Vol. 69, pp. 237–240, 1998.

[ChSe00] Choi S.W. and Seidel H.-P. *Hyperbolic Hausdorff Distance for Medial Axis Transform*, Research Report MPI-I-2000-4-003 of Max-Planck-Institute fur Infor-matik, 2000.

[COR05] Collado M.D., Ortuno-Ortin I. and Romeu A. *Vertical Transmission of Consumption Behavior and the Distribution of Surnames*, http://www.econ.upf.es/docs/ seminars/collado.pdf

[Cops68] Copson E.T. *Metric Spaces*, Cambridge Univ. Press, 1968.

[Corm03] Cormode G. *Sequence Distance Embedding*, PhD Thesis, Univ. of Warwick, 2003.

[CPQ96] Critchlow D.E., Pearl D.K. and Qian C *The Triples Distance for Rooted Bifurcating Phylogenetic Trees*, Syst. Biology, Vol. 45, pp. 323–334, 1996.

[CCL01] Croft W.B., Cronon-Townsend S. and Lavrenko V. *Relevance Feedback and Personalization: A Language Modeling Perspective*, in DELOS-NSF Workshop on Personalization and Recommender Systems in Digital Libraries, pp. 49–54, 2001.

[DaCh88] Das P.P. and Chatterji B.N. *Knight's Distance in Digital Geometry*, Pattern Recognition Letters, Vol. 7, pp. 215–226, 1988.

[Das90] Das P.P. *Lattice of Octagonal Distances in Digital Geometry*, Pattern Recognition Letters, Vol. 11, pp. 663–667, 1990.

[DaMu90] Das P.P. and Mukherjee J. *Metricity of Super-knight's Distance in Digital Geometry*, Pattern Recognition Letters, Vol. 11, pp. 601–604, 1990.

[Dau05] Dauphas N. *The U/Th Production Ratio and the Age of the Milky Way from Meteorites and Galactic Halo Stars*, Nature, Vol. 435, pp. 1203–1205, 2005.

[Day81] Day W.H.E. *The Complexity of Computing Metric Distances between Partitions*, Math. Social Sci., Vol. 1, pp. 269–287, 1981.

[DeDu03] Deza M.M. and Dutour M. *Cones of Metrics, Hemi-metrics and Super-metrics*, Ann. of European Academy of Sci., pp. 141–162, 2003.

[DeHu98] Deza M. and Huang T. *Metrics on Permutations, a Survey*, J. of Combinatorics, Information and System Sci., Vol. 23, Nrs. 1–4, pp. 173–185, 1998.

[DeLa97] Deza M.M. and Laurent M. *Geometry of Cuts and Metrics*, Springer-Verlag, 1997.

[Dzha01] Dzhafarov E.N. *Multidimensional Fechnerian Scaling: Probability-Distance Hypothesis*, J. of Math. Psychology, Vol. 46, pp. 352–374, 2001.

[EhHa88] Ehrenfeucht A. and Haussler D. *A New Distance Metric on Strings Computable in Linear Time*, Discrete Applied Math., Vol. 20, pp. 191–203, 1988.

[EM98] *Encyclopedia of Mathematics*, Hazewinkel M. (ed.), Kluwer Academic Publ., 1998. Online edition: http://eom.springer.de/default.htm

[Ernv85] Ernvall S. *On the Modular Distance*, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. IT-31, Nr. 4, pp. 521–522, 1985.

[EMM85] Estabrook G.F., McMorris F.R. and Meacham C.A. *Comparison of Undirected Phylogenetic Trees Based on Subtrees of Four Evolutionary Units*, Syst. Zool, Vol. 34, pp. 193–200, 1985.

[FaMu03] Farran J.N. and Munuera C. *Goppa-like Bounds for the Generalized Feng-Rao Distances*, Discrete Applied Math., Vol. 128, pp. 145–156, 2003.

[Faze99] Fazekas A. *Lattice of Distances Based on 3D-neighborhood Sequences*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, Vol. 15, pp. 55–60, 1999.

[Ferg03] Ferguson N. *Empire: The Rise and Demise of the British World Order and Lessons for Global Power*, Basic Books, 2003.

[FoSC06] Foertsch T. and Schroeder V. *Hyperbolicity, C AT (–1)-spaces and the Ptolemy Inequality*, arXiv:math.MG/0605418 v2 13 July 2006.

[Frie98] Frieden B.R. *Physics from Fisher information*, Cambrige Univ. Press, 1998.

[Gabi85] Gabidulin E.M. *Theory of Codes with Maximum Rank Distance*, Probl. Peredachi Inform., Vol. 21, Nr. 1, pp. 1–12, 1985.

[GaSi98] Gabidulin E.M. and Simonis J. *Metrics Generated by Families of Subspaces*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 44, Nr. 3, pp. 1136–1141, 1998.

[GiOn96] Gilbert E.G. and Ong C.J. *Growth distances: New Measures for Object Separation and Penetration*, IEEE Transactions in Robotics, Vol. 12, Nr. 6, 1996.

[Gile87] Giles J.R. *Introduction to the Analysis of Metric Spaces*, Australian Math. Soc. Lecture Series, Cambridge Univ. Press, 1987.

[GoMc80] Godsil C.D. and McKay B.D. *The Dimension of a Graph*, Quart. J. Math. Oxford Series (2), Vol. 31, Nr. 124, pp. 423–427, 1980.

[GOJKK02] Goh K.I., Oh E.S., Jeong H., Kahng B. and Kim D. *Classification of Scale Free Networks*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 99, pp. 12583–12588, 2002.

[Gopp71] Goppa V.D. *Rational Representation of Codes and (L,g)-codes*, Probl. Peredachi Inform., Vol. 7, Nr. 3, pp. 41–49, 1971.

[Goto82] Gotoh O. *An Improved Algorithm for Matching Biological Sequences*, J. of Molecular Biology, Vol. 162, pp. 705–708, 1982.

[GKC04] Grabowski R., Khosa P. and Choset H. *Development and Deployment of a Line of Sight Virtual Sensor for Heterogeneous Teams*, Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, New Orlean, 2004.

[Grub93] Gruber P.M. *The space of Convex Bodies in Handbook of Convex Geometry*, Gruber P.M. and Wills J.M. (eds.), Elsevier Sci. Publ., 1993.

[HSEFN95] Hafner J., Sawhney H.S., Equitz W., Flickner M. and Niblack W. *Efficient Color Histogram Indexing for Quadratic Form Distance Functions*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 17, Nr. 7, pp. 729–736, 1995.

[Hall69] Hall E.T. *The Hidden Dimension*, Anchor Books, New York, 1969.

[Hami66] Hamilton W.R. *Elements of Quaternions*, 2-nd edition 1899–1901 enlarged by C.J. Joly, reprinted by Chelsea Publ., New York, 1969.

[HeMa02] Head K. and Mayer T. *Illusory Border Effects: Distance mismeasurement inflates estimates of home bias in trade*, СЕРП Working Paper No 2002-01, 2002.

[Hemm02] Hemmerling A. *Effective Metric Spaces and Representations of the Reals*, Theoretical Comp. Sci., Vol. 284, Nr. 2, pp. 347–372, 2002.

[Hofs80] Hofstede G. *Culture's Consequences: International Differences in Work-related Values*, Sage Publ., California, 1980.

[Hube94] Huber K. *Codes over Gaussian Integers*, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. 40, Nr. 1, pp. 207–216, 1994.

[Hube93] Huber K. *Codes over Eisenstein-Jacobi Integers*, Contemporary Math., Vol. 168, pp. 165–179, 1994.

[HFPMC02] Huffaker B., Fomenkov M., Plummer D.J., Moore D. and Claffy K. *Distance Metrics in the Internet*, IEEE Int. Telecommunication Symposium (ITS-2002), September 2002, http://www.caida.org/outreach/papers/2002/Distance

[InVe00] Indyk P. and Venkatasubramanian S. *Approximate Congruence in Nearly Linear Time*, http://www.research.att.com/~suresh/papers/hallj/hallj.pdf

[Isbe64] Isbell J. *Six Theorems about Metric Spaces*, Comment. Math. Helv., Vol. 39, pp. 65–74, 1964.

[IsKuPe90] Isham C.J., Kubyshin Y. and Penteln P. *Quantum Norm Teory and the Quantization of Metric Topology*, Class. Quantum Gravity, Vol. 7, pp. 1053–1074, 1990.

[IvSt95] Ivanova R. and Stanilov G. *A Skew-symmetric Curvature Operator in Rieman-nian Geometry*, in Symposia Gaussiana, Conf. A, Behara M., Fritsch R. and Lintz R. (eds.), pp. 391–395, 1995.

[JWZ94] Jiang T., Wang L. and Zhang K. *Alignment of Trees – an Alternative to Tree Edit, in Combinatorial Pattern Matching, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 807, Crochemore M. and Gusfield D. (eds.), Springer-Verlag, 1994.

[Klei88] Klein R. *Voronoi Diagrams in the Moscow Metric*, Graph Theoretic Concepts in Comp. Sci., Vol. 6, 1988.

[Klei89] Klein R. *Concrete and Abstract Voronoi Diagrams*, Lecture Notes in Comp. Sci., Springer-Verlag, 1989.

[KlRa93] Klein D.J. and Randic M. *Resistance distance*, J. of Math. Chemistry, Vol. 12, pp. 81–95, 1993.

[Koel00] Koella J.C. *The Spatial Spread of Altruism Versus the Evolutionary Response of Egoists*, Proc. Royal Soc. London, Series B, Vol. 267, pp. 1979–1985, 2000.

[KoSi88] Kogut B. and Singh H. *The Effect of National Culture on the Choice of Entry Mode*, J. of Int. Business Studies, Vol. 19, Nr. 3, pp. 411–432, 1988.

[KKN02] Kosheleva O., Kreinovich V. and Nguyen H.T. *On the Optimal Choice of Quality Metric in Image Compression*, Fifth IEEE Southwest Symposium on Image Analysis and Interpretation, 7–9 April 2002, Santa Fe. IEEE Comp. Soc. Digital Library, Electronic Edition, pp. 116–120, 2002.

[LaLi81] Larson R.C. and Li V.O.K. *Finding Minimum Rectilinear Distance Paths in the Presence of Bariers*, Networks, Vol. 11, pp. 285–304, 1981.

[LCLM04] Li M., Chen X., Li X., Ma B. and Vitanyi P. *The Similarity Metric*, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. 50–12, pp. 3250–3264, 2004.

[LuRo76] Luczak E. and Rosenfeld A. *Distance on a Hexagonal Grid*, IEEE Trans. on Computers, Vol. 25, Nr. 5, pp. 532–533, 1976.

[MaMo95] Mak King-Tim and Morton A.J. *Distances between Traveling Salesman Tours*, Discrete Applied Math., Vol. 58, pp. 281–291, 1995.

[MaSt99] Martin W.J. and Stinson D.R. *Association Schemes for Ordered Orthogonal Arrays and (T, M, S)-nets*, Canad. J. Math., Vol. 51, pp. 326–346, 1999.

[McCa97] McCanna J.E. *Multiply-sure Distances in Graphs*, Congressus Numerantium, Vol. 97, pp. 71–81, 1997.

[Melt91] Melter R.A. *A Survey of Digital Metrics*, Contemporary Math., Vol. 119, 1991.

[Monj98] Monjardet B. *On the Comparaison of the Spearman and Kendall Metrics between Linear Orders*, Discrete Math., Vol. 192, pp. 281–292, 1998.

[Mura85] Murakami H. *Some Metrics on Classical Knots*, Math. Ann., Vol. 270, pp. 35–45, 1985.

[NeWu70] Needleman S.B. and Wunsh S.D. *A general Method Applicable to the Search of the Similarities in the Amino Acids Sequences of Two Proteins*, J. of Molecular Biology, Vol. 48, pp. 443–453, 1970.

[NiSu03] Nishida T. and Sugihara K. *FEM-like Fast Marching Method for the Computation of the Boat-Sail Distance and the Associated Voronoi Diagram*, http://www. keisu.t.u-tokyo.ac.jp/Research/METR/2003/METR03–45.pdf

[OBS92] Okabe A., Boots B. and Sugihara K. *Spatial Tesselation: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, Wiley, 1992.

[OSLM04] Oliva D., Samengo I., Leutgeb S. and Mizumori S. *A Subgective Distance between Stimuli: Quantifying the Metric Structure of Represantations*, Neural Computation, Vol.17, Nr. 4, pp. 969–990, 2005.

[Orli32] Orlicz W. *Uber eine Gewisse Klasse von Raumen vom Typus B'*, Bull. Int. Acad. Pol. Series A, Vol. 8–9, pp. 207–220, 1932.

[OASM03] Ozer H., Avcibas I., Sankur B. and Memon N.D. *Steganalysis of Audio Based on Audio Quality Metrics*, Security and Watermarking of Multimedia Contents V (Proc. of SPIEIS and T), Vol. 5020, pp. 55–66, 2003.

[Page65] Page E.S. *On Monte-Carlo Methods in Congestion Problem. 1. Searching for an Optimum in Discrete Situations*, J. Oper. Res., Vol. 13, Nr. 2, pp. 291–299, 1965.

[Petz96] Petz D. *Monotone Metrics on Matrix Spaces*, Linear Algebra Appl., Vol. 244, 1996.

[PM] PlanetMath.org, http://planetmath.org/encyclopedia/

[Rach91] Rachev S.T. *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*, Wiley, New York, 1991.

[ReRo01] Requardt M. and Roy S. *(Quantum) Spacetime as a Statistical Geometry of Fuzzy Lumps and the Connection with Random Metric Spaces*, Class. Quantum Gravity, Vol. 18, pp. 3039–3057, 2001.

[RoTs96] Rosenbloom M.Y. and Tsfasman M.A. *Codes for the m-metric*, Problems of information transmission, Vol. 33, Nr. 1, pp. 45–52, 1997.

[RoPf68] Rosenfeld A. and Pfaltz J. *Distance Functions on Digital Pictures*, Pattern Recognation, Vol. 1, pp. 33–61, 1968.

[RTG00] Rubner Y., Tomasi C. and Guibas L.J. *The Earth Mover's Distance as a Metric for Image Retrieval*, Int. J. of Comp. Vision, Vol. 40, Nr. 2, pp. 99–121, 2000.

[Rumm76] Rummel R.J. *Understanding Conflict and War*, Sage Publ., California, 1976. [ScSk83] Schweizer B. and Sklar A. Probabilistic Metric Spaces, North-Holland, 1983.

[Selk77] Selkow S.M. *The Tree-to-tree Editing Problem*, Inform. Process. Lett., Vol. 6, Nr. 6, pp. 184–186, 1977.

[ShKa97] Sharma B.D. and Kaushik M.L. *Error-correcting Codes through a New Metric*, 41-st Annual Conf. Int. Stat. Inst., New Delhi, 1997.

[Tai79] Tai K.-C. *The Tree-to-tree Correction Problem*, J. of the Association for Comp. Machinery, Vol. 26, pp. 422–433, 1979.

[Tail04] Tailor B. *Introduction: How Far, How Near: Distance and Proximity in the Historical Imagination*, History Workshop J., Vol. 57, pp. 117–122, 2004.

[Tymo06] Tymoczko D. *The Geometry of Musical Chords*, Science, Vol. 313, Nr. 5783, pp.72–74, 2006.

[ToSa73] Tomimatsu A. and Sato H. *New Exact Solution for the Gravitational Field of a Spinning Mass*, Phys. Rev. Letters, Vol. 29, pp. 1344–1345, 1972.

[Var04] Vardi Y. *Metrics Useful in Network Tomography Studies*, Signal Processing Letters, Vol. 11, Nr. 3, pp. 353–355, 2004.

[VeHa01] Veltkamp R.C. and Hagendoorn M. *State-of-the-Art in Shape Matching*, in Principles of Visual Information Retrieval, Lew M. (ed.), pp. 87–119, Springer-Verlag, 2001.

[Watt99] Watts D.J. *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*, Princeton Univ. Press, 1999.

[Wein72] Weinberg S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York, 1972.

[Weis99] Weisstein E.W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 1999.

[Well86] Wellens R.A. *Use of a Psychological Model to Assess Differences in Telecommunication Media*, in *Teleconferencing and Electronic Communication*, Parker L.A. and Olgren O.H. (eds.), pp. 347–361, Univ. of Wisconsin Extension, 1986.

[WFE] Wikipedia, the Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org

[WiMa97] Wilson D.R. and Martinez T.R. *Improved Heterogeneous Distance Functions*, J. of Artificial Intelligence Research, Vol. 6, p. 134, 1997.

[WoPi99] Wolf S. and Pinson M.H. *Spatial-Temporal Distortion Metrics for In-Service Quality Monitoring of Any Digital Video System*, Proc. of SPIE Int. Symp. on Voice, Video, and Data Commun., September 1999.

[Yian91] Yianilos P.N. *Normalized Forms for Two Common Metrics*, NEC Research Institute, Report 91-082-9027-1, 1991.

[Youn98] Young N. *Some Function-Theoretic Issues in Feedback Stabilisation*, Holomor-phic Spaces, MSRI Publication, Vol. 33, 1998.

[YOI03] Yutaka M., Ohsawa Y. and Ishizuka M. *Average-Clicks: A New Measure of Distance on the World Wide Web*, Journal of Intelligent Information Systems, Vol. 20, No. 1, pp. 51–62, 2003.

[Zeli75] Zelinka B. *On a Certain Distance between Isomorphism Classes of Graphs*, Ca-sopus. Pest. Mat., Vol. 100, pp. 371–373, 1975.

Научное издание

Деза Елена Ивановна
Деза Мишель-Мари

**ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ
СЛОВАРЬ РАССТОЯНИЙ**

Перевод с английского языка

Зав. редакцией *М.В. Грачева*
Редактор *Л.В. Филиппова*
Художник *В.Ю. Яковлев*
Художественный редактор *Ю.И. Духовская*
Технический редактор *В.В. Лебедева*
Корректор

Подписано к печати 00.00.2007
Формат $70 \times 100^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 00,0. Усл.кр.-отт. 00,0. Уч.-изд.л. 00,0
Тираж 000 экз. Тип. зак.

Издательство "Наука"
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
www.naukaran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12