УДК 53(038)
ББК 22.3
Д26

Перевод с английского языка
В.И. Сычева

Деза Е.И., Деза М.-М.
Энциклопедический словарь расстояний / Елена Деза, Мишель-Мари Деза ; [пер. с англ. В.И. Сычева] ; Моск. гос. пед. ун-т ; Нормальная высш. шк., Париж. – М. : Наука, 2008. – с. – ISBN 978-5-02-036043-3 (в пер.).

В словаре приведены толкования терминов расстояние, мера, метрика, пространство и т.п., в применении к различным сферам науки и реальной жизни.
Для широкого круга специалистов.

По сети "Академкнига"

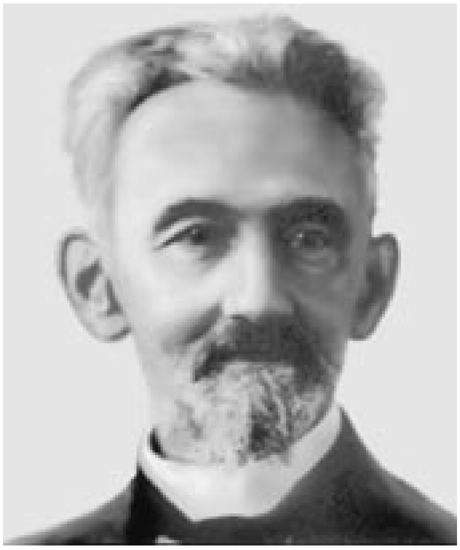
ISBN 978-5-02-036043-3

2 апреля 2006 г. исполнилось 100 лет со дня защиты французским ученым Морисом Фреше выдающейся докторской диссертации, в которой он впервые (в рамках систематического изучения функциональных операций) ввел абстрактное понятие метрического пространства.

Более 90 лет прошло также с публикации в 1914 г. Феликсом Хаусдорфом знаменитой книги "Основы теории множеств", в которой им была представлена теория топологического и метрического пространств.

Мы посвящаем данный Энциклопедический словарь светлой памяти этих великих математиков и их достойной жизни в тяжелые времена первой половины XX столетия.

Морис Фреше (1878–1973) ввел в обращение в 1906 г. термин *écart* (*полуметрика*)



Феликс Хаусдорф (1868–1942) ввел в обращение в 1914 г. термин *метрическое пространство*

Предисловие

Понятие *расстояния* является одним из основных во всей человеческой деятельности. В повседневной жизни расстояние обычно означает некоторую степень близости двух физических объектов или идей (т.е. длину, временной интервал, промежуток, различие рангов, отчужденность или удаленность), в то время как термин *метрика* зачастую используется как стандартное понятие меры или измерения. В нашей книге, за исключением двух последних глав, рассматривается математическое значение этих терминов, которое представляет собой абстракцию измерения. Математические понятия *метрики* (т.е. функции $d(x, y)$ из $X \times X$ в множество действительных чисел, удовлетворяющей условиям $d(x, y) \geqslant 0$ с равенством только при $x = y$, $d(x, y) = d(x, y)$ и $d(x, y) \leqslant \boldsymbol{d}(x, z) + d(z, y)$) и *метрического пространства* (X,d) были введен почти век назад М. Фреше (в 1906 г.) и Ф. Хаусдорфом (в 1914 г.) в качестве специального случая бесконечного топологического пространства. Упомянутое выше *неравенство треугольника* $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ можно найти уже у Евклида. Бесконечные метрические пространства появляются обычно как обобщения метрики $|x–y|$ на множестве действительных чисел. Основными их классами являются меры пространства (добавьте меру) и банаховы пространства (добавьте норму и полноту).

Однако, начиная с К. Менгера (который в 1928 г. ввел понятие метрического пространства в геометрию) и Л.М. Блюменталя (1953 г.), интерес как к конечным, так и к бесконечным метрическим пространствам резко повышается. Другой тенденцией стало то, что многие математические теории в процессе их обобщения стабилизировались на уровне метрического пространства.

Этот процесс продолжается и сейчас, в частности, применительно к римановой геометрии, действительному анализу, теории приближений.

Метрики и расстояния стали важным инструментом исследований в самых разных областях математики и ее приложений, включая геометрию, теорию вероятностей, статистику, теорию кодирования, теорию графов, кластерный анализ, анализ данных, распознавание образов, теорию сетей, математическую инженерию, компьютерную графику, машинное зрение, астрономию, космологию, молекулярную биологию и многие другие отрасли науки. Создание наиболее удобных метрик стало центральной задачей для многих исследователей. Особенно интенсивно ведутся поиски таких расстояний, в частности, в математической биологии, распознавании речи и образов, выборке информации. Нередки случаи, когда одни и те же метрики появляются независимо друг от друга в таких совершенно разных сферах, как, например, расстояние между словами и эволюционное расстояние в биологии, расстояние Левенштейна в теории кодирования и расстояние Хэмминга – с пропусками или хэммингово тасованное расстояние.

Накопленная информация о расстояниях настолько обширна и разрозненна, что работать с ней стало почти невозможно. Так, например, количество предлагаемых веб-сайтом "Google" вводимых данных по тематике "расстояние", "метрическое пространство" и "метрика" превосходит 300 млн (т.е. около 4% общего объема вводимых данных), 12 млн и 6 млн соответственно, и это без учета всей печатной информации, циркулирующей вне сети Интернет, или того "невидимого" массива сведений, содержащихся в доступных для поиска базах данных. При этом вся эта обширная информация о расстояниях весьма разбросана по источникам, а в некоторых работах проблематика расстояний касается настолько специфических предметов, что говорить о ее доступности для неспециалистов не приходится.

В связи с этим многие исследователи, в частности сами авторы, стараются накапливать и хранить данные о расстояниях применительно к собственным сферам научной деятельности. В условиях растущей потребности в междисциплинарном источнике информации общего пользования о расстояниях и метриках авторы решили расширить свою личную коллекцию и создать на ее базе "Энциклопедический словарь расстояний". Дополнительные материалы были почерпнуты из изданий энциклопедического характера, в значительной мере из "Математической энциклопедии" ([EM98]), "Мира математики" ([Weis99]), "Планеты "Математика" ([PM]) и "Википедии" ([WFE]). Однако главным источником информации для словаря явилась специальная литература.

Помимо собственно расстояний авторы включили в книгу много родственных понятий (особенно в гл. 1) и парадигм, позволяющих применять практически малопонятные для неспециалистов термины, представленные в готовом для использования виде. Все это, а также появление некоторых расстояний в совершенно ином контексте может дать толчок новым исследованиям.

В наше время, когда чрезмерная специализация и терминологические барьеры ведут к разобщению исследователей, наш словарь выполняет скорее центростремительную и объединительную функции, обеспечивая доступность и более широкий обзор информации, но без скатывания к научной популяризации предмета. Это стремление соответствующим образом сбалансировать излагаемый материал предопределило структуру и стиль книги.

Данный справочник представляет собой специализированный энциклопедический тематический словарь. Он состоит из 28 глав в семи частях примерно одинакового объема. Названия частей преднамеренно даны приближенно в расчете на то, что читатель самостоятельно выберет тематику в зависимости от собственных интересов и компетентности. Так, например, части II, III и IV, V потребуют определенного уровня знаний соответственно в области чистой и прикладной математики, в то время как содержание части VII будет доступно любому неспециалисту.

Главы являются по существу перечнями тематик по различным областям математики или приложениям, которые могут читаться независимо друг от друга. При необходимости глава или раздел могут предваряться кратким введением – экскурсом по основным понятиям. Помимо таких предисловий описание характерных особенностей и областей применения расстояний дается в тексте скорее как исключение. Авторы старались, по мере возможности, упоминать тех, кто первым ввел то или иное определение расстояния, при этом предлагаемая обширная библиография имеет целью обеспечить удобный источник для быстрого поиска.

Каждая из глав компонуется таким образом, чтобы между ее разделами прослеживалась взаимосвязь. Все заголовки разделов и ключевые термины вынесены отдельно в предметный указатель (около 1500 пунктов) и обозначены жирным шрифтом, если только их значение не вытекает из контекста. Это облегчает поиск определений по тематике внутри главы и по алфавиту в самом указателе. Тексты введений и определения ориентированы на удобство для читателя и максимально независимы друг от друга. Они остаются взаимосвязанными посредством обозначенных жирным шрифтом текстовых ссылок (по типу формата HTML с гиперссылками) на схожие определения.

Много интересных сведений представлено в этом биографическом справочнике расстояний "Кто есть кто". Примерами занятных терминов являются относящееся к вездесущему евклидову расстоянию выражение "как ворона летает" (т.е. по прямой линии), "метрика цветочного магазина" (кратчайшее расстояние между двумя точками с промежуточным посещением точки "цветочного магазина"), "метрика хода коня" на шахматной доске, "метрика гордиева узла", "метрика бульдозера", расстояние биотопа, "прокрустово расстояние", "метрика лифта", "почтовая метрика", хоп-метрика Интернета, квази-метрика гиперссылок WWW, "московская метрика", "расстояние собаковода".

Кроме абстрактных расстояний рассматриваются также расстояния с физическим содержанием (особенно в части VI). Они существуют в диапазоне от $1{,}6 \times 10^{-35}$ м (длина Планка) до $7{,}4 \times 10^{26}$ м (оцениваемые размеры наблюдаемой Вселенной, около 46×10^{60} длин Планка).

Количество метрик бесконечно и поэтому перечислить их все невозможно. Однако авторы были вдохновлены примером успешного составления тематических словарей по другим бесконечным перечням, в частности, целочисленным последовательностям, неравенствам, случайным процессам, а также атласов функций, групп, фуллеренов и т.п. Кроме того, обширность тематики зачастую вынуждала авторов излагать материал в лаконичной форме учебного пособия.

Этот словарь ориентирован в основном на научных работников, занимающихся исследованиями с проведением различных измерений, и в определенной мере на студентов, а также интересующихся наукой рядовых читателей.

Авторы попытались охватить, пусть даже не полностью, весь спектр прикладного использования понятия расстояния. Однако некоторые расстояния не нашли отражения в книге либо по причине нехватки места (из-за чрезмерной специфики или сложности предмета), либо по недосмотру авторов. В целом объем текста и сбалансированность содержания (т.е. определение целесообразной достаточности информации по той или иной теме) явились основной трудностью. Мы будем благодарны читателям, которые выскажутся за включение в словарь каких-либо пропущенных или дополнительных расстояний. В конце книги для личных заметок читателей на эту тему зарезервировано несколько чистых страниц.

Авторы выражают благодарность многим людям за оказанную при написании данного словаря помощь и в первую очередь Жаку Бейбедеру, Мэтью Дютуру, Эммануэлю Герре, Жаку Кулену, Джин Хо Кваку, Хироши Маэхара, Сергею Спекторову, Алексею Сосинскому и Цзяньцану Чжуангу.

Содержание

ЧАСТЬ VII. РАССТОЯНИЯ В РЕАЛЬНОМ МИРЕ

Часть I

МАТЕМАТИКА РАССТОЯНИЙ

Глава 1

Общие определения

1.1. БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Расстояние

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **расстоянием** (или **непохожестью**) на X, если для всех $x, y \in X$ выполняются условия:

1) $d(x, y) \geq 0$ (*положительная определенность*);

2. $d(x, y) = d(y, x)$ (*симметричность*);

3. $d(x, x) = 0$ (*рефлексивность*).

В топологии такая функция называется также симметрикой. Вектор от x к y, длина которого равняется $d(x, y)$, называется **перенесением**. Расстояние, равное квадрату метрики, называется *квадрансом*.

Для любого расстояния d функция, определяемая при $x \neq y$ как $D(x, y) = d(x, y) + c$, где $c = \max_{x, y, z \in X}(d(x, y) - d(x, z) - d(y, z))$, и $D(x, x) = 0$, является метрикой.

Пространство расстояний

Пространством расстояний (X, d) называется множество X, снабженное расстоянием d.

Подобность

Пусть X – произвольное множество. Функция $s : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **подобностью** на X, если s является *положительно определенной, симметричной*, и для любых $x, y \in X$ имеет место неравенство $s(x, y) \leq s(x, x)$, которое превращается в равенство тогда и только тогда, когда $x = y$.

Основными преобразованиями, дающими расстояние (непохожесть) d из подобности s, ограниченной 1 сверху, являются

$$d = 1 - s,\quad d = \frac{1-s}{s},\quad d = \sqrt{1-s},\quad d = \sqrt{2(1-s^2)},\quad d = \arccos s, d = -\ln s \text{ (см. гл. 4).}$$

Полуметрика

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **полуметрикой** (или **псевдометрикой**) на X, если d является *положительно определенной, симметричной, рефлексивной*, и для любых $x, y, z \in X$ справедливо **неравенство треугольника**

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Для любого расстояния d равенство $d(x, x) = 0$ и **строгое неравенство треугольника** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ гарантируют, что d является полуметрикой.

Метрика

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрикой** на X, если для всех $x, y, z \in X$ выполняются условия:

1. $d(x, y) \geq 0$ (*положительная определенность*);
2. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (*аксиома тождественности самому себе*);
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (*симметричность*);
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*неравенство треугольника*).

Метрическое пространство

Метрическим пространством (X, d) называется множество X, снабженное метрикой d.

Метрическая схема

Метрической схемой называется метрическое пространство с целочисленной метрикой.

Расширенная метрика

Расширенная метрика является обобщением понятия метрики: для d допустимо значение ∞.

Почти-метрика

Пусть X – произвольное множество. Расстояние d на X называется **почти-метрикой**, если неравенство

$$0 \leqslant d(x, y) \leq C(d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \ldots + d(z_n, y))$$

выполнено, при некоторой константе $C > 1$, для всех различных $x, y, z_1, \ldots, z_n \in X$.

Метрика упрощенного пути

Пусть X – произвольное множество. Метрика d на X называется **метрикой упрощенного пути**, если для некоторого фиксированного $C > 0$ и для каждой пары точек $x, y \in X$ существует последовательность $x = x_0, x_1, ..., x_t = y$, для которой $d(x_{i-1}, x_i) \leq C$ при $i = 1, \ldots, t$, и

$$d(x, y) \geq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{t-1}, x_t) - C,$$

т.е. ослабленное неравенство треугольника $d(x, y) \leq \sum_{i=1}^{t} d(x_{i-1}, x_i)$ становится равенством с точностью до ограниченной ошибки.

Квазирасстояние

Пусть X – произвольное множество. Функция $s : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **квазирасстоянием** на X, если d является *положительно определенной* и *рефлексивной.*

Квазиполуметрика

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **квазиполуметрикой** на X, если d является *положительно определенной* и *рефлексивной,* и для всех $x, y, z \in X$ справедливо о**риентированное неравенство треугольника**

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Квазиметрикой Альберта называется квазиполуметрика d на X со *слабой определенностью*: для всех $x, y \in X$ из равенства $d(x, y) = d(y, x)$ следует равенство $x = y$.

Слабой квазиметрикой называется квазиполуметрика d на X со *слабой симметрией*: для любых x, y X равенство $d(x, y) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $d(y, x) = 0$.

Квазиметрика

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **квазиметрикой** на X, если для всех $x, y \in X$ имеет место неравенство $d(x, y) \geq 0$, которое становится равенством тогда и только тогда, когда $x = y$, и для всех $x, y, z \in X$ *справедливо* **ориентированное неравенство треугольника**

$$d(y, x) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Квазиметрическим пространством (X,d) называется множество X, снабженное квазиметрикой d.

Для любой квазиметрики d функции $\max\{d(x, y), d(y, x)\}$, $\min\{d(x, y), d(y, x)\}$ и $\frac{d(x,y)+d(y,x)}{2}$ являются (**эквивалентными**) метриками.

Неархимедовой квазиметрикой d называется квазирасстояние на X, которое удовлетворяет следующей усиленной версии ориентированного неравенства треугольника: для всех $x, y, z \in X$

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

$2k$-гональное расстояние

$2k$-гональным расстоянием называется расстояние d на X, удовлетворяющее **$2k$-гональному неравенству**

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} b_i b_j d(x_i, x_j) \leq 0$$

для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} |b_i| = 2k$, и для всех различных элементов $x_1, ..., x_n \in X$.

Расстояние отрицательного типа

Расстоянием отрицательного типа называется расстояние d на X, которое является $2k$-гональным для любого $k \geq 1$, т.е. удовлетворяет **неравенству отрицательного типа**

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} b_i b_j d(x_i, x_j) \leq 0$$

для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$ и для всех различных элементов $x_1, ..., x_n \in X$.

Расстояние может быть расстоянием отрицательного типа, не являясь при этом полуметрикой. Кэли доказал, что метрика d является **L_2-метрикой** тогда и только тогда, когда d^2 – расстояние отрицательного типа.

$(2k + 1)$-гональное расстояние

$(2k+1)$-**гональным расстоянием** называется расстояние d на X, которое удовлетворяет $(2k+1)$-**гональному неравенству**

$$\sum_{1\le i<j\le n} b_i b_j d(x_i, x_j) \le 0$$

для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$ и $\sum_{i=1}^{n} |b_i| = 2k+1$, и для всех различных элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$.

$(2k+1)$-гональное неравенство с $k=1$ является обычным неравенством треугольника. $(2k+1)$-гональное неравенство влечет $2k$-**гональное неравенство**.

Гиперметрика

Гиперметрикой называется расстояние d на X, которое является $(2k+1)$-гональным для любого $k \ge 1$, т.е. удовлетворяет **гиперметрическому неравенству**

$$\sum_{1\le i<j\le n} b_i b_j d(x_i, x_j) \le 0$$

для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$, и для всех различных элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$. Любая гиперметрика является полуметрикой и **расстоянием отрицательного типа**. Любая L_1-**метрика** является гиперметрикой.

***P*-метрика**

***P*-метрикой** называется метрика d на X со значениями из множества $[0, 1]$, которая удовлетворяет **корреляционному неравенству треугольника**

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z) - d(x, z)d(z, y).$$

Эквивалентное неравенство $1-d(x, y) \ge (1-d(x, z))(1-d(z, y))$ означает, что вероятность, скажем, достичь x из y через z либо равна величине $(1-d(x, z))(1-d(z, y))$ (независимо от возможности достичь z из x и y из z), либо превышает ее (положительная корреляция).

Метрика будет P-метрикой тогда и только тогда, когда она является **метрикой преобразования Шенберга** (см. гл. 4).

Птолемеева метрика

Птолемеевой метрикой называется метрика d на X, удовлетворяющая **неравенству Птолемея** (доказанному Птолемеем для евклидова пространства): для всех $x, y, u, z \in X$

$$d(x, y)d(u, z) \le d(x, u)d(y, z) + d(x, z)d(y, u).$$

Птолемеевым пространством называется *нормированное векторное пространство* $(V, \|.\|)$, в котором его метрика нормы $\|x-y\|$ является птолемеевой. Нормированное векторное пространство будет птолемеевым пространством тогда и только тогда, когда оно является **пространством со скалярным произведением**; таким образом, **метрика Минковского** (см. гл. 6) является евклидовой тогда и только тогда, когда она является птолемеевой.

Инволютивное пространство $(X \setminus z,\ d_z)$, где $d(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{d(x,z)d(y,z)}$, является метрическим пространством для любого $z \in X$ тогда и только тогда, когда d является птолемеевой метрикой ([FoSC06]).

Для любой метрики d расстояние $\sqrt{d}$ является птолемеевой метрикой ([FoSC06]).

Слабая ультраметрика

Слабой ультраметрикой (или ***C*-псевдорасстоянием**) называется расстояние d на X, для которого при некоторой константе $C \geq 1$, неравенство

$$0 < d(x, y) \leq C \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

выполняется для всех $x, y, z \in X$, $x \neq y$. Для такого расстояния d расстояние $d(x, y) = \inf \sum_i d(z_i, z_{i+1})$, где инфимум берется по всем последовательностям $x = z_0, ..., z_{n+1})$, является полуметрикой.

Термин **псевдорасстояние** используется также в некоторых приложениях для обозначения **псевдометрики, квазирасстояния, почти-метрики**, расстояния, которое может быть бесконечным, расстояния с ошибкой и т.п.

Ультраметрика

Ультраметрикой (или *неархимедовой метрикой*) называется метрика d на X, которая удовлетворяет усиленной версии неравенства треугольника:

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

для всех $x, y, z \in X$. Таким образом, по крайней мере два значения из $d(x, y)$, $d(z, y)$ и $d(x, z)$ совпадают.

Метрика d является ультраметрикой тогда и только тогда, когда ее **степенное преобразование** (см. гл. 4) d^α является метрикой для любого положительного действительного числа α. Любая ультраметрика удовлетворяет **неравенству четырех точек**. Метрика d является ультраметрикой тогда и только тогда, когда оно является **метрикой преобразования Фарриса** (см. гл. 4) **метрики неравенства четырех точек**.

Метрика неравенства четырех точек

Метрика d на X удовлетворяет условию **неравенства четырех точек** (или называется *аддитивной метрикой*), если имеет место усиленная версия неравенства треугольника: для всех $x, y, z, u \in X$

$$d(x, y) + d(z, u) \leq \max\{d(x, z) + d(y, u), d(x, u) + d(y, z)\}.$$

Другими словами, из трех сумм $d(x, y) + d(z, u)$, $d(x, z) + d(y, u)$ и $d(x, u) + d(y, z)$ две наибольшие совпадают.

Метрика удовлетворяет неравенству четырех точек тогда и только тогда, когда она является **древовидной** метрикой.

Любая метрика, удовлетворяющая неравенству четырех точек, является *птолемеевой метрикой* и **l_1-метрикой**.

Кустарниковая метрика – метрика, для которой все неравенства четырех точек являются равенствами, т.е. равенство $d(x, y) + d(u, z) = d(x, u) + d(y, z)$ справедливо при любых значениях $u, x, y, z \in X$.

Метрика ослабленного неравенства четырех точек

Метрика d на X удовлетворяет условию **ослабленного неравенства четырех точек**, если, для всех $x, y, z \in X$ из трех сумм

$$d(x, y) + d(z, u), d(x, z) + d(y, u), d(x, u) + d(y, z)$$

по крайней мере две (не обязательно наибольшие) совпадают.

Метрика удовлетворяет ослабленному неравенству четырех точек тогда и только тогда, когда она является ослабленной **древовидной метрикой**.

δ-гиперболическая метрика

Если $\delta \geq 0$, то метрика d на множестве X называется **δ-гиперболической**, если она удовлетворяет **δ-гиперболическому неравенству Громова** (еще одно ослабление **неравенства четырех точек**): для всех $x, y, z, u \in X$

$$d(x, y) + d(z, u) \leq 2\delta + \max\{d(x, z) + d(y, u), d(x, u) + d(y, z)\}.$$

Метрическое пространство (X,d) является δ-гиперболическим тогда и только тогда, когда

$$(x.y)_{x_0} \geq \min\left\{(x.z)_{x_0},\ (y.z)_{x_0}\right\} - \delta$$

для всех $x, y, z \in X$ и для любого $x_0 \in X$, где $(x, y)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x_0, x) + d(x_0, y) - d(x, y))$ – **произведение Громова** точек x и y из X относительно базовой точки $x_0 \in X$.

Метрическое пространство (X, d) является 0-гиперболическим тогда и только тогда, когда d удовлетворяет **неравенству четырех точек**. Каждое ограниченное метрическое пространство, имеющее диаметр D, является D-гиперболическим. n-мерное *гиперболическое пространство* является $\ln 3$-гиперболическим.

Подобность произведения Громова

Пусть (X, d) – метрическое пространство с фиксированной точкой $x_0 \in X$. **Подобностью произведения Громова** (или *произведением Громова, ковариантностью*) $(.)_{x_0}$ называется подобность на X, определяемая по формуле

$$(x.y)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x_0, x) + d(x_0, y) - d(x, y)).$$

Если (X, d) является деревом, то $(x.y)_{x_0} = d(x_0[x, y])$. Если (X,d) – **полуметрическое пространство меры**, т.е. $d(x, y) = \mu(x\Delta y)$ для борелевой меры μ на X, то $(x.y)_{\varnothing} = \mu(x \cap y)$. Если d является **расстоянием отрицательного типа**, т.е. $d(x, y) = d_E^2(x, y)$ для подмножества X евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, то $(x.y)_0$ будет обычным *скалярным произведением* на $\mathbb{E}^n$ (см. **Метрика преобразования Фарриса**, гл. 4).

1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С РАССТОЯНИЕМ, И ЧИСЛОВЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Метрический шар

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство. **Метрическим шаром** (или *замкнутым метрическим шаром*) с центром $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ называется множество $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$. **Открытым метрическим**

шаром с центром $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ называется множество $B(x_0, r) = \{x_0 \in X : d(x_0, x) < r\}$.

Метрической сферой с центром $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ называется множество $S(x_0, r) = \{x_0 \in X : d(x_0, x) = r\}$.

Для **метрики нормы** на *n-мерном нормированном векторном пространстве* $(V, \| \cdot \|)$ метрический шар $\overline{B}^n = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ называется *единичным шаром*, а множество Sn–1 = $\{x \in V : \| x \| = 1\}$ – *единичной сферой* (или *единичной гиперсферой*). В двумерном векторном пространстве метрический шар (открытый или замкнутый) называется *метрическим диском* (соответственно открытым или замкнутым).

Метрическая топология

Метрическая топология – *топология* на X, порождаемая метрикой d на X.

Если (X,d) – произвольное метрическое пространство, определим *открытое множество* в X как произвольное объединение (конечного или бесконечного числа) открытых метрических шаров $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. *Замкнутое множество* определяется теперь как дополнение открытого множества. Метрической топологией на (X,d) называется множество всех открытых в X множеств. Топологическое пространство, которое может быть получено таким образом из метрического пространства, называется **метризуемым пространством**.

Метризационные теоремы – теоремы, дающие достаточные условия метризуемости топологического пространства.

С другой стороны, термин *метрика* указывает скорее на связь с мерой, нежели с расстоянием, применительно к ряду важнейших математических определений, например, в *метрической теории чисел, метрической теории функций, метрической транзитивности*.

Замкнутый метрический интервал

Пусть $x, y \in X$ – две различные точки метрического пространства (X,d). **Замкнутым метрическим интервалом** между x и y называется множество

$$I(x, y) = \{z \in X : d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}.$$

Основной граф метрического пространства

Основной граф (или граф соседства) метрического пространства (X,d) – граф с множеством вершин X, в котором xy является ребром, если $I(x, y) = \{x, y\}$, т.е. не существует третьей точки $z \in X$, для которой выполнялось бы равенство $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Метрическое пространство, монотонное относительно расстояния

Метрическое пространство (X,d) называется пространством, **монотонным относительно расстояния**, если для любого интервала и существует $I(x, x')$ и $y \in X \backslash I(x, x')$ существует $x'' \in X(x, x')$ такое что $d(y, x'') > d(x, x')$.

Метрический треугольник

Три различные точки $x, y, z \in X$ метрического пространства (X,d) образуют **метрический треугольник**, если **замкнутые метрические интервалы** $I(x, y)$, $I(z, x)$ и $I(z, x)$ пересекаются только в общих концевых точках.

Модулярное метрическое пространство

Метрическое пространство (X,d) называется **модулярным**, если для любых трех различных точек $x, y, z \in X$ существует $u \in I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x)$.

Не следует смешивать это с **модулярным расстоянием** (см. гл. 10) и **метрикой модулюса** (см. гл. 6).

Метрический четырехугольник

Четыре различные точки $x, y, z, u \in X$ произвольного метрического пространства (X,d) образуют **метрический четырехугольник**, если $x, z \in I(y, u)$ и $y, u \in I(x, z)$. Для такого метрического четырехугольника будут иметь место равенства $d(x, y) = d(z, u)$ и $d(x, u) = d(y, z)$.

Метрическое пространство (X,d) называется *слабо сферическим*, если для любых трех различных точек $x, y, z \in X$ с $y \in I(x, z)$ существует $u \in X$, такое что x, y, z, u образуют метрический четырехугольник.

Связное метрическое пространство

Метрическое пространство (X,d) называется **связным**, если его нельзя разбить на два непустых *открытых* множества (см. **Связное пространство**, гл. 2).

Более сильным свойством является путь – связность, при которой любые две точки могут быть соединены **путем**.

Метрическая кривая

Метрическая кривая (или просто *кривая*) γ в метрическом пространстве (X,d) представляет собой непрерывное отображение $\gamma : I \to X$ интервала I из $\mathbb{R}$ в X. Кривая называется **дугой** (или **путем**, *простой кривой*), если она является инъективной. Кривая $\gamma : [a, b] \to X$ называется **жордановой кривой** (или *простой замкнутой кривой*), если она не пересекает саму себя и $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Длина $l(\gamma)$ кривой $\gamma : [a, b] \to X$ определяется формулой

$$l(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{1 \le i \le n} d(\gamma(t_i),\ \gamma(t_{i-1})) : n \in \mathbb{N},\ a = t_0 < \ldots < t_n = b \right\}.$$

Спрямляемая кривая – это кривая конечной длины. Метрическое пространство (X,d), в котором каждые две точки могут быть соединены спрямляемой кривой, называется ***C*-квазивыпуклым метрическим пространством** при наличии некоторой константы $C \ge 1$, такой что каждая пара $x, y \in X$ может быть соединена спрямляемой кривой максимальной длины $Cd(x, y)$. Если $C = 1$, то эта длина равна $d(x, y)$, т.е. пространство (X,d) является **геодезическим** (или *строго внутренним*) метрическим пространством.

Геодезическая

Для произвольного метрического пространства (X,d) **геодезической** называется локально кратчайшая **метрическая кривая**, т.е. локально изометрическое вложение $\mathbb{R}$ в X.

Геодезическим отрезком (или *кратчайшим путем*) $[x, y]$ от x до y является изометрическое вложение $\gamma : [a, b] \to X$ с $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$.

Метрическая прямая – геодезическая, которая является минимальной между двумя любыми ее точками; она представляет собой изометрическое вложение всего $\mathbb{R}$ в X. **Метрический луч** и **метрический большой круг** представляют собой изометрические вложения в X соответственно полупрямой $\mathbb{R}_{\ge 0}$ и окружности $S(0, r)$.

Геодезическим метрическим пространством называется метрическое пространство, в котором две любые точки соединены геодезическим отрезком. Оно называется **геодезически полным**, если каждый такой отрезок является поддугой метрической прямой.

Геодезическая выпуклость

Для произвольного **геодезического** метрического пространства (X, d) и подмножества $M \subset X$ множество M называется **геодезически выпуклым** (или **выпуклым**), если для любых двух точек из M существует соединяющий их геодезический отрезок, который полностью принадлежит M; оно называется **локально выпуклым**, если такой отрезок существует для любых двух достаточно близких точек множества M.

Радиусом инъективности множества M называется наименьшее число r, такое что для двух любых точек из M, расстояние между которыми $<r$, существует единственный соединяющий их геодезический отрезок, который полностью принадлежит M.

Множество M называется **вполне выпуклым**, если для любых двух его точек каждый соединяющий их геодезический отрезок полностью принадлежит M. Для данной точки $x \in X$ *радиусом выпуклости* называется радиус наибольшего вполне выпуклого метрического шара с центром в точке x.

Выпуклость Буземана

Геодезическое метрическое пространство (X, d) называется **выпуклым по Буземану** (или **глобально неположительно искривленным по Буземану**), если для любых трех точек $x, y, z \in X$ и срединных точек $m(x, z)$ и $m(y, z)$ выполняется условие

$$d(m(x,z),\ m(y,z)) \le \frac{1}{2} d(x,y).$$

Другими словами, расстояние $D(c_1, c_2)$ между любыми геодезическими отрезками и $c_1 = [a_1, b_1]$ является *выпуклой функцией*. (Действительная функция f, определенная на некотором интервале, называется *выпуклой*, если условие $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ выполнено для любых x, y и $\lambda \in (0, 1)$.)

Плоская евклидова полоса $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$ является **гиперболической по Громову**, но не является выпуклой по Буземану. Две любые точки полного метрического пространства, выпуклого по Буземану, связаны единственным геодезическим отрезком.

Геодезическое метрическое пространство (X,d) является **локально выпуклым по Буземану** (Буземан, 1948), если вышеуказанное неравенство выплоняется локально.

Любое **локально CAT(0)** метрическое пространство (см. гл. 6) является локально выпуклым по Буземану и любое геодезическое **CAT(0)** метрическое пространство является выпуклым по Буземану, но обратное неверно.

Выпуклость по Менгеру

Метрическое пространство (X,d) называется **выпуклым по Менгеру**, если для двух различных точек $x, y \in X$ существует третья точка $z \in X$, для которой $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$, т.е. условие $|I(x, y)| > 2$ имеет место для **замкнутого метрического интервала** $I(x, y) = \{z \in X : d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}$. Метрическое пространство (X,d) называется **строго выпуклым по Менгеру**, если такая точка z является единственной для всех $x,\ y \in X$.

Подмножество $M \subset X$ называется ***d*-выпуклым множеством** (Менгер, 1928), если для любых различных точек $x,\ y \in X$ имеет место включение $I(x,\ y) \subset M$. Функция $f: M \to \mathbb{R}$, определенная на d-выпуклом множестве $M \subset X$, называется ***d*-выпуклой функцией**, если для любого $z \in I(x,\ y) \subset M$ выполняется условие

$$f(z) \le \frac{d(y,z)}{d(x,y)} f(x) + \frac{d(x,z)}{d(x,y)} f(y).$$

Срединная выпуклость

Метрическое пространство (X,d) называется **срединно выпуклым** (или *допускающим срединное отображение*), если для любых различных точек $x,\ y \in X$ существует третья точка $z \in X$, называемая *срединной точкой* $m(x,\ y)$, для которой выполняются равенства $d(x,\ y) = d(x,\ z) + d(z,\ y)$ и $d(x,z) = \frac{1}{2} d(x,y)$.

Отображение $m : X \times X \to X$ называется **срединным отображением** (см. **Срединное множество**); оно будет единственным, если указанная выше точка z единственна для всех $x,\ y \in X$.

Полное метрическое пространство является **геодезическим** метрическим пространством тогда и только тогда, когда оно срединно выпукло.

Шаровая выпуклость

Срединно выпуклое метрическое пространство (X,d) называется **шарово выпуклым**, если неравенство

$$d\big(m(x,y),\ z\big) \le \max\{d(x,z),\ d(y,z)\}$$

справедливо для всех $x,\ y,\ z \in X$ и любого срединного отображения $m(x,\ y)$.

Шаровая выпуклость влечет, что все метрические шары вполне выпуклы, и, в случае геодезического метрического пространства, наоборот.

Метрическое пространство $(\mathbb{R}^2,\ d(x,y) = \sum_{i=1}^{2} \sqrt{|x_i - y_i|})$ шарово выпуклым не является.

Расстоянная выпуклость

Срединно выпуклое метрическое пространство (X,d) называется **расстоянно выпуклым**, если

$$d(m(x,y),z) \le \frac{1}{2}(d(x,z) + d(y,z)).$$

Геодезическое метрическое пространство является расстоянно выпуклым тогда и только тогда, когда сужение функции расстояния $d(x,\cdot)$, $x \in X$ на каждый геодезический отрезок является выпуклой функцией.

Расстоянная выпуклость порождает **шаровую выпуклость** и, для случая метрического пространства, выпуклого по Буземану, наоборот.

Метрическая выпуклость

Метрическое пространство (X,d) называется **метрически выпуклым**, если для любого различных точек $x,\ y \in X$ и любого $\lambda \in (0,\ 1)$ существует третья точка

$z = z(x, y, \lambda) \in X$, для которой $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ и $d(x, z) = \lambda d(x, y)$. Метрическая выпуклость порождает **выпуклость по Менгеру**.

Метрическое пространство (X,d) называется **строго метрически выпуклым**, если такая точка $z(x, y, \lambda)$ является единственной для всех $x, y \in X$ и $\lambda \in (0, 1)$.

Метрическое пространство (X,d) называется **сильно метрически выпуклым**, если для любых различных точек $x, y \in X$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ существует третья точка $z = z(x, y, \lambda) \in X$, для которой $d(z(x, y, \lambda_1), z(x, y, \lambda_2)) = |\lambda_1 - \lambda_2| d(x, y)$. Сильная метрическая выпуклость порождает метрическую выпуклость, и каждое полное метрическое пространство, выпуклое по Менгеру, является сильно метрически выпуклым.

Метрическое пространство (X,d) называется **почти выпуклым** (Мандел-керн, 1983), если для любых различных точек $x, y \in X$ и любых $\lambda, \mu > 0$, таких что $d(x, y) < \lambda + \mu$, существует третья точка $z \in X$, для которой $d(x, z) < \lambda$ и $d(z, y) < \mu$, т.е. $z \in B(x, \lambda) \cap B(y, \mu)$. Метрическая выпуклость порождает почти выпуклость.

Выпуклость по Такахаши

Метрическое пространство (X,d) называется **выпуклым по Такахаши**, если для любых различных точек $x, y \in X$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ существует третья точка $z = z(x, y, \lambda) \in X$, такая что неравенство $d(z(x, y, \lambda), u) \le \lambda d(x, u) + (1 - \lambda) d(y, u)$ имеет место для всех $u \in X$. Любое выпуклое подмножество нормированного пространства является метрическим пространством, выпуклым по Такахаши, с $z(x, y, \lambda) = \lambda d + (1 - \lambda) y$.

Множество $M \subset X$ является *выпуклым по Такахаши*, если $z(x, y, \lambda) \in M$ для всех $x, y \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$. Такахаши доказал в 1970 г., что в метрическом пространстве, выпуклом по Такахаши, все замкнутые метрические шары, открытые метрические шары и произвольное пересечение подмножеств, выпуклых по Такахаши, являются выпуклыми по Такахаши.

Гипервыпуклость

Метрическое пространство (X,d) называется **гипервыпуклым**, если оно метрически выпукло и его метрические шары обладают *бесконечным свойством Хелли*, т.е. любая система взаимно пересекающихся закрытых шаров в X имеет непустое пересечение. Метрическое пространство (X,d) является гипервыпуклым тогда и только тогда, когда оно – **инъективное** метрическое пространство.

Пространства l_∞^m, l_∞ и L_∞ являются гипервыпуклыми, а l_2 – нет.

Метрическая энтропия

Пусть $\varepsilon > 0$. **Метрическая энтропия** (или *ε-энтропия*) $H_\varepsilon(M, X)$ подмножества $M \subset X$ метрического пространства (X,d) определяется (Колмогоров, 1956) как

$$H_\varepsilon(M, X) = \log_2 N_\varepsilon(M, X),$$

где $N_\varepsilon(M, X)$ является наименьшим количеством точек в **ε-сети** (или *ε-накрытии*) для метрического пространства (M, d), т.е. в множестве точек, таких что объединение открытых ε-шаров с центрами в указанных точках накрывает M.

Понятие метрической энтропии для *динамической системы* является одним из важнейших инвариантов эргодической теории.

Метрическая размерность

Для метрического пространства (X,d) и любого действительного числа $q > 0$ пусть $N_X(q)$ будет минимальным количеством множеств с диаметром, не превосходящим q, которые необходимы для накрытия X (см. **Метрическая энтропия**). Число $\lim\limits_{q \to 0} \frac{\ln(N(q)}{\ln(1/q)}$ (если оно существует) называется **метрической размерностью** (или **размерностью Минковского–Балиганда**, *размерностью Минковского, упаковочной размерностью, бокс-размерностью* пространства X.

Если указанного выше предела не существует, то рассматриваются следующие понятия размерности:

1. Число $\lim\limits_{q \to 0} \frac{\ln(N(q)}{\ln(1/q)}$ называется ***нижней метрической размерностью*** (или *нижней бокс-размерностью, размерностью Понтрягина–Шнирелмана*, **нижней размерностью Минковского**).

2. Число $\lim\limits_{q \to 0} \frac{\ln(N(q)}{\ln(1/q)}$ называется **верхней метрической размерностью** (или *энтропической размерностью*, **размерностью Колмогорова–Тихомирова**, *верхней бокс-размерностью*).

Ниже приводятся пять примеров других, менее значимых понятий метрической размерности, встречающиеся в математической литературе.

1. (Базисная) *метрическая размерность* метрического пространства, – минимальное кардинальное число его **метрического базиса**, т.е. его наименьшего подмножества S, такого что не существует двух точек с равными расстояниями до всех точек из S.

2. (Равнобочная) *метрическая размерность* метрического пространства – максимальное кардинальное число его *эквидистантного* подмножества, т.е. такого, что любые две его различные точки равноотстоят друг от друга. Для нормированного пространства эта размерность равна максимальному числу попарно касающихся параллельных переносов его единичного шара.

3. Для любого $c > 1$ *метрической размерностью* (по нормированному пространству) $\dim_c(X)$ конечного метрического пространства (X,d) называется наименьшая размерность действительного *нормированного пространства* $(V, \|\cdot\|)$, такого что существует вложение $f : X \to V$ с $\frac{1}{c} d(x,y) \leq \|f(x) - f(y)\| \leq$ $\leq d(x,y)$.

4. (Евклидовой) *метрической размерностью* конечного метрического пространства (X,d) называется наименьшая размерность n евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, такого что $(X, f(d))$ является его метрическим подпространством, где минимум берется по всем непрерывным монотонно возрастающим функциям $f(t)$ от $t \geq 0$.

5. *Степенью многомерности* метрического пространства называется число $\frac{\mu^2}{2\sigma^2}$, где μ и σ^2 являются средним и отклоняющимся значениями его гистограммы расстояний; данное понятие используется для выборки информации при поиске отношений близости.

Ранг метрического пространства

Рангом Минковского метрического пространства (X,d) называется максимальная размерность нормированного векторного пространства $(V, \|\cdot\|)$, такого что существует изометрическое вложение $(V, \|\cdot\|) \to (X,d)$.

Евклидовым рангом метрического пространства (X,d) называется максимальная размерность *n-мерной плоскости* в нем, т.е. евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, такого что существует изометрическое вложение $\mathbb{E}^n \to (X,d)$.

Квазиевклидовым рангом метрического пространства (X,d) называется максимальная размерность *n-мерной квазиплоскости* в нем, т.е. евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, такого что в нем существует **квазиизометрия** $\mathbb{E}^n \to (X,d)$. Ранг любого **метрического пространства**, **гиперболического по Громову**, равен 1.

Размерность Хаусдорфа

Для метрического пространства (X,d) и любых действительных $p,\ q > 0$ пусть $M_p^q(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\mathrm{diam}(A_i)\right)^p$, где инфимум берется по всем счетным покрытиям $\{A_i\}_i$ множества X с диаметром A_i меньше q. **Размерность Хаусдорфа** (или *размерность Хаусдорфа-Бесиковича, размерность емкости*, **фрактальная размерность**) $\dim_{\mathrm{Haus}}(X,d)$ множества X определяется как

$$\inf\left\{p : \lim_{q\to 0} M_p^q(X) = 0\right\}.$$

Любое счетное метрическое пространство имеет размерность Хаусдорфа, равную 0; размерность Хаусдорфа для евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ равна n.

Для каждого **вполне ограниченного** метрического пространства его размерность Хаусдорфа ограничена **метрической размерностью** сверху и **топологической размерностью** снизу.

Топологическая размерность

Для любого компактного метрического пространства (X,d) его **топологическая размерность** (или **размерность лебегова покрытия**) определяется как

$$\inf_{d'}\left\{\dim_{\mathrm{Haus}}(X,d')\right\},$$

где d' – любая метрика на X, топологически эквивалентная d, а $\dim_{\mathrm{Haus}}$ – **размерность Хаусдорфа**.

В общем случае **топологической размерностью** топологического пространства X называется наименьшее целое число n, такое что для любого конечного открытого покрытия множества X существует конечное открытое подпокрытие (т.е. подразделение), такое что ни одна из точек множества X не принадлежит более чем $n + 1$ элементам.

Фрактал

Топологическая размерность любого метрического пространства не превышает его **размерности Хаусдорфа. Фракталом** называется метрическое пространство, для которого это неравенство является строгим. (Первоначально Мандельбройт определил фрактал как точечное множество с нецелочисленной размерностью Хаусдорфа). Например, *множество Кантора*, рассматриваемое как компактное метрическое подпространство пространства $\mathbb{R}$, $d(x,\ y) = |x-y|$, обладает размерностью Хаусдорфа $\frac{\ln 2}{\ln 3}$; (см. другую **Канторову метрику** на нем в гл. 11, 18). Другой классический фрактал, *ковер Серпинского* множества $[0,1] \times [0,1]$, является **полным геодезическим** метрическим подпространством пространства $(\mathbb{R}^2, d(x, y) = \|x{-}y\|_1)$.

Термин *фрактал* используется также в более общем смысле для обозначения *самоподобности* (т.е., грубо говоря, подобия при любом масштабе) объекта (обычно – подмножества $\mathbb{R}^n$).

Размерность Ассуад–Нагата

Размерностью Ассуада–Нагаты метрического пространства (X,d) называется наименьшее действительное число n (или ∞, если такого числа n не существует), для которого существует константа $C > 0$, такая что для всех $s > 0$ имеется покрытие X его подмножествами с диаметрами $\leq Cs$, в котором каждое подмножество X диаметра $\leq s$ пересекается с $\leq n + 1$ элементами покрытия.

Размерность Ассуада–Нагаты будет конечной тогда и только тогда, когда d – **метрика удвоения**.

Топологическая размерность метрического пространства не превышает его размерности Ассуада–Нагаты.

Размерность удвоения

Размерностью удвоения метрического пространства (X,d) называется наименьшее целое число N (или ∞, если такого числа N не существует), такое что каждый метрический шар (или, скажем, множество конечного диаметра) может быть покрыт семейством не более 2^N метрических шаров (или соответственно множеств) с половинным диаметром. Если (X,d) имеет конечную размерность удвоения, то d называется **метрикой удвоения**.

Размерность Вольберга–Конягина

Размерностью Вольберга–Конягина метрического пространства (X,d) называется наименьшая константа $C > 1$ (или ∞, если такого числа C не существует), для которой X обладает *мерой удвоения*, т.е. борелевской мерой μ, такой что

$$\mu(\overline{B}(x,2r)) \leq C\mu(\overline{B},r))$$

для всех $x \in X$ и $r > 0$. Метрическое пространство (X,d) обладает мерой удвоения тогда и только тогда, когда d является **метрикой удвоения**, и любая полная метрика удвоения обладает мерой удвоения.

Константой Каргера–Рула метрического пространства (X,d) называется наименьшая константа $c > 1$ (или ∞, если такого числа c не существует), для которой

$$\left|\overline{B}(x,2r)\right| \leq c\left|\overline{B}(x,r)\right|$$

для всех $x \in X$ и $r > 0$. Если она конечна (скажем, равна t), то максимальное значение **размерности удвоения** метрического пространства (X,d) составит $4t$.

Асимптотическая размерность

Понятие **асимптотической размерности** метрического пространства (X,d) было введено Громовым. Это – наименьшее число n, такое что для любого $s > 0$ существуют константа $D = D_{(s)}$ и покрытие X его подмножествами с диаметрами, не превосходящими D, в котором каждое подмножество X диаметра $\leq s$ пересекается с $\leq n + 1$ элементами покрытия.

Размерность Годсил–Маккея

Метрическое пространство (X,d) имеет **размерность Годсил–Маккея** $n \geq 0$, если существуют элемент $x_0 \in X$ и две положительные константы c и C, такие что неравенство $ck^n \le |\{x \in X : d(x, x_0) \le k\}| \le Ck^n$ имеет место для каждого целого числа $k \geqslant 0$. Данное понятие было введено в [GoMc80] для обозначения **метрики пути** счетного локально конечного графа. Было доказано, что если группа $\mathbb{Z}^n$ действует на вершинах графа точно и с конечным числом орбит, то данная размерность равна n.

Длина метрического пространства

Длиной Фремлина метрического пространства называется одномерная внешняя мера Хаусдорфа на X.

Длиной Хейкмана $lng(Y)$ подмножества $M \subset X$ метрического пространства (X,d) называется $\sup\{lng(M') : M' \subset M, |M'| < \infty\}$. Здесь $lng(\varnothing) = 0$ и, для конечного подмножества $M' \subset X$, $lng(M') = \min \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i)$, где минимум берется по всем последовательностям $x_0, ..., x_n$, таким что $\{x_i : i = 0, 1, ..., n\} = M'$.

Длиной Шехтмана конечного метрического пространства (X,d) называется $\inf \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ по всем таким последовательностям $a_1, ..., a_n$ положительных чисел, что существует последовательность $X_0, \dots, X_n$ разбиений X со следующими свойствами:

1. $X_0 = \{X\}$ и $X_n = \{\{x\} : x \in X\}$;
2. X_i подразбивает X_{i-1} для $i = 1, \dots, n$;
3. Для $i = 1,\dots, n$ и $B,\ C \subset A \in X_{i-1}$ с $B,\ C \in X_i$ существует такое однозначное отображение f из B на C, что $d(x, f)(x)) \le a_i$ для всех $x \in B$.

Тип метрического пространства

Тип по Енфло метрического пространства (X,d) равен p, если существует такая константа $1 \le C < \infty$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждой функции $f : \{-1,1\}^n \to X$ имеет место неравенство

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} d^p\big(f(\varepsilon),\ \ f(-\varepsilon)\big) \ \le$$

$$\le C^p \sum_{j=1}^{n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} d^p(f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, ..., \varepsilon_n),\ \ f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{j-1}, -\varepsilon_j, ..., \varepsilon_n)).$$

Банахово пространство $(V, \|\cdot\|)$ типа p по Енфло имеет *тип p по Радемахеру*, т.е. для всех $x_1,\dots,x_n \in V$ выполняется неравенство

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \right\|^p \le C^p \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p.$$

Для данного метрического пространства (X,d) *симметричной цепью Маркрова на X* является цепь Маркова $\{\mathbb{Z}_l\}_{l=0}^{\infty}$ на пространстве состояний $\{x_1,\dots,x_m\} \subset X$ с таким симметричным переносом $m \times m$ матрицы $((a_{ij}))$ что $P(Z_{l+1} = x_j : Z_l = x_j) = a_{ij}$ и $P(Z_0 = x_i) = \dfrac{1}{m}$ для всех целых $1 \le i,\ j \le m$ и $l \ge 0$. Метрическое пространство (X,d)

имеет **тип** p по **Маркову** (Болл, 1992), если $\sup_T M_p(X, T) < \infty$, где $M_p(X, T)$ – такая наименьшая константа $C > 0$, что для каждой симметричной цепи Маркова $\{\mathbb{Z}_l\}_{l=0}^{\infty}$ на X выполняется, в терминах ожидаемой величины (среднего значения) $\mathbb{E}[X] = \sum_x xp(x)$ дискретной случайной величины X, неравенство

$$\mathbb{E}d^p(Z_T, Z_0) \le TC^p \mathbb{E}d^p(Z_1, Z_0).$$

Метрическое пространство типа p по Маркову имеет тип p по Енфло.

Сила метрического пространства

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство с s различными ненулевыми значениями $d_{x,y}$. Его сила есть наибольшее число t, такое что для любых целых p, $q \ge 0$ с $p + q \le t$ существует многочлен $f_{pq}(s)$ степени, не превосходящей $\min\{p, q\}$, такой что $\left((d_{ij}^{2p})\right)\left((d_{ij}^{2q})\right) = \left(\left(f_{pq}(d_{ij}^2)\right)\right)$.

Метрический функционал

Для случая конечного подмножества $M \subset X$ в метрическом пространстве (X,d) примеры **метрического функционала** на M приведены ниже.

***p*-энергия** множества M есть число $\sum_{x,y \in M, x \ne y} \frac{1}{d^p(x,y)}$; обычно $p = 1,2$.

Среднее расстояние множества M есть число $\frac{1}{|M|(|M|-1)} \sum_{x,y \in M} d(x,y)$.

Индекс Винера множества M (применяемый в химии) есть число $\frac{1}{2} \sum_{x,y \in M} d(x,y)$.

Центр массы конечного множества M есть точка $x \in M$, минимизирующая функционал $\sum_{y \in M} d^2(x,y)$.

Число встречи

Числом встречи (или *числом Гросса, магическим числом*) метрического пространства (X,d) называется положительное действительное число $r(X,d)$ (если такое существует), такое что для каждого целого n и любых (не обязательно различных) $x_1,\dots,x_n \in X$ существует $x \in X$, для которого

$$r(X,d) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x).$$

Если для метрического пространства (X,d) число встречи $r(X,d)$ существует, то говорят, что (X,d) имеет **свойство среднего расстояния** и его **магическая константа** определяется как $\frac{r(X,d)}{\mathrm{diam}(X,d)}$, где $\mathrm{diam}(X,d) = \max_{x,y \in X} d(x,y)$ – **диаметр** (X,d).

Каждое компактное связное метрическое пространство обладает свойством среднего расстояния. *Единичный шар* $\{x \in V : \|x\| \le 1\}$ **банахова пространства** $(V, \|\cdot\|)$ имеет свойство среднего расстояния с числом встречи 1.

Порядок конгруэнтности

Метрическое пространство (X,d) обладает **порядком конгруэнтности** n, если каждое конечное метрическое пространство, не являющееся **изометрически вложимым** в (X,d), имеет подпространство, содержащее не более n точек, которое не может быть изометрически вложено в (X,d).

Радиус метрического пространства

Пусть (X,d) – ограниченное метрическое пространство и $M \subset X$. **Метрическим радиусом** (или **радиусом**) множества M называется инфимум радиусов метрических шаров, содержащих M, т.е. $\inf_{x \in M} \sup_{y \in M} d(x, y)$. Некоторые авторы называют *радиусом* половину **диаметра**.

Радиусом покрытия множества $M \subset X$ называется $\max_{x \in X} \min_{y \in M} d(x, y)$, т.е. наименьшее число R, такое что открытые метрические шары радиуса R с центрами в элементах M покрывают X. Его называют еще **ориентированным хаусдорфовым расстоянием** от X к M. Множество M называется ε-*покрытием*, если его радиус покрытия не превышает ε. Для данного положительного числа m **минимаксимальная расстоянная конфигурация размера** m есть m-подмножество X с наименьшим радиусом покрытия.

Радиусом уплотнения множества $M \subset X$ называется такое наибольшее r, что открытые метрические шары радиуса r с центрами в элементах M являются попарно непересекающимися, т.е. $\min_{y \in X} \min_{y \in M} d(x, y) > 2r$. Множество M называется ε-уплотнением, если его радиус уплотнения не менее ε. Для данного положительного числа m **максимальная расстоянная конфигурация размера** m есть m-подмножество множества X с наибольшим радиусом уплотнения.

Размер наименьшего ε-*покрытия* не превосходит размера наибольшего $\frac{\varepsilon}{2}$-уплотнения. $\frac{\varepsilon}{2}$-уплотнение M является *нерасширяемым*, если $M \cup \{x\}$ не является $\frac{\varepsilon}{2}$-уплотнением для каждого $x \in X \backslash M$, т.е. M является также ε-**сетью**.

Эксцентриситет

Пусть (X,d) – ограниченное метрическое пространство. **Эксцентриситетом** точки $x \in X$ называется число $e(x) = \max_{y \in X} d(x, y)$. Числа $\max_{x \in X} e(x)$ и $\min_{x \in X} e(x)$ называются соответственно **диаметром** и **радиусом** (X,d).

Точки $x \in X$ с максимальным $e(x)$ называются *периферийными точками*. Множества $\{x \in X : e(x) \le e(z)$ для любого $z \in X\}$ и $\{x \in X : \sum_{y \in X} d(x, y) \le \sum_{y \in X} d(z, y)$ для любого $z \in X\}$ называются соответственно **метрическим центром** (или *центром эксцентриситета, центром*) и **метрической медианой** (или *центром расстояния*) пространства (X,d).

k-подмножество называется $M \subset X$ $\boldsymbol{k}$-**медианой**, если она минимизирует сумму $\sum_{x \in X} d(x, M)$, где $d(x,M)$ – **расстояние между точкой и множеством**.

Метрический диаметр

Метрический диаметр (или **диаметр**, ширина) diam(M) подмножества $M \subseteq X$ метрического пространства (X,d) определяется как

$$\sup_{x,y \in M} d(x,y).$$

Граф диаметра множества M имеет вершинами все точки $x \in M$ с $d(x,y) = \mathrm{diam}(M)$ для некоторого $y \in M$, а в качестве ребер – пары его вершин на расстоянии diam(M) в (X,d).

Метрическое пространство (X,d) называется **антиподальным метрическим пространством** (или *диаметральным метрическим пространством*), если для любого $x \in X$ существует диаметрально противоположная точка – его антипод, т.е. единственное $x' \in X$, такое что интервал $I(x,x')$ совпадает с X.

Хроматические числа метрического пространства

Для данного метрического пространства (X,d) и некоторого множества D положительных действительных чисел ***D*-хроматическим числом** пространства (X,d) называется стандартное *хроматическое число* **графа *D*-расстояния** для (X,d), т.е. графа с множеством вершин X и множеством ребер $\{xy : d(x,y) \in D\}$. Обычно (X,d) является l_p-*пространством* и $D = \{1\}$ (**хроматическое число Бенда–Перлеса**) или $D = [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ (хроматическое число *графа* ε-*единичного расстояния*).

Для метрического пространства (X,d) **полихроматическим числом** называется минимальное число цветов, необходимых для окрашивания всех точек $x \in X$ таким образом, чтобы для каждого класса цвета C_i существовало такое расстояние d_i, чтобы никакие две точки из C_i не находились на расстоянии d_i.

Для любого целого числа $t > 0$ **хроматическое число *t*-расстояния** метрического пространства (X,d) есть минимальное число цветов, необходимых для окрашивания всех точек $x \in X$ так, чтобы любые две точки на расстоянии $\leq t$ имеют разные цвета.

Для любого целого числа $t > 0$ ***t*-м числом Бабаи** пространства (X,d) называется минимальное число цветов, необходимых для окрашивания всех точек $x \in X$ так, чтобы для любого множества D положительных расстояний с $|D| \leq t$ цвета любых двух точек, расстояние между которыми принадлежит D, не совпадали.

Отношение Штейнера

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство и $V \subset X$ – его конечное подмножество. Рассмотрим полный взвешенный граф $G = (V,E)$ с множеством вершин V и весами ребер $d(x,y)$ для всех $x,y \in V$.

Остовным деревом T графа G называется подмножество из $|V| - 1$ ребра, образующее дерево на V, с *весом* $d(T)$, равным сумме весов его ребер. Пусть MST_V – *минимальное остовное дерево* графа G, т.е. *остовное дерево* минимального веса $d(MST_V)$.

Минимальное дерево Штейнера на V есть такое дерево SMT_V, что его множество вершин является подмножеством X, содержащим V, и $d(SMT_V) = \inf_{M \subset X : V \subset M} d(MST_M)$.

Отношение Штейнера $St(X,d)$ метрического пространства (X,d) определяется как

$$\inf_{V \subset X} \frac{d(SMT_V)}{d(MST_V)}.$$

Для любого метрического пространства (X,d) имеем $\frac{1}{2} \le St(X,d) \le 1$. Для l_2-**метрики** (т.е. евклидовой метрики) на $\mathbb{R}^2$, оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$, в то время как для l_1-**метрики** на $\mathbb{R}^2$ оно равно $\frac{2}{3}$.

Метрический базис

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство. Подмножество $M \subset X$ называется **метрическим базисом** X, если выполняется следующее условие: $d(x,s) = d(y,s)$ для всех $s \in M$ влечет $x = y$. Для $x \in X$ числа $d(x,s)$, $s \in M$ называются **метрическими координатами** x.

Срединное множество

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство и $y, z \in X$ – две его различные точки. **Срединном множеством** (или *биссектрисой*) X называется множество $\{x \in X : d(x,y) = d(x,z)\}$ *срединных точек* x.

Говорят, что метрическое пространство имеет *n-точечное свойство биссектрисы*, если для каждой пары его точек срединное множество имеет ровно n точек. 1-Точечное свойство биссектрисы означает единственность *отображения срединной точки* (см. **Срединная выпуклость**).

Функция расстояния

Функция расстояния (или *лучевая функция*) есть непрерывная функция на метрическом пространстве (X,d) (обычно на евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$) $f : X \to \mathbb{R}_{\leqslant 0}$, которое является *однородным*, т.е. $f(tx) = tf(f)$ для всех $t \ge 0$ и всех $x \in X$.

Функция расстояния f называется *симметричной*, если $f(x) = f(-x)$, *положительной*, если $f(x) > 0$ для всех $x \neq 0$ и *выпуклой*, если $f(x + y) \le f(x) + f(y)$ с $f(0) = 0$.

Если $X = \mathbb{E}^n$, то множество $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 1\}$ называется *звездным телом*; оно соответствует единственной функции расстояния. Звездное тело будет ограниченным, если f положительна, оно будет симметричным относительно начала координат, если f симметрична, и выпуклым, если f – выпукла.

Выпуклая функция расстояния

Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ – компактная выпуклая область, содержащая в своей внутренности начало координат. **Выпуклой функцией расстояния** (или *измерителем, функцией расстояния Минковского*) $d_B(x,y)$ называется квазиметрика на $\mathbb{R}^n$, определенная для $x \neq y$ как

$$\inf\{\alpha > 0 : y - x \in \alpha B\}.$$

Эквивалентным образом она может быть определена как $\frac{\|y - x\|_2}{\|x - z\|_2}$, где z – единственная точка границы $\partial(x + B)$, принадлежащая лучу, выходящему из x и проходящему через y. При этом $B = \{x \in \mathbb{R}^n : d_B(0, x) \le 1\}$ с равенством только для $x \in \partial B$. Выпуклая функция расстояния называется *полиэдральной*, если B – многогранник, *тетраэдральной*, если это тетраэдр, и т.д.

Если множество B центральносимметрично относительно начала координат, то d_B является **метрикой Минковского** (см. гл. 6), единичный шар которой есть B.

Элемент наилучшего приближения

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство и $M \subset X$ – его подмножество. Тогда элемент $u_0 \in M$ называется **элементом наилучшего приближения** к данному элементу $x \in X$, если $d(x,u_0) = \inf_{u \in M} d(x,u)$, т.е. если величина $d(x, u_0)$ является **расстоянием между точкой и множеством** $d(x, M)$.

Метрическая проекция (или *оператор наилучшего приближения, отображение ближайшей точки*) есть многозначное отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $d(x \in X)$ множество элементов наилучшего приближения из множества M (см. **Расстоянное отображения**).

Множеством Чебышева (или *селектируемым множеством*) в произвольном метрическом пространстве (X,d) называется подмножество $M \subset X$, содержащее единственный элемент наилучшего приближения для каждого $x \in X$. Подмножество $M \subset X$ называется **множеством полу-Чебышева**, если имеется не более одного такого элемента, и **проксиминальным множеством**, если имеется не менее одного такого элемента.

Радиусом Чебышева для множества M называется $\inf_{x \in X} \sup_{y \in M} d(x,y)$, а **центром Чебышева** для множества M – элемент $x_0 \in X$, реализующий данный инфимум.

Расстоянное отображение

Для метрического пространства (X,d) и подмножества $M \subset X$ **расстоянным отображением** называется функция $f_M : X \to \mathbb{R} \geq 0$, где $f_M(x) = \inf_{u \in M} d(x,u)$ есть **расстояние между точкой и множеством** $d(x,M)$ (см. **Метрическая проекция**).

Если граница $B(M)$ множества M определена, то **функция расстояния со знаком** g_M определяется как $g_M(x) = -\inf_{u \in B(M)} d(x,u)$ для $x \in M$ и как $g_M(x) = \inf_{u \in B(M)} d(x,u)$ в остальных случаях. Если M является (замкнутым и ориентируемым) многообразием в $\mathbb{R}^n$, то g_M будет решением *уравнения эйконала* $|\nabla_g| = 1$ для его *градиента* ∇.

Если $X = \mathbb{R}^n$ и для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $u(x)$ с $d(x,M) = d(x,u(x))$, (т.е. M есть **множество Чебышева**), то $\|x-u(x)\|$ называется **векторной функцией расстояния**.

Расстояния отображения применяются при программировании движения робототехнических устройств (M выступает как множество точек препятствий) и, главным образом, при обработке изображений (в этом случае M является множеством всех или только пограничных пикселей образа). При $X = \mathbb{R}^n$ граф $\{x, f_M(x)) : x \in X)$ для $d(x,M)$ называется *поверхностью Вороного* для множества M.

Дискретная динамическая система

Дискретная динамическая система есть пара, состоящая из непустого метрического пространства (X,d), называемого *фазовым пространством*, и непрерывного отображения $f : X \to X$, называемого *эволюционным законом*. Для любого $x \in X$ его *орбита* есть последовательность $\{f^n(x)\}_n$, где $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ с $f^0(x) = x$. Орбита $x \in X$ называется *периодической*, если $f^n(x) = x$ для некоторого $n > 0$.

Обычно дискретные динамические системы исследуются (например, в теории управления) в контексте стабильности систем; теория хаоса, со своей стороны, занимается максимально нестабильными системами.

Аттрактор – такое замкнутое подмножество A множества X, что существует *открытая окрестность* U подмножества A, обладающая свойством $\lim_{n\to\infty} d(f^n(b), A) = 0$ для каждого $b \in U$, т.е. A *притягивает* все близлежащие орбиты. В этом случае $d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)$ есть **расстояние между точкой и множеством**.

Динамическая система называется *хаотической* (*топологически* или *по Девани*), если она является *регулярной* (т.е. X имеет плотное подмножество элементов с периодическими орбитами) и *транзитивной* (т.е. для любых двух непустых открытых подмножеств A, B множества X существует такое число n, что $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$).

Метрическое расслоение

Пусть (X,d) – **полное** метрическое пространство. Подмножества M_1 и M_2 множества X называются *эквидистантными* (*равноотстоящими*), если для каждого $x \in M_1$ существует $y \in M_2$ с d(x,y), равным **хаусдорфовой метрике** между множествами M_1 и M_2. Метрическое расслоение пространства (X,d) есть разбиение $\mathcal{F}$ множества X на изометрические взаимно эквидистантные замкнутые множества.

Метрическое фактор-пространство $X/\mathcal{F}$ наследует натуральную метрику, для которой **расстоянное отображение** является **подметрией**.

Структура метрического конуса

Пусть (X, d, x_0) – *пунктированное метрическое пространство*, т.е. пространство (X, d) с фиксированной точкой $x_0 \in X$. **Структурой метрического конуса** на нем является (точечно) непрерывное семейство $f_t(t \in \mathbb{R} \geq 0)$ **растяжений** множества X, оставляющих инвариантной точку x_0, так что $d(f_t(x,y), f_t(y)) = td(x,y)$ для всех x, y и $f_t \cdot f_s = f_{ts}$.

Банахово пространство имеет такую структуру для растяжений $f_t(x) = tx(t \in \mathbb{R} \geq 0)$. Еще одним примером является *евклидов конус над метрическим пространством* (см. **Метрика конуса**, гл.9).

Метрический конус

Метрическим конусом называется множество всех полуметрик на множестве $V_n = \{1,\dots,n\}$.

Матрица расстояний

Пусть $(X = \{x_1,\dots,x_n\}, d)$ – конечное метрическое пространство. Его **матрица расстояний** – это симметричная $n \times n$ матрица $((d_{ij}))$, где $d_{ij} = d(x_i, x_j)$ для любых $1 \leq i, j \leq n$.

Матрица Кэли–Менгера

Пусть $(X = \{x_1,\dots,x_n\}, d)$ – конечное метрическое пространство. **Матрицей Кэли–Менгера** для него является симметричная $(n+1) \times (n+1)$ матрица

$$CM(X,d) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e^T & D \end{pmatrix},$$

где $D = (d_{ij}))$ есть **матрица расстояний** пространства (X,d), а e–n-вектор, все компоненты которого равны 1. Определитель матрицы $CM(X,d)$ называется *определителем Кэли–Менгера*.

Матрица Грамма

Пусть $v_1,\ldots,v_k$ – элементы евклидова пространства. **Матрицей Грамма** является симметричная $k \times k$ матрица

$$G(v_1,\ldots v_k) = \left(\left(\left\langle v_i, v_j \right\rangle\right)\right)$$

попарных *скалярных произведений* элементов $v_1,\ldots,v_k$.

$k \times k$ матрица является положительно полуопределенной тогда и только тогда, когда это матрица Грамма. $k \times k$ матрица является положительно определенной тогда и только тогда, когда она – матрица Грамма с линейно независимыми определяющими векторами.

$G(v_1,\ldots,v_k) = \dfrac{1}{2}((d_E^2(v_i, v_j))) + d_E^2(v_0, v_j) - d_E^2(v_i, v_j)))$, т.е. скалярное произведение $\langle , \rangle$ есть **подобность произведения Громова для квадрата евклидова расстояния** d_E^2. $k \times k$ матрица $((d_E^2(v_i, v_j)))$ есть **расстояние отрицательного типа**; все такие $k \times k$ матрицы образуют (неполиэдральны) замкнутый выпуклый конус всех таких расстояний на данном k-множестве.

Определитель матрицы Грамма называется *определителем Грамма*; его величина равна квадрату *k-мерного объема параллелотопа*, построенного на $v_1,\ldots,v_k$.

Изометрия

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Функция $f : X \to Y$ называется **изометрическим вложением** X в Y, если она инъективна и для всех $x, y \in X$ имеет место равенство $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y)$.

Изометрией называется биективное изометрическое вложение. Два метрических пространства называются **изометрическими** (или *изометрически изоморфными*), если между ними существует изометрия.

Свойства метрических пространств, сохраняющиеся инвариантными относительно изометрий (полнота, ограниченность и т.п.), называются **метsрическими свойствами** (или *метрическими инвариантами*).

Изометрией пути (или *линейной изометрией*) является преобразование X в Y (не обязательно биективное), сохраняющее длину кривых.

Жесткое перемещение метрического пространства

Жестким перемещением (или просто **перемещением**) метрического пространства (X,d) называется **изометрия** (X,d) на себя.

Для перемещения f **функция перенесения** $d_f(x)$ равна $d_f(x, f(x))$. Перемещение f называется *полупростым*, если $\inf\limits_{x \in X} d_f(x) = d(x_0, f(x_0))$ для некоторого $x_0 \in X$, и *параболическим* в остальных случаях. Полупростое перемещение называется *эллиптическим*, если $\inf\limits_{x \in X} d_f(x) = 0$ и *осевым* (или *гиперболическим*) в остальных случаях. Перемещение называется *переносом Клиффорда*, если функция перенесения $d_f(x)$ является константой для всех $x \in X$.

Симметричное метрическое пространство

Метрическое пространство (X,d) называется **симметричным**, если для произвольной точки $p \in X$ существует *симметрия* относительно данной точки, т.е. такое **перемещение** f_p этого метрического пространства, что $f_p(f_p(x)) = x$ для всех $x \in X$, и p является изолированной фиксированной точкой f_p.

Однородное метрическое пространство

Метрическое пространство (X,d) называется **однородным** (или *сильно-транзитивным*), если для каждых двух конечных изометрических подмножеств $Y = \{y_1, ..., y_m\}$ и $Z = \{z_1, ..., z_m\}$ множества X существует **перемещение** X, отображающее Y в Z. Метрическое пространство называется *точечно-однородным*, если для любых двух его точек существует перемещение, отображающее одну из этих точек в другую. В общем случае *однородное пространство* есть множество в сочетании с данной транзитивной группой *симметрий*.

Метрическое пространство (X,d) называется **метрически однородным** Грюнбаум–Келли **метрическим пространством**, если $\{d(x, z) : z \in X\} = \{d(y, z) : z \in X\}$ для любых $x, y \in X$.

Растяжение

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство и r – действительное положительное число. Функция $f : X \to X$ называется **растяжением**, если $d(f(x), f(y)) = rd(x,y)$ для любых $x, y \in X$.

Метрическое преобразование

Метрическое преобразование есть расстояние, получаемое как функция данной метрики (см. гл. 4).

Гомеоморфные метрические пространства

Два метрических пространства (X, d_X) и (Y, d_Y) называются **гомеоморфными** (или *топологически изоморфными*), если существует *гомеоморфизм* из X в Y, т.е. такая биективная функция $f : X \to Y$, что f и f^{-1} *непрерывны* (прообраз каждого открытого множества в Y является открытым в X).

Два метрических пространства (X, d_X) и (Y, d_Y) называются *равномерно изоморфными*, если существует такая биективная функция $f : X \to Y$, что f и f^{-1} являются *равномерно непрерывными функциями*. (Функция g будет *равномерно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x, y \in X$ из неравенства $d_X(x,y) < \delta$ следует неравенство $d_Y(g(x), f(y)) < \varepsilon$; непрерывная функция является равномерно непрерывной, если пространство X компактно.)

Конформное метрическое отображение

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется **конформным метрическим отображением**, если для любых $x \in X$ существует предел $\lim_{y \to x} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d(x,y)}$, который является конечным и положительным.

Квазиконформное метрическое отображение

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Гомеоморфизм $f : X \to Y$ называется **квазиконформным** (или *C-квазиконформным*) **метрическим отображением**, если существует константа C, такая что соотношение

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\max\{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x,y) \le r\}}{\min\{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x,y) \ge r\}} \le C$$

выполняется для каждого $x \in X$. Наименьшая такая константа C называется **конформным растяжением**.

Квазиконформное отображение f называется **квазисимметричным**, если, кроме того, существует константа C', такая что

$$\frac{\max\{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x,y) \le r\}}{\min\{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x,y) \ge r\}} \le C$$

выполняется для всех $x \in X$ и всех положительных r.

Конформная размерность метрического пространства (X,d) (Пансю, 1989) является инфимумом **размерности Хаусдорфа** по всем квазиконформным отображениям пространства (X,d) в некоторое метрическое пространство.

Липшицево отображение

Пусть c – положительная константа. Для метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) функция $f: X \to Y$ называется **липшицевым отображением** (или *с-липшицевым*, если необходимо упомянуть постоянную c), если неравенство

$$d_Y(f(x), \; f(y)) \le c d_X(x,y)$$

выполняется для всех $x, y \in X$.

c-липшицево отображение называется **укорачивающим**, если $c = 1$, и **сжимающим**, если $c < 1$.

Би-липшицево отображение

Пусть $c > 1$ – положительная константа. Тогда для метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) функция $f: X \to Y$ называется **би-липшицевым отображением** (или *с-би-липшицевым отображением*, **c-вложением**), если существует такое положительное число r, что для любых $x, y \in X$ имеют место неравенства

$$r d_X(x,y) \le d_Y(f(x), \; f(y)) \le c r d_X(x,y).$$

Каждое би-липшицево отображение является **квазиконформным метрическим отображением**.

Наименьшая константа c, для которой f является с-би-липшицевым отображением, называется **искажением** f.

Бургайн доказал, что каждое k-точечное метрическое пространство c-вложимо в некоторое евклидово пространство с искажением $O(\ln k)$. *Искажение* Громова *для кривых* представляет собой максимальное отношение длины дуги к длине хорды.

Две метрики d_1 и d_2 на X называются **би-липшицево эквивалентными**, если существуют такие положительные константы c и C, что неравенство $cd_1(x,y) \le d_2(x,y) \le Cd_1(x,y)$ выполняется для всех $x, y \in X$, т.е. тождественное отображение есть би-липшицево отображение (X, d_1) в (X, d_2).

Равномерное метрическое отображение

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Функция $f: X \to Y$ называется **равномерным метрическим отображением**, если существуют такие две неубывающие функции g_1 и g_2 из $\mathbb{R} \ge 0$ в себя с $\lim_{r \to \infty} g_i(r) = \infty$ для $i = 1, 2$, что неравенства

$$g_1(d_X(x,y) \le d_Y(f(x), \; f(y)) \le g_2(d_X(x,y))$$

имеют место для всех $x, y \in X$.

Би-липшицево отображение есть равномерное метрическое отображение с линейными функциями g_1 и g_2.

Метрическое число Рамсея

Для данного класса $\mathcal{M}$ метрических пространств (обычно l_p-пространств), данного целого числа $n \geq 1$ и данного действительного числа $c \geq 1$ **метрическое число Рамсея** (или *c-метрическое число Рамсея*) $R_M(c, n)$ является наибольшим целым числом m, таким что в каждом n-точечном метрическом пространстве имеется подпространство размером m, которое c-вложимо в одно из метрических пространств из $\mathcal{M}$ (см. [BLMN05]).

c-изоморфизм метрических пространств

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. *Липшицева норма* $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$ на множестве всех инъективных отображений $f: X \to Y$ определяется как

$$\|f\|_{\text{Lip}} = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)}.$$

Два метрических пространства X и Y называются **c-изоморфными**, если существует инъективное отображение $f: X \to Y$, такое что $\|f\|_{\text{Lip}} \|f^{-1}\| \leq c$.

Квазиизометрия

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Функция $f: X \to Y$ называется **квазиизометрией** (или **(C, c)-квазиизометрией**), если существуют действительные числа $C > 0$ и $c \geq 0$, такие что

$$C^{-1} d_X(x,y) - c \leq d_Y(f(x), \quad f(y)) \leq C d_X(x,y) + c,$$

и $Y = \bigcup_{z \in X} B_{d_Y}(f(x), c)$, т.е. для каждой точки $y \in Y$ существует такая точка $x \in X$, что $d_Y(y, f(x)) \leq c$.

Квазиизометрия с $C = 1$ называется **грубой изометрией** (или *приближенной изометрией*). См. **Ранг квазиевклидового метрического пространства**.

Грубое вложение

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Функция $f: X \to Y$ называется **грубым вложением**, если существуют неубывающие функции ρ_1, ρ_2: $[0, \infty) \to [0, \infty)$, такие что $\rho_1(d_X(x,y) \leq (d_Y(f(x), \rho_2(d_X(x,y))$ для всех $x, y \in X$ и $\lim_{t \to \infty} \rho, t = +\infty$.

Метрики d_1 и d_2 на X называются **грубо эквивалентными метриками**, если существуют такие неубывающие функции f, g: $[0, \infty) \to [0, \infty)$, что $d_1 \leq f(d_2)$ и $d_2 \leq g(d_1)$.

Сжимающее отображение

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Функция $f: X \to Y$ называется **сжимающим отображением** (или *сжатием, строго укорачивающим отображением*) если $d_Y(f(x), f(y)) < d_X(x,y)$ для всех различных $x, y \in X$.

Каждое сжатие из **полного** метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку.

Нестягивающее отображение

Для метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) функция $f: X \to Y$ называется **нестягивающим отображением**, если $d_Y(f(x), f(y)) < d_X(x,y)$ для всех $x, y \in X$.

Каждая нестягивающая биекция из **вполне ограниченного** метрического пространства на себя есть изометрия.

Укорачивающее отображение

Для метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) функция $f: X \to Y$ называется **укорачивающим отображением** (или *нерасширяющимся, полусжимающим отображением*), если $d_Y(f(x), f(y)) \le d_X(x,y)$ для всех $x, y \in X$.

Любое сюръективное укорачивающее отображение $f: X \to Y$ является изометрией тогда и только тогда, когда (X, d_X) является компактным метрическим пространством.

Подметрия есть укорачивающее отображение, такое что образ любого метрического шара является метрическим шаром того же радиуса.

Два подмножества A и B метрического пространства (X,d) называются (по Гоуэрсу) **подобными**, если существуют укорачивающие отображения $f: A \to X$, $g: b \to X$ и такое малое $\varepsilon > 0$, что каждая точка A находится в пределах ε от некоторой точки множества B, каждая точка B находится в пределах ε от некоторой точки множества A и $|d(x, g(f(x))) - d(y, f(g(y)))| \le \varepsilon$ для всех $x \in A$ и $y \in B$.

Категория метрических пространств

Категория Ψ состоит из класса $\mathrm{Ob}\Psi$, элементы которого называются *объектами категории*, и класса $\mathrm{Mor}\Psi$, элементы которого называются *морфизмами категории*. Эти классы должны удовлетворять перечисленным ниже условиям.

1. Каждой упорядоченной паре объектов A и B соответствует множество $H(A,B)$ морфизмов.
2. Каждый морфизм принадлежит только одному множеству $H(A, B)$.
3. Композиция $f \cdot g$ двух морфизмов $f: A \to B$, $g: C \to D$ определена, если $B = C$, в этом случае она будет принадлежать $H(A, D)$.
4. Композиция морфизмов ассоциативна.
5. Каждое множество $H(A, A)$ включает в качестве *единичного элемента* такой морфизм id_A, что $f \cdot \mathrm{id}_A = f$ и $\mathrm{id}_A \cdot g = g$ для любых морфизмов $f: X \to Y$ и $g: A \to Y$.

Категория метрических пространств, обозначаемая Met (см. [Isbe64]) – это категория, в которой метрические пространства выступают как объекты, а **укорачивающие отображения** – как морфизмы. В данной категории для каждого объекта существует единственная **инъективная оболочка**; она может быть отождествлена с его **натянутой линейной оболочкой**. *Мономорфизмами* в Met являются инъективные укорачивающие отображения, а *изоморфизмами* – **изометрии**.

Инъективное метрическое пространство

Метрическое пространство (X, d) называется **инъективным**, если для каждого изометрического вложения $f: X \to X'$ пространства (X, d) в другое метрическое пространство (X', d') существует **укорачивающее отображение** f' из X' в X с $f' \cdot f = \mathrm{id}_X$, т.е. X есть ретракт X'. Эквивалентно, X является **абсолютным ретрактом**, т.е. ретрактом каждого метрического пространства, в которое оно вложимо изометрически. Метрическое пространство (X, d) является инъективным тогда и только тогда, когда оно **гипервыпукло**.

Инъективная оболочка

Понятие **инъективной оболочки** является обобщением понятия **пополнения Коши**. Пусть (X, d) – метрическое пространство. Оно может быть изометрически вложимо в некоторое **инъективное** метрическое пространство $(\hat{X}, \hat{d})$; если взять любое такое изометрическое вложение $f : X \to \hat{X}$, для него существует единственное наименьшее инъективное подпространство $(\overline{X}, \overline{d})$ пространства $(\hat{X}, \hat{d})$, содержащее $f(X)$, которое называется **инъективной оболочкой** X . Оно изометрически тождественно **натянутой линейной оболочке** пространства (X, d).

Метрическое пространство совпадает со своей инъективной оболочкой тогда и только тогда, когда оно является инъективным метрическим пространством.

Натянутое расширение

Расширение (X', d') метрического пространства (X, d) называется **натянутым расширением**, если для каждой полуметрики d'' на X', удовлетворяющей условиям $d''(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$ и $d''(y_1, y_2) \le d'(y_1, y_2)$ для всех $y_1, y_2 \in X'$, имеем $d''(y_1, y_2) = d'(y_1, y_2)$ для всех $y_1, y_2 \in X'$.

Натянутая линейная оболочка – универсальное *натянутое расширение* X, т.е. она содержит, с точностью до канонических изометрий, каждое натянутое расширение X, но сама собственного натянутого расширения не имеет.

Натянутая линейная оболочка

Возьмем метрическое пространство (X, d) конечного диаметра и рассмотрим в нем множество $\mathbb{R}^X = \{f : X \to \mathbb{R}\}$. **Натянутая линейная оболочка** $T(X,d)$ пространства (X, d) определяется как множество $T(X,d) = \{f \in \mathbb{R}^X : f(x) = = \sup_{y \in X}(d(x,y) - f(y))$ для всех $x \in X\}$, снабженное метрикой, порождаемой на $T(X,d)$ нормой $\|f\| = \sup_{x \in X}|f(x)|$.

Множество X можно отождествить с множеством $\{h_x \in T(X, d) : h_x(y) = d(y,x)\}$ или, эквивалентно, с множеством $T^0(X, D) = \{f \in T(X, d) : 0 \in f(X)\}$. **Инъективная оболочка** $(\overline{X}, \overline{d})$ множества X может быть изометрически отождествлена с натянутой линейной оболочкой $T(X,d)$ как

$$\overline{X} \to T(X,d),\ \ \overline{x} \to h\overline{X} \in T(X,d) : h\overline{X}(y) = \overline{d}(f(y), \overline{x}).$$

Например, если $X = \{x_1, x_2\}$, то $T(X,d)$ является интервалом длины $d(x_1, x_2)$. Метрическое пространство совпадает со своей натянутой линейной оболочкой тогда и только тогда, когда оно является **инъективным** метрическим пространством.

Натянутую линейную оболочку метрического пространства (X, d) конечного диаметра можно рассматривать как многогранный комплекс. Размерность такого комплекса называется **размерностью Дресса** (или *комбинаторной размерностью*) пространства (X, d).

Действительное дерево

Метрическое пространство (X, d) называется (по Титсу, 1977) **действительным деревом** (или $\mathbb{R}$-**деревом**), если для любых $x, y \in X$ существует единственная **дуга** от x к y и эта дуга – **геодезический отрезок**. Действительное дерево также называется **метрическим деревом** (следует отличать от **метрического дерева** в анализе данных, см. гл. 17).

Метрическое пространство (X, d) является действительным деревом тогда и только тогда, когда оно является **путь-связным** и **0-гиперболическим** по Громову (т.е. удовлетворяет **неравенству четырех точек**).

Действительные деревья есть в точности **древоподобные** метрические про странства, которые являются **геодезическими**. **Древоподобные** метрические про странства по определению являются метрическими подпространствами действительных деревьев, а действительные деревья являются в точности **инъективными** метрическими пространствами среди древоподобных пространств.

Если (X, d) – конечное метрическое пространство, то **натянутая линейная оболочка** $T(X, d)$ является действительным деревом и может рассматриваться как реберно взвешенное теоретико-графовое дерево.

Метрическое пространство будет полным действительным деревом тогда и только тогда, когда оно **гипервыпукло** и любые две его точки соединяются **метрическим отрезком**.

Плоскость $\mathbb{R}^2$ с **парижской метрикой** и **метрикой лифта** (см. гл. 19) являются примерами $\mathbb{R}$-дерева.

1.3. ОБЩИЕ РАССТОЯНИЯ

Дискретная метрика

Дискретная (или **тривиальная**) **метрика** d есть метрика на множестве X, определяемая как $d(x, y) = 1$ для всех различных $x, y \in X$ (и $d(x, x) = 0$). Метрическое пространство (X, d) называется *дискретным метрическим пространством*.

Антидискретная полуметрика

Антидискретной полуметрикой d называется полуметрика на множестве X, определяемая как $d(x, y) = 0$ для всех $x, y \in X$.

Эквидистантная метрика

Для множества X и положительного действительного числа t **эквидистантной метрикой** d называется метрика на X, определяемая как $d(x, y) = t$ для всех различных $x, y \in X$ (и $d(x, x) = 0$).

(1, 2)-*B*-метрика

Для множества X (1, 2)-B-**метрика** d является метрикой на X, такой что для любого $x \in X$ количество точек $y \in X$ с $d(x, y) = 1$ не превышает B, а все другие расстояния равны 2. (1, 2)-B-**метрика** является **усеченной метрикой** графа с максимальной степенью вершин, равной B.

Индуцированная метрика

Индуцированной метрикой (или *относительной метрикой*) называется сужение d' метрики d (на множестве X) на подмножество X' множества X.

Метрическое пространство (X', d') называется **метрическим подпространством** метрического пространства (X,d), а метрическое пространство (X,d) называется **метрическим расширением** (X', d').

Доминирующая метрика

Пусть d и d_1 – метрики на множестве X. Говорится, что d_1 **доминирует** над d, если $d_1(x, y) \geq d(x, y)$ для всех $x, y \in X$.

Эквивалентные метрики

Две метрики d_1 и d_2 на множестве X называются **эквивалентными**, если они определяют одну и ту же *топологию* на X, т.е., если для каждой точки $x_0 \in X$ открытый метрический шар с центром в x_0, заданный относительно d_1, содержит открытый метрический шар с тем же центром, но заданный относительно d_2, и наоборот.

Две метрики d_1 и d_2 будут эквивалентны тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $x \in X$ существует $\delta > 0$, такое что из $d_1(x,y) \le \delta$ следует $d_2(x,y) \le \varepsilon$ и наоборот, из $d_2(x,y) \le \delta$ следует $d_1(x,y) \le \varepsilon$.

Все метрики на конечном множестве являются эквивалентными; они порождают *дискретную топологию*.

Полная метрика

Пусть (X,d) – метрическое пространство. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_n$, $x_n \in X$ *сходится к* $x^* \in X$, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = 0,$ т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое что $d(x_n, x^*) < \varepsilon$ для любого $n > n_0$.

Последовательность $\{x_n\}_n$, $x_n \in X$ называется *последовательностью Коши*, если существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ для любых $m, n > n_0$.

Метрическое пространство (X,d) называется **полным метрическим пространством**, если каждая его *последовательность Коши* сходится. В этом случае метрика d называется **полной метрикой**.

Пополнение Коши

Для метрического пространства (X,d) его **пополнением Коши** называется метрическое пространство (X^*, d^*) на множестве X^* всех классов эквивалентности *последовательностей Коши*, где последовательность $\{x_n\}_n$ называется *эквивалентной* $\{y_n\}_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Метрика d^* определяется как

$$d^*(x^*, y^*) \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

для любых x^*, $y^* \in X$, где $\{x_n\}_n$ (соответственно, $\{y_n\}_n$) – любой элемент из класса эквивалентности x^* (соответственно y^*).

Пополнение Коши (X^*, d^*) является единственным с точностью до изометрии **полным** метрическим пространством, в которое метрическое пространство (X,d) вкладывается как *плотное* метрическое подпространство.

Пополнением Коши метрического пространства $(\mathbb{Q}, |x-y|)$ рациональных чисел является числовая прямая $(\mathbb{R}, |x-y|)$. **Банахово пространство** является пополнением Коши *нормированного векторного пространства* $(V, \|\cdot\|)$ с **метрикой нормы** $\|x-y\|$. **Гильбертово пространство** соответствует случаю *нормы скалярного произведения* $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Ограниченная метрика

Метрика (в общем случае – расстояние) d на множестве X называется **ограниченной**, если существует константа $C > 0$, такая что $d(x,y) \le C$ для любых x, $y \in X$.

Так, например, если d – метрика на X, то метрика D на X, определяемая как $D(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, ограничена и $C = 1$.

Метрическое пространство (X,d) с ограниченной метрикой d называется **ограниченным метрическим пространством.**

Вполне ограниченное метрическое пространство

Метрическое пространство (X,d) называется **вполне ограниченным**, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть, т.е. конечное подмножество $M \subset X$, такое что расстояние от точки до множества для любого (см. **Вполне ограниченное пространство**, гл. 2).

Всякое вполне ограниченное метрическое пространство является **ограниченным и сепарабельным**.

Метрическое пространство является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда его **пополнение Коши** является **компактным** метрическим пространством.

Сепарабельное метрическое пространство

Метрическое пространство называется **сепарабельным**, если оно содержит счетное *плотное* подмножество, т.е. некое счетное подмножество, с помощью которого могут аппроксимироваться все его элементы.

Метрическое пространство является сепарабельным тогда и только тогда, когда оно **вторично-счетно**, и тогда и только тогда, когда оно является **пространством Линделефа**.

Метрический компакт

Метрический компакт (или **компактное метрическое пространство**) – метрическое пространство, в котором всякая последовательность имеет *подпоследовательность Коши* и эти подпоследовательности являются сходящимися. Метрическое пространство является компактным тогда и только тогда, когда оно **вполне ограниченное** и **полное**. Подмножество евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ является компактным тогда и только тогда, когда оно **ограничено** и **замкнуто**.

Собственное метрическое пространство

Метрическое пространство **называется собственным** (или *конечно компактным*), если любой замкнутый метрический шар в этом пространстве является компактным. Всякое собственное метрическое пространство является **полным**.

***c*-равномерно совершенное метрическое пространство**

Каждый собственный метрический шар радиуса r в метрическом пространстве имеет диаметр не более $2r$. Метрическое пространство называется ***c*-равномерно совершенным**, $0 < c \leq 1$, если этот диаметр составляет не менее $2cr$.

PH метрическое пространство

Метрическое пространство называется **PH метрическим пространством** (или *пространством Атсуджи*), если любая непрерывная функция из него в произвольное метрическое пространство является *равномерно непрерывной*.

Каждый **метрический компакт** является PH метрическим пространством. Всякое PH метрическое пространство является **полным**.

Польское пространство

Польским пространством называется **полное сепарабельное** метрическое пространство. Метрическое пространство называется **пространством Суслина**, если оно является непрерывным образом польского пространства.

Метрическая тройка (или *mm-пространство*) является польским пространством (X, d) с *борелевой вероятностной мерой* μ, т.е. неотрицательной действительной функцией μ на *борелевой* σ-*алгебре* $\mathcal{F}$ множества X со следующими свойствами: $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(X) = \mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ для любой конечной или счетной совокупности попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{F}$.

Пусть (X, τ) – топологическое пространство. σ-*алгеброй* на X называется совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств множества X, обладающая следующими свойствами:

$\varnothing \in \mathcal{F}$, $X \backslash U \in \mathcal{F}$ для $U \in \mathcal{F}$ и $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$ для конечной или счетной совокупности $\{A_n\}_n$, $A_n \in \mathcal{F}$. σ-алгебра на X, которая соотносится с топологией на X, т.е. включает все открытые и замкнутые подмножества множества X, называется *борелевой σ-алгеброй* множества X. Любое метрическое пространство есть *борелево пространство*, т.е. множество, снабженное борелевой σ-алгеброй.

Метрика нормы

Для данного *нормированного векторного пространства* $(V, \|\cdot\|)$ **метрика нормы** на V определяется как

$$\| x-y \|$$

Метрическое пространство $(V, \| x-y \|)$ называется **банаховым пространством, если оно полное.** Примерами метрик нормы являются $\boldsymbol{l_p}$- и $\boldsymbol{L_p}$**-метрики**, в частности **евклидова метрика**.

Метрика пути

Возьмем связной граф $G = (V,E)$. Его **метрикой пути** d_{path} называется метрика на V, определяемая как длина (т.е. количество ребер) кратчайшего пути, соединяющего две данные вершины x и y графа G (см. гл. 15).

Метрика редактирования

Возьмем конечное множество X и конечное множество (унарных) *операций редактирования* $\mathbb{O}$ на X. **Метрикой редактирования** на X будет **метрика пути** графа с множеством вершин X и ребром xy, если у может быть получено из x посредством одной из операций в $\mathbb{O}$.

Метрика галереи

Камерная система – множество X (элементы которого называются камерами), снабженное n отношениями эквивалентности $\sim_i$, $1 \le i \le n$. *Галерея* – такая последовательность камер $x_1,\ldots, x_m$, что $x_i \sim_j x_{i+1}$ для каждого i и некоторого j, зависящего от i. **Метрика галереи** есть **расширенная метрика** на X, определяемая как длина кратчайшей галереи, соединяющей x и $y \in X$ (и как ∞, если соединяющей x и y галереи не существует). Метрика галереи является (расширенной) **метрикой пути** графа с множеством вершин X и ребром xy, если $x \sim_i y$ для некоторого $1 \le i \le n$.

Риманова метрика

Возьмем связное n-мерное гладкое *многообразие* M^n. Его **римановой метрикой** называется совокупность положительно определенных симметричных билинейных форм $((g_{ij}))$ на касательных пространствах многообразия M^n, которые гладко изменяются от точки к точке. Длина кривой γ на M^n выражается как $\int_\gamma \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j}$, а **внутренняя метрика** на M^n, называемая иногда **римановым расстоянием**, определяется как инфимум длин кривых, соединяющих любые две точки $x, y \in M^n$ (см. гл. 7).

Проективная метрика

Проективной метрикой d называется непрерывная метрика на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

для любых коллинеарных точек x, y, z, расположенных в этой последовательности на общей прямой. Четвертая проблема Гильберта (1900 г.) состоит в классификации таких метрик; это сделано только для размерности $n = 2$ ([Amba76]); см. гл. 6.

Каждая **метрика нормы** на $\mathbb{R}^n$ является проективной. Каждая проективная метрика на $\mathbb{R}^2$ является **гиперметрикой**.

Метрика произведения

Возьмем n метрических пространств $(X_1, d_2), (X_2, d_2),\dots, (X_n, d_n)$. **Метрикой произведения** называется метрика на *декартовом произведении* $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{x = (x_1, x_2,\dots, xn): x_1 \in X_n\}$ определяемая как функция от $d_1,\dots,d_n$ (см. гл. 4).

Хэммингова метрика

Хэмминговой метрикой d_H называется метрика на $\mathbb{R}^n$, задаваемая как

$$|\{i : 1 \le i \le n, x_i \ne y_i\}|$$

На бинарных векторах $x, y \in \{0,1\}^n$ хэммингово расстояние и $\boldsymbol{l_1}$**-метрика** совпадают.

Метрика Ли

Пусть $m, n \mathbb{N}$, $m \ge 2$. **Метрикой Ли** d_{Lee} называется метрика на $\mathbb{Z}_m^n = \{0,1,\dots,m-1\}^n$, определяемая как

$$\sum_{1\le i\le n} \min\{|x_i - y_i|, m - |x_i - y_i|\},$$

Метрическое пространство $(\sum_m^n, d_{Lee})$ является дискретным аналогом *эллиптического пространства*.

Метрика симметрической разности

Пусть задано *пространство с мерой* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. **Полуметрикой симметрической разности** (или **полуметрикой меры**) d_Δ называется полуметрика на множестве $\mathcal{A}_\mu = \{A \in \mathcal{A} : \mu(\mathcal{A}) < \infty\}$, определяемая как

$$\mu(A\Delta B),$$

где $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ – *симметрическая разность* множеств A и $B \in \mathcal{A}_\mu$. Равенство $d_\Delta(A, B) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mu(A\Delta B) = 0$, т.е. когда A и B *почти всюду* равны. Отождествляя два множества $A, B \in \mathcal{A}_\mu$, если $\mu(A\Delta B) = 0$, получаем **метрику симметрической разности** (или расстояние **Фреше–Никодима–Аронзяна, метрику меры).**

Если μ – *кардинальное число*, т.е. $\mu(A) = |A|$ является количеством элементов в A, то $d_\Delta(A, B) = |A\Delta B|$. В этом случае $|A\Delta B| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

Расстояние Джонсона между k-множествами A и B равно $\frac{A\Delta B}{2} = k - |A \cap B|$.

Метрика Эномото–Катона

Если имеется конечное множество X и целое число k, такое что $2k \le |X|$, то **метрикой Эномото–Катона** называется расстояние между неупорядоченными парами (X_1, X_2) и (Y_1, Y_2) непересекающихся k-подмножеств множества X, определяемое как

$$\min\{|X_1\backslash Y_1| + |X_2\backslash Y_2|, |X_1\backslash Y_2| + |X_2\backslash Y_1|\}.$$

Расстояние Штейнгауза

Для пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ **расстоянием Штейнгауза** d_{St} называется полуметрика на множестве $\mathcal{A}_\mu = \{A \in \mathcal{A} : \mu(\mathcal{A}) < \infty\}$, определяемая из равенства

$$\frac{\mu(A\Delta B)}{\mu(A \cup B)} = 1 - \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A \cup B)},$$

если $\mu(A \cup B) > 0$ (и равная 0, если $\mu(\text{A}) = \mu(\text{B}) = 0$). Она становится метрикой на множестве классов эквивалентности элементов из $\mathcal{A}_\mu$; при этом элементы $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ называются *эквивалентными*, если $\mu(A\Delta B) = 0$.

Расстояние биотопа (или **расстояние Танимото**) $\frac{|(A\Delta B)|}{|(A \cup B)|}$ является частным случаем расстояния Штейнгауза, полученного для кардинального числа $\mu(A) = |A|$ (см. также **обобщенная метрика преобразования биотопа**, гл. 4).

Расстояние между точкой и множеством

Для метрического пространства (X, d) **расстояние между точкой и множеством** $d(x, A)$ между точкой и подмножеством A множества X определяется как

$$\inf_{y \in \text{A}} d(x, y).$$

Для любых $x, y \in X$ и любого непустого подмножества A множества X справедлив следующий вариант неравенства треугольника: $d(x, A) \le d(x,y) + d(x, A)$ (см. **Расстоянное отображение**).

Для данной точечной меры $\mu(x)$ на X и *функции штрафов* p **оптимальным квантованием** называется множество $B \subset X$, такое что $\int p(d(x, B))d\mu(x)$ является наименьшим возможным.

Расстояние между множествами

Для метрического пространства (X, d) **расстояние между множествами** A и B множества X задается как

$$\operatorname{ing}_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

В анализе данных расстояние между множествами называется **единичной связью**, в то время как $\sup_{x \in A, y \in B} d(x, y)$ называется **полной связью**.

Хаусдорфова метрика

Для метрического пространства (X, d) **хаусдорфовой метрикой** (или *двусторонним хаусдорфовым расстоянием*) d_{Haus} называется метрика на совокупности $\mathcal{F}$ всех компактных подмножеств X, задаваемая как

$$\max\{d_{d\text{Haus}}(A, B), d_{d\text{Haus}}(B, A)\},$$

где $d_{d\text{Haus}}(A, B) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} d(x, y)$ является **ориентированным хаусдорфовым расстоянием** (или *односторонним хаусдорфовым расстоянием*) от A к B. Иными словами, $d_{d\text{Haus}}(A, B)$ есть минимальное число ε (называемое также **расстоянием Бляшке**), такое что замкнутая ε-окрестность A содержит B, а замкнутая ε-окрестность B содержит A. Можно показать также, что равно $d_{d\text{Haus}}(A, B)$

$$\sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)|,$$

где $d(x, A) = \min_{y \in A} d(x, y)$ является **расстоянием между точкой и множеством.** Хаусдорфова метрика **метрикой нормы** не является.

Если вышеприведенное определение распространить на некомпактные замкнутые подмножества A и B множества X, то $d_{d\text{Haus}}(A, B)$ может быть бесконечной, т.е. она становится **расширенной метрикой.** Для подмножеств A и B множества X, не обязательно замкнутых, **хаусдорфова полуметрика** между ними определяется как хаусдорфова метрика между их замыканиями. Если X конечно, то $d_{d\text{Haus}}$ является метрикой на множестве всех подмножеств X.

Хаусдорфово L_p-расстояние

Для метрического пространства (X, d) **хаусдорфово L_p-расстояние** ([Badd92]) между двумя подмножествами A и B множества X задается как

$$\left(\sum_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $d(x, A)$ – **расстояние между точкой и множеством.** Обычная **хаусдорфова метрика** соответствует случаю $p = \infty$.

Обобщенная хаусдорфова G-метрика

Возьмем группу $(G, \cdot, e)$, действующую на метрическом пространстве (X, d). **Обобщенная хаусдорфова G-метрика** между двумя замкнутыми подмножествами A и B множества X задается как

$$\min_{g_1, g_2 \in G} d_{\text{Haus}}(g_1(A), g_2(B)),$$

где d_{Haus} – **хаусдорфова метрика.** Если $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$ для любого $g \in G$ (т.е. метрика d *левоинвариантна* по отношению к G), то вышеуказанная метрика будет равна $\min_{g \in G} d_{\text{Haus}}(A), g(B)$.

Метрика Громова–Хаусдорфа

Метрикой Громова–Хаусдорфа называется метрика на множестве всех изометрических классов компактных метрических пространств, задаваемая как

$$\inf d_{\text{Haus}}(f(X), g(Y))$$

для любых двух классов X^* и Y^* с представителями X и Y соответственно, где d_{Haus} – **хаусдорфова метрика**, а минимум берется по всем метрическим пространствам M и изометрическим вложениям $f : X \to M$, $g : Y \to M$. Соответствующее метрическое пространство называется *пространством Громова–Хаусдорфа.*

Метрика Фреше

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ всех непрерывных отображений $f : A \to X$, $g : B \to X$, …, где $A, B, \ldots$ являются подмножествами $\mathbb{R}^n$, гомеоморфными $[0,1]^n$ для фиксированной размерности $n \in \mathbb{N}$.

Полуметрикой Фреше d_F называется полуметрика на $\mathcal{F}$, задаваемая как

$$\inf_{\sigma} \sup_{x \in A} d(f(x), g(\sigma(x))),$$

где инфимум берется по всем сохраняющим ориентацию гомеоморфизмам $\sigma : A \to B$. Она превращается в **метрику Фреше** на множестве классов эквивалентности $f^* = \{g : d_F(g, f) = 0\}$.

Расстояние Банаха–Мазура

Расстояние Банаха–Мазура d_{BM} между двумя банаховыми пространствами V и W задается как

$$\ln \inf_T \| T \| \cdot \| T^{-1} \|,$$

где инфимум берется по всем изоморфизмам $T: V \to W$. Оно может быть записано также как $\ln d(V, W)$, где число $d(V, W)$ есть наименьшее положительное $d \geq 1$, такое что $\overline{B}_W^n \subset T(\overline{B}_V^n) \subset d\overline{B}_W^n$ для некоторого линейного обратимого преобразования $T: V \to W$. Здесь $(\overline{B}_V^n) = \{x \in V : \| x \|_V \leq 1\}$ и $(\overline{B}_W^n) = \{x \in W : \| x \|_W \leq 1\}$ являются *единичными шарами* нормированных пространств $(V, \| \cdot \|_V)$ и $(W, \| \cdot \|_W)$ соответственно.

$d_{\text{BM}}(V, W) = 0$ тогда и только тогда, когда V и W *изометричны*, и становится метрикой на множестве X^n всех классов эквивалентности n-мерного нормированного пространства, где $V \sim W$, если они изометричны. Пара (X^n, d_{BM}) является компактным метрическим пространством, называемым **компактом Банаха–Мазура.**

Расстояние Глузкина–Хабарова (или *модифицированное расстояние Банаха-Мазура*) задается как

$$\inf\{\| T \|_{X \to Y} : | \det T | = 1\} \cdot \inf\{\| T \|_{Y \to X} : | \det T | = 1\}.$$

Расстояние Томчак–Егермана (или *слабое расстояние Банаха–Мазура*) определяется как

$$\max\}\overline{\gamma}_Y(\mathrm{id}_X), \overline{\gamma}_X(\mathrm{id}_Y)\},$$

где для оператора $U: X \to Y$ через $\overline{\gamma}_Z(U)$ обозначается $\inf \sum \| W_k \| \| V_k \|$. Здесь инфимум берется по всем представлениям $U = \sum W_k V_k$ для $V_k : X \to Z$ и $V_k : Z \to Y$, а id_z есть тождественное отображение. Данное расстояние никогда не превышает соответствующего расстояния Банаха–Мазура.

Расстояние Кадетса

Пропуск (или *разрыв*) между двумя замкнутыми подпространствами X и Y банахова пространства $(V, \| \cdot \|)$ определяется как

$$\mathrm{gap}(X, Y) = \max\{\delta(X, Y), \delta(Y, X)\},$$

где $\delta(X, Y) = \sup\{\inf_{y \in Y} \|x - y\| : x \in X, \|x\| = 1\}$ (см. **Расстояние разрыва**, гл. 12 и **Метрика разрыва,** гл. 18).

Расстояние Кадетса между двумя банаховыми пространствами V и W является полуметрикой, определяемой (по Кадетсу, 1975) как

$$\inf_{Z, f, g} \mathrm{gap}(B_{f(V)}, B_{g(W)}),$$

где инфимум берется по всем банаховым пространствам Z и всем линейным изометрическим вложениям $f: V \to Z$ и $g: W \to Z$; здесь $B_{f(V)}$ и $B_{g(W)}$ суть единичные метрические шары банаховых пространств $f(V)$ и $g(W)$ соответственно.

Нелинейным аналогом расстояния Кадетса является **расстояние Громова–Хаусдорфа** между **банаховыми пространствами** U и W:

$$\inf_{Z, f, g} d_{\text{Haus}}(f(B_V), g(B_W)),$$

где инфимум берется по всем метрическим пространствам Z и всем изометрическим вложениям $f: V \to Z$ и $g: W \to Z$; здесь d_{Haus} – **хаусдорфова метрика.**

Расстояние пути Кадетса между двумя банаховыми пространствами V и W задается (по Островскому, 2000) как инфимум длин (относительно расстояния пути Кадетса) всех кривых, соединяющих V и W (и как ∞, если таких кривых нет).

Липшицево расстояние

Возьмем два метрических пространства (X, d_X) и (Y, d_Y). *Липшицева норма* $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$ на множестве всех инъективных функций $f: X \to Y$ определяется как $\| f \|_{\text{Lip}} = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \dfrac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)}$.

Липшицево расстояние между метрическими пространствами (X, d_X) и (Y, d_Y) задается как

$$\ln \inf_f \| f \|_{\text{Lip}} \cdot \| f^{-1} \|_{\text{Lip}},$$

где инфимум берется по всем биективным функциям $f: X \to Y$. Эквивалентно, оно является инфимумом чисел $\ln \alpha$, таких что существует биективное **билипшицево отображение** между (X, d_X) и (Y, d_Y) с константами $\exp(-\alpha)$, $\exp(\alpha)$. Оно становится метрикой на множестве всех изометрических классов компактных метрических пространств.

Данное расстояние является аналогом **расстояния Банаха–Мазура** и, для случая конечномерных вещественных банаховых пространств, совпадает с ним. Оно совпадает также с **гильбертовой проективной метрикой** на *неотрицательных* проективных пространствах, которые могут быть получены $\mathbb{R}^n_+$ из отождествлением любой точки x с $cx, c > 0$.

Липшицево расстояние между мерами

Для компактного метрического пространства (X, d) *полунорма Липшица* $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$ на множестве всех функций $f: X \to \mathbb{R}$ определяется как

$$\|\cdot\|_{\text{Lip}} = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{| f(x) - f(y) |}{d(x,y)}.$$

Липшицево расстояние между мерами μ и ν на X задается как

$$\sup_{\| f \|_{\text{Lip}} \leq 1} \int f d(\mu - \nu).$$

Если μ и ν – вероятностные меры, то это – **метрика Канторовича–Мэллоуза–Монжа–Вассерштейна.**

Аналогом липшицева расстояния между мерами для *пространства состояний унитарной C^*-алгебры* является **метрика Конна.**

Барицентрическое метрическое пространство

Для метрического пространства (X, d) пусть $(B(X), \|\mu - \nu\|_{TV}$ будет метрическим пространством, где $B(X)$ – множество всех регулярных борелевых вероятностных мер на X с ограниченным носителем и $\|\mu - \nu\|_{TV}$ – **расстояние нормы, определяемое полной вариацией** $\int_X | p(\mu) - p(\nu) | d\lambda$, где $p(\mu)$ и $p(\nu)$ являются функциями плотности мер μ и ν соответственно, относительно σ-конечной меры $\dfrac{\mu + \nu}{2}$.

Метрическое пространство (X, d) будет **барицентрическим**, если существует константа $\beta > 0$ и отображение $f : B(X) \to X$ из $B(X)$ на X, такие что неравенство

$$d(f(\mu), f(\nu)) \leq \beta \mathrm{diam}(\mathrm{supp}(\mu + \nu)) \| \mu - \nu \|_{TV}$$

справедливо для любых мер $\mu, \nu \in B(X)$.

Каждое банахово пространство $(X, d = \| x - y \|)$ есть барицентрическое метрическое пространство, в котором наименьшее β равно 1, и отображение $f(\mu)$ является *обычным центром массы* $\int_X x d\mu(x)$. Любое *адамардово пространство* (т.е. полное **CAT**(0) **пространство**) будет барицентрическим с наименьшим β, равным 1, и отображением $f(\mu)$ в качестве единственной точки минимума функции $g(y) = \int_X d^{2f}(x, y) d\mu(x)$ на X.

Компактное квантовое метрическое пространство

Пусть V будет *нормированным пространством* (или, более обобщенно, локально выпуклым *топологическим векторным пространством*), а V' – его непрерывным *двойственным пространством*, т.е. множеством всех непрерывных линейных функционалов f на V. *Слабая** *топология* (или *топология Гельфанда*) на V определяется как самая слабая (т.е. с наименьшим количеством открытых множеств) топология на V', такая что для каждого $x \in V$ отображение $F_x : V' \to \mathbb{R}$, задаваемое условием $F_x(f) = f(x)$ для всех $f \in V'$, остается непрерывным.

Пространством порядковой единицы называется частично упорядоченное действительное (комплексное) векторное пространство $(A, \preceq)$ с выделенным элементом e, называемым *порядковой единицей,* которое характеризуется следующими свойствами:

1) для любого $a \in A$ существует $r \in \mathbb{R}$, такое что $a \preceq re$;

2) если $a \in A$ и $a \preceq re$ для всех положительных $r \in \mathbb{R}$, то $a \preceq 0$ (*архимедовость*).

Основным примером пространства порядковой единицы является векторное пространство всех самоприсоединенных элементов унитарной C^*-*алгебры*, единичным элементом в которой служит порядковая единица. Здесь C^*-*алгебра* является *банаховой алгеброй* над $\mathbb{C}$, снабженной специальным *инволютивным отображением*. Она называется *унитарной*, если имеет *единицу* (элемент, нейтральный относительно умножения); такие C^*-алгебры весьма приближенно называют еще *компактными некоммутативными топологическими пространствами.* Типичным примером унитарной C^*-алгебры является комплексная алгебра линейных операторов на комплексном **гилбертовом пространстве**, которое топологически замкнуто в топологии нормы операторов и замкнуто относительно операции взятия сопряженных на множестве операторов.

Пространство состояний пространства порядковой единицы $(A, \preceq, e)$ является множеством $S(A) = \{ f \in A'_+ : \| f \| = 1 \}$ *состояний*, т.е. непрерывных линейных функционалов f с $\| f \| = f(e) = 1$. **Компактное квантовое метрическое пространство** Риффеля – это пара $(A, \| \cdot \|_{\mathrm{Lip}})$, где $(A, \preceq, e)$ есть пространство порядковой единицы и $\| \cdot \|_{\mathrm{Lip}}$ – полунорма на A (со значениями в $[0, +\infty]$), называемая *липшицевой полунормой*, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) для $a \in A$ равенство $\| a \|_{\mathrm{Lip}} = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{R}e$;

2) метрика $d_{\text{Lip}}(f,g)=\sup_{a\in A:\|a\|_{\text{Lip}}\le 1}|f(a)-g(a)|$ порождает на пространстве состояний $S(A)$ его слабую* топологию.

Таким образом, мы получаем обычное метрическое пространство $(S(A),\ d_{\text{Lip}})$. Если пространство порядковой единицы $(A,\preceq,e)$ является C^*-алгеброй, то d_{Lip} есть **метрика Конна**, и если, более того, C^*-алгебра является некоммутативной, то метрическое пространство $(S(A),\ d_{\text{Lip}})$ называется **некоммутативным метрическим пространством.**

Выражение *квантовое метрическое пространство* появилось потому, что многие эксперты в области квантовой гравитации и теории струн считают геометрию пространства-времени вблизи длины Планка схожей с геометрией таких некоммутативных C^*-алгебр. Например, теория некоммутативного поля предполагает, что на достаточно малых (квантовых) расстояниях пространственные координаты не коммутируют, т.е. невозможно точно измерить положение частицы относительно более чем одной оси.

Универсальное метрическое пространство

Метрическое пространство $(U,\ d)$ называется **универсальным** для семейства $\mathcal{M}$ метрических пространств, если любое метрическое пространство $(M,\ d_{\text{M}})$ из $\mathcal{M}$ является *изометрическим вложением* в $(U\ ,\ d)$, т.е. существует отображение $f: M \to U$, которое удовлетворяет условию $d_{\text{M}}(x,\ y) = d(f(x, f(y))$ для любых $x,\ y \in M$.

Каждое сепарабельное метрическое пространство $(X,\ d)$ может быть изометрически вложено (по Фреше, 1909) в (несепарабельное) **банахово пространство** l^∞. Именно, $d(x,\ y) = \sup_i|\,d(x,\ a_i) - d(y,\ a_i)\,|$, где есть $(a_1,\dots,a_i,\dots)$ плотное счетное подмножество множества X.

Каждое метрическое пространство изометрически вложимо (по Куратовскому, 1935) в **банахово пространство** $L^\infty(X)$ ограниченных функций $f: X \to \mathbb{R}$ с нормой $\sup_{x\in X}|\,f(x)\,|$.

Пространство Урысона есть однородное полное сепарабельное пространство, которое является универсальным метрическим пространством для всех сепарабельных метрических пространств.

Гильбертов куб является универсальным метрическим пространством для класса метрических пространств со счетной базой.

Графическое метрическое пространство *случайного графа* Эрдеша–Рени (определяемого как множество всех простых чисел $p \equiv 1(\text{mod}4)$, на котором пара pq будет ребром, если p – квадратичный вычет по модулю q) является универсальным метрическим пространством для любого конечного или счетного метрического пространства с расстояниями, принимающими только значения 0, 1 или 2. Оно представляет собой дискретный аналог пространства Урысона.

Существует метрика d на $\mathbb{R}$, индуцирующая обычную (интервальную) топологию, такая что $(\mathbb{R},\ d)$ является универсальным метрическим пространством для всех конечных метрических пространств (Холштинский, 1978). Банахово пространство l_∞^n является универсальным метрическим пространством для всех метрических пространств $(X,\ d)$ с $|X| \le n+2$ (Вульф, 1967). Евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ является универсальным метрическим пространством для всех ультраметрических пространств $(X,\ d)$ с $|X| \le n+1$; пространство всех конечных функций $f(t): \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$, снабженное метрикой $d(f,\ g) = \sup\{t: f(t) \ne g(t)\}$, является универсальным метрическим пространством для всех ультраметрических пространств (А. Лемин, В. Лемин, 1996).

Универсальность может быть определена и для других отображений метрических пространств (помимо изометрических вложений), например для билипшицева вложения и других. Так, любое компактное метрическое пространство представляет собой непрерывный образ **канторова множества** с натуральной метрикой $|x–y|$, унаследованной от $\mathbb{R}$.

Конструктивное метрическое пространство

Конструктивное метрическое пространство – пара (X, d), где X является неким набором конструктивных объектов (обычно это слова над некоторым алфавитом), а d – алгоритм превращения любой пары элементов множества X в конструк тивное вещественное число $d(x, y)$ таким образом, что d становится метрикой на X.

Эффективное метрическое пространство

Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность элементов заданного полного метрического пространства (X, d), такая что множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ является *плотным* в (X, d). Пусть $\mathcal{N}(m, n, k)$ – *канторово число* тройки $(n, m, k) \in \mathbb{N}^3$, а $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, а – фиксированная стандартная нумерация множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Тройка $(X, d,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется **эффективным метрическим пространством** ([Hemm02]), если множество $\{\mathcal{N}(n,m,k):d(x_m, x_n) < q_k\}$ является рекурсивно перечислимым. Оно представляет собой адаптацию введенного Вейхраухом понятия **вычисляемого метрического пространства (или рекурсивного метрического пространства).**

Глава 2

Топологические пространства

Топологическое пространство (X, τ)) есть множество X с *топологией* τ, т.е. системой подмножеств множества X, обладающих следующими свойствами:

1) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$;

2) если $A, B \in \tau$, то $\mathrm{A} \cap B \in \tau$;

3) для любой системы $\{A_\alpha\}_\alpha$, если все $A_\propto \in \tau$, то $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau$.

Множества из τ называются *открытыми множествами*, а их дополнения называются *замкнутыми множествами. Базой* топологии τ является система открытых множеств, такая что каждое открытое множество есть объединение множеств из базы. Самая грубая топология имеет два открытых множества (пустое и множество X) и называется *тривиальной* (или *антидискретной*) *топологией*. Наиболее детальная топология включает все подмножества в качестве открытых и называется *дискретной топологией*.

В метрическом пространстве (X, d) определим открытый шар как множество $B(x,r) = \{y \in X: d(x,y) < r\}$, где $x \in X$ (центр шара) и $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ (радиус шара). Подмножество множества X, которое является объединением (конечного или бесконечного числа) открытых шаров, называется *открытым множеством*. Эквивалентно, подмножество U множества X называется *открытым*, если для любой фиксированной точки $x \in U$ существует действительное число $\varepsilon > 0$, такое что для любой точки $y \in X$, удовлетворяющей условию $d(x,y) < \varepsilon$, выполняется условие $y \in U$. Любое метрическое пространство является топологическим, с топологией (**метрической топологией**, *топологией, порождаемой метрикой* d) состоящей из всех открытых множеств. Метрическая топология всегда есть T_4 (см. перечень топологических пространств ниже). Топологическое пространство, которое может быть получено таким образом из метрического пространства, называется **метризуемым пространством.**

Полуметрическая топология – топология на X, порождаемая аналогичным образом полуметрикой на X. В общем случае данная топология не является даже T_0. *Квазиметрическая топология* есть топология на X, порождаемая квазиметрикой на X.

Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Тогда *окрестностью* точки $x \in X$ называется множество, содержащее открытое множество, которое, в свою очередь, содержит x. Замыканием подмножества топологического пространства является наименьшее замкнутое множество, его содержащее. *Открытое покрытие* множества X есть система $\mathcal{L}$ открытых множеств, объединение которых равно X; его *подпокрытием* является покрытие $\mathcal{K}$, такое что каждый объект из $\mathcal{K}$ является объектом из $\mathcal{L}$; его *подразделением* является покрытие $\mathcal{K}$, такое что каждый объект из $\mathcal{K}$ есть подмножество некоего объекта из $\mathcal{L}$. Семейство подмножеств множества X называется *локально конечным*, если каждая точка множества X имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным числом этих подмножеств. Подмножество $A \subset X$ называется *плотным*, если оно имеет непустое пересечение с каждым непустым открытым множеством или, эквивалентно, если единственным содержащим его замкнутым множеством является само множество X. В метрическом пространстве (X, d) *плотным множеством* будет подмножество $A \subset X$, такое что для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in A$, такое что $d(x, y) < \varepsilon$. *Локальной базой* точки $x \in X$ является семейство $\mathfrak{U}$ окрестностей точки x, такое что каждая окрестность точки x содержит некий элемент семейства $\mathfrak{U}$.

Функция из одного топологического пространства в другое называется *непрерывной*, если прообраз каждого открытого множества будет открытым. Грубо говоря, для данного $x \in X$ все близкие к x точки отображаются в точки, близкие к $f(x)$. Функция f из одного метрического пространства (X, d_X) в другое (Y, d_Y) будет *непрерывной* в точке $c \in X$, если для любого положительного действительного числа ε существует положительное действительное число δ, такое что все $x \in X$, удовлетворяющие неравенству $d_X(x, c) < \delta$, будут также удовлетворять неравенству $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Функция называется непрерывной на интервале I, если она непрерывна в любой точке интервала I.

Приведенные ниже классы топологических пространств (до T_4) включают любые метрические пространства.

T_0 -пространство

T_0-**пространство** (или *пространство Колмогорова*) есть топологическое пространство (X, τ), на котором выполняется T_0-*аксиома отделимости*: для каждых двух точек $x, y \in X$ существует открытое множество U, такое что $x \in U$ и $y \notin U$ или $y \in U$ и $y \notin U$ (каждые две точки являются *топологически отличимыми*).

T_1-пространство

T_1-**пространство** есть топологическое пространство (X, τ), на котором выполняется T_1--*аксиома отделимости*: для каждых двух точек $x, y \in X$ существуют два таких открытых множества U и V, что $x \in U$ и $y \notin U$ или $y \in V$ и $x \notin V$ (каждые две точки являются *разделенными*). T_1-пространства всегда являются T_0-пространствами.

T_2-пространство

T_2-**пространство** (или **хаусдорфово пространство,** *разделенное пространство*) – топологическое пространство (X, τ), удовлетворяющее условию T_2-*аксиомы*: каждые две точки $x, y \in X$ имеют непересекающиеся окрестности. T_2-пространства всегда являются T_1-пространствами.

Регулярное пространство

Регулярное пространство есть топологическое пространство, в котором каждая окрестность произвольной точки содержит замкнутую окрестность той же точки.

T_3-пространство

T_3 **-пространство** (или *пространство Виеториса, регулярное хаусдорфово пространство*) есть топологическое пространство, которое является T_1-постранством и **регулярным** пространством.

Вполне регулярное пространство

Вполне регулярное пространство (или *пространство Тихонова*) есть **хаусдорфово пространство** (X, τ), в котором любое замкнутое множество A и любое $x \notin A$ являются *функционально разделенными.*

Два подмножества A и B множества X называются *функционально разделенными*, если существует непрерывная функция $f : X \to [0,1]$, такая что $f(x) = 0$ для любого $x \in A$, и $f(y) = 1$ для любого $y \in B$.

Пространство Мура

Пространство Мура есть **регулярное пространство** с *развитием*.

Развитие – последовательность $\{\mathfrak{U}_n\}_n$ открытых покрытий, таких что для каждого $x \in X$ и каждого открытого множества A, содержащего x, имеется число n, для которого выполняется условие $\mathrm{St}(x, \mathfrak{U}_n) = \cup\{U \in \mathfrak{U}_n : x \in U\}$, т.е. $\{\mathrm{St}(x, \mathfrak{U}_n)\}_n$ является *базой окрестностей* для x.

Нормальное пространство

Нормальное пространство –топологическое пространство, в котором для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют два открытых множества U и V, таких что и $A \subset U$ и $B \subset V$.

***T_4*-пространство**

***T_4* -пространство** (или *пространство Титса, нормальное хаусдорфово пространство*) есть топологическое пространство, которое является T_1**-пространством** и **нормальным** пространством. Любое метрическое пространство (X, d) является T_4-пространством.

Вполне нормальное пространство

Вполне нормальное пространство – это топологическое пространство, в котором любые два разделенных множества имеют непересекающиеся окрестности.

Множества A и B называются *разделенными* в X, если каждое из них не пересекается с замыканием другого.

***T_5*-пространство**

***T_5*-пространство** (или *вполне нормальное хаусдорфово пространство*) есть топологическое пространство, которое является **вполне нормальным** и T_1-пространством. T_5-пространства всегда являются T_4-пространствами.

Сепарабельное пространство

Сепарабельным пространством называется топологическое пространство, в котором имеется счетное плотное подмножество.

Пространство Линделефа

Пространством Линделефа называется топологическое пространство, в котором каждое открытое покрытие имеет счетное подпокрытие.

Первично-счетное пространство

Топологическое пространство называется **первично-сетным**, если каждая его точка обладает локальной счетной базой. Любое метрическое пространство является первично-счетным.

Вторично-счетное пространство

Топологическое пространство называется вторично-счетным, если его топология обладает счетной базой.

Вторично-сетные пространства всегда **разделимы**, первично-счетны и являются **пространствами Линделефа**.

Для метрических пространств свойства быть вторично-сетными, быть сепарабельными и быть **пространствами Линделефа** являются эквивалентными.

Евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ с его обычной топологией также является вторично-счетным.

Пространство Бэра

Пространство Бэра есть топологическое пространство, в котором пересечение любого счетного семейства всюду плотных открытых множеств всюду плотно.

Связное пространство

Топологическое пространство (X, τ) называется **связным**, если оно не является объединением пары непересекающихся непустых открытых множеств. В этом случае множество X называется *связным множеством.*

Топологическое пространство (X, τ) называется **локально связным**, если всякая точка $x \in X$ обладает локальной базой, состоящей из связных множеств.

Топологическое пространство (X, τ) называется **путь-связным** (или 0-*связным*), если для каждой точки $x, y \in X$ существует *путь* τ от x к y, т.е. непрерывная функция $\gamma : [0,1] \to X$ с $\gamma(x) = 0, \gamma(y) = 1$.

Топологическое пространство (X, τ) называется **односвязным** (или 1-*связным*), если состоит из одной части и не имеет кругообразных "дыр" или "ручек", или, эквивалентно, если каждая непрерывная кривая пространства X является *стягиваемой*, т.е. может быть уменьшена до одной из ее точек посредством *непрерывной деформации.*

Паракомпактное пространство

Топологическое пространство называется **паракомпактным**, если любое его открытое покрытие имеет локально конечное подразбиение. Любое метрическое пространство (X, d) является паракомпактным.

Локально компактное пространство

Топологическое пространство называется **локально компактным**, если всякая его точка обладает локальной базой, состоящей из компактных окрестностей. Грубо говоря, всякая малая часть пространства похожа на малую часть **компактного пространства**. Евклидовы пространства $\mathbb{E}^n$ являются локально компактными. Пространства $\mathbb{Q}_p$ *p-адических чисел* также локально компактны.

Вполне ограниченное пространство

Топологическое пространство называется **вполне ограниченным**, если оно может быть покрыто конечным числом подмножеств любого фиксированного размера.

Метрическое пространство будет **вполне ограниченным метрическим пространством,** если для каждого положительного действительного числа r существует конечное множество открытых шаров радиуса r, объединение которых равно X.

Компактное пространство

Топологическое пространство (X, τ) называется **компактным**, если всякое открытое покрытие множества X имеет конечное подпокрытие. В этом случае X называется *компактным множеством*.

Компактные пространства всегда являются **пространствами Линделефа, вполне ограниченными и паракомпактными.** Метрическое пространство будет компактным тогда и только тогда, когда оно **полное** и **вполне ограниченное**. Подмножество евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнутое и ограниченное.

Существует ряд топологических свойств, которые эквивалентны свойству компактности метрических пространств, но неэквивалентны для общих топологических пространств. Так, метрическое пространство будет компактным тогда и только тогда, когда оно является *секвенциально компактным* (каждая последовательность обладает сходящейся подпоследовательностью) или *счетно компактным* (каждое счетное открытое покрытие обладает конечным подпокрытием), или *псевдокомпактным* (каждая действительная непрерывная функция на данном пространтстве является ограниченной), или *слабо счетным компактным пространством* (каждое бесконечное подмножество обладает предельной точкой).

Локально выпуклое пространство

Топологическим векторным пространством называется действительное (комплексное) векторное пространство V, которое является **хаусдорфовым пространством** с непрерывными операциями сложения векторов и умножения вектора на скаляр. Оно называется **локально выпуклым**, если его топология обладает базой, всякий элемент которой является *выпуклым множеством.*

Подмножество A множества V называется *выпуклым*, если для всех $x, y \in A$ и любого $t \in [0,1]$ точка $tx + (1-t)y \in A$, т.е. всякая точка *отрезка*, соединяющего x и y, принадлежит A.

Любое метрическое пространство $(V, \| x-y \|)$ на действительном (комплексном) векторном пространстве V с **метрикой нормы** $\| x-y \|$ является локально выпуклым пространством; всякая точка пространства V обладает локальной базой, состоящей из *выпуклых* множеств.

Счетно-нормированное пространство

Счетно-нормированным пространством называется **локально выпуклое** пространством (V, τ), топология которого задается через счетное множество совместных норм $\|\cdot\|_1, \ldots$ Это означает, что, если последовательность $\{x_n\}_n$ элементов множества V, являющаяся фундаментальной относительно норм $\|\cdot\|_i$ и $\|\cdot\|_j$, сходится к нулю относительно одной из этих норм, то она будет сходиться к нулю и относительно другой. Счетно-нормированное пространство является метризуемым пространством, и его метрика может быть задана как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\| x-y \|_n}{1+\| x-y \|_n}.$$

Гиперпространство

Гиперпространством топологического пространства (X, τ) называется топологическое пространство на множестве $CL(X)$ всех непустых замкнутых (или, более того, компактных) подмножеств множества X. Топология гиперпространства X называется *гипертопологией*. Примерами такой топологии *удара-промаха* могут служить *топология Виеториса и топология Фелла.* Примерами такой *слабой топологии гиперпространства* является *метрическая топология Хаусдорфа* и *топология Вайсмана*.

Дискретное пространство

Дискретным пространством называется топологическое пространство (X, τ) с *дискретной топологией.* Его можно рассматривать как метрическое пространство (X, d) с **дискретной метрикой**: $d(x, x) = 0$, и $d(x, y) = 1$ для $x \neq y$.

Антидискретное пространство

Антидискретное пространство – топологическое пространство (X, τ) с *антидискретной топологией.* Его можно рассматривать как полуметрическое пространство (X, d) с **антидискретной полуметрикой:** $d(x, y) = 0$ для любых $x, y \in X$.

Метризуемое пространство

Топологическое пространство называется **метризуемым**, если оно гомеоморфно некоторому метрическому пространству. Метризуемые пространства всегда являются T_2-пространствами и **паракомпактными** (а значит **нормальными** и **вполне регулярными**) пространствами, а также первично-счетными пространствами.

Топологическое пространство называется **локально метризуемым**, если любая его точка обладает метризуемой окрестностью.

Топологическое пространство (X, τ) называется **подметризуемым**, если существует метризуемая топология τ' на X, более грубая, чем τ.

Ниже даны три примера других обобщений метризуемых пространств.

M-**пространство** Мориты – топологическое пространство (X, τ), из которого существует непрерывное отображение f на метризуемое топологическое пространство (Y, τ') , такое что f замкнуто и $f^{1}(y)$ счетно компактно для каждого $y \in Y$.

M_1-**пространство** Седера –топологическое пространство (X, τ) с базой, сохраняющей σ-замыкание (метризуемые пространства имеют σ -локально конечные базы).

σ-пространство Окуямы – топологическое пространство (X, τ) с σ-локально конечной *сетью*, т.е. таким семейством $\mathfrak{U}$ подмножеств множества X, что для данной точки $x \in U$ (где U – открыто) существует такое $U' \in \mathfrak{U}$, что $x \in U' \subset U$ (база является сетью, состоящей из открытых множеств).

Глава 3

Обобщения метрических пространств

Некоторые обобщения понятия метрики, в частности понятия **квазиметрики, почти-метрики, расширенной метрики,** были рассмотрены в гл. 1. В данной главе представлены некоторые обобщения, связанные с топологией, теорией вероятностей, алгеброй и т.п.

3.1. *m*-МЕТРИКИ

m-Хемиметрикаметрика

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X^{m+1} \to \mathbb{R}$ называется m-хемиметрикой, если d неотрицательна, т.е. $d(x_1,\ldots,x_{n+1}) \geq 0$ для всех $x_1,\ldots, x_{n+1} \in X$, если d *вполне симметрична*, т.е. удовлетворяет условию $d(x_1,\ldots, x_{m+1}) = d(x_{\pi(1)},\ldots, x_{\pi(m+1)})$ для всех $x_1,\ldots, x_{m+1} \in X$ и любой перестановки π элементов $\{1,\ldots, m+1\}$, если d приведена к нулю, т.е. $d(x_1,\ldots, x_{m+1}) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1,\ldots, x_{m+1}$ не являются попарно различными, и если для всех $x_1,\ldots, x_{m+2} \in X$ функция d удовлетворяет m-**симплексному неравенству:**

$$d(x_1,\ldots,x_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} d(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{m+2}).$$

2-метрика

Пусть X – произвольное множество. Функция называется $d : X \to \mathbb{R}$ 2-**метрикой**, если d *неотрицательна, вполне симметрична,* приведена к нулю и удовлетворяет **неравенству тетраэдра**

$$d(x_1,x_2,x_3) \leq d(x_4,x_2x_3) + d(x_1,x_4,x_4) + d(x_1,x_2,x_4).$$

Это – наиболее важный случай $m = 2$ произвольной m-**хемиметрики.**

(m, s)-суперметрика

Пусть X – произвольное множество и s – положительное вещественное число. Функция $d : X^{m+1} \to \mathbb{R}$ называется (m, s)-**суперметрикой** ([DeDu03]), если d *неотрицательна, вполне симметрична, приведена к нулю* и удовлетворяет (m, s)-**симплексному неравенству**:

$$d(x_1,\ldots,x_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} d(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{m+2}).$$

(m, s)-суперметрика является m-**полуметрикой**, если $s \geq 1$.

3.2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ МЕТРИКИ

Неопределенная метрика

Неопределенная метрика (или *G-метрика*) на вещественном (комплексном) векторном пространстве V есть *билинейная* (для случая комплексной переменной – сескилинейная) форма G на V, т.е. функция $G\ V \times V\ \mathbb{R}(\mathbb{C})$, такая что для любых $x, y, z \in V$ и любых скаляров α, β имеют место следующие свойства:

$$G(\alpha x + \beta y, z) = \alpha G(x, z) + \beta G(y, z) \text{ и } G(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} G(x, z) + \overline{\beta} G(y, z)$$

где $\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi$ *обозначает комплексное сопряжение*).

Если G – положительно определенная симметричная форма, то это скалярное произведение на V и его можно использовать для канонического введения *нормы* и соответствующей **метрики нормы** на V. Для случая общей формы G не существует ни нормы, ни метрики, канонически связанной с G, и термин **неопределенная метрика** только напоминает о тесной связи положительно определенных билинейных форм с некоторыми метриками в векторном пространстве (см. гл. 7 и 26).

Пара (V, G) называется *пространством с неопределенной метрикой.* Конечномерное пространство с неопределенной метрикой называется *билинейным метрическим пространством*. **Гильбертово пространство** H, снабженное непрерывной G-метрикой, называется *гильбертовым пространством с неопределенной метрикой.* Наиболее важным примером такого пространства является *J-пространство.*

Подпространство L в пространстве (V, G) с неопределенной метрикой называется *положительным, отрицательным или нейтральным подпространством* в зависимости от выполнения неравенств $G(x, x) > 0$, $G(x, x) < 0$ или $G(x, x) = 0$ для всех $x \to L$.

Эрмитова *G*-метрика

Эрмитова G -метрика неопределенная метрика G^H на комплексном векторном пространстве V, такая что для всех $x, y \in V$ имеет место равенство $G^H(x, y) = \overline{G^H(y, x)}$, где $\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi$ означает *комплексное сопряжение.*

Регулярная *G*-метрика

Регулярная G -метрика есть непрерывная **неопределенная метрика** G на **гильбертовом пространстве** H над $\mathbb{C}$, порождаемая обратимым эрмитовым оператором T по формуле

$$G(x, y) = \langle T(x), y \rangle,$$

где $\langle , \rangle$ – *скалярное произведение* на H.

Эрмитов оператор на гильбертовом пространстве H – *билинейный оператор* T на H, задаваемый на *области* плотности $D(T)$ пространства H по закону $\langle T(x), y \rangle =$ $= \langle x, T(y) \rangle$ для любых $x, y \in D(T)$. Ограниченный эрмитов оператор либо определен на всем H, либо может быть непрерывно продолжен на все H и тогда $T = T^*$. На конечномерном пространстве эрмитов оператор может быть задан *эрмитовой матрицей* $((a_{ij})) = ((\overline{a_{ji}}))$.

J-метрика

***J*-метрика** – непрерывная **неопределенная метрика** G на **гильбертовом пространстве** H над C, задаваемая неким *эрмитовым инволютивным* отображением J на H по формуле

$$G(x, y) = \langle J(x), y \rangle,$$

где $\langle , \rangle$ – есть скалярное произведение на H.

Инволютивное отображение – отображение H на H, квадрат которого является *тождественным отображением.* Инволютивное отображение J может быть представлено равенством $J = P_+ - P_-$, , где P_+ и P_- являются ортогональными проекциями в H, а $P_+ + P_- = H$. *Ранг неопределенности* J-метрики определяется как $\min\{\dim P_+, \dim P_-\}$.

Пространство (H, G) называется J-*пространством. J-пространство* с конечным рангом неопределенности называется *пространством Понтрягина.*

3.3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕНИЯ

Частичное метрическое пространство

Частичное метрическое пространство (Мэтьюз, 1992) определяется как пара (X, d), где X – некоторое множество, а d – неотрицательная симметричная функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$, такая что $d(x, x) \le d(x, y)$ для всех $x, y \in X$ (т.е. любое **саморасстояние** $x(x. x)$, *мало*), $x = y$, если $d(x, x) = d(x, y) = d(y, y) = 0$ (T_0 – аксиома отделимости) и неравенство

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y) - d(z, z)$$

выполняется для всех $x, y, z \in X$ (**сильное неравенство треугольника**).

Если d является частичной метрикой, то $d(x, y) - d(x, x)$ будет квазиполуметрикой и (X, d) может быть частично упорядочено, если мы определим $x \preceq y$ тогда и только тогда $d(x, y) - d(x, x) = 0$.

Сходство

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **сходством** на X, если d *симметрично* и если для всех $x, y \in X$ выполняется либо $d(x, x) \le d(x, y)$ – в таком случае d называется **сходством вперед неравенство**, либо $d(x, x) \ge d(x, y)$ – тогда d называется **сходством назад.**

Всякое сходство d порождает *строгий частичный порядок* $\prec$ на множестве всех неупорядоченных пар элементов X посредством задания $\{x, y\} \prec \{u, v\}$ тогда и только тогда, когда $d(x, y) < d(u, v)$.

Для любого сходства назад d сходство вперед – d порождает тот же частичный порядок.

Пространство τ-расстояния

Пространство τ-расстояния есть пара (X, f), где X – топологическое пространство, а f является τ-*расстоянием* Амри–Мутавакиля на X, т.е. неотрицательной функцией $f : X \times X \to \mathbb{R}$, такой что для любого $x \in X$ и любой окрестности U точки x существует $\varepsilon > 0$ с условием $\{y \in X : f(x, y) < \varepsilon\} \subset U$.

Любое пространство расстояний (X, d) есть пространство τ-расстояния для топологии τ_f, определенной следующим образом: $A \in \tau_f$, если для любого $x \in X$ существует $\varepsilon > 0$, такое что $\{y \in X : f(x, y) < \varepsilon\} \subset A$. Однако существуют неметризуемые пространства τ-расстояния. τ-Расстояние $f(x, y)$ не обязательно должно быть симметричным или обращаться в нуль для $x = y$; например, $e^{|x-y|}$ является τ-расстоянием на $X = \mathbb{R}$ с обычной топологией.

Пространство близости

Пространство близости (Ефремович, 1936) – множество X с бинарным отношением δ на *степенном множестве* $P(X)$ всех его подмножеств, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) $A\delta B$ тогда и только тогда, когда $B\delta A$ (*симметричность*);

2) $A\delta(B \cup C)$ тогда и только тогда, когда $A\delta B$ или $A\delta C$ (*аддитивность*);

3) $A\delta A$ тогда и только тогда, когда $A \neq \emptyset$ (*рефлексивность*).

Отношение δ определяет **близость** (или *структуру близости*) на X. Если $A\delta B$ не выполняется, то множества A и B называются *удаленными множествами.*

Всякое метрическое пространство (X, d) есть пространство близости: определим, что $A\delta B$ тогда и только тогда, когда $d(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x, y) = 0$.

Любая близость на X порождает (**вполне регулярную**) топологию на X заданием на множестве всех подмножеств X *оператора замыкания* $cl : P(X) \to P(X)$ по закону $cl(A) = \{x \in X : \{x\}\delta A\}$.

Равномерное пространство

Такие топологические пространства (с дополнительными структурами) дают обобщения метрических пространств, основанные на **расстоянии между множествами.**

Равномерным пространством (Вэйль, 1937) называется множество X с **равномерностью** (или *равномерной структурой*) $\mathfrak{U}$ – непустым семейством подмножеств множества $X \times X$, называемых *окружениями* и обладающих следующими свойствами:

1) каждое из подмножеств $X \times X$, содержащее множество из $\mathfrak{U}$, принадлежит $\mathfrak{U}$;

2) всякое конечное пересечение множеств из $\mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$;

3) каждое множество $V \in \mathfrak{U}$ содержит *диагональ*, т.е. множество $\{(x, x): x \in X\} \subset X \times X$;

4) если V принадлежит $\mathfrak{U}$, то множество $\{(y, x) : (x, y) \in V\}$ принадлежит $\mathfrak{U}$;

5) если V принадлежит $\mathfrak{U}$, то существует такое $V' \in \mathfrak{U}$, что $(x, z) \in V$ во всех случаях, когда $(x, y), (y, z) \in V'$.

Каждое метрическое пространство (X, d) является равномерным пространством. Окружение в (X, d) есть подмножество $X \times X$, содержащее множество $V_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \varepsilon\}$ для некоторого положительного действительного числа ε. Другим базовым примером равномерного пространства являются топологические группы.

Пространство приближенности

Пространство приближенности (Херрих, 1974) есть множество X со *структурой приближенности*, т.е. непустой совокупностью $\mathfrak{U}$ семейств подмножеств множества X, называемых семействами *приближенности*, со следующими свойствами:

1) каждое семейство, подразделяющее семейство о приближенности, является семейством приближенности;

2) каждое семейство с непустым пересечением является семейством приближенности;

3) $V \in \mathfrak{U}$, если $\{cl(A) : A \in V\} \in \mathfrak{U}$, где $cl(A) = \{x \in X : \{\{x\}, A \in \mathfrak{U}\}$;

4) $\emptyset \in \mathfrak{U}$, в то время как множество $P(X)$ всех подмножеств множества X не является семейством приближенности;

5) если $\{A \cup B : A \in \mathcal{F}_\infty, B \in \mathcal{F}_\varepsilon \in \mathfrak{U}$, то $\mathcal{F}_\infty \in \mathfrak{U}$ или $\mathcal{F}_\varepsilon \in \mathfrak{U}$.

Равномерные пространства являются в точности **паракомпактными** пространствами приближенности.

Пространство приближений

Эти топологические пространства дают обобщения метрических пространств, основанные на **расстоянии между точкой и множеством.**

Пространство приближений (Лоу, 1989) есть пара (X, D), где X – некоторое множество, а D – **расстояние между точкой и множеством,** т.е. функция $X \times P(X) \to [0, \infty]$ (где $P(X)$ является множеством всех подмножеств X), удовлетворяющая для всех $x \in X$ и всех $A, B \in P(X)$ следующим условиям:

1) $D(x, \{x\}) = 0$;

2) $D(x, \{x\}) = \infty$;

3) $D(x, A \cup B) = \min\{D(x, A), D(x, B)\}$;

4) $D(x, A) \le D(x, A^\varepsilon) + \varepsilon$ для любых $\varepsilon \in [0, \infty]$, где $A^\varepsilon = \{x : D(x, A) \le \varepsilon\}$ есть "ε-шар" с центром в x.

Любое метрическое пространство (X, d) (более того, любое расширенное квазиполуметрическое пространство) есть пространство приближений с $D(x, A)$, являющимся обычным расстоянием между точкой и множеством.

Если мы имеем локально компактное сепарабельное метрическое пространство (X, d) и семейство $\mathcal{F}$ его непустых замкнутых подмножеств, то функция **Бэддли–Молчанова** дает инструмент для другого обобщения. Это – функция $D : X \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, которая является нижней полунепрерывной по отношению к ее первой переменной, измеренной относительно второй, и удовлетворяет следующим двум условиям: $F = \{x \in X : D(x, F) \le 0\}$ для $F \in \mathcal{F}$ и $D(x, F_1) \ge D(x, F_2)$ для $x \in X$ всякий раз, когда F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ и $F_1 \subset F_2$.

Дополнительные условия $D(x, \{y\}) = D(y, \{x\})$ и $D(x, F) \le D(x, \{y\}) + D(\{y\}F)$ для всех $x, y \in X$ и всех $F \in \mathcal{F}$ дают нам аналоги симметрии и неравенства треугольника. Случай $D(x, F) = d(x, F)$ соответствует обычному расстоянию между точкой и множеством для метрического пространства (X, d); случай $D(x, F) = d(x, F)$ для $x \in X \backslash F$ и $D(x, F) = -d(x, F \backslash F)$ для $x \in X$ соответствует **функции расстояния со знаком** (гл. 1).

Метрическая борнология

Пусть X – топологическое пространство. *Борнологией* на X будет любое семейство $\mathcal{A}$ собственных подмножеств A множества X, для которых выполняются следующие условия:

1) $\cup_{A \in \mathcal{A}} A = X$;

2) $\mathcal{A}$ является *идеалом*, т.е. содержит все подмножества и конечные объединения его объектов;

Семейство $\mathcal{A}$ является **метрической борнологией** ([Beer99]), если, более того, имеют место условия;

3) $\mathcal{A}$ содержит счетную базу;

4) для любого $A \in \mathcal{A}$ существует $A' \in \mathcal{A}$, такое что замыкание множества A совпадает с множеством внутренних точек множества A'.

Метрическая борнология называется *тривиальной*, если $\mathcal{A}$ есть множество $P(X)$ всех подмножеств множества X; такая метрическая борнология соответствует семейству ограниченных множеств некоторой ограниченной метрики. Для всякого некомпактного **метризуемого** топологического пространства X существует неограниченная метрика, совместимая с данной топологией. Нетривиальная метрическая борнология на таком пространстве X соответствует семейству ограниченных подмножеств по отношению к некоей неограниченной метрике. Некомпактное метризуемое топологическое пространство X допускает бесконечно много нетривиальных метрических борнологий.

3.4. ЗА ПРЕДЕЛАМИ ЧИСЕЛ

Вероятностное метрическое пространство

Понятие **вероятностного метрического пространства** является обобщением понятия метрического пространства (см., например, [ScSk83]) по двум направлениям: расстояния становятся распределениями вероятности и сумма в неравенстве треугольника превращается в **операцию треугольника.**

Формально, пусть A – множество всех *функций распределения вероятности*, несущее множество которого находится в $[0, \infty]$. Для любого $a \in [0, \infty]$ зададим $\varepsilon_a \in A$ как $\varepsilon_a(x) = 1$, если $x > a$ или $x = \infty$ и $\varepsilon_a = 0$, иначе. Функции в A будут упорядочены: будем считать, что $F \le G$, если $F(x) \le G(x)$ для всех $x \ge 0$. Коммутативная и ассоциативная операция τ на A называется **операцией треугольника**, если она удовлетворяет условию $\tau(F, \varepsilon_0) = F$ для любого $F \in A$, и $\tau(F, E) \le \tau(G, H)$, если $E \le G$, $F \le H$.

Вероятностное метрическое пространство – это тройка (X, d, τ), где X – множество, d – функция $X \times X \to A$ и τ – операция треугольника, такая что для любых $p, q, r \in X$ выполняются условия:

1) $d(p, q) = \varepsilon_0$ тогда и только тогда, когда $p = q$;
2) $d(p, q) = d(q, p)$;
3) $d(p, r) \le \tau(d(p, q), d(q, r))$.

Неравенство 3 становится неравенством треугольника, если τ является обычным сложением на $\mathbb{R}$.

Для любого $x \ge 0$ значение $d(p, q)$ в точке x может быть интерпретировано как "вероятность того, что расстояние между p и q меньше, чем x"; Менгер предложил в 1942 г. называть данное понятие *статистическим метрическим пространством*. В этот же период были введены понятия *нечетко определенного (расплывчатого) метрического пространства* (см. также [Bloc99]).

Обобщенная метрика

Пусть X – произвольное множество. Пусть $(G, +, \le)$ – *упорядоченная полугруппа* (не обязательно коммутативная), имеющая наименьший элемент 0. Функция $d : X \times X \to G$ называется **обобщенной метрикой,** если выполняются следующие условия:

1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ для всех $x, y \in X$;
3) $d(x, y) = \overline{d(y, x)}$, где $\overline{\alpha}$ является фиксированным инволютивным отображением G, сохраняющим порядок.

Пара (X, d) называется **обобщенным метрическим пространством**.

Если условие 2 и требование "только тогда" в условии 1 снимаются, мы получаем **обобщенное расстояние** d и **обобщенное пространство расстояний** (X, d).

Расстояние на построении

Группа Кокстера – группа $(W, \cdot, 1)$ порождаемая элементами $\{w_1, \ldots, w_n : (w_i w_j)^{m_{ij}} = 1, 1 \le i, j \le n\}$. Здесь $M = ((m_{ij}))$ – *матрица Кокстера*, т.е. произвольная симметричная $(n \times n)$-матрица, такая что $m = 1$, а остальные значения – положительные целые числа или ∞. Длина $l(x)$ элемента $x \in W$ есть наименьшее число порождающих операторов $w_1, \ldots, w_n$, необходимых для представления x.

Пусть X – произвольное множество $(W, \cdot, 1)$ – группа Кокстера. Пара (X, d) называется *построением* над $(W, \cdot, 1)$, если функция $d : X \times X \to W$, называемая **расстоянием на построении,** обладает следующими свойствами:

1) $d(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $d(x, y) = (d(x, y))^{-1}$;

3) отношение $\sim_i$, задаваемое условием $x \sim_i y$, если $d(x, y) = 1$ или w_i, есть отношение эквивалентности;

4) для данного $x \in X$ и класса эквивалентности C из $\sim_i$ существует единственное $x \in C$, такое что $d(x, y)$ *кратчайшее* (т.е. наименьшей длины) и $d(x, y') = d(x, y)w_i$ для любого $y' \in C$, $y' \ne y$.

Расстояние галереи на построении d' есть обычная метрика на X, задаваемая как $l(d(x, y))$. Расстояние d' – это **метрика пути** на графе с множеством вершин X и xy в качестве ребра, если $d(x, y) = w_i$ для некоторого $1 \le i \le n$. Расстояние галереи на построении есть особый случай **метрики галереи** (*камерной системы* X).

Булево метрическое пространство

Булева алгебра (или *булева решетка*) есть *дистрибутивная решетка* $(B, \vee, \wedge)$ с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1, такая что каждый элемент $x \in B$ обладает *дополнительным элементом* $\bar{x}$, таким что $x \vee \bar{x} = 1$ и $x \wedge \bar{x} = 0$.

Пусть X – произвольное множество и $(B, \vee, \wedge)$ – булева алгебра. Пара (X, d) называется **булевым метрическим пространством** над B, если функция $d : X \times X \to B$ обладает следующими свойствами:

1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $d(x, y) \le d(x, z) \vee d(z, y)$ для всех $x, y, z \in X$.

Пространство над алгеброй

Пространство над алгеброй есть метрическое пространство с дифференциально-геометрической структурой, точки которого могут быть снабжены координатами из некоторой *алгебры*, как правило, ассоциативной и с единичным элементом.

Модуль над алгеброй является обобщением векторного пространства над полем, его определение может быть получено из определения векторного пространства путем замены поля на ассоциативную алгебру с единичным элементом. *Аффинное пространство над алгеброй* является аналогичным обобщением *аффинного пространства* над полем. В аффинных пространствах над алгебрами можно определить эрмитову метрику, в то время как для коммутативных алгебр может быть определена даже квадратичная метрика. Для этого в унитальном модуле необходимо определить *скалярное произведение* $\langle x, y\rangle$, в первом случае со свойством $\langle x, y\rangle = J(\langle y, x\rangle)$, где J является инволютивным отображением алгебры, а во втором случае со свойством $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

n-Мерное *проективное* пространство над алгеброй задается как многообразие одномерных подмодулей $(n + 1)$-мерного унитального модуля над этой алгеброй. Введение *скалярного произведения* $\langle x, y\rangle$ в унитальном модуле позволяет задать в построенном с помощью данного модуля проективном пространстве эрмитову или, для случая коммутативной алгебры, квадратичную эллиптическую и гиперболическую метрику. Метрический инвариант точек этих пространств есть *ангармоническое отношение* $W = \langle x, x\rangle^{-1} \langle x, y\rangle \langle y, y\rangle^{-1} \langle x, y\rangle$. Если W – действительное число, то инвариант w, для которого $W = \cos^2 w$, называется **расстоянием** между x и y **в пространстве над алгеброй.**

Частично упорядоченное расстояние

Пусть X – произвольное множество. Пусть $(G, \leq)$ – частично упорядоченное множество с наименьшим элементом g_0, такое что $G' = G\backslash\{g_0\}$ непусто, и для любых $g_1, g_2 \in G'$ существует $g_3 \in G'$, такое что $g_3 \leq g_1$ и $g_3 \leq g_2$.

Частично упорядоченное расстояние есть функция $d : X \times X \to G$, такая что для любых $x, y \in X$ равенство $d(x, y) = g_0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x = y$.

Рассмотрим следующие возможные свойства.

1. Для любого $g_1 \in G'$ существует $g_2 \in G'$, такое что для любых $x, y \in X$ из неравенства $d(x, y) \leq g_2$ следует неравенство $d(x, y) \leq g_1$.

2. Для любого $g_1 \in G$ существуют $g_2, g_3 \in G'$, такие что для любых $x, y, z \in X$ из неравенств $d(x, y) \leq g_2$ и $d(y, z) \leq g_2$ следует неравенство $(y, x) \leq g_1$.

3. Для любого $g_1 \in G'$ существует $g_2 \in G$, такое что для любых $x, y, z \in X$ из неравенств $d(x, y) \leq g_2$ и $d(y, z) \leq g_2$ следует неравенство $d(y, x) \leq g_1$.

4. G' не имеет первого элемента.

5. $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $x, y \in X$.

6. Для любого $g_1 \in G'$ существует $g_2 \in G'$, такое что для любых $x, y \in X$ из неравенств $d(x, y) <^* g_2$ и $d(y, z) <^* g_1$ следует неравенство $d(x, z) <^* g_1$; здесь $p <^* q$ означает, что либо $p < q$, либо p не сравнимо с q.

7. Отношение порядка $<$ является линейным порядком на G.

В терминах указанных выше свойств d называется: **частично упорядоченное расстояние Апперта,** если выполняются условия 1 и 2; **частично упорядоченное расстояние Голмеса первого типа**, если выполняются условия 4, 5 и 6; **частично упорядоченное расстояние Голмеса второго типа**, если выполняются условия 3, 4, и 5; **расстояние Курепа–Фреше**, если выполняются условия 3, 4, 5 и 7.

Именно, случай $G = \mathbb{R}_{\geq 0}$ расстояния Курепа–Фреше соответствует V-**пространству Фреше,** т.е. паре (X, d), где X – множество и $d(x, y)$ – неотрицательная симметричная функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ (*соседство* точек x и y), такая что $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, и существует неотрицательная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ со следующим свойством: для всех $x, y, z \in X$ и всех положительных r неравенство $\{d(x, y), d(y, z)\} \leq r$ порождает нераенства $d(x, z) \leq f(r)$.

Глава 4

Метрические преобразования

Существует немало способов получения новых расстояний (метрик), используя уже имеющиеся расстояния (метрики). Метрические преобразования позволяют получать новые расстояния как функции от заданных метрик (или заданных расстояний) на одном и том же множестве X. В таком случае полученная метрика будет называться **преобразованной метрикой**. Ниже, в разд. 4.1 приводятся важнейшие примеры таких преобразованных метрик.

При наличии метрики на множестве X можно построить новую метрику на некотором расширении X; аналогичным образом, имея семейство метрик на множествах $X_1,\dots, X_n$, можно получить новую метрику на некотором расширении $X_1,\dots, X_n$. Примеры таких апераций представлены в разд. 4.2.

Если имеется метрика на X, существует много расстояний на других структурах, связанных с X, например на множестве всех подмножеств множества X. Основные расстояния данного типа рассматриваются в разд. 4.3.

4.1. МЕТРИКИ НА ТОМ ЖЕ МНОЖЕСТВЕ

Метрическое преобразование

Метрическое преобразование есть расстояние на множестве X, полученное как функция данных метрик (или данных расстояний) на X.

В частности, имея непрерывную монотонно возрастающую функцию $f(x)$ от $x \geq 0$, которая называется *шкалой*, и пространство расстояний (X, d), можно получить другое пространство расстояний (X, d_f), называемое *метрическим преобразованием школирования* пространства X, определяя $d_f(x, y) = f(d(x, y))$. Для каждого конечного пространства расстояний (X, d) существует такая шкала f, что (X, d_f) является метрическим подпространством евклидова пространства $\mathbb{E}^n$.

Если (X, d) – метрическое пространство, а f – непрерывная дифференцируемая строго возрастающая функция с $f(0) = 0$ и невозрастающей производной f', то (X, d_f) будет метрическим пространством (см. **метрика функционального преобразования**).

Метрика d является ультраметрикой тогда и только тогда, когда $f(d)$ есть метрика для каждой неубывающей функции $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Метрика преобразования

Метрика преобразованния – метрика на множестве X, которая является **метрическим преобразованием**, т.е. получена как функция заданной метрики (или заданных метрик) на X. В частности, метрикой преобразованния могут быть получены из заданной метрики d (или заданных метрик d_1 и d_2) на X любой из указанных ниже операций (здесь $t > 0$):

1) $td(x, y)$ (*t*-**шкалирования метрика**, или **растянутая метрика, подобная метрика**);

2) $\min\{t, d(x, y)\}$ (*t*-**усеченная метрика**);

3) $\max\{t, d(x, y)\}$ для $x \neq y$ (t-**дискретная метрика**);

4) $d(x, y) + t$ для $x \neq y$ (t-**перенесенная метрика**);

5) $\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$;

6) $dp(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{d(x,p)+d(y,p)+d(x,y)}$, где – фиксированный элемент из X (**метрика преобразования биотопа**);

7) $\max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$;

8) $\alpha d_1(x, y) + \beta d_2(x, y)$, где (см. **метрический конус**, гл. 1).

Обобщенная метрика преобразования биотопа

Для данной метрики d на множестве X и замкнутого множества $M \subset X$ **обобщенная метрика преобразования биотопа** d^M на X определяется как

$$d^M(x,y) = \frac{d(x,y)}{d(x,y) + \inf_{z \in M}(d(x,z)+d(y,z))}.$$

Именно $d^M(x, y)$ и tt 1-**усечение** $\{1, d^M(x, y)\}$ являются метриками. **Метрика преобразования биотопа** есть $d^M(x, y)$ с M, состоящим только из одной точки, скажем, p; расстояние биотопа (см. гл. 23) получается в случае $d(x, y) = |x\Delta y|$, $p = \emptyset$.

Метрика аункционального преобразования

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – дважды дифференцируемая действительная функция, заданная для $x \geq 0$, такая что $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$ для всех $x \geq 0$ и $f''(x) \leq 0$ и для всех $x \geq 0$. (f является *вогнутой* на $[0, \infty]$; в частности $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.)

Если (X, d) – метрическое пространство, то **метрика функционального преобразования** d_f есть **метрика преобразования** на X, определенная как

$$f(d(x, y)).$$

Метрики d_f и d – эквивалентны. Если d есть метрика на X, то, н апример, $\alpha d(\alpha > 0)$, $d^\alpha(0 < 1)$, $\ln(1 + d)$, $\operatorname{arcsinh} d$, $\operatorname{arccosh}(1 + d)$ и $\dfrac{d}{1+d}$ будут метриками функционального преобразования на X.

Метрика степенного преобразования

Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Если дано метрическое пространство (X, d), то **метрика степенного преобразования** (или *метрика преобразования снежинки*) есть **метрика функционального преобразования** на X, определенная как

$$(d(x, y))^\alpha.$$

Для данной метрики d на X и любого $\alpha > 1$ функция d^α является в общем случае только расстоянием на X. Она является метрикой для любого положительного α тогда и только тогда, когда d – **ультраметрика.**

Метрика d является **метрикой удвоения** тогда и только тогда, когда (Ассуад, 1983) метрика степенного преобразования d^α допускает **би-липшицево вложение** в некоторое евклидово пространство для каждого $0 < \alpha \leq 1$ (см. определения гл. 1).

Метрика преобразования Шенберга

Пусть $\lambda > 0$. Если (X, d) – метрическое пространство, то **метрикой преобразования Шенберга** называется **метрика функционального преобразования** на X, определенная как

$$1 - e^{-\lambda d(x,y)}.$$

Метрики преобразования Шенберга являются в точности P-**метриками** (гл. 1), которые определяются не функцией преобразования, а усиленной версией неравенства треугольника.

Метрика обратного образа

Для двух метрических пространств (X, d_X), (Y, d_Y) и инъективного отображения $g : X \to Y$ **метрика обратного образа** (из (Y, d_Y) по) на X задается как

$$d_Y(g(x), g(y)).$$

Если (X, d_X) и (Y, d_Y) совпадают, то метрика обратного образа называется *метрикой* g-**преобразования.**

Внутренняя метрика

Для метрического пространства (X, d), в котором каждая пара точек x, y соединена *спрямляемой кривой*, **интернальной метрикой** (или **порожденной внутренней метрикой**), D называется **метрика преобразования** на X, полученная из d как инфимум длин всех спрямляемых кривых, соединяющих две данные точки x и $y \in X$.

Метрика d на X называется **внутренней метрикой** (или **метрикой длины**, см. гл. 6), если она совпадает со своей порожденной внутренней метрикой.

Метрика преобразования Фарриса

Для метрического пространства (X, d) и точки $z \in X$ **преобразование Фарриса** есть метрическое преобразование D_z на $X \backslash \{z\}$, задаваемое как $D_z(x, x) = 0$, и для различных $x, y \in X \backslash \{z\}$ – как

$$D_z(x, y) = C - (x \bullet y)_z,$$

где C есть положительная константа, а $(x.y)_z = \frac{1}{2}(d(x,z) + d(y,z) = d(x,y))$ есть **произведение Громова** (см. гл. 1). Преобразование Фарриса будет метрикой, если $C \geq \max_{x,y \in X \backslash \{z\}} d(x, z)$. Точнее, существует такое число $C_0 \in (\max_{x,y \in X \backslash \{z\}, x \neq y} (x.y)_z, \max_{x \in X \backslash \{z\}} d(x, z)]$, что преобразование Фарриса является метрикой тогда и только тогда, когда $C \geq C_0$. Оно является **ультраметрикой** тогда и только тогда, когда d удовлетворяет **неравенству четырех точек**. В филогенетике, где оно было применено впервые, термин *преобразование Фарриса* используется для функции $d(x, y) - d(x, z)$.

Метрика преобразования инволютивного

Возьмем метрическое пространство (X, d) и точку $z \in X$. **Метрикой инволютивного преобразованния** называется метрическое преобразование d_z на $X \backslash \{z\}$, задаваемое как

$$d_z(x,y) = \frac{d(x,y)}{d(x,z)d(y,z)}.$$

Оно является метрикой для любого $z \in X$ тогда и только тогда, когда d есть птолемеева метрика ([FoSC06]).

4.2. МЕТРИКИ НА РАСШИРЕНИЯХ ДАННОГО МНОЖЕСТВА

Расстояния расширения

Если d есть расстояние на $V_n = \{1,\dots, n\}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, то используются следующие расстояния расширенния (см., например, [DeLa97]).

Расстояние расширенния селекции $\text{gat} = \text{gat}_\alpha^d$ есть расстояние на $V_{n+1} = \{1,\dots, n+1\}$, задаваемое следующими условиями:

1) $\text{gat}(1, n + 1) = \alpha$;
2) $\text{gat}(i,n + 1) = \alpha + d(1, i)$, если $2 \le i \le n$;
3) $\text{gat}(i, j) = d(i, j)$, если $1 \le i < j \le n$.

Расстояние gat_0^d называется **0-расширением селекции** или просто **0-расширением** расстояния d. Если $\alpha \ge \max_{2\le i\le n} d(1, i)$, то **антиподальное расстояние расширенния** $\text{ant} = \text{ant}_\alpha^d$ есть расстояние на V_{n+1}, задаваемое следующими условиями:

1) $\text{ant}(1, n + 1) = \alpha$;
2) $\text{ant}(i, n + 1) = \alpha - d(1, i)$, если $2 \le i \le n$;
3) $\text{ant}(i, j) = d(i, j)$, если $1 \le i < j \le n$.

Если $\alpha \ge \max_{1\le i,j\le n} d(i,j)$, то **полное антиподальное расстояние расширенния** $\text{Ant} = \text{Ant}_\alpha^d$ есть расстояние на $V_{2n} = \{1,\dots,2n\}$, задаваемое следующими условиями:

1) $\text{Ant}(i,n + i) = \alpha$, если $1 \le i \le n$;
2) $\text{Ant}(i,n + j) = \alpha - d(i, j)$, если $1 \le i \ne j \le n$;
3) $\text{Ant}(i, j) = d(i, j)$, если $1 \le i \ne j \le n$;
4) $\text{Ant}(n + i,n + j) = d(i,j)$, если $1 \le i \ne j \le n$.

Оно является результатом последовательного применения операции антиподального расширения n раз, начиная с d.

Расстояние сферического расширения $\text{sph} = \text{sph}_\alpha^d$ есть расстояние на V_{n+1}, задаваемое следующими условиями:

1) $\text{sph}(i,n + 1) = \alpha$, если $1 \le i \le n$;
2) $\text{sph}(i, j) = d(i, j)$, если $1 \le i < j \le n$.

Расстояние 1 суммы

Пусть d_1 – расстояние на множестве X_1, d_2 – расстояние на множестве X_2 и $X_1 \cap X_2 = \{x_0\}$. **Расстояние 1 суммы** d_1 и d_2 есть расстояние d на $X_1 \cup X_2$, задаваемое следующими условиями:

$$d(x,y) = \begin{cases} d_1(x,y), & \text{если} \quad x,y \in X_1, \\ d_2(x,y), & \text{если} \quad x,y \in X_2, \\ d(x,x_0) + d(x_0 y), & \text{если} \quad x \in X_1, y \in X_2. \end{cases}$$

В теории графов расстояние 1 суммы является **метрикой пути**, соответствующей операции 1 суммы для графов.

Метрика непересекающегося объединения

Пусть (X_t, d_t), $t \in T$ – семейство метрических пространств. **Метрикой непересекающегося объединения** будет метрика расширения на множестве $\cup_t X_t \times \{t\}$, задаваемая как

$$d((x, t_1), (y, t_2)) = d_t(x, y)$$

для $t_1 = t_2$, и $d((x, t_1), (y, t_2)) = \infty$ – иначе.

Метрика произведения

Пусть (X_1, d), (X_2, d_2),…, (X_n, d_n) – метрические пространства. Тогда **метрика произведения** есть метрика на *декартовом произведении* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{x = (x_1, x_2,\ldots,x_n) : x_1 \in X_1,\ldots, x_n \in X_n\}$ определяемая как функция от $d_1,\ldots,d_n$. Простейшие метрики произведения определяются как

1) $\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$;

2) $(\sum_{i=1}^{n} d_i^p(x_i y_i))^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < \infty$;

3) $\max_{1\le i\le n} d_i(x_i, y_i)$;

4) $\min_{1\le i\le n}\{d_i(xi_{,} y_i\}$;

5) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$.

Последние две метрики являются **ограниченными** и могут быть построены для произведения счетного числа метрических пространств.

Если $X_1 = \ldots = X_n = \mathbb{R}$, и $d_1 = \ldots = d_n = d$, где $d(x, y) = |\, x, y \,|$ является **натуральной метрикой** на $\mathbb{R}$, то все вышеуказанные метрики произведения индуцируют евклидову топологию на n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$. Они не совпадают с евклидовой метрикой на $\mathbb{R}^n$, но эквивалентны ей. В частности, множество $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой может рассматриваться как декартово произведение $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ n копий *действительной прямой* $(\mathbb{R}, d)$ с метрикой произведения, заданной как $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d^2(x_i, y_i)}$.

Метрика произведения Фреше

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство с **ограниченной** метрикой d. Пусть $X^\infty = X \times \ldots \times X \ldots = \{x = (x_1,\ldots, x_n,\ldots): x_1 \in X_n,\ldots\}$ – *пространство произведения* для X.

Метрика произведения Фреше есть метрика произведения на X^∞, задаваемая как

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n d(x_n, y_n),$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ является любым сходящимся рядом, состоящим из положительных элементов. Обычно используется $A_n = \frac{1}{2^n}$. Метрика (иногда ее называют *метрикой Фреше*) на множестве всех последовательностей $\{x_n\}_n$ действительных (комплексных) чисел, задаваемая как

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{|\, x_n - y_n \,|}{1 + |\, x_n - y_n \,|},$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ является любым сходящимся рядом с положительными элементами, является метрикой произведения Фреше для счетного числа копий множества $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Обычно берется $A_n = \frac{1}{n!}$ или $A_n = \frac{1}{2^n}$.

Метрика гильбертова куба

Гильбертов куб I^{χ_0} есть *декартово произведение* счетного числа копий интервала [0,1], снабженное метрикой $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i|$ (см. **Метрика произведения Фреше**). Его можно отождествлять (с точностью до гомеоморфизма) с компактным метрическим пространством, образуемым всеми последовательностями $\{x_n\}_n$ действительных чисел, таких что $0 \le x_n \le \frac{1}{n}$, где метрика задана как $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$.

Метрика косого произведения

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – два полных **пространства длины** (см. гл. 1) и $f : X \to \mathbb{R}$ – положительная непрерывная функция. Для данной кривой $\gamma : [a, b] \to X \times Y$ рассмотрим ее проекции $\gamma 1 : [a, b] \to Y$ и на X и Y, и определим длину по формуле $\int_a^b \sqrt{|\gamma_1'|^2 (t) + f^2(\gamma_1(t)) |\gamma_2'|^2 (t)} dt.$

Метрикой косого произведения называется метрика на $X \times Y$, задаваемая как инфимум длин всех спрямляемых кривых, соединяющих две данные точки из $X \times Y$ (см.[BuIv01]).

4.3. МЕТРИКИ НА ДРУГИХ МНОЖЕСТВАХ

Имея произвольное метрическое пространство (X, d), можно построить расстояния между некоторыми подмножествами множества X. Основными такими расстояниями будут: **расстояние между точкой и множеством** $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$, определяемое между точкой $x \in X$ и подмножеством $A \subset X$, **расстояние между множествами** $\mathrm{ina}_{x \in A, y \in B}\, d(x, y)$, определяемое между двумя подмножествами A и B множества X, **хаусдорфова метрика** между компактными подмножествами X. Указанные расстояния рассмотрены в гл. 1. В настоящем разделе представлен перечень некоторых других расстояний этого типа.

Расстояние между прямыми

Расстояние между прямыми есть **расстояние между множествами** в $\mathbb{E}^3$, где в качестве множеств берутся *скрещивающиеся прямые*, т.е. две прямые, не лежащие в одной плоскости. Расстояние между прямыми – это длина отрезка их общего перпендикуляра, концы которого лежат на прямых. Для и l_1 и l_2, заданных равенствами $l_1 : x = pt,\ t \in \mathbb{R}$ и $l_2 : x = r + st,\ t \in \mathbb{R}$, расстояние между ними вычисляется по формуле

$$\frac{|\langle r - p, q \times s \rangle|}{\| q \times s \|_2},$$

где $\times$ – *векторное произведение* на $\mathbb{E}^3$, $\langle , \rangle$ – *скалярное произведение* на $\mathbb{E}^3$, $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма. Для $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ имеет место равенство $x \times y =$ $= (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

Расстояние между точкой и прямой

Расстояние между точкой и прямой есть частный случай **расстояния между точкой и множеством**, где в качестве множества рассматривается прямая.

В $\mathbb{E}^2$ расстояние между точкой $z = (z_1, z_2)$ и прямой l: $ax_1 + bx_2 + c$ 0 вычисляется по формуле

$$\frac{|az_1 + bz_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В $\mathbb{E}^3$ расстояние между точкой $z = (z_1, z_2, z_3)$ и прямой l: $x = p + qt$, $t \in \mathbb{R}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\| q \times (p - z) \|_2}{\| q \|_2},$$

где $\times$ – *векторное произведение* на $\mathbb{E}^3$ и $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма.

Расстояние между точкой и плоскостью

Расстояние между точкой и плоскостью есть частный случай **расстояния между точкой и множеством** в $\mathbb{E}^3$, где в качестве множества рассматривается плоскость. Расстояние между точкой (z_1, z_2, z_3) и плоскостью α: $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ вычисляется по формуле

$$\frac{|az_1 + bz_2 + cz_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Расстояние между простыми числами

Расстояние между простыми числами – частный случай **расстояния между точкой и множеством** в $(\mathbb{N}, | n - m |)$, а именно между числом $n \in \mathbb{N}$ и множеством простых чисел $P \subset \mathbb{N}$. Данное расстояние определяется как абсолютная величина разности между n и ближайшим к нему простым числом.

Расстояние до ближайшего целого

Расстояние до ближайшего целого есть частный случай **расстояния между точкой и множеством** в $(\mathbb{R}, | x - y |)$, а именно, между числом $x \in \mathbb{R}$ и множеством целых чисел $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, т.е. $\min_{n \in Z} | x - n |$.

Буземанова метрика множеств

Если (X, d) – произвольное метрическое пространство, то **буземановой метрикой множеств** (см. [Buse55]) является метрика на множестве всех непустых замкнутых подмножеств множества X, определенная как

$$\sup_{x \in X} | d(x, A) - d(x, B) | e^{-d(p,x)},$$

где p – фиксированная точка множества X, а $d(x, A) = \min_{y \in d} d(x, y)$ – **расстояние между точкой и множеством.**

Вместо весового множителя $e^{-d(p,x)}$ можно взять любую функцию преобразования расстояния, убывающую достаточно быстро (см. **Хаусдорфово L_p-расстояние,** гл. 21).

Фактор-полуметрика

Пусть (X, d) – **расширенное метрическое пространство** (т.е. пространство с метрикой, которая, возможно, может принимать значение ∞) и ~ есть отношение эквивалентности на X. Тогда **фактор-полуметрикой** является полуметрика на множестве $\overline{X} = X/\sim$ классов эквивалентности, определяемая для любых $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{X}$ как

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m} d(x_i, y_i),$$

где инфимум берется по всем последовательностям $x_1, y_1, x_2, y_2, y_2, \ldots, x_m, y_m$ с ${}_1 \in \bar{x}, y_m \in \bar{y}$ и $y_i \sim x_{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots, m-1$. При этом неравенство $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \le d(x, y)$ справедливо для всех $x, y \in X$ и d является наибольшей полуметрикой $\overline{X}$ на с таким свойством.

Глава 5

Метрики на нормированных структурах

В данной главе рассматриваются специальные классы метрик, задаваемых на некоторых *нормированных структурах* как норма разности между двумя элементами. Такая структура может быть группой (с групповой *нормой*), векторным пространством (с *векторной нормой* или просто *нормой*), векторной решеткой (с *нормой Рисса*), полем (с *валюацией*) и т.п.

Метрика нормы группы

Метрикой нормы группы называется метрика на *группе* $(G, +, 0)$, определяемая как

$$\| x + (-y) \| = \| x - y \|,$$

где $\| \cdot \|$ – *норма группы* на G, т.е. функция $| \cdot \|: G \to \mathbb{R}$, такая что для всех $x, y \in G$ имеют место следующие свойства:

1) $\| x \| \geq 0$ с $\| x \| = 0$ с тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\| x \| = \| -x \|$;
3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (**неравенство треугольника**).

Любая метрика нормы группы d является **правоинвариантной**, т.е. $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ для любых $x, y, z \in G$. С другой стороны, любая правоинвариантная (равно как и любая левоинвариантная и, в частности, **биинвариантная**) метрика d на G есть метрика нормы группы, поскольку норма группы может быть задана на G как $\| x \| = d(x, 0)$.

Метрика *F*-нормы

Векторное (или *линейное*) *пространство* над *полем* $\mathbb{F}$ есть множество V, снабженное действиями *сложения векторов* $+ : V \times V \to V$ и *умножения на скаляр* $\cdot : F \times V \to V$, такими что $(V, +, 0)$ образует *абелеву группу* (где $0 \in V$ есть *нуль-вектор*), а для всех *векторов* $x, y \in V$ и любых *скалярных величин* $a, b \in \mathbb{F}$ имеют место следующие свойства: $1 \cdot x = x$ (где 1 является мультипликативной единицей поля $\mathbb{F}$), $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$, $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ и $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$. Векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел называется *действительным векторным пространством*. Векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел называется *комплексным векторным пространством*.

Метрика *F*-нормы – метрика на действительном (комплексном) векторном пространстве V, определенная как

$$\| x - y \|_F,$$

где $\| \cdot \|_F$ является *F-нормой* на V, т.е. функцией $\| \cdot \|_F : V \to \mathbb{R}$ такой что для всех $x, y \in V$ и для любого скаляра a с $| a | = 1$ имеют место следующие свойства:

1) $\| x \|_F \geq 0$ с $\| x \|_F = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\| ax \|_F = \| x \|_F$;
3) $\| x + y\|_F \leq \| x \|_F + \| y \|_F$ (неравенство треугольника).

F-норма называется *p-однородной*, если $\| ax \|_F = | a |^p \| x \|_F$.

Метрика F-нормы d является **инвариантной метрикой переноса**, т.е. $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ для всех $x, y, z \in V$. И наоборот, если d является инвариантной метрикой переноса на V, то $\| x \|_F = d(x, 0)$ является F-нормой на V.

F^*-метрика

F^*-метрика – метрика **F-нормы** $\| x - y \|_F$ на действительном (комплексном) векторном пространстве V, такая что действия умножения на скаляр и сложения векторов являются *непрерывными* относительно $\| \cdot \|_F$. Это означает, что $\| \cdot \|_F$ есть функция $\| \cdot \|_F : V \to \mathbb{R}$ такая что для всех и всех $x, y, x_n \in V$ скалярных величин a, a_n имеем следующие свойства:

1) $\| x \|_F \geq 0$ с $\| x \|_F = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\| ax \|_F = \| x \|_F$ для всех a с $| a | = 1$;
3) $\| x + y\|_F \leq \| x \|_F + \| y \|_F$;
4) $\| a_n x \|_F \to 0$ если $a_n \to 0$;
5) $\| ax_n \|_F \to 0$, если $x_n \to 0$;
6) $\| a_n x_n \|_F \to 0$ если $a_n \to 0, x_n \to 0$.

Метрическое пространство $(V, \| x - y \|_F)$ с F^*-метрикой называется *F^*-пространством.* Эквивалентно, F^*-пространство есть метрическое пространство (V, d) с такой **инвариантной метрикой переноса** d, что действия умножения на скаляр и сложения векторов являются непрерывными относительно этой метрики.

Модулярным пространством является F^*-пространство $(V, \| \cdot \|_F)$, в котором F-норма $| \cdot \|_F$ определяется как

$$\| x \|_F = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) < \lambda \right\},$$

и ρ есть *модуляр метризования* на V, т.е. такая функция $\rho : V \to [0, \infty]$, что для всех $x, y, x_n \in V$ и всех скалярных величин a, a_n имеют место следующие свойства:

1) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) если $\rho(ax) = \rho(x)$, то $| a | = 1$;
3) если $\rho(ax + by) \leq \rho(x) + \rho(y)$, то $a + b = 1$;
4) $\rho(a_n x) \to 0$, если $a_n \to 0$ и $\rho(x) < \infty$;
5) $\rho(ax_n) \to 0$, если $\rho(x_n) \to 0$ (*свойство метризования*);
6) для любого $x \in V$ существует такое $k > 0$, что $\rho(kx) < \infty$.

Полное F^*-пространство называется *F-пространством.* **Локально выпуклое** F-пространство известно в функциональном анализе как *пространство Фреше*.

Метрика нормы

Метрика нормы – метрика на действительном (комплексном) векторном пространстве V, определяемая как

$$\| x - y \|,$$

где $\| \cdot \|$ является *нормой* на V, т.е. такой функцией $\| \cdot \|: V \to \mathbb{R}$, что для всех $x, y \in V$ и любого скаляра a имеют место следующие свойства:

1) $\| x \| \geq 0$ с $\| x \| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\| ax \| = | a | \| x \|$;
3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (неравенство треугольника).

Следовательно, норма $\| \cdot \|$ является 1-*однородной F-нормой.* Векторное пространство $(V, \| \cdot \|)$ называется *нормированным векторным пространством* или просто *нормированным пространством.*

На любом данном конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны. Всякое конечномерное нормированное пространство является **полным**. Любое метрическое пространство может быть изометрически вложено в некоторое нормированное векторное пространство как замкнутое линейно независимое подмножество.

Нормированное угловое расстояние между x и y задается как

$$d(x,y)=\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

Малигранда заметил следующее усиление неравенства треугольника в нормированных пространствах: для любых $x,\ y\in V$ выполняется условие

$$(2-d(x,-y))\min\{\|x\|,\|y\|\}\le\|x\|+\|y\|-\|x+y\|\le(2-d(x,-y))\ \{\|x\|,\|x\|\}.$$

Полуметрика полунормы

Полуметрикой полунормы называется полуметрика на действительном (комплексном) векторном пространстве V, задаваемая как

$$\|x-y\|,$$

где $\|\cdot\|$ является *полунормой* (или *преднормой*) на V, т.е. такой функцией $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}$, что для всех $x,\ y\in V$ и любого скаляра a имеют место следующие свойства:

1) $\|x\|\ge 0$ с $\|0\|=0$;
2) $\|ax\|=|a|\ \|x\|$;
3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника).

Векторное пространство $(V,\|\cdot\|)$ называется *полунормированным векторным пространством*. Многие *нормированные векторные пространства,* например **банаховы пространства**, определяются как фактор-пространство по подпространству элементов полунормы нуль.

Квазинормированным пространством является векторное пространство V, на котором задана *квазинорма. Квазинормой* на V называется неотрицательная функция $\|\cdot\|:\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая тем же аксиомам, что и норма, за исключением неравенства треугольника, которое заменяется более слабым условием: существует константа $C>0$, такая что для всех $x,\ y\in V$ выполняется неравенство

$$\|x+y\|\le C)\|x\|+\|y\|)$$

(см. **Почти-метрика**, гл. 1). Примером квазинормированного пространства, которое не является нормированным, может служить **лебегово пространство** $L_p(\Omega)$ с $0<p<1$, в котором квазинорма задается как

$$\|f\|=(\int_\Omega|f(x)|^p\,dx)^{1/p},\ f\in L_p(\Omega).$$

Банахово пространство

Банахово пространство (или *B-пространство*) есть **полное** метрическое пространство $(V,\|x-y\|)$ на векторном пространстве V с метрикой нормы $\|x-y\|$. Эквивалентно, оно является полным *нормированным пространством* $(V,\|\cdot\|)$. В этом случае норма $\|\cdot\|$ на V называется *банаховой нормой.* Примерами банаховых пространств являются:

1) l_p^n *- пространства*, l_p^∞ *- пространства,* $1\le p\le\infty,\ n\in\mathbb{N}$;

2) пространство C сходящихся числовых последовательностей с нормой $\| x \| = \sup n \mid x_n \mid$;

3) пространство C_0 числовых последовательностей, которые сходятся к нулю по норме $\mid x \| = \max_n \mid x_n \|$;

4) пространство $C^p_{[a,b]}, 1 \le p \le \infty$ непрерывных функций на $[a, b]$ с L_p-нормой $\| f \|_p = (\int_a^b \mid f(t) \mid^p \, dt)^{\frac{1}{p}}$;

5) пространство C_K непрерывных функций на компакте K с нормой $\| f \| = \max_{t \in K} \mid f(t) \mid$;

6) пространство $(C_{[a,b]})^n$ функций на $[a, b]$ с непрерывными производными до порядка n включительно с нормой $\| f \|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \le t \le b} \mid f^{(k)}(t) \mid$;

7) пространство $C^n[I^m]$ всех функций, определенных в m-мерном кубе и непрерывно дифференцируемых до порядка n включительно с нормой равномерной ограниченности во всех производных порядка не больше, чем n;

8) пространство $M_{[a,b]}$ ограниченных измеримых функций на $[a, b]$ с нормой

$$\| f \| = \operatorname{ess} \sup_{a \le t \le b} \mid f(t) \mid = \inf_{e, \mu(e)=0} \sup_{t \in [a,b] \setminus e} \mid f(t) \mid;$$

9) пространство А (Δ) функций, которые являются аналитическими в открытом *единичном диске* $\Delta = \{z \in \mathbb{C}: \mid z \mid < 1\}$ и непрерывными в закрытом диске $\overline{\Delta}$ с нормой $\| f \| = \max_{z \in \overline{\Delta}} \mid f(z) \mid$;

10) **лебеговы пространства** $L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$;

11) *пространства Соболева* $W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$ функций f на Ω, таких что f и ее производные вплоть до некоторого порядка k имеют конечную *L_p-норму,* с нормой $\| f \|_{k,p} = \sum_{i=0}^{k} \| f^{(i)} \|_0$;

12) *пространство Бора AP* почти периодических функций с нормой

$$\| f \| = \sup_{-\infty < t < +\infty} \mid f(t) \mid .$$

Конечномерное вещественное банахово пространство называется *пространством Минковского.* Метрика нормы пространства Минковского называется **метрикой Минковского** (см. гл. 6). В частности, любая **l_p-метрика** есть метрика Минковского.

Все n-мерные банаховы пространства являются попарно изоморфными: их множество становится компактным, если вводится расстояние **Банаха–Мазура** $d_{BM}(V, W) = \ln \inf_T \| T \| \cdot \| T^{-1} \|$, где инфимум берется по всем операторам, которые реализуют изоморфизм $T : V \to W$.

l_p-метрика

l_p-метрика d_{l_p}, $1 \le p \le \infty$ есть метрика нормы на $\mathbb{R}^n$ (или на $\mathbb{C}^n$), определенная как

$$\| x - y \|_p,$$

где l_p-норма $\| \cdot \|_p$ задается как

$$\| x \|_p = (\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Для $p = \infty$ мы получаем $\| x \|_\infty = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} = \max_{1\le i\le n} |x_i|$. Метрическое пространство $(\mathbb{R}^n, d_{l_p})$ сокращенно обозначается как l_p^n и называется l_p^n-*пространством.*

l_p-метрика, $1 \le p \le \infty$ на множестве всех последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ действительных (комплексных) чисел, для которых сумма $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ (для $p = \infty$ сумма имеет вид $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$) является конечной, определяется как

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Для $p = \infty$ получаем $\max i{\ge}1 |x_i - y_i|$. Это метрическое пространство сокращенно обозначается как l_p^∞ и называется l_p^∞-*пространством*.

Наиболее важными являются l_1 –, l_2- и l_∞-метрики; l_2-метрика на $\mathbb{R}^n$ называется также **евклидовой метрикой.** l_2-метрика на множестве последовательностей $\{x_n\}_n$ действительных (комплексных) чисел, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, известна также как **гильбертова метрика.** На $\mathbb{R}$ все l_p-метрики совпадают с **натуральной метрикой** $|x - y|$.

Евклидова метрика

Евклидова метрика (или **пифагорово расстояние, расстояние "как летает ворона"**) d_E – метрика на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\| x = y \|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Это обычная l_2-метрика на $\mathbb{R}^n$. Метрическое пространство $(\mathbb{R}^n, d_E)$, сокращенно $\mathbb{R}^n$, называется **евклидовым пространством** (или *вещественным евклидовым пространством*). Иногда выражением "евклидово пространство" обозначается трехмерный случай $n = 3$, в противовес *евклидовой плоскости* для $n = 2$. *Евклидова прямая* (или *действительная евклидова прямая*) получается при $n = 1$, т.е. является метрическим пространством $(\mathbb{R}, |x - y|)$ с **натуральной метрикой** (см. гл. 12).

В действительности $\mathbb{E}^n$ является пространством со **скалярным произведением** (и даже **гильбертовым пространством**), т.е. $d_E(x, y) = \| x - y \| = \| x - y \|_2 = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$, где $\langle x, y\rangle$ есть *скалярное произведение* на $\mathbb{R}^n$, которое представлено в соответствующим образом выбранной системе (декартовы) координат формулой $\langle x, y\rangle = \sum_{i,j} g_{ij} x_i y_i$. В стандартной системе координат имеем $\langle x, y\rangle = \sum_{i,j} g_{ij} x_i y_i$, где $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$ и **метрический тензор** $((g_{ij}))$ является положительно определенной симметричной $n \times n$ матрицей.

В общем случае евклидово пространство определяется как пространство, свойства которого описываются аксиомами *евклидовой геометрии.*

Унитарная метрика

Унитарная метрика (или *комплексная евклидова метрика*) есть l_2-**метрика** на $\mathbb{C}^n$, определенная как

$$\| x - y \|_2 = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2}.$$

Метрическое пространство $(\mathbb{C}^n, \| x - y \|_2)$ называется *унитарным пространством* (или *комплексным евклидовым пространством*). Для $n = 1$ получим *комплексную плоскость* (или *плоскость Арганда*), т.е. метрическое пространство $(\mathbb{C}, | z - u |)$ с **метрикой комплексного модуля** $| z - u |$; $| z | = | z_1 + iz_2 | = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ здесь является комплексным модулем (см. также **кватернионная метрика,** гл. 12).

L_p-метрика

***L_p*-метрика** d_{L_p}, $1 \le p \le \infty$ есть метрика нормы на $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, заданная как

$$\| f - g \|_p$$

для любых $f, g \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Метрическое пространство $(L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), d_{L_p})$ называется ***L_p*-пространством** (или **лебеговым пространством**).

Здесь Ω – некоторое множество и $\mathcal{A}$ является σ-*алгеброй* подмножеств множества Ω, т.е. семейством подмножеств множества Ω, удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

2) если $A \in \mathcal{A}$, то $\Omega \backslash A \in \mathcal{A}$;

3) если $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ с $A_i \in \mathcal{A}$, то $A \in \mathcal{A}$.

Функция $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ называется *мерой* на $\mathcal{A}$, если она *аддитивна*, т.е. $\mu(\cup_{i \ge 1} A_i) = \sum_{i \ge 1} \mu(A_i)$ для всех попарно непересекающихся множеств $A_i \in \mathcal{A}$, и удовлетворяет условию $\mu(\emptyset) = 0$. *Пространство с мерой* обозначается тройкой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Для данной функции $f : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ее L_p-*норма* определяется как

$$\| f \|_p = \left(\int_{\Omega} f(\omega)^p \mu(d\omega) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = L_p(\Omega)$ обозначает множество всех функций $f : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, которые удовлетворяют условию $\| f \|_p < \infty$. Строго говоря, $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ состоит из классов эквивалентности функций, где две функции *эквивалентны*, если они *почти всюду* одинаковы, т.е множество, на котором они различаются, обладает нулевой мерой. Множество $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ есть множество классов эквивалентности измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, абсолютные величины которых почти всюду ограничены.

Наиболее известным примером L_p-метрики является d_{L_p} на множестве $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, где Ω – открытый интервал (0,1), $\mathcal{A}$ – *борелева* σ-*алгебра* на (0,1) и μ – *лебегова мера*. Это метрическое пространство сокращенно обозначается как $L_p(0,1)$ и называется $L_p(0,1)$-*пространством*.

Аналогичным образом можно задать L_p-метрику на множестве $C_{[a,b]}$ всех действительных (комплексных) непрерывных функций на $[a, b]$:

$$d_{L_p}(f, g) = \left(\int_a^b | f(x) - g(x) |^p dx \right)^{1/p}.$$

Для $p = \infty$ $d_{L_\infty}(f,g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$. Это метрическое пространство сокращенно обозначается как $C^p_{[a,b]}$ и называется $C^p_{[a,b]}$-пространством.

Если $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ является семейством всех подмножеств Ω и μ – *кардинальным числом* (т.е. $\mu(A) = |A|$, если A – конечное подмножество Ω и $\mu(A) = \infty$ – иначе), то метрическое пространство $\left(L_p(\Omega, 2^\Omega, |\cdot|), d_{L_p}\right)$ и l_p^∞-пространство совпадают.

Если $\Omega = V_n$ есть множество, состоящее из n элементов, $\mathcal{A} = 2^{V_n}$, и μ является кардинальным числом, то метрическое пространство $\left(L_p(V_n, 2^{V_n}, |\cdot|), d_{L_p}\right)$ и l_p^n-пространство совпадают.

Двойственные метрики

***l_p*-метрика и *l_q*-метрика,** $1 < p, q < \infty$ называются **двойственными**, если $1/p + 1/q = 1$.

В общем случае, когда речь идет о *нормированном векторном пространстве* $(V, \|\cdot\|_V)$, интерес представляют *непрерывные* линейные функционалы из V в основное поле ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Эти функционалы образуют **банахово пространство** $(V', \|\cdot\|_{V'})$, называемое *непрерывным двойственным* для пространства V. Норма $\|\cdot\|_{V'}$ на V' задается как $\|T\|_{V'} = \sup_{\|x\| \le 1} |T(x)|$.

Непрерывным двойственным для метрического пространства l_p^n $\left(l_p^\infty\right)$ является l_q^n (соответственно l_p^∞). Непрерывным двойственным для пространства l_1^n $\left(l_1^\infty\right)$ является l_∞^n (соответственно l_∞^∞). Непрерывные двойственные для банаховых пространств C (состоящего из всех сходящихся последовательностей с **l_∞-метрикой**) и C_0 (состоящего из всех сходящихся к нулю последовательностей с **l_∞-метрикой**) могут быть естественным образом идентифицированы с l_1^∞.

Пространство со скалярным произведением

Пространством со скалярным произведением (или *предгильбертоым пространством*) называется метрическое пространство $(V, \|x - y\|)$ на действительном (комплексном) векторном пространстве V со *скалярным произведением* $\langle x, y\rangle$ такое что метрика нормы $\|x - y\|$ строится с использованием *нормы скалярного произведения* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Скалярное произведение $\langle\, ,\rangle$ на действительном (комплексном) векторном пространстве V является *симметричной билинейной* (в комплексном случае *полуторалинейной*) формой на V, т.е. функцией $\langle\, ,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, такой что для всех $x, y, z \in V$ и всех скалярных величин α, β имеют место следующие свойства:

1) $\langle x, x\rangle \ge 0$ с $\langle x, x\rangle$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, где $\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi$ означает *комплексное сопряжение*;
3) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

Для комплексного векторного пространства скалярное произведение называется также *эрмитовым скалярным произведением*, а соответствующее метрическое пространство – *пространством с эрмитовым скалярным произведением*.

Норма $\|\cdot\|$ в *нормированном пространстве* $(V, \|\cdot\|)$ порождается скалярным произведением тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in V$ имеет место равенство

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Гильбертово пространство

Гильбертово пространство есть пространство со скалярным произведением, которое, как метрическое пространство, является **полным**. Точнее говоря, гильбертово пространство есть полное метрическое пространство $(H, \| x - y \|)$ на действительном (комплексном) векторном пространстве H со *скалярным произведением* $\langle \, , \, \rangle$, таким что метрика нормы $\| x - y \|$ строится по *норме скалярного произведения* $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Любое гильбертово пространство есть **банахово пространство**.

Примером гильбертова пространства служит множество всех последовательностей $x = \{x_n\}_n$ действительных (комплексных) чисел, таких что $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^2$ сходится по гильбертовой метрике, задаваемой как

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |^2 \right)^{1/2}.$$

В качестве других примеров гильбертовых пространств можно привести любое **L_2-пространство** и любое конечномерное пространство со скалярным произведением. В частности, любое евклидово пространство является гильбертовым.

Прямое произведение двух **гильбертовых пространств** называют *пространством Лиувилля* (или *расширенным гильбертовым пространством*).

Метрика нормы Рисса

Пространство Рисса (или *векторная решетка*) есть частично упорядоченное векторное пространство $(V_{Ri}, \preceq)$, в котором выполняются следующие условия:

1. Структура векторного пространства и частично упорядоченная структура совместимы, т.е. из $x \preceq y$ следует, что $x + z \preceq y + z$, а из $x \succ 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ следует, что $ax \succ 0$.

2. Для двух любых элементов $x, y \in V_{Ri}$ существует объединение $x \wedge y \in V_{Ri}$ и пересечение (см. гл. 10).

Метрика нормы Рисса есть метрика нормы на V_{Ri}, задаваемая как

$$\| x - y \|_{Ri},$$

где $\|\cdot\|_{Ri}$ есть *норма Рисса* на V_{Ri}, т.е. такая норма, что для всех $x, y \in V_{Ri}$ неравенство $| x | \preceq | y |$, где $| x | = (-x) \vee (x)$, порождает неравенство $\| x \|_{Ri} \leq \| y \|_{Ri}$.

Пространство $(V_{Ri}, \|\cdot\|_{Ri})$ называется *нормированным пространством Рисса*. В случае полноты оно называется *банаховой решеткой*.

Компакт Банаха–Мазура

Расстояние Банаха–Мазура d_{BM} между двумя n-мерными *нормированными пространствами* $(V, \|\cdot\|_V)$ и $(W, \|\cdot\|_W)$ определяется как

$$\ln \inf_T \| T \| \cdot \| T^{-1} \|,$$

где инфимум берется по всем изоморфизмам $T : V \to W$. Оно является метрикой на множестве X^n всех классов эквивалентности n-мерных нормированных пространств, где $V \sim W$ тогда и только тогда, когда они *изоморфны*. Тогда пара (X^n, d_{BM}) является компактным метрическим пространством, называемым **компактом Банаха–Мазура**.

Фактор-метрика

В случае *нормированного пространства* $(V, \|\cdot\|_V)$ с нормой $\|\cdot\|_V$ и замкнутым подпространством W пространства V пусть $(V/W, \|\cdot\|_{V/W})$ будет нормированным пространством смежных классов $x + W = \{x + w : w \in W\}$, $x \in V$ с *фактор-нормой* $\| x + W \|_{V/VW} = \inf_{w \in W} \| x + w \|_V$.

Фактор-метрикой называется метрика нормы на V/W, заданная как

$$\| (x + W) - (y + W) \|_{V/W} .$$

Метрика тензорной нормы

Для *нормированных пространств* $(V, \|\cdot\|_V)$ и $(W, \|\cdot\|_W)$ норма $\|\cdot\|_\otimes$ на *тензорном произведении* $V \otimes W$ называется тензорной *нормой* (или *кросс-нормой*), если $\| x \otimes y \|_\otimes = \| x \|_V \| y \|_W$ для всех *разложимых* тензоров $x \otimes y$.

Метрика тензорной нормы есть метрика нормы на $V \otimes W$, заданная как

$$\| z - t \|_\otimes .$$

Для любых $z \in V \otimes W$, $z = \sum_j x_j \otimes y_j$, $x_j \in V$, $y_j \in W$ ее *проективная норма* (или *π-норма*) определяется как $\| z \|_{\mathrm{pr}} = \inf \sum_j \| x_j \|_V \| y_j \|_W$, где инфимум берется по всем представлениям z в виде суммы разложимых векторов. Это самая большая тензорная норма на $V \otimes W$.

Метрика валюации

Метрика валюации – это метрика на поле $\mathbb{F}$, заданная как

$$\| x - y \|,$$

где $\|\cdot\|$ – *валюация* на $\mathbb{F}$, т.е. функция $\|\cdot\| : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$, такая что для всех $x, y \in \mathbb{F}$ имеют место следующие свойства:

1) $\| x \| \ge 0$ с $\| x \| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\| xy \| = \| x \| \| y \|$;
3) $\| x + y \| \le \| x \| \| y \|$ неравенство треугольника).

Если $\| x + y \| \le \max\{\| x \| \| y \|\}$, то валюация $\|\cdot\|$ называется *неархимедовой*. В этом случае метрика валюации будет **ультраметрикой**. Простейшим примером валюации является *тривиальное нормирование* $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}} : \| 0 \|_{\mathrm{tr}} = 0$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}} = 1$ для $x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, которое является неархимедовым.

В математике существуют разные определения понятия валюации. Так, например, функция $\nu : \mathbb{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется валюацией, если $\nu(x) \ge 0$, $\nu(0) = \infty$, $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ и $\nu(x + y) \ge \min\{\nu(x), \nu(y)\}$ для всех $x, y \in \mathbb{F}$. Валюацию $\|\cdot\|$ можно получить из функции ν по формуле $\| x \| = \alpha^{\nu(x)}$ для некоторого фиксированного $0 < \alpha < 1$ (см. ***p*-адическая метрика**, гл. 12). *Валюация Куршака* $|\cdot|_{\mathrm{Krs}}$ задается как функция $|\cdot|_{\mathrm{Krs}}: \mathbb{F} \to \mathbb{R}$, такая что $|x|_{\mathrm{Krs}} \geq 0$, $|x|_{\mathrm{Krs}} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, $|x|_{\mathrm{Krs}} = |x|_{\mathrm{Krs}} |y|_{\mathrm{Krs}}$ и $|x+y|_{\mathrm{Krs}} \leq C \max\{|x|_{\mathrm{Krs}}, |y|_{\mathrm{Krs}}\}$ для всех $x, y \in \mathbb{F}$ и для некоторой положительной константы C, называемой *константой валюации*. Если $C \geq 2$, то получается обычное определение валюации $\|\cdot\|$, которое будет неархимедовым, если $C \leq 1$. В целом любая валюация $|\cdot|_{\mathrm{Krs}}$ *эквивалентна* некоторой валюации $\|\cdot\|$, т.е. $|\cdot|^p_{\mathrm{Krs}}$ при некотором $p > 0$. И наконец, для *упорядоченной группы* $(G, \cdot, e, \leq)$, снабженной нулем, *валюация* Крулла определяется как функция $|\cdot|: \mathbb{F} \to G$, такая что $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, $|xy| = |x||y|$ и $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ для любых $x, y \in \mathbb{F}$. Это является обобщением определения неархимедовой валюации $\|\cdot\|$ (см. **Обобщенная метрика**, гл. 3).

Метрика степенного ряда

Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное алгебраическое поле и пусть $\mathbb{F}\langle x^{-1}\rangle$ – поле степенных рядов вида $w = \alpha_{-m}x^m + \ldots + \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots$, $\alpha_i \in \mathbb{F}$. При заданном $l > 1$ *неархимедова валюация* $\|\cdot\|$ на $\mathbb{F}\langle x^{-1}\rangle$ определяется как

$$\|w\| = \begin{cases} l^m, & \text{если } w \neq 0, \\ 0, & \text{если } w = 0. \end{cases}$$

Метрика степенного ряда есть **метрика валюации** $\|w - v\|$ на $\mathbb{F}\langle x^{-1}\rangle$.

Часть II

ГЕОМЕТРИЯ И РАССТОЯНИЯ

Глава 6

Расстояния в геометрии

Геометрия возникла как область знаний, связанная с различными соотношениями в пространстве. Это была одна из двух областей, предшествовавших современной математике, вторая занималась изучением чисел. В настоящее время геометрические концепции достигли весьма высокого уровня абстрактности и сложности обобщений.

6.1. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В математике понятие "геодезический" является обобщением понятия "прямая линия" по отношению к искривленному пространству. Данный термин заимствован из *геодезии*, науки, занимающейся измерением размера и формы Земли.

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство. **Метрическая кривая** γ есть непрерывная функция $\gamma: I \to X$, где I – *интервал* (т.е. непустое связное подмножество) в $\mathbb{R}$. Если γ является r раз непрерывно дифференцируемой, то она называется *регулярной кривой* класса C^r; если $r = \infty$, то γ называется *гладкой кривой*.

Вообще говоря, кривая линия может пересекать саму себя. Кривая будет называться *простой кривой* (или *дугой, путем*), если она не пересекает саму себя, т.е. является инъективной. Кривая γ: $[a, b] \to X$ называется *жордановой кривой* (или *простой замкнутой кривой*), если она не пересекает себя и $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Длина (которая может быть равна ∞) $l(\gamma)$ кривой (γ: $[a, b] \to X$ определяется как $\sup\sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$, где верхняя грань берется по всем конечным разбиениям $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b,\ n \in \mathbb{N}$ отрезка $[a,b]$. Кривая конечной длины называется *спрямляемой*. Для любой регулярной кривой γ: $[a, b] \to X$ зададим *натуральный параметр* s кривой γ как $s = s(t) = l(\gamma|_{[a,t]})$, где $l(\gamma|_{[a,t]})$ есть длина части γ, соответствующей интервалу $[a, t]$. Кривая с такой *натуральной* параметризацией $\gamma = \gamma(s)$ называется кривой **единичной скорости** (или *параметризованной длиной дуги*, *нормированной*); при данной параметризации для любых $t_1, t_2 \in I$ получаем $l(\gamma|_{[t_1,t_2]}) = |t_2 - t_1|$ и $l(\gamma) = |b - a|$.

Длина любой кривой γ: $[a, b] \to X$ равна по меньшей мере расстоянию между ее концевыми точками: $l(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$. Кривая γ, для которой $l(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$, называется **геодезическим отрезком** (или *кратчайшим путем*) от $x = \gamma(a)$ до $y = \gamma(b)$ и обозначается как $[x, y]$. Таким образом, геодезический отрезок есть кратчайший путь между его концевыми точками; он является изометрическим вложением $[a, b]$ в X. В целом геодезические отрезки могут и не существовать, кроме тривиального случая, когда отрезок состоит только из одной точки. Более того, геодезический отрезок, соединяющий две точки, не обязательно единствен.

Геодезической называется кривая, которая бесконечно распространяется в обе стороны и локально ведет себя как отрезок, т.е. локально всюду является минимизатором расстояния. Точнее говоря, кривая γ: $\mathbb{R} \to X$ в естественной параметризации называется *геодезической*, если для любого $t \in \mathbb{R}$ существует такая *окрестность* U, что для любых t_1, $t_2 \in U$ имеем $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$. Таким образом, любая геодезическая есть локально изометрическое вложение всего $\mathbb{R}$ в X. Геодезическую называют **метрической прямой**, если равенство $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$ выполняется для всех t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. Такая геодезическая является изометрическим вложением всей действительной прямой $\mathbb{R}$ в X. Геодезическая будет называться **метрическим большим кругом**, если она является изометрическим вложением круга $S^1(0, r)$ в X. В общем случае геодезические могут и не существовать.

Геодезическое метрическое пространство

Произвольное метрическое пространство (X, d) называется **геодезическим**, если любые две точки в X могут быть соединены **геодезическим отрезком**, т.е. для любых двух точек $x, y \in X$ существует изометрия отрезка $[0, d(x, y)]$ в X. Любое полное *риманово пространство* и любое банахово пространство являются геодезическим метрическим пространством.

Произвольное метрическое пространство (X, d) называется **локально геодезическим метрическим пространством**, если любые две достаточно близкие точки в X могут быть соединены геодезическим отрезком; оно будет называться ***D*-геодезическим**, если любые две точки на расстоянии $< D$ могут быть соединены геодезическим отрезком.

Геодезическое расстояние

Геодезическое расстояние (или **расстояние кратчайшего пути**) есть длина **геодезического отрезка** (т.е. *кратчайшего пути*) между двумя точками.

Интернальная метрика

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство, в котором всякие две точки соединены спрямляемой кривой. Тогда **интернальная метрика** (или *порожденная внутренняя метрика*) D на X задается как инфимум длин всех спрямляемых кривых, соединяющих две данные точки $x, y \in X$.

Метрика d на X называется **внутренней метрикой** (или **метрикой длины**), если она совпадает со своей интернальной метрикой D. Метрическое пространство с внутренней метрикой называется **пространством длины** (или *метрическим пространством путей, внутренним метрическим пространством*).

Если, кроме того, любая пара точек x, y может быть соединена кривой длины $d(x, y)$, то внутренняя метрика d называется *строго внутренней*, а пространство длины (X, d) – **геодезическим** метрическим пространством.

Полное метрическое пространство (X, d) является пространством длины тогда и только тогда, когда для любых двух $x, y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует третья точка $z \in X$ (ε-*срединная точка*), для которой $d(x, z), d(y, z) \le \frac{1}{2} d(x, y) + \varepsilon$.

Любое полное локально компактное пространство длины является **собственным** геодезическим метрическим пространством.

***G*-пространство**

***G*-пространством** (или **пространством геодезических**) называется метрическое пространство (X, d) с геометрией, характеризуемой тем, что расширения геодезических, определяемых как локально кратчайшие линии, являются единственными. Такая геометрия есть обобщение *гильбертовой геометрии* (см. [Buse55]).

Точнее говоря, G-пространство (X, d) определяется следующими условиями:

1. Пространство является **собственным** (или *конечно компактным*), т.е. все его метрические шары компактны.

2. Оно является **выпуклым по Менгеру**, т.е. для любых различных $x, y \in X$ существует такая третья точка $z \in X$, $z \neq x, y$, что $d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)$.

3. Оно является *локально расширяемым*, т.е. для любого $a \in X$ существует такое $r > 0$, что для любых различных точек x, y в шаре $B(a, r)$ имеется такая точка z, отличающаяся от x и y, что $d(x,y)+d(y,z)=d(x,z)$.

4. Оно является *расширяемым единственным образом*, т.е., если в п. 3 выше для двух точек z_1 и z_2 имеет место равенство $d(y,z_1)=d(y,z_2)$, то $z_1=z_2$.

Существование геодезических отрезков обусловливается конечной компактностью и выпуклостью Менгера: любые две точки конечно компактного выпуклого по Менгеру множества X могут быть соединены геодезическим отрезком в X. Существование геодезических обусловлено аксиомой локальной продолжаемости: если конечно компактное выпуклое по Менгеру множество X является локально расширяемым, то существует геодезическая, содержащая данный геодезический отрезок. Наконец, единственность продолжения обеспечивает допущение дифференциальной геометрии, что *линейный элемент* определяет геодезическую единственным образом.

Все *римановы и финслеровы пространства* являются G-пространствами. Одномерное G-пространство есть метрическая прямая линия или метрический большой круг. Любое двумерное G-пространство является топологическим *многообразием*.

Всякое G-пространство есть *хордовое пространство*, т.е. метрическое пространство с множеством выделенных геодезических отрезков, таких что любые две точки соединяются единственным таким отрезком (см. [BuPh87]).

Дезаргово пространство

Дезаргово пространство – G-пространство (X, d), в котором роль геодезических выполняют обычные прямые. Это значит, что X может быть топологически отображено в проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ таким образом, что каждая геодезическая пространства X отображается в прямую линию пространства $\mathbb{R}P^n$. Любое X, отображенное в $\mathbb{R}P^n$, либо должно покрывать все $\mathbb{R}P^n$ (в таком случае все геодезические X являются метрическими большими кругами одной длины), либо может рассматриваться как открытое *выпуклое* подмножество аффинного пространства A^n.

Пространство (X, d) геодезических является дезарговым пространством тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. Геодезическая, проходящая через две различные точки, является единственной.

2. Для размерности $n = 2$ обе *теоремы Дезарга* (прямая и обратная) справедливы, а для размерности $n > 2$ любые три точки из X лежат в одной плоскости.

Среди *римановых пространств* единственными дезарговыми пространствами являются евклидовы, *гиперболические* и *эллиптические пространства*. Примером нериманова дезаргова пространства служит пространство Минковского, которое может считаться прототипом всех нерimановых пространств, включая *финслеровы пространства*.

G-пространство эллиптического типа

***G*-пространством эллиптического типа** называется ***G*-пространство**, в котором через две точки проходит единственная геодезическая, и все геодезические – метрические большие круги одинаковой длины.

Каждое ***G*-пространство**, в котором имеется единственная геодезическая, проходящая через каждые две данные точки, является или G-пространством эллиптического типа, или **прямым *G*-пространством**.

Прямое G-пространство

Прямым *G*-пространством называется ***G*-пространство**, в котором возможно глобальное продолжение геодезической так, чтобы любой ее отрезок оставался кратчайшим путем. Другими словами, для двух любых $x, y \in X$ существует единственный геодезический отрезок, соединяющий x и y, и единственная метрическая прямая, которой x и y принадлежат.

Всякая геодезическая в прямом G-пространстве есть метрическая прямая, определенная единственным образом любыми двумя ее точками. Любое двумерное прямое G-пространство гомеоморфно плоскости.

Все односвязные *римановы пространства* неположительной кривизны (включая евклидово и *гиперболические пространства*), гильбертовы геометрии и пространства Тейхмюллера компактных римановых поверхностей типа рода $g > 1$ (в случае их метризации **метрикой Тейхмюллера**) являются прямыми G-пространствами.

Метрическое пространство гиперболическое по Громову

Метрическое пространство (X, d) называется **гиперболическим по Громову**, если оно является **геодезическим** и **δ-гиперболическим** для некоторого $\delta \geq 0$.

Любое полное односвязное риманово пространство *секционной кривизны* $k \leq -a^2$ есть метрическое пространство гиперболическое по Громову с $\delta = \frac{\ln 3}{a}$. Важным классом метрического пространства гиперболического по Громову являются *гиперболические группы*, т.е. группы с конечным числом образующих, **словарная метрика** которых является δ-гиперболической для некоторого $\delta \geq 0$. Метрическое пространство будет **действительным деревом** в точности тогда, когда оно – метрическое пространство гиперболическое по Громову, с $\delta = 0$.

Геодезическое метрическое пространство (X, d) будет δ-гиперболическим тогда и только тогда, когда оно 4δ-*гиперболическое по Рипсу*, т.е. каждый из его геодезических треугольников (соединение трех геодезических отрезков $[x, y]$, $[x, z]$, $[y, z]$) является 4δ-*тонким* (или 4δ-*слабым*) *худым*: каждая из сторон треугольника находится в 4δ-*окрестности* двух других сторон (4δ-*окрестность* подмножества $A \subset X$ есть множество $\{b \in X : \inf_{a\in A} d(b, a) < 4\delta\}$).

Каждое **CAT(*k*)** пространство с $k < 0$ является гиперболическим по Громову. Каждое евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ является CAT(0) пространством и будет гиперболическим по Громова только для $n = 1$.

CAT(k) пространство

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство. Пусть M^2 – односвязное двумерное *риманово многообразие постоянной кривизны* k, т.е. 2-сфера S_k^2 с $k > 0$, евклидова плоскость $\mathbb{E}^2$ с $k = 0$ или гиперболической плоскость H_k^2 с $k < 0$. Пусть D_k обозначает диаметр M^2, т.е. $D_k = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, если $k > 0$, и $D_k = \infty$, если $k \leq 0$.

Треугольник T в X состоит из трех точек в X, соединенных попарно тремя *геодезическими отрезками*; отрезки при этом называются *сторонами треугольника*. Для треугольника $T \subset X$ *сопоставимым с* T *треугольником* в M^2 будет треугольник $T' \subset M^2$ вместе с отображением f_T, которое изометрически отображает каждую сторону треугольника T на сторону T'. Треугольник T удовлетворяет **CAT(*k*)** неравенству Громова (**CAT** – первые буквы фамилий Картан (**C**artan), **А**лександров, **Т**опоногов), если для каждых $x, y \in T$ имеет место неравенство

$$d(x,y) \leq d_{M^2}(f_T(x), f_T(y)),$$

где f_T – отображение, соответствующее сопоставимому с T треугольнику в M^2. Таким образом, геодезический треугольник T является столь же "тонким", как и сопоставимый треугольник в M^2.

Метрическое пространство (X, d) есть **CAT(*k*) пространство**, если оно – **D_k-геодезическое** (т.е. любые две точки на расстоянии $< D_k$ могут быть соединены геодезическим отрезком) и все треугольники T с суммой сторон $< 2D_k$ удовлетворяют CAT(k) неравенству.

Любое CAT(k_1) пространство есть CAT(k_2) пространство, если $k_1 < k_2$. Любое **действительное дерево** является *CAT*($-\infty$) *пространством*, т.е. является CAT(k) пространством для всех $k \in \mathbb{R}$.

Пространство Александрова с кривизной, ограниченной сверху k (или **локальное CAT(*k*) пространством**), есть метрическое пространство (X, d), в котором каждая точка $p \in X$ имеет *окрестность* U, такую что любые две точки $x, y \in U$ соединяются геодезическим отрезком и CAT(k) неравенство выполняется для всех $x, y, z \in U$. Риманово многообразие есть локальное CAT(k) пространство тогда и только тогда, когда его *секционная кривизна* не превосходит k.

Пространство Александрова с кривизной, ограниченной снизу k – метрическое пространство (X, d), в котором каждая точка $p \in X$ имеет *окрестность* U, такую что любые две точки $x, y \in U$ соединяются геодезическим отрезком, и *обратное CAT*(k) *неравенство*

$$d(x,y) \geq d_{M^2}(f_T(x), f_T(y)),$$

где f_T есть отображение, соответствующее сопоставимому для T треугольнику в M^2, выполняется для всех $x, y, z \in U$.

Два приведенных выше определения различаются только знаком ($\leq$ или $\geq$) выражения $d(x,y) \geq d_{M^2}(f_T(x), f_T(y))$. Если $k = 0$, указанные выше пространства называются **неположительно искривленными и неотрицательно искривленными** метрическими пространствами соответственно; они также различаются знаками ($\leq$ или $\geq$, соответственно) в выражении

$$2d^2(z, m(x,y)) - (d^2(z,x) + d^2(z,y) + \frac{1}{2}d^2(x,y)),$$

где вновь x, y, z являются тремя любыми точками в окрестности U для каждого $p \in X$ и $m(x, y)$ есть срединная точка **метрического интервала** $I(x, y)$.

В CAT(0) пространстве любые две точки соединены единственным геодезическим отрезком и расстояние есть выпуклая функция. Любое CAT(0) пространство является **выпуклым по Буземану** и **птолемеевым** (см. гл. 1), а обратное неверно. То же самое справедливо на уровне локальных свойств, но в римановом пространстве все три локальных условия эквивалентны неположительности секционной кривизны. Евклидовы пространства, гиперболические пространства, евклидовы построения и деревья являются CAT(0) пространствами. Полные CAT(0) пространства называются также *адамаровыми пространствами*.

Граница метрического пространства

Существуют разные понятия **границы** ∂X **метрического пространства** $(X,\ d)$. Ниже приводятся лишь некоторые наиболее общего характера. Обычно, если $(X,\ d)$ является локально компактным, то $X \cup \partial X$ – его *компактное расширение*.

1. **Идеальная граница.** Пусть $(X,\ d)$ – геодезическое метрическое пространство, а γ^1 и γ^2 – два **метрических луча**, т.е. геодезические с изометрией $\mathbb{R}_{\geq 0}$ в X. Эти лучи будут называться *эквивалентными*, если **хаусдорфово расстояние** между ними (соответствующее метрике d) конечно, т.е. если $\sup_{t \geq 0} d(\gamma^1(t), \gamma^2(t)) < \infty$. **Граница в бесконечности** (или **идеальная граница**) пространства $(X,\ d)$ есть множество $\partial_\infty X$ эквивалентных классов γ_∞ всех метрических лучей.

Если $(X,\ d)$ – полное CAT(0) пространство, то **метрика Титса** (или *асимптотический угол расхождения*) на $\partial_\infty X$ задается как

$$2\arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

для всех $\gamma^1_\infty, \gamma^2_\infty \in \partial_\infty X$, где $\rho = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} d(\gamma^1(t), \gamma^2(t))$. Множество $\partial_\infty X$, снабженное метрикой Титса, называется **границей Титса** пространства X.

Если (X, d, x_0) – пунктированное полное CAT(-1) пространство, тогда **метрика Бурдона** (с базовой точкой x_0) на $\partial_\infty X$ определяется как

$$e^{-(x.y)}$$

для любых $x, y \in \partial_\infty X$, где $(x.y)$ обозначает **произведение Громова** $(x.y)_{x_0}$. **Сфера видимости** $(X,\ d)$ **в точке** $x_0 \in X$ есть множество классов эквивалентности метрических лучей, исходящих из x_0.

2. **Граница Громова.** Если задано пунктированное метрическое пространство $(X,\ d,\ x_0)$, то его **граница Громова** (обобщение Бакли и Коккендорфа в 2005 г. случая пространства, гиперболического по Громову) есть множество $\partial_G X$ классов эквивалентности *последовательностей Громова.* Последовательность $x = (x_i)$ в X называется *последовательностью Громова*, если произведение Громова $(x_i . x_j)_{x_0} \to \infty$ при $i, j \to \infty$. Две последовательности Громова x и y называются *эквивалентными*, если существует конечная цепь последовательностей Громова $x^k, 0 \leq k \leq k'$, так что $x = x^0$, $y = x^{k'}$ и $\lim_{i,j \to \infty} \inf\left(x_i^{k-1} . x_j^k\right) = \infty$ для $0 \leq k \leq k'$.

В **собственном** геодезическом пространстве гиперболическом по Громову, $(X,\ d)$ сфера видимости не зависит от базовой точки x_0 и является естественно изоморфной своей *границе Громова* $\partial_G X$, которая может быть отождествлена с $\partial_G X$.

3. ***g*-Граница.** Обозначим через $\overline{X}_d$ метрическое пополнение $(X,\ d)$ и, рассматривая X как подмножество $\overline{X}_d$, обозначим разность $\overline{X}_d \setminus X$ как ∂X_d. Пусть (X, l, x_0) – пунктированное бесконечное **пространство длины**, т.е. его метрика совпадает с **внутренней метрикой** l пространства $(X,\ d)$. В случае измеримой

функции $g:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, **$g$-граница** (X,d,x_0) (обобщение Бакли и Коккендорфа в 2005 г. *сферической границы* и *границы Флойда*) есть $\partial_g X=\partial X_\sigma \setminus \partial X_l$, где $\sigma(x,y)=\inf\int_\gamma g(z)dl(z)$ для всех $x,\ y\in X$ (здесь инфимум берется по всем метрическим отрезкам $\gamma=[x,y]$).

4. **Граница Хочкиса.** В случае пунктированного собственно **выпуклого** Буземану метрического пространства (X,d,x_0) его **границей Хочкиса** называется множество $\partial_{\mathrm{H}}(X,x_0)$ изометрий $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to X$ с $f(0)=x_0$. Границы $\partial_{\mathrm{H}}^{x_0}X$ и $\partial_{\mathrm{H}}^{x_1}X$ являются гомеоморфными для различных $x_0,x_1\in X$. В пространстве, гиперболическом по Громову, $\partial_{\mathrm{H}}^{x_0}X$ гомеоморфно границе Громова $\partial_{\mathrm{G}}X$.

5. **Метрическая граница.** Для пунктированного метрического пространства (X,d,x_0) и неограниченного подмножества S множества $\mathbb{R}_{\geq 0}$ луч γ: $S\to X$ называется *слабо геодезическим лучом*, если для каждого $x\in X$ и каждого $\varepsilon>0$ существует целое число N, такое что неравенства $|d(\gamma(t),\gamma(0))-t|<\varepsilon$ и $|d(\gamma(t),x)-d(\gamma(s),x)-(t-s)|<\varepsilon$ выполняются для всех $s,\ t\in T$ с $s,\ t\geq N$. Пусть $\mathcal{G}(X,\ d)$ – *коммутативная унитарная* C^*-алгеброй с нормой $\|\cdot\|_\infty$, порождаемой (ограниченными, непрерывными) функциями, которые обращаются в нуль на X, постоянными функциями и функциями вида $g_y(x)=d(x,x_0)-d(x,y)$ (см. определения в разделе **Квантовое метрическое пространство**). **Метрическая граница** Рифеля $\partial_{\mathrm{R}}X$ пространства $(X,\ d)$ есть разность $\overline{X}^d\setminus X$, где X^d является *метрическим компактным расширением* $(X,\ d)$, т.е. максимальным идеальным пространством (множеством *чистых состояний*) данной C^*-алгебры. Рифель доказал, что для собственного метрического пространства $(X,\ d)$ со счетной базой граница $\partial_{\mathrm{R}}X$ включает пределы $\lim\limits_{t\to\infty}f(\gamma(t))$ для каждого слабого геодезического луча γ и каждой функции f вышеуказанной C^*-алгебры.

Проективно плоское метрическое пространство

Метрическое пространство, в котором геодезические заданы, называется **проективно плоским**, если оно локально допускает *геодезическое* (или *проективное*) *отображение*, т.е. отображение, сохраняющее геодезические, в некоторое евклидово пространство (см. евклидов **ранг метрического пространства** в гл. 1; сходные термины: *аффинно плоское, конформно плоское* и т.п.).

Риманово пространство будет проективно плоским тогда и только тогда, когда оно имеет постоянную (секционную) кривизну.

6.2. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Проективная геометрия является частью общей геометрии, рассматривающей свойства и инварианты геометрических фигур под воздействием *оператора проектирования*. Аффинная геометрия, геометрия подобия (или метрическая геометрия) и евклидова геометрия являются частями проективной геометрии с нарастающей сложностью. Основными инвариантами проективной, аффинной, метрической и евклидовой геометрий являются соответственно ангармоническое отношение, параллельность (и относительные расстояния), углы (и относительные расстояния), абсолютные расстояния.

n-Мерное проективное пространство $\mathbb{F}P^n$ есть пространство одномерных векторных подпространств данного $(n + 1)$-мерного векторного пространства V над полем $\mathbb{F}$. Базовое построение предполагает формирование множества классов эквивалентности ненулевых векторов в пространстве V при соблюдении отношения скалярной пропорциональности. Данная идея возвращает нас к математическому описанию *перспективы*. Использование базиса пространства V позволяет ввести *однородные координаты* точки в $\mathbb{K}P^n$, которые обычно записываются как $(x_1 : x_2 : ... : x_n : x_{n+1})$ – вектор длины $n + 1$, отличный от $(0:0:0:...:0)$. Два множества с пропорциональными координатами обозначают одну и ту же точку проективного пространства. Любая точка проективного пространства, которую можно представить как $(x_1 : x_2 : ... : x_n : 0)$, называется *бесконечно удаленной точкой*. Часть проективного пространства $\mathbb{K}P^n$, не являющаяся "бесконечно удаленной", т.е. множество точек проективного пространства, которые могут быть представлены как $(x_1 : x_2 : ... : x_n : 1)$, есть n-мерное *аффинное пространство* A^n.

Символом $\mathbb{R}P^n$ обозначается *действительное проективное пространство* размерности n, т.е. пространство одномерных векторных подпространств пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Символом $\mathbb{C}P^n$ обозначается *комплексное проективное пространство* комплексной размерности n. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ имеет естественную структуру компактного гладкого n-мерного *многообразия*. Его можно рассматривать как пространство прямых, проходящих через нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ (т.е. как *пространство лучей*). Оно может рассматриваться как множество $\mathbb{R}^n$ (как *аффинное пространство*) совместно с его бесконечно удаленными точками. Его можно рассматривать также как множество точек n-мерной сферы в $\mathbb{R}^{n+1}$, отождествленных с диаметрально противоположными точками.

Проективные точки, проективные прямые, проективные плоскости,..., проективные гиперплоскости пространства $\mathbb{K}P^n$ являются соответственно одномерными, двумерными, трехмерными,..., n-мерными подпространствами пространства V. Любые две проективные прямые на проективной плоскости имеют одну и только одну общую точку. *Проективное преобразование* (или *коллинеация, проективное соответствие*) есть биективное отображение проективного пространства на себя, сохраняющее коллинеарность (свойство точек располагаться на одной линии) в обоих направлениях. Любое проективное преобразование есть композиция двух *перспективных проекций*. Проективные преобразования не обеспечивают сохранение размеров или углов, однако сохраняют *тип* (т.е. точки остаются точками и прямые – прямыми), *инцидентность* (т.е. принадлежность точки прямой) и *ангармоническое отношение*. Здесь для четырех коллинеарных точек $x, y, x, t \in \mathbb{F}P^n$ их *ангармоническое отношение* задается как $(x, y, z, t) = \frac{(x-z)(y-t)}{(y-z)(x-t)}$, где $\frac{x-z}{x-t}$ обозначает частное $\frac{f(x)-f(z)}{f(x)-f(t)}$ для некоторой аффинной биекции f прямой $l_{x,y}$, проходящей через точки x и y, в $\mathbb{K}$. Если имеется четыре проективные прямые l_x, l_y, l_z, l_t, проходящие через точки x, y, z, t соответственно, которые проходят через данную точку, их ангармоническое отношение, заданное выражением $(l_x, l_y, l_z, l_t) = \frac{\sin(l_x, l_z)\sin(l_y, l_t)}{\sin(l_y, l_z)\sin(l_x, l_t)}$, совпадает с (x, y, z, t). Ангармоническое отношение четырех комплексных чисел x, y, z, t задается как $(x, y, z, t) = \frac{(x-z)(y-t)}{(y-z)(x-t)}$. Оно будет действительным тогда и только тогда, когда четыре числа являются или коллинеарными или коцикличными.

Проективная метрика

Для данного выпуклого подмножества D проективного пространства $\mathbb{S}P^n$ **проективная метрика** d есть метрика на D, такая что кратчайшие пути по отношению к этой метрике являются частями проективных прямых или самими проективными прямыми. Предполагается, что выполняются следующие условия:

1. D не является подмножеством никакой гиперплоскости.

2. Для любых трех неколлинеарных точек $x, y, z \in D$ неравенство треугольника выполняется в строгом смысле: $d(x, y) < d(x, z) + d(z, y)$.

3. Если x и y – разные точки в D, то пересечение прямой $l_{x,y}$, проходящей через x и y, с D есть либо вся прямая $l_{x,y}$, образующая **метрический большой круг**, либо получено из посредством $l_{x,y}$ удаления некоторого отрезка (который может быть сведен к точке) и образует **метрическую прямую**.

Метрическое пространство (D, d) называется **проективным метрическим** пространством (см. **Проективно плоское пространство**). Проблема определения всех проективных метрик является *четвертой проблемой Гильберта*; она решена только для размерности $n = 2$. Именно, если имеется гладкая мера на пространстве гиперплоскостей в $\mathbb{R}P^n$, определим расстояние между любыми двумя точками $x, y \in \mathbb{R}P^n$ как половину меры всех гиперплоскостей, которые пересекают отрезок прямой, соединяющий x и y. Полученная метрика будет проективной – это *конструкция Буземана* проективных метрик. Для $n = 2$, как доказано Амбарцумяном ([Amba76]), все проективные метрики могут быть получены из конструкции Буземана.

В проективном метрическом пространстве одновременно не может быть двух видов прямых: они все либо метрические прямые, либо метрические большие круги одинаковой длины (*теорема Гамеля*). Пространства первого вида называются *открытыми*. Они совпадают с подпространствами аффинного пространства; геометрия открытых проективных метрических пространств есть *гильбертова геометрия*. *Гиперболическая геометрия* является гильбертовой геометрией, в которой существуют отражения от всех прямых. Именно, множество D имеет гиперболическую геометрию тогда и только тогда, когда оно является внутренностью эллипсоида. Геометрия открытых проективных пространств, множества которых совпадают со всем аффинным пространством, есть *геометрия Минковского*. *Евклидова геометрия* – это гильбертова геометрия и геометрия Минковского одновременно. Пространства второго вида называются *закрытыми*; они совпадают со всем $\mathbb{R}P^n$. *Эллиптическая геометрия* – геометрия проективного метрического пространства второго вида.

Проективная метрика полосы

Проективная метрика полосы ([BuKe53]) есть **проективная метрика** на полосе $\mathrm{St} = \left\{ x \in R^2 : -\frac{\pi}{J} < J_2 < \frac{\pi}{J} \right\}$, определенная как

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} + |\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} y_2|.$$

Следует обратить внимание на то, что St с обычной евклидовой метрикой $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ *проективным метрическим пространством* не является.

Проективная метрика полуплоскости

Проективная метрика полуплоскости ([BuKe53]) есть **проективная метрика** на $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$, заданная выражением

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}+\left|\frac{1}{x_2}-\frac{1}{y_2}\right|.$$

Гильбертова проективная метрика

Для данного множества H **гильбертовой проективной метрикой** h будет **полная проективная метрика** на H. Это означает, что H содержит помимо двух произвольных различных точек x и y также точки z и t, для которых $h(x,z)+h(z,y)=h(x,y)$, $h(x,y)+h(y,t)=h(x,t)$, и является гомеоморфным выпуклому множеству в n-мерном аффинном пространстве A^n, при этом геодезические в H отображаются в прямые пространства A^n. Метрическое пространство $(H,\ h)$ называется *гильбертовым проективным пространством*, а геометрия гильберта проективного пространства называются *гильбертовой геометрией.*

Формально, пусть D – непустое выпуклое открытое множество в A^n с границей ∂D, не содержащей двух собственных компланарных, но неколлинеарных отрезков (обычно граница D является строго выпуклой замкнутой кривой, а D – ее внутренностью). Пусть $x,\ y \in D$ находятся на прямой, пересекающей ∂D в точках z и t, при этом z расположена на стороне y и t – на стороне x. В этом случае гильбертова метрика h на D определяется как

$$\frac{r}{2}\ln(x,y,z,t),$$

где (x,y,z,t) – ангармоническое отношение x,y,z,t и r – фиксированная положительная константа.

Метрическое пространство $(D,\ d)$ является G-прямым пространством. Если D – эллипсоид, то h – **гиперболическая метрика**, определяющая *гиперболическую геометрию* на D. На *единичном диске* $\Delta=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ метрика h будет совпадать с **метрикой Кэли–Клейна–Гильберта**. Если ∂D содержит компланарные, но неколлинеарные отрезки, то метрика на D может задаваться выражением $h(x,y)+d(x,y)$, где d является любой **метрикой Минковского** (обычно евклидовой метрикой).

Метрика Минковского

Метрика Минковского (или **расстояние Минковского–Гельдера**) есть **метрика нормы** конечномерного действительного **банахова пространства**.

Формально, пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное действительное векторное пространство, K – будет симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, т.е. открытая окрестность нуля, которая является ограниченной, выпуклой и *симметричной* ($x \in K$ тогда и только тогда, когда $-x \in K$). Тогда *функционал Минковского* $\|\cdot\|_K \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, заданный формулой

$$\|x\|_K = \inf\left\{\alpha>0:\ \frac{x}{\alpha}\in\partial K\right\},$$

является *нормой* на $\mathbb{R}^n$ и метрика Минковского m определяется выражением

$$\| x-y \|_K .$$

Метрическое пространство ($\mathbb{R}^n$, m) называется *пространством Минковского*. Его можно рассматривать как n-мерное аффинное пространство A^n с метрикой m, в котором роль *единичного шара* выполняет данное центрально симметричное выпуклое тело. Геометрия пространства Минковского называется *геометрией Минковского*. Для строго выпуклого симметричного тела метрика Минковского является **проективной метрикой** и ($\mathbb{R}^n$, m) является ***G*-прямым пространством**. Геометрия Минковского является евклидовой тогда и только тогда, когда ее *единичная сфера* – эллипсоид.

Метрика Минковского m пропорциональна евклидовой метрике d_E на каждой прямой l, т.е. $m(x,y)=\phi(l)d_E(x,y)$. Таким образом, метрику Минковского можно считать метрикой, определяемой во всем аффинном пространстве A^n и обладающей тем свойством, что аффинное *отношение* $\frac{ac}{ab}$ любых трех коллинеарных точек a, b, c (см. разд. 6.3) равно отношению их расстояний $\frac{m(a,c)}{m(a,b)}$.

Буземанова метрика

Буземанова метрика ([Buse55]) есть метрика на вещественном n-мерном проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$, заданная выражением

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\left|\frac{x_i}{\|x\|}-\frac{y_i}{\|y\|}\right|\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\left|\frac{x_i}{\|x\|}-\frac{y_i}{\|y\|}\right|\right\}$$

для любых $x=(x_1:\ldots:x_{n+1})$, $y=(y_1:\ldots:y_{n+1})\in\mathbb{R}P^n$, где $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1}x_1^2}$.

Флаговая метрика

Для данного n-мерного *проективного пространства* $\mathbb{F}P^n$ **флаговой метрикой** d называется метрика на $\mathbb{F}P^n$, заданная *флагом*, т.е. *абсолютом*, состоящим из системы m-плоскостей α_m, $m = 0,\ldots, n - 1$, с α_{i-1} принадлежащей α_i для всех $i\in\{1,\ldots,n-1\}$. Метрическое пространство ($\mathbb{F}P^n$, d) сокращенно обозначается как F^n и называется *флаговым пространством*.

Если для пространства F^n выбрать аффинную систему координат $(x_i)_i$ так, чтобы векторы прямых, проходящих через ($n - m - 1$)-плоскость α_{n-m-1} задавались условием $x_1=\ldots=x_m=0$, то флаговая метрика $d(x, y)$ между точками $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,\ldots,y_n)$ задается по формулам

$$d(x,y)=|x_1-y_1|,\ \text{если}\ x_1\neq y_1,\ d(x,y)=|x_2-y_2|,\ \text{если}\ x_1=y_1,$$

$$x_2\neq y_2,\ldots,d(x,y)=|x_k-y_k|,\ \text{если}\ x_1=y_1,\ldots,x_{k-1}=y_{k-1},x_k\neq y_k,\ldots .$$

Проективное определение метрики

Проективное определение метрики есть введение в подмножествах проективного пространства метрики так, чтобы эти подпространства стали изоморфными *евклидовым, гиперболическим* или *эллиптическим пространствам*.

Для получения евклидова определения метрики в $\mathbb{R}P^n$ следует выделить в данном пространстве (n – 1)-мерную гиперплоскость π, называемую *бесконечно удаленной гиперплоскостью,* и задать $\mathbb{E}^n$ как подмножество проективного пространства, полученное путем удаления из него данной гиперплоскости π. В терминах однородных координат π включает все точки $(x_1 : ... : x_n : 0)$, а $\mathbb{E}^n$ – все точки $(x_1 : ... : x_n : x_n)$ с $x_n \neq 0$. Следовательно, его можно представить как $\mathbb{E}^n = \{x \in \mathbb{R}P^n : x = (x_1 : ... : x_n : 1)\}$. Евклидова метрика d на $\mathbb{E}^n$ задается как

$$\sqrt{\langle x-y, \ x-y \rangle},$$

где для любых $x = (x_1 : ... : x_n : 1)$, $y = (y_1 : ... : y_n : 1) \in \mathbb{E}^n$ имеем $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Для получения *гиперболического определения метрики* на $\mathbb{R}P^n$ рассматривается множество D внутренних точек действительной овальной гиперповерхности Ω второго порядка в $\mathbb{R}P^n$. **Гиперболическая метрика** d_{hyp} на D определяется выражением

$$\frac{r}{2} |\ln(x, y, z, t)|,$$

где z и t являются точками пересечения прямой $l_{x, y}$, проходящей через точки x и y, с поверхностью Ω, (x, y, z, t) есть *ангармоническое отношение* точек x, y, z, t и r – фиксированная положительная константа. Если для любых $x = (x_1 : ... : x_{n+1})$, $y = (y_1 : ... : y_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$ определено *скалярное произведение* $\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=1}^{i+1} x_i, y_i$, то гиперболическая метрика на множестве $D = \{x \in \mathbb{R}P^n : \langle x, x \rangle < 0\}$ может быть записана как

$$r \operatorname{arccosh} \frac{|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle, \langle y, y \rangle}},$$

где r – фиксированная положительная константа и arccosh обозначает неотрицательные величины обратного гиперболического косинуса.

Для того чтобы получить *эллиптическое определение метрики* в $\mathbb{R}P^n$, следует рассмотреть для любых $x = (x_1 : ... : x_{n+1})$, $y = (y_1 : ... : y_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$ скалярное произведение $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. **Эллиптическая метрика** d_{ell} на $\mathbb{R}P^n$ задается теперь выражением

$$r \arccos \frac{|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle, \langle y, y \rangle}},$$

где r – фиксированная положительная константа, а arccosh – обратный косинус, определенный на отрезке $[0, \pi]$.

Во всех рассмотренных случаях некоторые гиперповерхности второго порядка остаются инвариантными относительно **движений**, т.е. проективных преобразований, сохраняющих данную метрику. Эти гиперповерхности называются *абсо-*

лютами. Для случая евклидового определения метрики абсолютом является воображаемая (n – 2)-мерная овальная поверхность второго порядка, а именно вырожденный абсолют $x_1^2 + ... + x_n^2 = 0,\ x_{n+1} = 0$. Для случая гиперболического определения метрики абсолют выражается как действительная (n – 1)-мерная овальная гиперповерхность второго порядка, в простейшем случае абсолют $-x_1^2 + x_n^2 + ... + x_{n+1}^2 = 0$. Для случая эллиптического определения метрики абсолютом является воображаемая (n – 1)-мерная овальная гиперповерхность второго порядка, а именно абсолют $x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 0$.

6.3. АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

n-Мерное *аффинное пространство* над полем $\mathbb{F}$ есть множество A^n (с элементами, называемыми *точками* аффинного пространства), которому соответствует n-мерное векторное пространство V над $\mathbb{F}$ (называемое *пространством, ассоциированным* с A^n), так что для любого $a \in A^n$, $A = a + V = \{a + v : v \in V\}$. Другими словами, если $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n) \in A^n$, то вектор $\overrightarrow{ab} = (b_1 - a_1, ..., b_n - a_n)$ принадлежит V. В аффинном пространстве можно складывать вектор с точкой, чтобы получить другую точку, и вычитать точки для получения векторов, однако нельзя складывать точки, поскольку отсутствует нулевой элемент. Если даны точки $a, b, c, d \in A^n$, так что $c \neq d$, а векторы $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{cd}$ являются коллинеарными, то скаляр λ, задаваемый условием $\overrightarrow{ab} = \lambda\,\overrightarrow{cd}$, называется *аффинным отношением* ab и cd и обозначается как $\frac{ab}{cd}$.

Аффинное преобразование (или *аффинность*) есть биективное отображение A^n на себя с сохранением *коллинеарности* (т.е. все находящиеся на прямой точки продолжают оставаться на прямой и после преобразования) и *отношения расстояний* (например, срединная точка отрезка остается срединной и после преобразования). В этом смысле термин *аффинный* указывает на особый класс *проективных преобразований*, которые не перемещают объекты из аффинного пространства на бесконечно удаленную плоскость или наоборот. Любое аффинное преобразование есть совокупность *вращений*, *параллельных переносов*, *подобий* и *сдвигов*. Множество всех аффинных преобразований A^n образует группу $Aff(A^n)$, называемую *общей аффинной группой* пространства A^n. Каждый элемент $f \in Aff(A^n)$ может быть представлен формулой $f(a) = b,\ b_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_j + c_j$, где $((p_{ij}))$ – обратимая матрица.

Подгруппа $Aff(A^n)$, включающая аффинные преобразования с $\det((p_{ij})) = 1$, называется *равноаффинной группой* A^n. *Равноаффинное пространство* есть аффинное пространство с равноаффинной группой преобразований. Фундаментальные инварианты равноаффинного пространства – объемы параллелепипедов. В равноаффинной плоскости A^2 любые два вектора v_1, v_2 имеют инвариант $|v_1 \times v_2|$ (модуль их векторного произведения) – объем параллелограмма, построенного на v_1 и v_2. Если имеется гладкая кривая $\gamma = \gamma(t)$, ее *аффинный параметр* (или *равноаффинная длина дуги*) есть инвариантный параметр, задаваемый формулой

$s = \int_{t_0}^{t} |\gamma' \times \gamma''|^{1/3}\, dt$. Инвариант $k = \frac{d^2\gamma}{ds^2} \times \frac{d^3\gamma}{ds^3}$ называется *равноаффинной кривизной* кривой γ. Переходя к общей аффинной группе, рассмотрим еще два инварианта: *аффинную длину дуги* $\sigma = \int k^{1/2} ds$ и *аффинную кривизну* $k = \frac{1}{k^{3/2}} \frac{dk}{ds}$.

Для A^n, $n > 2$ *аффинный параметр* (или *равноаффинная длина дуги*) кривой $\gamma = \gamma(t)$ задается формулой $s = \int_{t_0}^{t} \left|\gamma', \gamma'', ..., \gamma^{(n)}\right|^{2/n(n+1)} dt,$ где инвариант $(v_1, ..., v_n)$ является (ориентированным) объемом, порожденным векторами $v_1, ..., v_n$, равным определителю $n \times n$ матрицы, i-й столбец которой есть вектор v_i.

Аффинное расстояние

Для данной *аффинной плоскости* A^2 ее *линейный элемент* (a, l_a) состоит из точки $a \in A^2$ и прямой $l_a \subset A^2$, проходящей через точку a.

Аффинное расстояние есть расстояние на множестве всех линейных элементов множества A^2, заданное как

$$2 f^{1/3},$$

где для данных линейных элементов (a, l_a) и (b, l_b) величина f есть площадь треугольника abc, если c есть точка пересечения прямых l_a и l_b. Аффинное расстояние между (a, l_a) и (b, l_b) может быть интерпретировано как аффинная длина дуги параболы ab, такой что l_a и l_b касаются параболы соответственно в точках a и b.

Аффинное псевдорасстояние

Пусть A^2 – *равноаффинная плоскость* и $\gamma = \gamma(s)$ – кривая в A^2, заданная как функция *аффинного параметра* s. **Аффинное псевдорасстояние** dp_{aff} на A^2 задается формулой

$$dp_{\text{aff}}(a, b) = \left| \overrightarrow{ab} \times \frac{d\gamma}{ds} \right|,$$

т.е. равно площади поверхности параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{ab}$ и $\frac{d\gamma}{ds}$, где b – произвольная точка из A^2, a – точка на γ и $\frac{d\gamma}{ds}$ – касательный вектор к кривой γ в точке a.

Аффинное псевдорасстояние для *равноаффинного пространства* A^3 может быть определено по этой же схеме как

$$\left| \left(\overrightarrow{ab},\ \frac{d\gamma}{ds},\ \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right) \right|,$$

где $\gamma = \gamma(s)$ – кривая в A^3, определенная как функция *аффинного параметра* s, $b \in A^3$, a – точка кривой γ, а векторы $\frac{d\gamma}{ds}$ и $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ получены в точке a.

Для A^n, $n > 3$ имеем $dp_{\text{aff}}(a,b) = \left|\left(\overrightarrow{ab},\ \frac{d\gamma}{ds},\ldots,\frac{d^{n-1}\gamma}{ds^{n-1}}\right)\right|$. При произвольной параметризации $\gamma = \gamma(t)$ получим $dp_{\text{aff}}(a,b) = \left|\left(\overrightarrow{ab},\ \gamma',\ldots,\gamma^{(n-1)}\right)\right| \left|(\gamma',\ldots,\gamma^{(n-1)})\right|^{1-n/1+n}$.

Аффинная метрика

Аффинная метрика – метрика на *неразвертываемой поверхности* $r = r(u_1, u_2)$ в *равноаффинном пространстве* A^3, заданная ее метрическим тензором $((g_{ij}))$:

$$g_{ij} = \frac{a_{ij}}{\left|\det((a_{ij}))\right|^{1/4}},$$

где $a_{ij} = (\partial_1 r,\ \partial_2 r,\ \partial_{ij} r),\ i,j \in \{1,2\}$.

6.4. НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ

Термином **неевклидова геометрия** описываются как *гиперболическая геометрия* (или *геометрия Лобачевского, геометрия Лобачевского–Больяй–Гаусса*), так и *эллиптическая геометрия* (иногда ее также называют *римановой геометрией*), которые отличаются от *евклидовой* (или *параболической*) *геометрии*. Основным различием между евклидовой и неевклидовой геометриями является природа параллельных прямых. В евклидовой геометрии, если мы имеем прямую l и точку a, которая ей не принадлежит, то мы можем провести через эту точку только одну прямую, параллельную l. В гиперболической геометрии существует бесконечное множество прямых, проходящих через точку a и параллельных l. В эллиптической геометрии параллельных прямых вообще не существует.

Сферическая геометрия также является "неевклидовой", однако в ней не действует аксиома, утверждающая, что любые две точки задают только одну прямую.

Сферическая метрика

Пусть $S^n(0,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2\right\}$ – сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром 0 и радиусом $r > 0$.

Сферическая метрика (или **метрика большого круга**) d_{sph} есть метрика на $S^n(0,r)$, определенная как

$$r \arccos\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i\right|}{r^2}\right),$$

где arccos – арккосинус на отрезке $[0, \pi]$. Это – длина дуги большого круга, проходящего через x и y. Используя стандартное скалярное произведение $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i$ на $\mathbb{R}^{n+1}$, сферическую метрику можно записать как $r \arccos \frac{|\langle x, y\rangle|}{\sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}}$.

Метрическое пространство $(S^n(0, r), d_{\text{sph}})$ называется *n-мерным сферическим пространством*. Это – пространство кривизны $1/r^2$ (r – радиус кривизны), которое является моделью n-мерной *сферической геометрии*. Большие круги сферы – его геодезические, все геодезические являются замкнутыми и имеют одинаковую длину (см., например, [Blum70]).

Эллиптическая метрика

Пусть $\mathbb{R}P^n$ – действительное n-мерное проективное пространство. **Эллиптической метрикой** d_{ell} называется метрика на $\mathbb{R}P^n$, определенная как

$$r \arccos \frac{|\langle x, y\rangle|}{\sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}},$$

для любых $x = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$, $y = (y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$, где $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i$, r – фиксированная положительная константа и arccos – арккосинус на отрезке $[0, \pi]$.

Метрическое пространство $(\mathbb{R}P^n, d_{\text{ell}})$ называется *n-мерным эллиптическим пространством* и представляет собой модель n-мерной *эллиптической геометрии*. Оно является пространством кривизны $1/r^2$ (r – радиус кривизны). При $r \to \infty$ метрические формулы эллиптической геометрии превращаются в формулы евклидовой геометрии (или становятся лишенными смысла).

Если $\mathbb{R}P^n$ рассматривается как множество $E^n(0, r)$, полученное из сферы $S^n(0, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 \right\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром 0 и радиусом r посредством отождествления диаметрально противоположных точек, то эллиптическая метрика на $E^n(0, r)$ может быть представлена как $d_{\text{sph}}(x, y)$, если $d_{\text{sph}}(x, y) \le \frac{\pi}{2} r$ и как $\pi r - d_{\text{sph}}(x, y)$, если $d_{\text{sph}}(x, y) > \frac{\pi}{2} r$, где d_{sph} – **сферическая метрика** на $S^n(0, r)$. Таким образом, не существует двух точек множества $E^n(0, r)$ на расстоянии, превышающем $\frac{\pi}{2} r$. Эллиптическое пространство $E^n(0, r) d_{\text{ell}})$ называется *сферой Пуанкаре*.

Если $\mathbb{R}P^n$ рассматривается как множество E^n прямых, проходящих через нулевой элемент в $\mathbb{R}^{n+1}$, то эллиптическая метрика на E^n определяется как угол между соответствующими подпространствами.

n-Мерное эллиптическое пространство есть *риманово пространство* постоянной положительной кривизны. Это – единственное такое пространство, которое топологически эквивалентно проективному пространству (см., например, [Blum70], [Buse55]).

Эрмитова эллиптическая метрика

Пусть $\mathbb{C}P^n$ – n-мерное комплексное проективное пространство. **Эрмитова эллиптическая метрика** d_{ell}^H (см., например, [Buse55]) есть метрика на $\mathbb{C}P^n$, определенная как

$$r \arccos \frac{|\langle x, y\rangle|}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}$$

для любых $x = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$, $y = (y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{C}P^n$, где $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{x}_i y_i$, r – фиксированная положительная константа и arccos – арккосинус на отрезке $[0, \pi]$.

Метрическое пространство $\left(\mathbb{C}P^n, d_{\mathrm{ell}}^H\right)$ называется n-мерным *эрмитовым эллиптическим пространством* (см. **Метрика Фубини–Штуди**, гл. 7).

Метрика эллиптической плоскости

Метрика эллиптической плоскости есть **эллиптическая метрика** на *эллиптической плоскости* $\mathbb{R}P^2$. Если $\mathbb{R}P^2$ рассматривается как *сфера Пуанкаре* (т.е. сфера в $\mathbb{R}^3$ с отождествленными диаметрально противоположными точками) диаметра 1, касающаяся расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ в точке $z = 0$, то, при стереографической проекции с "Северного полюса" (0,0,1), $\overline{\mathbb{C}}$ с отождествленными точками z и $-\frac{1}{z}$ является моделью эллиптической плоскости и метрика d_{ell} эллиптической плоскости на ней определяется своим *линейным элементом* $ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$.

Псевдоэллиптическое расстояние

Псевдоэллиптическое расстояние (или *эллиптическое псевдорасстояние*) dp_{ell} есть расстояние на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ с отождествленными точками z и $-\frac{1}{z}$, определенное как

$$\left|\frac{z-u}{1+\bar{z}u}\right|.$$

Именно, $dp_{\mathrm{ell}}(z, u) = \operatorname{tg} d_{\mathrm{ell}}(z, u)$, где dp_{ell} – **метрика эллиптической плоскости**.

Гиперболическая метрика

Пусть $\mathbb{R}P^2$ – n-мерное вещественное проективное пространство и пусть для любых $x = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$, $y = (y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$ задано *скалярное произведение* $\langle x, y\rangle =$ $= -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i y_i$.

Гиперболическая метрика d_{hyp} есть метрика на множестве $H^n = \{x \in \mathbb{R}P^n :$ $: \langle x, x\rangle < 0\}$, определенная как

$$r \operatorname{arccosh} \frac{|\langle x, y\rangle|}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}},$$

где r – фиксированная положительная константа и arccosh обозначает неотрицательные величины обратного гиперболического косинуса. При таком построении точки множества H^n могут рассматриваться как одномерные подпространства *псевдоевклидова пространства* $\mathbb{R}^{n,1}$ внутри конуса $C = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x \rangle = 0\}$.

Метрическое пространство (H^n, d_{hyp}) называется *n-мерным гиперболическим пространством*. Оно является моделью n-мерной *гиперболической геометрии*, пространством кривизны $-1/r^2$ (r – радиус кривизны). При замене r на ir все метрические формулы гиперболической геометрии перейдут в соответствующие формулы эллиптической геометрии. При $r \to \infty$ формулы каждой из систем дают формулы евклидовой геометрии (или становятся лишенными смысла).

Если H^n рассматривается как множество $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < K\right\}$, где $K > 1$ – произвольная фиксированная константа, то гиперболическую метрику можно записать как

$$\frac{r}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma(x,y)}}{1 - \sqrt{1 - \gamma(x,y)}},$$

где $\gamma(x,y) = \dfrac{\left(K - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(K - \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}{\left(K - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2}$ и r – положительное число с $\operatorname{tg} \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$.

Если H^n рассматривается как подмногообразие $(n + 1)$-мерного *псевдоевклидова пространства* $\mathbb{R}^{n,1}$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i y_i$ (именно, как верхний лист $\{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x \rangle = -1,\ x_1 > 0\}$ двухполостного *гиперболоида вращения*), то гиперболическая метрика на H^n порождается **псевдоримановой метрикой** на $\mathbb{R}^{n,1}$ (см. **Метрика Лоренца**, гл. 26).

n-Мерное гиперболическое пространство есть *риманово пространство* постоянной отрицательной кривизны. Это единственное такое пространство, которое является **полным** и топологически эквивалентным евклидову пространству (см., например, [Blum70], [Buse55]).

Эрмитова гиперболическая метрика

Пусть $\mathbb{C}P^n$ – n-мерное комплексное проективное пространство и пусть для любых $x = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$, $y = (y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{C}P^n$ задано *скалярное произведение* $\langle x, y \rangle = -\bar{x}_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \bar{x}_i y_i$.

Эрмитова гиперболическая метрика d_{hyp}^H (см., например, [Buse55]) есть метрика на множестве $\mathbb{C}H^n = \{x \in \mathbb{C}P^n : \langle x, x \rangle < 0\}$, задаваемая как

$$r \operatorname{arccosh} \frac{|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}},$$

где r – фиксированная положительная константа и arccosh обозначает неотрицательные величины обратного гиперболического косинуса.

Метрическое пространство $\left(\mathbb{C}H^n, d_{\text{hyp}}^H\right)$ называется n-мерным *эрмитовым гиперболическим пространством*.

Метрика Пуанкаре

Метрика Пуанкаре d_P есть **гиперболическая метрика** для *модели диска Пуанкаре* (или *модели конформного диска*) гиперболической геометрии. В данной модели каждая точка *единичного диска* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ называется *гиперболической точкой*, сам диск Δ – гиперболической плоскостью, дуги окружностей (и диаметры) в Δ, которые являются ортогональными к *абсолюту* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, называются *гиперболическими прямыми.* Каждая точка из Ω называется *идеальной точкой*. Угловые измерения в данной модели такие же, как и в гиперболической геометрии. Метрика Пуанкаре на Δ задается ее *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} = \frac{dz_1^2 + dz_2^2}{\left(1 - z_1^2 - z_2^2\right)^2}.$$

Расстояние между двумя точками z и u диска Δ может быть записано как

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|1-z\overline{u}|+|z-u|}{|1-z\overline{u}|-|z-u|} = \operatorname{arctgh}\frac{|z-u|}{|1-z\overline{u}|}.$$

В терминах ангармонического *отношения* оно равно

$$\frac{1}{2}\ln(z,u,z^*,u^*) = \frac{1}{2}\ln\frac{(z^*-z)(u^*-u)}{(z^*-u)(u^*-z)},$$

где z^* и u^* являются точками пересечения гиперболической прямой линии, проходящей через z и u, с Ω, z^* со стороны u и u^* – со стороны z.

В *модели полуплоскости Пуанкаре* гиперболической геометрии *гиперболическая плоскость* есть верхняя полуплоскость $H^2 = \{z \in \mathbb{C} : z_2 > 0\}$, а *гиперболические прямые* – полуокружности и полупрямые, которые ортогональны действительной оси. *Абсолют* (т.е. множество *идеальных точек*) есть действительная ось вместе с бесконечно удаленной точкой. Угловые измерения в данной модели такие же, как и в гиперболической геометрии. *Линейный элемент* **метрики Пуанкаре** на H^2 задается по формуле

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(\Im z)^2} = \frac{dz_1^2 + dz_2^2}{z_2^2}.$$

Расстояние между двумя точками z, u может быть записано как

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|z-\overline{u}|+|z-u|}{|z-\overline{u}|-|z-u|} = \operatorname{arctgh}\frac{|z-u|}{|z-\overline{u}|}.$$

В терминах ангармонического отношения оно равно

$$\frac{1}{2}\ln(z,u,z^*,u^*) = \frac{1}{2}\ln\frac{(z^*-z)(u^*-u)}{(z^*-u)(u^*-z)},$$

где z^* – идеальная точка полупрямой, исходящей из z и проходящей через u, и u^* – идеальная точка полупрямой, исходящей из u и проходящей через z.

В общем случае **гиперболическая метрика** в любой *области* $D \subset \mathbb{C}$, имеющей по крайней мере три граничные точки, задается как прообраз метрики Пуанкаре на Δ при *конформном отображении* $f : D \to \Delta$. Ее *линейный элемент* имеет форму

$$ds^2 = \frac{|f'(z)|^2 |dz|^2}{(1 - |f(z)|^2)^2}.$$

Расстояние между двумя точками z и u из D может быть представлено как

$$\frac{1}{2} \ln \frac{|1 - f(z)\overline{f(u)}| + |f(z) - f(u)|}{|1 - f(z)\overline{f(u)}| - |f(z) - f(u)|}.$$

Псевдогиперболическое расстояние

Псевдогиперболическое расстояние (или **расстояние Глисона**, *гиперболическое псевдорасстояние*) dp_{hyp} есть метрика на единичном диске $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, заданная как

$$\left| \frac{z - u}{1 - \bar{z}u} \right|.$$

Именно, $dp_{\text{hyp}}(z, u) = \operatorname{tgh} d_{\text{P}}(z, u)$, где d_{P} – **метрика Пуанкаре** на Δ.

Метрика Кэли–Клейна–Гильберта

Метрика Кэли–Клейна–Гильберта d_{CKH} – **гиперболическая метрика** для *модели Клейна* (или *модели проективного диска, модели Бельтрами–Клейна*) гиперболической геометрии. В этой модели гиперболическая плоскость реализуется как *единичный диск* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и *гиперболические прямые* – как хорды диска Δ. Каждая точка *абсолюта* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ называется *идеальной точкой*. Угловые измерения в данной модели искажены. **Метрика Кэли–Клейна–Гильберта** на Δ задается ее **метрическим тензором** $((g_{ij})), i, j = 1, 2$:

$$g_{11} = \frac{r^2\left(1 - z_2^2\right)}{\left(1 - z_1^2 - z_2^2\right)^2}, \quad g_{12} = \frac{r^2 z_1 z_2}{\left(1 - z_1^2 - z_2^2\right)^2}, \quad g_{22} = \frac{r^2\left(1 - z_1^2\right)}{\left(1 - z_1^2 - z_2^2\right)^2},$$

где r – произвольная положительная константа. Расстояние между точками z и u из Δ может быть записано как

$$r \operatorname{arccosh}\left(\frac{1 - z_1 u_1 - z_2 u_2}{\sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2}\,\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}} \right),$$

где arccosh обозначает неотрицательные величины обратного гиперболического косинуса.

Метрика Вейерштрасса

Для данного действительного n-мерного **пространства скалярного произведения** $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$, $n \geq 2$ **метрика Вейерштрасса** d_{W} есть метрика на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{1 + \langle x, x \rangle}\,\sqrt{1 + \langle y, y \rangle} - \langle x, y \rangle \right),$$

где arccosh обозначает неотрицательные величины обратного гиперболического косинуса.

Здесь $\left(x, \sqrt{1+\langle x,x\rangle}\right) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ являются *координатами Вейерштрасса* точки $x \in \mathbb{R}^n$ и метрическое пространство $(\mathbb{R}^n, d_W)$ может быть отождествлено с *моделью Вейерштрасса* гиперболической геометрии.

Метрика Кэли–Клейна–Гильберта $d_{CKH}(x,y) = \operatorname{arccosh} \frac{1-\langle x,y\rangle}{\sqrt{1-\langle x,x\rangle}\sqrt{1-\langle y,y\rangle}}$ на открытом шаре $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,x\rangle < 1\}$ может быть получена из d_W посредством равенства $d_{CKH}(x,y) = d_W(\mu(x), \mu(y))$, где $\mu : \mathbb{R}^n \to B^n$ является *отображением Вейерштрасса*: $\mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1-\langle x,x\rangle}}$.

Квазигиперболическая метрика

Для данной *области* $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ **квазигиперболическая метрика** есть метрика на D, задаваемая как

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma \frac{|dz|}{\rho(z)},$$

где инфимум берется по множеству Γ всех спрямляемых кривых, соединяющих x и y в D, $\rho(z) = \inf_{u \in \partial D} \| z-u \|_2$ – расстояние между z и границей ∂D, $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$. Эта метрика является **метрикой, гиперболической по Громову**, если область D – *равномерная*, т.е. существуют такие константы C, C', что каждая пара точек $x, y \in D$ может быть соединена спрямляемой кривой $\gamma \in D$ длины $l(\gamma)$, не превышающей $C|x-y|$, и неравенство $\min\{l(\gamma(x,z)), l(\gamma(z,y))\} \leq C'\rho(z)$ выполняется для всех $z \in \gamma$.

Для $n = 2$ **гиперболическая метрика** на D может быть задана выражением

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma \frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} |dz|,$$

где $f : D \to \Delta$ есть любое конформное отображение области D на *единичный диск* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Для $n \geq 3$ эта метрика определяется только для полугиперплоскости H^n и для *открытого единичного шара* B^n как инфимум по всем $\gamma \in \Gamma$ интегралов $\int_\gamma \frac{|dz|}{z_n}$ и $\int_\gamma \frac{2|dz|}{1-\|z\|_2^2}$ соответственно.

Аполлонова метрика

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \mathbb{R}^n$ – *область*, такая что ее дополнение не содержится в гиперплоскости или сфере.

Аполлоновой метрикой (или **метрикой Барбилиана**, [Barb35]) называется метрика на D, задаваемая с помощью ангармонического отношения следующим образом:

$$\sup_{a,b\in\partial D} \ln \frac{\| a-x\|_2 \| b-y\|_2}{\| a-y\|_2 \| b-x\|_2},$$

где ∂D – граница D и $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$.

Данная метрика является **гиперболической по Громову**.

Полуаполлонова метрика

Для данной *области* $D\subset\mathbb{R}^n$, $D\neq\mathbb{R}^n$ **полуаполлоновой метрикой** называется метрика на D, задаваемая как

$$\sup_{a\in\partial D} \left| \ln \frac{\| a-y\|_2}{\| a-x\|_2} \right|,$$

где ∂D – граница D и $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$.

Данная метрика будет **гиперболической по Громову** только тогда, когда область D имеет вид $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$, т.е. имеет всего одну граничную точку.

Метрика Геринга

Для *области* $D\subset\mathbb{R}^n$, $D\neq\mathbb{R}^n$ **метрика Геринга** (или $\tilde{j}_D$-*метрика отношения расстояний*) есть метрика на D, задаваемая как

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left(1+\frac{\| x-y\|_2}{\rho(x)}\right)\left(1+\frac{\| x-y\|_2}{\rho(y)}\right)\right),$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ и $\rho(x)=\inf_{u\in\partial D}\| x-u\|_2$ – расстояние между x и границей ∂D области D.

Данная метрика является **гиперболической по Громову**.

Метрика Вуоринена

Для данной области $D\subset\mathbb{R}^n$, $D\neq\mathbb{R}^n$ **метрика Вуоринена** (или j_D-*метрика отношения расстояний*) есть метрика на D, задаваемая как

$$\ln\left(1+\frac{\| x-y\|_2}{\min\{\rho(x),\rho(y)\}}\right),$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ $\rho(x)=\inf_{u\in\partial D}\| x-u\|_2$ – расстояние между x и границей ∂D области D.

Данная метрика будет **гиперболической по Громову** только тогда, когда область D имеет вид $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$, , т.е. имеет всего одну граничную точку.

Метрика Ферранда

Для данной *области* $D\subset\mathbb{R}^n$, $D\neq\mathbb{R}^n$ **метрика Ферранда** есть метрика на D, задаваемая как

$$\inf_{\gamma\in\Gamma}\int_\gamma \sup_{a,b\in\partial D} \frac{\| a-b\|_2}{\| z-a\|_2 \| z-b\|_2} | dz |,$$

где инфимум берется по множеству Γ всех спрямляемых кривых, соединяющих x и y в D, ∂D – границf D и $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$.

Данная метрика является **гиперболической по Громову**, если D является равномерной, т.е. существуют константы C, C', такие что каждая пара точек $x, y \in D$ может быть соединена спрямляемой кривой $\gamma \in D$ длины $l(\gamma)$, не превосходящей $C|x-y|$, и неравенство $\min\{l(\gamma(x,z)), l(\gamma(z,y))\} \le C'\rho(z)$ имеет место для всех $z \in \gamma$.

Метрика Сейтенранта

Для данной *области* $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \ne \mathbb{R}^n$ **метрика Сейтенранта** (или **метрика ангармонического отношения**) есть метрика на D, задаваемая как

$$\sup_{a,b\in\partial D} \ln\left(1+\frac{\|a-x\|_2\,\|b-y\|_2}{\|a-b\|_2\,\|x-y\|_2}\right),$$

где ∂D – граница D и $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$.

Данная метрика является **гиперболической по Громову**.

Метрика модулюса

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \ne \mathbb{R}^n$ – некоторая *область* с границей ∂D, имеющая положительную емкость.

Метрика модулюса (Гал, 1960) есть метрика на D, задаваемая как

$$\inf_{C_{xy}} M(\Delta(C_{xy}, \partial D, D)),$$

где $M(\Gamma)$ является *конформным модулюсом* семейства кривых Γ и C_{xy} есть континуум, такой что для некоторой кривой $\gamma:[0,1]\to D$ мы имеем следующие свойства: $C_{xy} = \gamma([0,1])$, $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$ (см. **Экстремальная метрика**, гл. 8).

Данная метрика будет **гиперболической по Громову**, если D – открытый шар $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x\rangle < 1\}$ или односвязная область в $\mathbb{R}^2$.

Вторая метрика Ферранда

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \ne \mathbb{R}^n$ – *область*, такая что $|\mathbb{R}^n \setminus \{D\}| \ge 2$. **Второй метрикой Ферранда** будет метрика на D, задаваемая как

$$\left(\inf_{C_x, C_y} M(\Delta(C_x, C_y, D)\right)^{1/1-n},$$

где $M(\Gamma)$ является *конформным модулюсом* семейства кривых Γ и C_z ($z = x, y$) есть континуум, такой что для некоторой кривой $\gamma:[0,1]\to D$ мы имеем следующие свойства: $C_z = ([0,1]))$, $z \in |\gamma_z|$ и $\gamma_z(t) \to \partial D$ при $t \to 1$ (см. **Экстремальная метрика**, гл. 8).

Данная метрика будет **гиперболической по Громову**, если D – открытый шар $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x\rangle < 1\}$ или односвязная область в $\mathbb{R}^2$.

Параболическое расстояние

Параболическое расстояние есть метрика на $\mathbb{R}^{n+1}$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, определяемая как

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} + |t_x - t_y|^{1/m}, \quad m \in \mathbb{N}$$

для любых $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Пространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ может интерпретироваться как многомерное *пространство-время*.

Обычно используется значение $m = 2$. Существуют некоторые варианты параболического расстояния, например параболическое расстояние

$$\sup\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|^{1/2}\}$$

на $\mathbb{R}^2$ (см. также **Метрика ковра Рикмана**, гл. 19) или **параболическое расстояние полупространства** на $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\}$, задаваемое как

$$\frac{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{|x_2 - y_2}} + \sqrt{|x_3 - y_3|}.$$

Глава 7

Римановы и эрмитовы метрики

Римановой геометрией называется многомерное обобщение внутренней геометрии двумерных поверхностей евклидова пространства $\mathbb{E}^2$. Она занимается изучением вещественных *гладких многообразий*, снабженных **римановыми метриками**, т.е. семействами положительно определенных симметричных билинейных форм $((g_{ij}))$ на их касательных пространствах, которые гладко меняются от точки к точке. Геометрия таких (римановых) многообразий базируется на *линейном элементе* $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j$. С его помощью определяются, в частности, локальные понятия угла, длины кривых и объема. Из них посредством интегрирования могут быть получены другие, глобальные величины. Так, величина может быть рассмотрена как длина вектора $(dx_1, ..., dx_n)$; длина дуги кривой γ выражается теперь как $\int_\gamma \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j}$; тогда **внутренняя метрика** на римановом многообразии задается как инфимум длин кривых, соединяющих две данные точки многообразия. Таким образом, риманова метрика не является обычной метрикой, но порождает обычную метрику, именно, внутреннюю метрику, которую иногда называют **римановым расстоянием**, на любом связном римановом многообразии; риманова метрика является бесконечно малой формой соответствующего риманова расстояния.

В качестве особых случаев римановой геометрии рассматриваются два стандартных случая – *эллиптическая геометрия* и *гиперболическая геометрия неевклидовой геометрии*, а также сама *евклидова геометрия*.

Если билинейные формы $((g_{ij}))$ являются невырожденными, но неопределенными, то мы получаем *псевдориманову геометрию*. Для размерности 4 (и *сигнатуры* (1, 3)) такая геометрия является основным объектом общей теории относительности. Если $ds = F(x_1, ..., x_n, dx_1, ..., dx_n)$, где F – действительная положительно определенная выпуклая функция, которую нельзя задать как квадратный корень из симметричной билинейной формы (как это делается в римановой геометрии), то мы получим *финслерову геометрию*, представляющую собой обобщение римановой геометрии.

Эрмитова геометрия занимается изучением *комплексных многообразий*, снабженных **эрмитовыми метриками**, т.е. семействами положительно определенных симметричных сескилинейных форм на их касательных пространствах, которые гладко меняются от точки к точке. Они являются комплексным аналогом римановой геометрии. Особый класс эрмитовых метрик образуют метрики Кехлера, имеющие замкнутую фундаментальную форму w. Обобщение эрмитовых метрик дает нам **комплексные финслеровы метрики**, которые нельзя выразить в терминах билинейных симметричных положительно определенных сескилинейных форм.

7.1. РИМАНОВЫ МЕТРИКИ И ОБОБЩЕНИЯ

Произвольное *действительное n-мерное многообразие с границей* M^n есть **хаусдорфово пространство**, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную либо открытому подмножеству $\mathbb{E}^n$, либо открытому подмножеству замкнутого полупространства пространства $\mathbb{E}^n$. Множество точек, имеющих открытые окрестности, гомеоморфные $\mathbb{E}^n$, называется *множеством внутренних точек* многообразия; оно всегда является непустым. Дополнение внутреннего множества точек называется *границей* многообразия и представляет собой $(n-1)$-мерное многообразие. Если граница многообразия M^n пуста, то мы получаем *действительное n-мерное многообразие без границы*.

Многообразие без границы называется *замкнутым*, если оно компактно, и *открытым* – иначе.

Открытое множество M^n вместе с гомеоморфизмом между данным открытым множеством и некоторым открытым множеством из $\mathbb{E}^n$ называется *координатной картой*. Семейство покрывающих множество M^n карт называется *атласом* на M^n. Гомеоморфизмы двух перекрывающихся карт дают нам отображение одного подмножества $\mathbb{E}^n$ в некое другое подмножество $\mathbb{E}^n$. Если все эти отображения непрерывно дифференцируемы, то множество M^n называется *дифференцируемым многообразием*. Если все эти отображения являются k раз непрерывно дифференцируемыми, то многообразие будет называться C^k многообразием; если они бесконечное число раз дифференцируемы, то многообразие называется *гладким многообразием* (или C^∞ *многообразием*).

Атлас многообразия называется *ориентированным*, если все координатные преобразования между картами являются положительными, т.е. якобиан координатных преобразований между любыми двумя картами положителен в любой точке. *Ориентируемым многообразием* называется многообразие, которое допускает наличие ориентированного атласа.

Многообразия наследуют многие локальные свойства евклидова пространства. В частности, они являются локально путь-связными, локально компактными и локально метризуемыми. Любое гладкое риманово многообразие изометрически вложимо (Нэш, 1956) в некоторое конечномерное евклидово пространство.

С каждой точкой на дифференцируемом многообразии ассоциированы *касательное пространство* и двойственное ему *ко-касательное пространство.* Формально, пусть M^n – $C^л$ многообразие, $k \geq 1$, и p – некоторая точка из M^n. Зададим карту $\varphi : U \to \mathbb{E}^n$, где U – открытое подмножество множества M^n, содержащее точку p. Предположим, что две кривые $\gamma^1 : (-1,1) \to M^n$ и $\gamma^2 : (-1,1) \to M^n$ со значениями $\gamma^1(0) = \gamma^2(0) = p$ заданы так, что обе величины $\varphi \cdot \gamma^1$ и $\varphi \cdot \gamma^2$ являются дифференцируемыми в точке 0. В этом случае γ^1 и γ^2 называются *касательными* в точке 0, если обычные производные для $\varphi \cdot \gamma^1$ и $\varphi \cdot \gamma^2$ совпадают в 0: $(\varphi \cdot \gamma^1)'(0) = (\varphi \cdot \gamma^2)'(0)$. Если функции $\varphi \cdot \gamma^i : (-1,1) \to \mathbb{E}^n$, $i = 1,2$ заданы с помощью n действительных координатных функций $(\varphi \cdot \gamma^i)_1(t), \ldots, (\varphi \cdot \gamma^i)_n(t)$, то вышеуказанное условие будет означать, что их якобианы $\left(\frac{d(\varphi \cdot \gamma^i)_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{d(\varphi \cdot \gamma^i)_n(t)}{dt}\right)$ совпадают в 0. Это отношение является отношением эквивалентности, а класс эквивалентности $\gamma'(0)$ кривой γ называется *касательным вектором* многообразия

M^n в точке p. *Касательное пространство* $T_p(M^n)$ многообразия M^n в точке p определяется как множество всех касательных векторов в точке p. Функция $(d\varphi)_p : T_p(M^n) \to \mathbb{E}^n$, задаваемая условием $(d\varphi)_p(\gamma'(0)) = (\varphi \cdot \gamma)'(0)$, является биективной и может быть использована для перенесения операций линейного пространства из $\mathbb{E}^n$ на $T_p(M^n)$.

Все касательные пространства $T_p(M^n)$, $p \in M^n$, "склеенные вместе", образуют *касательное расслоение* $T(M^n)$ многообразия M^n. Любой элемент из $T(M^n)$ есть пара (p, v), где $v \in T_p(M^n)$. Если для открытой окрестности U точки p функция $\varphi : U \to \mathbb{R}$ является координатной картой, то прообраз V окрестности U в $T(M^n)$ допускает отображение $\psi : V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, определяемое как $\psi(p, v) = (\varphi(p), d\varphi(p))$. Это определяет структуру гладкого $2n$-мерного многообразия на $T(M^n)$. Аналогичным образом можно получить *кокасательное расслоение* $T^*(M^n)$ многообразия M^n, используя для этого кокасательные пространства $T_p^*(M^n)$, $p \in M^n$.

Векторное поле на многообразии M^n есть *сечение* его касательного расслоения $T(M^n)$, т.е. гладкая функция $f : M^n \to T(M^n)$, которая каждой точке $p \in M^n$ ставит в соответствие вектор $v \in T_p(M^n)$.

Связь (или *ковариантная производная*) является способом определения производной векторного поля на многообразии. Формально, *ковариантная производная* ∇ вектора u (определенного в точке $p \in M^n$) в направлении вектора v (определенного в той же точке p) есть правило, которое задает третий вектор в точке p, называемый $\nabla_v u$ и обладающий свойствами производной. Риманова метрика единственным образом определяет особую ковариантную производную, называемую *связью Леви–Чивита*. Она представляет собой связь ∇ без кручения касательного расслоения, сохраняющую данную риманову метрику.

Риманов тензор кривизны R является стандартным способом выражения *кривизны римановых многообразий*. Риманов тензор кривизны может быть задан в терминах *связи Леви–Чивита* ∇ формулой

$$R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w,$$

где $R(u, v)$ – линейное преобразование касательного пространства многообразия M^n; линейно по каждому аргументу. Если значения $u = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $v = \frac{\partial}{\partial x_j}$ являются полями координатных векторов, то $[u, v] = 0$ и формулу можно упростить: $R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_w w$, т.е. тензор кривизны служит мерой антикоммутативности ковариантной производной. Линейное преобразование $w \to R(u, v)w$ называют также *преобразованием кривизны*.

Тензор кривизны Риччи (или *кривизна Риччи*) Ric получается как *след* полного тензора кривизны R. Для случая римановых многообразий его можно рассматривать как лапласиан риманова метрического тензора. Тензор кривизны Риччи является линейным оператором на касательном пространстве в данной точке. Используя ортонормированный базис $(e_i)_i$ в касательном пространстве $T_p(M^n)$, получаем формулу

$$\mathrm{Ric}(u) = \sum_i R(u, e_i)e_i.$$

Результат не зависит от выбора ортонормированного базиса. Начиная с размерности 4, кривизна Риччи уже не описывает тензор кривизны полностью.

Скаляр Риччи (или *скалярная кривизна*) Sc риманова многообразия M^n является полным следом тензора кривизны; используя ортонормированный базис $(e_i)_i$ в точке $p \in M^n$, мы получаем равенство

$$\mathrm{Sc} = \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle = \sum_i \langle \mathrm{Ric}(e_i), e_i \rangle.$$

Секционная кривизна $K(\sigma)$ риманова многообразия M^n определяется как *кривизна Гаусса* σ*-сечения* в точке $p \in M^n$. В данном случае, имея 2-плоскость σ в касательном пространстве $T_p(M^n)$, σ*-сечение* есть локально определенная часть поверхности, для которой плоскость σ является касательной в точке p, полученной из геодезических, исходящих из p в направлениях образа σ при экспоненциальном отображении.

Метрический тензор

Метрическим тензором (или *основным тензором, фундаментальным тензором*) называется симметричный тензор ранга 2, используемый для измерения расстояний и углов в вещественном n-мерном дифференцируемом многообразии M^n. После выбора локальной системы координат $(x_i)_i$ метрический тензор возникает как действительная симметричная $(n \times n)$ матрица $((g_{ij}))$.

Задание метрического тензора на n-мерном дифференцируемом многообразии M^n порождает скалярное произведение (т.е. симметричную билинейную, однако в общем случае не являющуюся положительно определенной форму) $\langle , \rangle_p$ на касательном пространстве $T_p(M^n)$ в любой точке $p \in M^n$, задаваемое как

$$\langle x, y \rangle_p = g_p(x, y) = \sum_{i,j} g_{ij}(p) x_i y_j,$$

где $g_{ij}(p)$ – значение метрического тензора в точке $p \in M^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n) \in T_p(M^n)$. Совокупность всех этих скалярных произведений называется **метрикой** g с метрическим тензором $((g_{ij}))$. Длина ds вектора $(dx_1, ..., dx_n)$ выражается квадратичной дифференциальной формой

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j.$$

которая называется *линейным элементом* (или первой *фундаментальной формой*) метрики g. Длина кривой γ выражается формулой $\int_\gamma \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j}$. В общем случае она может быть действительной, чисто мнимой или нулевой (*изотропная кривая*).

Сигнатурой метрического тензора называется пара (p, q) положительных (p) и отрицательных (q) *собственных значений* матрицы $((g_{ij}))$. Сигнатура называется *неопределенной*, если значения p и q являются ненулевыми, и *положительно определенной*, если $q = 0$. Соответственно, риманова метрика – метрика g с положительно определенной сигнатурой $(p, 0)$, а псевдориманова метрика – метрика g с неопределенной сигнатурой (p, q).

Невырожденная метрика

Невырожденной метрикой называется метрика g с метрическим тензором $((g_{ij}))$, для которого *метрический определитель* $\det((g_{ij})) \neq 0$. Все римановы и псевдоримановы метрики являются невырожденными.

Вырожденной метрикой называется метрика g с метрическим тензором $((g_{ij}))$, для которого метрический пределитель $\det((g_{ij})) = 0$ (см. **Полуриманова метрика** и **Полупсевдориманова метрика**). Многообразие с вырожденной метрикой называется *изотропным многообразием*.

Диагональная метрика

Диагональной метрикой называется метрика g с метрическим тензором $((g_{ij}))$, для которого $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Евклидова метрика является диагональной метрикой, так как ее метрический тензор имеет вид $g_{ij} = 1$, $g_{ij} = 0$ для $i \neq j$.

Риманова метрика

Рассмотрим действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, в котором каждое касательное пространство снабжено *скалярным произведением* (т.е. симметричной положительно определенной билинейной формой), гладко изменяющимся от точки к точке.

Римановой метрикой на M^n является семейство скалярных произведений $\langle , \rangle_p$ на касательных пространствах $T_p(M^n)$ – по одному для каждой точки $p \in M^n$.

Каждое скалярное произведение $\langle , \rangle_p$ полностью задается скалярными произведениями $\langle e_i, e_j \rangle_p = g_{ij}(p)$ элементов $e_1, ..., e_n$ стандартного базиса в $\mathbb{E}^n$, т.е. действительной симметричной и положительно определенной $n \times n$ матрицей $((g_{ij})) =$ $= ((g_{ij}(p)))$, называемой **метрическим тензором**. Именно, $\langle x, y \rangle_p = \, = \sum_{i,j} g_{ij}(p) x_i y_j$, где $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n) \in T_p(M^n)$. Гладкая функция g полностью определяет риманову метрику.

Риманова метрика на M^n не является обычной метрикой на M^n. Однако для связного многообразия M^n каждая риманова метрика на M^n порождает обычную метрику на M^n (именно, **внутреннюю метрику** на M^n): для любых двух точек $p, q \in M^n$ **риманово расстояние** между ними определено как

$$\inf_{\gamma} \int_0^1 \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{1/2} dt = \inf_{\gamma} \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}} \, dt,$$

где инфимум берется по всем спрямляемым кривым $\gamma : [0,1] \to M^n$, соединяющим точки p и q.

Римановым многообразием (или *римановым пространством*) называется действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, снабженное римановой метрикой. Теория римановых пространств называется *римановой геометрией*. Простейшим примером римановых пространств являются евклидовы пространства, *гиперболические пространства* и *эллиптические пространства*. Риманово пространство будет называться *полным*, если оно является **полным** метрическим пространством.

Конформная метрика

Конформной структурой векторного пространства V называется класс попарно гомотетичных евклидовых метрик на V. Любая евклидова метрика d_E на V задает некоторую конформную структуру $\{\lambda d_E : \lambda > 0\}$.

Конформная структура многообразия – поле конформных структур на касательных пространствах или, что то же, класс *конформно эквивалентных римановых метрик*. Две римановы метрики g и h на гладком многообразии M^n называются *конформно эквивалентными*, если для $g = f \cdot h$ некоторой положительной функции f на M^n, называемой *конформным фактором*.

Конформная метрика – риманова метрика, представляющая конформную структуру (см. **Конформно инвариантная метрика**, гл. 8).

Конформное пространство

Конформным пространством (или *инверсивным пространством*) называется евклидово пространство $\mathbb{E}^n$, расширенное с помощью *идеальной точки* (*точки в бесконечности*). Посредством *конформных преобразований* (т.е. непрерывных преобразований, сохраняющих локальные углы) идеальная точка может быть переведена в обычную. Следовательно, в конформном пространстве сфера и плоскость неразличимы: плоскость – это сфера, проходящая через идеальную точку.

Конформные пространства исследуются в *конформной геометрии* (или *геометрии, сохраняющей углы, геометрии Мёбиуса, инверсивной геометрии*), которая изучает свойства фигур, остающихся инвариантными при конформных преобразованиях. Это – множество преобразований, отображающих сферы в сферы, т.е. порождаемых евклидовыми преобразованиями совместно с *инверсиями*, которые в координатной форме являются сопряженными с $x_i \to \frac{r^2 x_i}{\sum_j x_j^2}$, где r – радиус инверсии. Инверсия в сферу становится автоморфизмом с периодом 2. Любой угол переводится в равный угол.

Двумерное конформное пространство является *римановой сферой*, на которой конформные преобразования задаются *преобразованиями Мёбиуса* $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$.

В общем случае *конформное отображение* между двумя римановыми многообразиями есть такой диффеоморфизм между ними, что обратный образ метрики становится конформно эквивалентным прообразу. **Конформное евклидово пространство** – это *риманово пространство*, допускающее конформное отображение на некоторое евклидово пространство.

В общей теории относительности конформные преобразования рассматриваются на *пространстве Минковского* $\mathbb{R}^{1,3}$, расширенном двумя идеальными точками.

Пространство постоянной кривизны

Пространством постоянной кривизны называется *риманово пространство* M^n, для которого *секционная кривизна* $K(\sigma)$ является постоянной величиной во всех двумерных направлениях σ.

Пространственная форма – связное полное пространство постоянной кривизны.
Плоское пространство – пространственная форма нулевой кривизны.

Евклидово пространство и плоский тор являются пространственными формами нулевой кривизны (т.е. плоскими пространствами), сфера – пространственная форма положительной кривизны, а *гиперболическое пространство* – пространственная форма отрицательной кривизны.

Обобщенные римановы пространства

Обобщенным римановым пространством называется метрическое пространство с **внутренней метрикой**, для кривизны которого приняты определенные ограничения. Такие пространства включают в себя *пространства ограниченной кривизны, римановы пространства* и т.п. Обобщенные римановы пространства отличаются от римановых не только большей обобщенностью, но и тем, что они определяются и исследуются только на основе их метрики без учета координат.

Пространство с ограниченной кривизной ($\leq k$ и $\geq k'$) является обобщенным римановым пространством, которое определяется следующим условием: для любой последовательности г*еодезических треугольников* T_n, сужающихся в точку, имеют место неравенства

$$k \geq \overline{\lim} \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma\left(T_n^0\right)} \geq \underline{\lim} \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma\left(T_n^0\right)} \geq k',$$

где *геодезический треугольник* $T = xyz$ является тройкой геодезических отрезков $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$ (стороны треугольника T), соединяющих попарно три различные точки x, y, z, величины $\overline{\delta}(T^0) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ выражает *угловой дефект* геодезического треугольника T и $\delta(T^0)$ – площадь евклидова треугольника T^0 со сторонами той же длины. **Внутренняя метрика** на пространстве ограниченной кривизны называется **метрикой ограниченной кривизны**. Такое пространство превращается в риманово, если выполняются два дополнительных условия: локальная компактность пространства (этим обеспечивается локальное существование геодезических) и локальное расширение геодезических. Если при этом $k = k'$, то пространство является римановым пространством с постоянной кривизной k (см. **Пространство геодезических**, гл. 6).

Пространство кривизны $\leq k$ определяется условием $\overline{\lim} \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \leq k$. В таком пространстве любая точка имеет некоторую окрестность, в которой сумма $\alpha + \beta + \gamma$ углов геодезического треугольника T не превышает сумму $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k$ углов треугольника T^k со сторонами той же длины в пространстве постоянной кривизны k. Внутренняя метрика такого пространства называется k-**вогнутой метрикой**.

Пространство кривизны $\geq k$ определяется условием $\underline{\lim} \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \leq k$. В таком пространстве любая точка имеет некоторую окрестность, в которой $\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha_k + \beta_k + \gamma_k$ для треугольников T и T^k. Внутреннюю метрику такого пространства называют K-**вогнутой метрикой**.

Пространство Александрова является обобщенным римановым пространством с ограниченной верхней, нижней или интегральной кривизной.

Полная риманова метрика

Риманова метрика g на многообразии M^n называется **полной**, если M^n образует полное метрическое пространство по отношению к g. Любая риманова метрика на компактном многообразии является полной.

Риччи-плоская метрика

Риччи-плоской метрикой называется риманова метрика, тензор кривизны которой обращается в нуль.

Плоское многообразие Риччи представляет собой риманово многообразие, снабженное Риччи-плоской метрикой. *Плоские многообразия Риччи* являются вакуумным решением *евклидова характеристического полинома* и особыми случаями *многообразий Кехлера–Эйнштейна*. К важным плоским многообразиям Риччи относятся *многообразия Калаби–Яу* и *гипермногообразия Кехлера*.

Метрика Оссермана

Метрикой Оссермана называется риманова метрика, для которой риманов тензор кривизны R является *оссермановым*. Это означает, что собственные значения *оператора Якоби* $\mathcal{J}(x): y \to R(y,x)x$ на *единичной сфере* S^{n-1} пространства $\mathbb{E}^n$ будут постоянными, т.е. независимыми от единичных векторов x.

G-инвариантная метрика

***G*-инвариантной метрикой** называется риманова метрика g на дифференцируемом многообразии M^n, которая не изменяется при любых преобразованиях данной *группы Ли* $(G, \cdot, id)$. Группа $(G, \cdot, id)$ называется *группой движений* (или *группой изометрий*) риманова пространства (M^n, g).

Метрика Иванова–Петровой

Пусть R – римановым тензором кривизны риманова многообразия M^n и $\{x, y\}$ – ортогональный базис ориентированной 2-плоскости π в касательном пространстве $T_p(M^n)$.

Метрикой Иванова–Петровой называется риманова метрика на M^n, для которой собственные значения антисимметричного оператора кривизны $\mathcal{R}(\pi) = R(x,y)$ ([IvSt95]) зависят только от точки p риманова многообразия M^n, но не от плоскости π.

Метрика Золла

Метрикой Золла называется риманова метрика на гладком многообразии M^n, геодезические которого являются простыми замкнутыми кривыми равной длины. Двумерная сфера S^2 допускает множество таких метрик, помимо очевидных метрик постоянной кривизны. В терминах цилиндрических координат $(z,\theta)(z \in [-1,1],\ \theta \in [0,2\pi])$ *линейный элемент*

$$ds^2 = \frac{(1+f(z))^2}{1-z^2}dz^2 + (1-z^2)d\theta^2$$

задает метрику Золла на сфере S^2 для любой гладкой нечетной функции $f:[-1,1] \to (-1,1)$, которая обращается в нуль в концевых точках интервала.

Циклоидальная метрика

Циклоидальная метрика – это риманова метрика на полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$, задаваемая *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{2x_1}.$$

Она называется циклоидальной, поскольку ее геодезические являются цикло идальными кривыми. Соответствующее расстояние $d(x, y)$ между двумя точками $x, y \in \mathbb{R}_+^2$ эквивалентно расстоянию

$$\rho(x, y) = \frac{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{|x_2 - y_2}}$$

в том смысле, что $d \leq C\rho$ и $\rho \leq Cd$ для некоей положительной константы C.

Метрика Бергера

Метрикой Бергера называется риманова метрика на *сфере Бергера* (т.е. сжатой в одном направлении сфере S^3), задаваемая *линейным элементом*

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 + \cos^2\alpha(d\psi + \cos\theta d\phi)^2,$$

где α – константа, а θ, ϕ, ψ – *углы Эйлера*.

Метрика Карно-Каратеодори

Распределение (или *поляризация*) на M^n есть подрасслоение касательного расслоения $T(M^n)$ многообразия M^n. При наличии поляризации $H(M^n)$ векторное поле в $H(M^n)$ называется *горизонтальным*. Кривая γ на M^n называется *горизонталь*

ной (или *выделенной, допустимой*) по отношению к $H(M^n)$, если $\gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}(M^n)$ для любого t. Распределение $H(M^n)$ называется *абсолютно неинтегрируемым*, если *скобки Ли* $[..., [H(M^n), H(M^n)]]$ поляризации $H(M^n)$ перекрывают касательное расслоение $T(M^n)$, т.е. для всех $p \in M^n$ любой касательный вектор v из $T_p(M^n)$ может быть представлен как линейная комбинация векторов следующих видов: u, $[u, w]$, $[u, [w, t]]$, $[u, [w, [t, s]]], ... \in T_p(M^n)$, где все векторные поля $u, w, t, s, ...$ являются горизонтальными.

Метрикой Карно–Каратеодори (или *C–C метрикой*) называется метрика на многообразии M^n с абсолютно неинтегрируемым горизонтальным распределением $H(M^n)$, задаваемая набором g_c положительно определенных *скалярных произ ведений* на $H(M^n)$. Расстояние $d_c(p, q)$ между любыми точками $p, q \in M^n$ опре деляется как инфимум g_c-длин горизонтальных кривых, соединяющих точки p и q.

Подримановым многообразием (или *поляризованным многообразием*) назы вается многообразие M^n, снабженное метрикой Карно–Каратеодори. Оно является обобщением риманова многообразия. Грубо говоря, для измерения расстояний в подримановом многообразии можно следовать только вдоль кривых, являющихся касательными к горизонтальным пространствам.

Псевдориманова метрика

Рассмотрим действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, в котором каждое касательное пространство $T_p(M^n)$, $p \in M^n$ снабжено гладко изменяющимся от точки к точке *скалярным произведением*, которое является невырожденным, но неопределенным.

Псевдоримановой метрикой на M^n называется совокупность скалярных произ ведений $\langle , \rangle_p$ на касательных пространствах $T_p(M^n)$, $p \in M^n$, по одному для каждой точки $p \in M^n$.

Каждое скалярное произведение $\langle , \rangle_p$ полностью определено скалярными произ ведениями $\langle e_i, e_j \rangle_p = g_{ij}(p)$ элементов $e_1, ..., e_n$ стандартного базиса в $\mathbb{E}^n$, т.е. действительной симметричной неопределенной $n \times n$ матрицей $((g_{ij})) = ((g_{ij}(p)))$, называемой **метрическим тензором** (см. **Риманова метрика**, где метрический тензор является действительной симметричной положительно определенной $n \times n$ матрицей). Именно, $\langle x, y \rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) x_i y_j$, где $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n) \in$ $\in T_p(M^n)$. Гладкая функция g полностью определяет псевдориманову метрику.

Длина ds вектора $(dx_1, ..., dx_n)$ выражается квадратической дифференциальной формой

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j.$$

Длина кривой $\gamma : [0,1] \to M^n$ выражается формулой $\int_\gamma \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j} =$ $= \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}}\, dt$. В общем случае она может быть действительной, чисто мнимой или нулевой (*изотропная кривая*).

Псевдориманова метрика на M^n является метрикой с фиксированной, но неопределенной сигнатурой (p, q), $p + q = n$. Псевдориманова метрика является невырожденной, т.е. ее метрический определитель $\det((g_{ij})) \neq 0$. Поэтому она является **невырожденной неопределенной метрикой**.

Псевдориманово многообразие (или *псевдориманово пространство*) – действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, снабженное псевдоримановой метрикой. Теория псевдоримманоых пространств называется *псевдоримановой геометрией*.

Моделью псевдориманова пространства с сигнатурой (p, q) является *псевдоевклидово пространство* $\mathbb{R}^{p,q}$, $p + q = n$ – действительное n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное метрическим тензором $((g_{ij}))$ с сигнатурой (p, q), заданным как $g_{11} = ... = g_{pp} = 1$, $g_{p+1,\, p+1} = ... = g_{nn} = -1$, $g_{ij} = 0$ для $i \neq j$. *Линейный элемент* соответствующей метрики задается как

$$ds^2 = dx_1^2 + ... + dx_p^2 - dx_{p+1}^2 - ... - dx_n^2.$$

Лоренцева метрика

Лоренцева метрика (или **метрика Лоренца**) – псевдориманова метрика с сигнатурой $(1, p)$.

Лоренцевым многообразием называется многообразие, снабженное лоренцевой метрикой. В общей теории относительности принципиально предположение, что *пространство–время* может моделироваться как лоренцево многообразие с сигнатурой (1, 3). Пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ с плоской **метрикой Минковского** является моделью лоренцева многообразия.

Метрика Оссермана–Лоренца

Метрикой Оссермана–Лоренца называется лоренцева метрика, для которой тензор римановой кривизны R является *оссермановым*. Это означает, что собственные значениия *оператора Якоби* $\mathcal{J}(x): y \to R(y,x)x$ не зависят от единичных векторов x.

Лоренцево многообразие будет *оссермановым* тогда и только тогда, когда оно является многообразием постоянной кривизны.

Метрика Бляшке

Метрика Бляшке на невырожденной гиперповерхности есть псевдориманова метрика, ассоциированная с аффинной нормалью вложения $\phi: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, где M^n является n-мерным многообразием, а $\mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается как аффинное пространство.

Полуриманова метрика

Полуримановой метрикой на действительном n-мерном дифференцируемом многообразии M^n называется вырожденная риманова метрика, т.е. совокупность положительно полуопределенных *скалярных произведений* $\langle x,y\rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p)x_i y_j$ на касательных пространствах $T_p(M^n)$, $p \in M^n$; метрический определитель $\det((g_{ij})) = 0$.

Полуримановым многообразием (или *полуримановым пространством*) называется действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, снабженное полуримановой метрикой.

Моделью полуриманова многообразия является *полуевклидово пространство* $\mathbb{R}^n_d$, $d \geq 1$ (иногда обозначаемое как $\mathbb{R}^n_{n-d}$), т.е. действительное n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное полуримановой метрикой. Это означает, что существует некоторое скалярное произведение, такое что по отношению к надлежащим образом выбранному базису скалярное произведение $\langle x,x\rangle$ вектора на себя будет иметь вид $\langle x,x\rangle = \sum_{i=1}^{n-d} x_i^2$. При этом $d \geq 1$ число называется *дефектом* (или *положительным дефицитом*) пространства.

Метрика Грушина

Метрикой Грушина называется полуриманова метрика на $\mathbb{R}^2$, задаваемая линейным элементом

$$ds^2 = dx_1^2 + \frac{\delta x_2^2}{x_1^2}.$$

Полупсевдориманова метрика

Полупсевдориманова метрика на действительном n-мерном дифференцируемом многообразии M^n – вырожденная псевдориманова метрика, т.е. совокупность вырожденных неопределенных *скалярных произведений* $\langle x,y\rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p)x_i y_j$ на касательных пространствах $T_p(M^n)$, $p \in M^n$; метрический определитель $\det(g_{ij}) = 0$. Именно, полупсевдориманова метрика является **вырожденной неопределенной метрикой.**

Полупсевдоримановым многообразием (или *полупсевдоримановым пространством*) называется действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, снабженное полупсевдоримановой метрикой.

Моделью полупсевдориманова многообразия является *полупсевдоевклидово пространство* $\mathbb{R}^n_{\substack{l_1,\dots,l_r\\ m_1,\dots,m_{r-1}}}$, т.е. действительное n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное полупсевдоримановой метрикой. Это означает, что существует r скалярных произведений $\langle x, y\rangle_a = \sum \varepsilon_{i_a} x_{i_a} y_{i_a}$, где $a = 1, \dots, r$, $0 = m_0 < \dots < m_r = n$, $i_a = m_{a-1} + 1, \dots, m_a$, $\varepsilon_{i_a} = \pm 1$ и -1 среди чисел ε_{i_a} встречается l_a раз. Произведение $\langle x, y\rangle_a$ определено для тех векторов, для которых все координаты x_i, $i \le m_{a-1}$ или $i > m_a + 1$, равны нулю. Первый скалярный квадрат произвольного вектора x является вырожденной квадратичной формой $\langle x, x\rangle_1 = -\sum_{i=1}^{l_1} x_i^2 + \sum_{j=l_1+1}^{n-d} x_j^2$. Число $l_1 \ge 0$ называется *индексом*, а число $d = n - m_1$ – *дефектом* пространства. Если $l_1 = \dots = l_r = 0$, то мы получаем *полуевклидово пространство.* Пространства $\mathbb{R}^n_m$ и $\mathbb{R}^n_{k,l}$ и называются *квазиевклидовыми пространствами.*

Полупсевдонеевклидово пространство $\mathbb{S}^n_{\substack{l_1,\dots,l_r\\ m_1,\dots,m_{r-1}}}$ может быть определено как гиперсфера в пространстве $\mathbb{R}^n_{\substack{l_1,\dots,l_r\\ m_1,\dots,m_{r-1}}}$ с отождествленными антиподальными точками. Если $l_1 = \dots = l_r$, то пространство будет называться полуэллиптическим (или полунеевклидовым) пространством. Если существует , то пространство называется полугиперболическим пространством.

Финслерова метрика

Рассмотрим действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^N, в котором каждое касательное пространство $T_p(M^n)$, $p \in M^n$ снабжено банаховой нормой $\|\cdot\|$, такой что банахова норма как функция позиции, является гладкой и матрица (g_{ij}),

$$g_{ij} = g_{ij}(p, x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \|x\|^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

является положительно определенной для любого $p \in M^n$ и любого $x \in T_p(M^n)$.

Финслеровой метрикой на M^n называется совокупность банаховых норм $\|\cdot\|$ на касательных пространствах T_pM^n, по одной для каждого $p \in M^n$. *Линейный элемент* этой метрики имеет форму

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j.$$

Финслерова метрика может задаваться как действительная положительно определенная выпуклая функция $F(p, x)$ координат точки $p \in M^n$ и компонент вектора

$x \in T_p(M^n)$, действующего в точке p. Функция $F(p, x)$ является положительно однородной первой степени в x: $F(p, \lambda x) = \lambda F(p, x)$ для каждого $\lambda > 0$. Значение $F(p, x)$ интерпретируется как длина вектора x. *Финслеров метрический тензор* имеет форму $(g_{ij}) = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(p,x)}{\partial x_i dx_j}\right)$. Длина кривой $\gamma: [0,1] \to M^n$ задается как $\int_0^1 F\left(p, \frac{dp}{dt}\right)dt$. Для каждой фиксированной точки p финслеров метрический тензор в переменных x является римановым.

Финслерова метрика является обобщением римановой метрики, где общее определение длины $\| x \|$ вектора $x \in T_p(M^n)$ не обязательно задается в виде квадратного корня из симметричной билинейной формы, как это делается в римановом случае.

Финслерово многообразие (или *финслерово пространство*) – это действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, снабженное финслеровой метрикой. Теория финслеровых пространств называется *финслеровой геометрией.* Различие между *римановым* и *финслеровым* пространствами состоит в том, что первое локально ведет себя как евклидово пространство, а второе – как *пространство Минковского,* или, аналитически, в том, что эллипсоиду в римановом случае соответствует произвольная выпуклая поверхность, в качестве центра которой взято начало координат.

Обобщенным финслеровым пространством называется пространство с **внутренней метрикой**, на которую накладываются определенные ограничения в отношении поведения кратчайших кривых, т.е. кривых, длины которых равны расстоянию между их конечными точками. Такие пространства включают в себя **пространства геодезических**, финслеровы пространства и т.п. Обобщенные финслеровы пространства отличаются от финслеровых не только большей степенью обобщения, но и тем, что они определяются и исследуются с помощью метрики, без использования координат.

Метрика Кропиной

Метрикой Кропиной называется финслерова метрика F_{Kr} на вещественном n-мерном многообразии M^n, задаваемая как

$$\frac{\sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j}{\sum_i b_i(p) x_i}$$

для любых $p \in M^n$ и $x \in T_p(M^n)$, где (g_{ij}) – является риманов метрический тензоро и $b(p) = (b_i(p))$ – векторное поле.

Метрика Рандерса

Метрика Рандерса – финслерова метрика F_{Ra} на действительном n-мерном многообразии M^n, задаваемая как

$$\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j} + \sum_i b_i(p) x_i$$

для любых $p \in M^n$ и $x \in T_p(M^n)$, где (g_{ij}) – риманов метрический тензоро и $b(p) =$ $= (b_i(p))$ – векторное поле.

Метрика Клейна

Метрикой Клейна называется риманова метрика *на открытом единичном шаре* $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < 1\}$ в $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sqrt{\|y\|_2^2 - \left(\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - \langle x, y\rangle^2\right)}}{1 - \|x\|_2^2}$$

для любых $x \in B^n$ и $y \in T_x(B^n)$, где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ и $\langle\ ,\ \rangle$ – обычное *скалярное произведение* на $\mathbb{R}^n$.

Метрика Функа

Метрикой Функа называется финслерова метрика F_{Ru} на *открытом единичном шаре* в $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sqrt{\|y\|_2^2 - \left(\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - \langle x, y\rangle^2\right)} + \langle x, y\rangle}{1 - \|x\|_2^2}$$

для любых $x \in B^n$ и $y \in T_x(B^n)$, где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ и $\langle\ ,\ \rangle$ – обычное *скалярное произведение* на $\mathbb{R}^n$. Это – **проективная метрика.**

Метрика Шена

Для данного вектора $a \in \mathbb{R}^n$, $\|a\|_2 < 1$ **метрикой Шена** называется финслерова метрика F_{Sh} на *открытом единичном шаре* $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < 1\}$ в $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sqrt{\|y\|_2^2 - \left(\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - \langle x, y\rangle^2\right)} + \langle x, y\rangle}{1 - \|x\|_2^2} + \frac{\langle a, y\rangle}{1 + \langle a, x\rangle}$$

для любых $x \in B^n$ и $y \in T_x(B^n)$, где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ и $\langle\ ,\ \rangle$ – обычное *скалярное произведение* на $\mathbb{R}^n$. Это – **проективная метрика**. При $a = 1$ она превращается в **метрику Функа.**

Метрика Бервальда

Метрикой Бервальда называется финслерова метрика F_{Be} на *открытом единичном шаре* $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < 1\}$ в $\mathbb{R}^n$, задаваемая как

$$\frac{\left(\sqrt{\|y\|_2^2 - \left(\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - \langle x, y\rangle^2\right)} + \langle x, y\rangle\right)}{\left(1 - \|x\|_2^2\right)^2 \sqrt{\|y\|_2^2 - \left(\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - \langle x, y\rangle^2\right)}}$$

для любых $x \in B^n$ и $y \in T_x(B^n)$, где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ и $\langle\ ,\ \rangle$ – обычное *скалярное произведение* на $\mathbb{R}^n$. Это – **проективная метрика.**

В общем случае каждая финслерова метрика на многообразии M^n порождает *пульверизацию* (обычное однородное дифференциальное уравнение второго порядка) $y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y_i}$, которой определяются геодезические. Финслерова метрика называется **метрикой Бервальда,** если коэффициенты пульверизации $G^i = G^i(x, y)$ являются квадратичными по $y \in T_x(B^n)$ в любой точке $x \in M^n$, т.е. $G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^iy^k$. Каждая метрика Бервальда аффинно эквивалентна некоторой римановой метрике.

Метрика Дугласа

Метрикой Дугласа называется финслерова метрика, для которой *коэффициенты пульверизации* $G^i = G^i(x, y)$ имеют вид

$$G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y_iy_k + P(x,y)y_i.$$

Каждая финслерова метрика, которая проективно эквивалентна **метрике Бервальда**, является метрикой Дугласа. Каждая известная метрика Дугласа является (локально) проективно эквивалентной метрике Бервальда.

Метрика Брайанта

Пусть α – угол с $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ и пусть для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$A = \|y\|_2^4 \sin^2 2\alpha + \left(\|y\|_2^2 \cos 2\alpha + \|x\|_2^2\|y\|_2^2 - \langle x,y\rangle^2\right)^2,$$

$$B = \|y\|_2^4 \cos 2\alpha + \|x\|_2^2\|y\|_2^2 - \langle x,y\rangle^2,$$

$$C = \langle x,y\rangle \sin 2\alpha, \quad D = \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2^2 \cos 2\alpha + 1.$$

Тогда (**проективную**) финслерову метрику F мы получим как

$$\sqrt{\frac{\sqrt{A}+B}{2D} + \left(\frac{C}{D}\right)^2} + \frac{C}{D}.$$

На двумерной *единичной сфере* S^2 она называется **метрикой Брайанта.**

Метрика Кавагучи

Метрикой Кавагучи называется метрика на гладком n-мерном многообразии M^n, задаваемая элементом дуги ds регулярной кривой $x = x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ и выраженная формулой

$$ds = F\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^kx}{dt^k}\right)dt,$$

где *метрическая функция* F удовлетворяет условиям Цермело: $\sum_{x=1}^{k} sx^{(s)}F_{(s)i} = F$, $\sum_{s=r}^{k}\binom{s}{k}x^{(s-r+1)i}F_{(s)i} = 0$, $x^{(s)i} = \frac{d^sx^i}{dt^s}$, $F_{(s)i} = \frac{\partial F}{\partial x^{(s)i}}$ и $r = 2, \ldots, k$. Этими условиями обеспечивается независимость элемента дуги ds от параметризации кривой .$x = x(t)$

Многообразие Кавагучи (или *пространство Кавагучи*) – это гладкое многообразие, снабженное метрикой Кавагучи. Оно является обобщением *финслерова многообразия.*

Суперметрика Де Витта

Суперметрикой **Де-Витта** (или *суперметрикой Уилера – Де-Витта*) $G = (G_{ijkl})$ называется обобщение римановой (или псевдоримановой) метрики $g = g(g_{ij})$, используемой для вычисления расстояний между точками данного многообразия, на случай расстояний между метриками на этом многообразии.

Точнее говоря, для данного связного гладкого трехмерного многообразия M^3 рассмотрим пространство $\mathcal{M}(M^3)$ всех римановых (или псевдоримановых) метрик на M^n. Идентифицируя точки $\mathcal{M}(M^3)$, связанное диффеоморфизмом M^3, можно получить пространство Geom(M^3) 3-*геометрий* (заданной топологии), точками которого являются классы диффеоморфно эквивалентных метрик. Пространство Geom(M^3) называется *суперпространством.* Оно играет важную роль в некоторых формулировках квантовой гравитации.

Суперметрикой, т.е. "метрикой метрик", называется метрика на $\mathcal{M}(M^3)$ (или на Geom(M^3)), используемая для измерения расстояний между метриками на M^3 (или между их классами эквивалентности). Если имеется метрика $g = (g_{ij})) \in \mathcal{M}(M^3)$, то

$$\| \delta g \|^2 = \int_{M^3} d^3x G^{ijkl}(x) \delta g_{ij}(x) \delta g_{kl}(x).$$

где G^{ijkl} – величина, обратная **суперметрике Девитта**

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk} - \lambda g_{ij}g_{kl}).$$

Величина λ параметризует расстояние между метриками $\mathcal{M}(M^3)$ в и может принимать любые действительные значения, кроме $\lambda = \frac{2}{3}$, при котором суперметрика становится *сингулярной.*

Суперметрика Лунда–Реджи

Суперметрика Лунда–Реджи (или **симплициальная суперметрика**) является аналогом **суперметрики Де-Витта** и используется для измерения расстояний между *симплициальными* 3-*геометриями* в *симплициальном пространстве конфигураций.*

Более точно, если имеется замкнутое симплициальное трехмерное многообразие M^3, состоящее из нескольких *тетраэдров* (т.е. трехмерных *симплексов*), то *симплициальная геометрия* на M^3 задается присвоением значений квадратов длин сторон элементами из M^3 и выведением во внутренности каждого тетраэдра плоской римановой геометрии, соответствующей этим значениям. Квадраты длин должны быть положительными и удовлетворять неравенствам треугольника и их аналогам для тетраэдров, т.е. все квадраты мер (длин, площадей, объемов) должны быть неотрицательными (см. **неравенство тетраэдра,** гл. 3). Множество $\mathcal{T}(M^3)$ всех симплициальных геометрий на M^3 называется *симплициальным пространством конфигураций.*

Суперметрика Лунда–Реджи (G_{mn}) на множестве $\mathcal{T}(M^3)$ порождается суперметрикой Девитта на $\mathcal{M}(M^3)$ с использованием для изображения точек в $\mathcal{T}(M^3)$ таких метрик в $\mathcal{M}(M^3)$, которые являются кусочно плоскими в тетраэдрах.

Суперметрики в доказательстве Перельмана

Предложенная У. Терстоном *гипотеза геометризации* предполагает, что после двух хорошо известных декомпозиций любое трехмерное многообразие допускает в качестве остаточных компонент только одну из восьми *терстоновских модельных геометрий*. Если данная гипотеза верна, то отсюда следует справедливость знаменитой гипотезы Пуанкаре (1904) о том, что любое трехмерное многообразие, в котором каждая простая замкнутая кривая может быть непрерывно деформирована в точку, гомеоморфно трехмерной сфере.

В 2003 г. Перельман дал набросок доказательства гипотезы Терстона с использованием некой суперметрики на пространстве всех римановых метрик данного гладкого трехмерного многообразия. В потоке Риччи расстояния уменьшаются в направлении положительной кривизны, поскольку метрика зависима от времени. Модификация Перельмана стандартного потока Риччи позволила систематически удалять возникающие сингулярности.

7.2. РИМАНОВЫ МЕТРИКИ В ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Применительно к теории информации обычно используются специальные римановы метрики, перечень которых представлен ниже.

Информационная метрика Фишера

В статистике, теории вероятностей и информационной геометрии **информационной метрикой Фишера** (или **метрикой Фишера, метрикой Рао**) называется риманова метрика для статистического дифференциального многообразия (см., например, [Amar85], [Frie98]). В этом случае речь идет о придании свойств дифференциальной геометрии семейству классических плотностей распределения теории вероятностей.

Формально, пусть $p_\theta = p(x,\theta)$ – семейство плотностей, перенумерованных n параметрами $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_n)$, которые образуют *параметрическое многообразие P*. **Информационной метрикой Фишера** $g = g_\theta$ на P называется риманова метрика, задаваемая *информационной матрицей Фишера* $((I(\theta)_{ij}))$, где

$$I(\theta)_{ij} = \mathbb{E}_\theta = \left[\frac{\partial \ln p_\theta}{\partial \theta_i}\cdot\frac{\partial \ln p_\theta}{\partial \theta_j}\right] = \int \frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial \theta_i}\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial \theta_j} p(x,\theta)dx.$$

Это – симметричная билинейная форма, которая дает нам классическую меру (*меру Рао*) для статистической различимости параметров распределения. Полагая $i(x,\theta) = -\ln p(x,\theta)$, получим эквивалентное выражение

$$I(\theta)_{ij} = \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial^2 i(x,\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right] = \int \frac{\partial^2 i(x,\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j} p(x,\theta)dx.$$

Без использования языка координат, получим

$$I(\theta)(u,v) = \mathbb{E}_\theta[u(\ln p_\theta)\cdot v(\ln p_\theta)],$$

где u и v – векторы, касательные к параметрическому многообразию P, а $u(\ln p_\theta) = \frac{d}{dt}\ln p_{\theta+tu|t=0}$ – производная от $\ln p_\theta$ по направлению u.

Многообразие распределения плотностей M является образом параметрического многообразия P при отображении $\theta \to p_\theta$ с некоторыми условиями регулярности. Вектор u, касательный к данному многообразию, имеет вид $u = \frac{d}{dt} \ln p_{\theta + tu|t=0}$, и метрика Фишера $g = g_p$ на M, полученная из метрики g_θ на P, может быть записана в виде

$$g_p(u, v) = \mathbb{E}_p \left[\frac{u}{p} \cdot \frac{v}{p} \right].$$

Метрика Фишера и Рао

Пусть $\mathcal{P}_n = \{p \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p > 0\}$ – симплекс строго положительных вероятностных векторов. Элемент $p \in \mathcal{P}_n$ является плотностью n-точечного множества $\{1, ..., n\}$ с $p(i) = p_i$. Элемент u касательного пространства $T_p(\mathcal{P}_n) = \{u \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} u_i = 0\}$ в точке $p \in \mathcal{P}_n$ есть функцией на множестве с $\{1, ..., n\}$ с $u(i) = u_i$.

Метрика Фишера Рао g_p на $\mathcal{P}_n$ является римановой метрикой, определяемой выражением

$$g_p(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i v_i}{p_i}$$

для любых $u, v \in T_p(\mathcal{P}_n)$, т.е. является **информационной метрикой Фишера** на $\mathcal{P}_n$. Метрика Фишера – Рао является единственной (с точностью до постоянного множителя) римановой метрикой на $\mathcal{P}_n$, сужаемой при стохастическом отображении ([Chen72]).

Метрика Фишера – Рао изометрична (см. отображение $p \to 2(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n})$) стандартной метрике на открытом подмножестве сферы радиуса *два* в $\mathbb{R}^n$. Такое отождествление $\mathcal{P}_n$ позволяет получить на $\mathcal{P}_n$ **геодезическое расстояние**, называемое **расстоянием Фишера** (или **расстоянием Бхаттачарья 1**), посредством формулы

$$2 \arccos \left(\sum_i p_i^{1/2} q_i^{1/2} \right).$$

Метрика Фишера–Рао может быть расширена на множество $\mathcal{M}_n = \{p \in \mathbb{R}^n,\ p_i > 0\}$ всех конечных строго положительных мер на множестве $\{1, ..., n\}$. В этом случае геодезическое расстояние на $\mathcal{M}_n$ можно записать как

$$2 \left(\sum_i \left(\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i} \right)^2 \right)^{1/2}$$

для любых $p, q \in \mathcal{M}_n$ (см. **Метрика Хеллинджера,** гл. 14).

Монотонная метрика

Пусть $\mathcal{M}_n$ будет множество всех комплексных $n \times n$ матриц, а $\mathcal{M} \subset M_n$ – многообразие всех комплексных положительно определенных $n \times n$ матриц. Пусть

$\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{D} = \{\rho \in \mathcal{M}: \mathrm{Tr}\,\rho = 1\}$ – будет многообразие всех *матриц плотности.* Касательным пространством для $\mathcal{M}$ в точке $\rho \in \mathcal{M}$ является множество $T_p(\mathcal{M}) = \{x \in M_n : x = x^*\}$, т.е. множество всех *эрмитовых* $n \times n$ *матриц.* Касательное пространство $T_\rho(\mathcal{D})$ в точке $\rho \in \mathcal{D}$ есть подпространство бесследовых (т.е. имеющих нулевой след) матриц в $T_\rho(\mathcal{M})$.

Риманова метрика λ на $\mathcal{M}$ **называется монотонной** метрикой, если неравенство

$$\lambda_{h(\rho)}(h(u), h(u)) < \lambda_\rho(u,u)$$

выполняется для любых $\rho \in \mathcal{M}$, любых $u \in T_\rho(\mathcal{M})$ и любых вполне положительных сохраняющих следы отображений h, называемых *стохастическими отображениями.* В действительности ([Petz96]), λ является монотонной тогда и только тогда, когда ее можно представить как $\lambda_\rho(u,v) = \mathrm{Tr}\, u J_\rho(u,u)$, где J_ρ – оператор вида $J_\rho = \dfrac{1}{f(L_\rho / R_\rho) R_\rho}$. Здесь L_ρ и R_ρ – левый и правый операторы умножения, а f: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ – оператор монотонной функции, который симметричен, т.е. $f(t) = tf(t^{-1})$, и *нормирован,* т.е. $f(1) = 1$. $J_\rho(v) = \rho^{-1} v$, если v и ρ коммутируют между собой, т.е. любая монотонная метрика равна **информационной метрике Фишера** на коммутативных подмногообразиях. Следовательно, монотонные метрики являются обобщением информационной метрики Фишера на классе плотностей распределения (классический или коммутативный случай) на класс матриц плотности (квантовый или некоммутативный случай), применяемых в квантовой статистике и теории информации. Именно $\mathcal{D}$ является пространством точных состояний n-уровневой квантовой системы.

Монотонную метрику $\lambda_\rho(u, v \mathrm{Tr}\, u \dfrac{1}{f(L_\rho / R_\rho) R_\rho}(v)$ можно записать иначе как $\lambda_\rho(u,v) = \mathrm{Tr}\, uc(L_\rho R_\rho)(v)$, где функция $c(x,y) = \dfrac{1}{f(x/y)y}$ является функцией Морозова–Ченцова, относящейся к λ.

Метрика Буреса является наименьшей монотонной метрикой, полученной для $f(t) = \dfrac{1+i}{2}$ (для $c(x,y) = \dfrac{2}{x+y}$). В этом случае $J_\rho(v) = g$, $\rho g + g\rho = 2v$, есть *симметричная логарифмическая производная.*

Метрика правой логарифмической производной является наибольшей монотонной метрикой, соответствующей функции $f(t) = \dfrac{2t}{1+t}$ (функции $c(x,y) = \dfrac{x+y}{2xy}$). В этом случае $J_\rho(v) = \dfrac{1}{2}(\rho^{-1} v + v\rho^{-1})$ – *правая логарифмическая производная.*

Метрика Боголюбова–Кубо–Мори получается при $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ (при $c(x,y) = = \dfrac{\ln x - \ln y}{x - y}$). Ее можно записать как $\lambda_\rho(u,v) = \dfrac{\partial^2}{\partial s \partial t} \mathrm{Tr}(\rho + su) ln(\rho + tv)|_{s,t=0}$.

Метрики Вигнера–Янасе–Дайсона λ_ρ^α являются монотонными для $\alpha \in [-3,3]$. Для $\alpha = \pm 1$ получаем метрику Боголюбова–Кубо–Мори; для $\alpha = \pm 3$ получаем метрику правой логарифмической производной. Наименьшей в семействе является метрика **Вигнера–Янасе–Дайсона**, полученная для $\alpha = 0$.

Метрика Буреса

Метрика Буреса (или **статистическая метрика**) есть монотонная метрика на многообразии $\mathcal{M}$ всех комплексных положительно определенных $n \times n$ матриц, задаваемая выражением $\lambda_\rho(u, v) = \mathrm{Tr}\, u J_\rho(v)$, где $J_\rho(v) = g$, $\rho g + g\rho = 2v$, есть *симметричная логарифмическая производная*. Это наименьшая из монотонных метрик.

Для любых $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}$ **расстояние Буреса,** т.е. **геодезическое расстояние,** определяемое метрикой Буреса, может быть представлено как

$$2\sqrt{\mathrm{Tr}\,\rho_1 + \mathrm{Tr}\,\rho_2 - 2\,\mathrm{Tr}\left(\rho_1^{1/2}\rho_2\rho_1^{1/2}\right)^{1/2}}.$$

На подмногообразии $\mathcal{D} = \{\rho \in \mathcal{M} :\ \mathrm{Tr}\,\rho = 1\}$ матриц плотности оно имеет форму

$$2 \arccos \mathrm{Tr}\left(\rho_1^{1/2}\rho_2^{1/2}\right)^{1/2}.$$

Метрика правой логарифмической производной

Метрика правой логарифмической производной (или *RLD-метрика*) есть **монотонная метрика** на $\mathcal{M}$ многообразии всех комплексных положительно определенных $n \times n$ матриц задаваемая уравнением

$$\lambda_\rho(u, v) = \mathrm{Tr}\, u J_\rho(v),$$

где $J_\rho(v) = \frac{1}{3}(\rho^{-1}v + v\rho^{-1})$ – *правая логарифмическая производная.* Это – наибольшая монотонная метрика.

Метрика Боголюбова–Кубо–Мори

Метрика Боголюбова-Кубо-Мори (или *BKM-метрика*) есть монотонная метрика на $\mathcal{M}$ многообразии всех комплексных положительно определенных $n \times n$ матриц, задаваемая уравнением

$$\lambda_\rho^\alpha(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \mathrm{Tr}\ f_\alpha(\rho + su)\ln(\rho + tv)\,|_{s,t=0}\ .$$

Метрики Вигнера–Янасе–Дайсона

Метрики Вигнера–Янасе–Дайсона (или *WYD-метрики*) образуют семейство метрик на многообразии $\mathcal{M}$ всех комплексных положительно определенных матриц, задаваемых уравнением

$$\lambda_\rho^\alpha(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \mathrm{Tr}\ f_\alpha(\rho + tu) f_{-\alpha}(\rho + sv)\,|_{s,t=0}\ .$$

где $f_\alpha(x) = \frac{2}{1-\alpha} x^{\frac{1-\alpha}{2}}$, если $\alpha \neq 1$, и $\ln x$, если $\alpha = 1$. Эти метрики будут монотонными для $\alpha \in [-3,3]$. Для $\alpha = \pm 1$ получим метрику **Боголюбова–Кубо–Мори**, а для $\alpha = \pm 3$ – **метрику правой логарифмической производной**.

Метрика Вигнера–Янасе (или *WY-метрика*) λ_ρ является метрикой Вигнера–Янасе–Дайсона λ_ρ^0, полученной для $\alpha = 0$. Ее можно записать как

$$\lambda_\rho(u,v) = 4\,\mathrm{Tr}\,u\left(\sqrt{L_\rho}+\sqrt{R_\rho}\right)^2(v),$$

и она является наименьшей метрикой семейства. Для любых $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}$ **геодезическое расстояние,** задаваемое WY-метрикой, будет иметь вид

$$2\sqrt{\mathrm{Tr}\,\rho_1 + \mathrm{Tr}\,\rho_2 - 2\,\mathrm{Tr}\left(\rho_1^{1/2}\rho_2^{1/2}\right)}.$$

На подмногообразии $\mathcal{D} = \{\rho \in \mathcal{M}:\ \mathrm{Tr}\,\rho = 1\}$ матриц плотности оно будет равно

$$2\arccos \mathrm{Tr}\left(\rho_1^{1/2}\rho_2^{1/2}\right).$$

Метрика Конна

Грубо говоря, **метрика Конна** – это обобщение (из пространства всех вероятностных мер множества X на *пространство состояний* любой унитальной C-алгебры) **метрики Канторовича, Мэллоуза–Монжа–Вассерштейна**, заданной как **липшицево расстояние между мерами.**

Пусть M^n – гладкое n-мерное многообразие. Пусть $A = C^\infty(M^n)$ – (коммутативная) алгебра гладких комплекснозначных функций на M^n, представленных операторами умножения на гильбертовом пространстве $H = L^2(M^n, S)$ квадратично интегрируемых секций расслоения спиноров на M^n: $(f\xi)(p) = f(p)\xi(p)$ для всех $f \in A$ и всех $\xi \in H$. Пусть D – *оператор Дирака.* Пусть коммутатор $[D, f]$ для $f \in A$ есть *умножение Клифферда* на градиент ∇f, такое что его оператор нормы $\|\cdot\|$ в H задается как $\|[D,f]\| = \sup_{p\in M^n}\|\nabla f\|$.

Метрикой Конна называется **внутренняя метрика** на M^n, задаваемая выражением

$$\sup_{f\in A_i\,\|[D,f]\|\le 1}|f(p)-f(q)|.$$

Данное определение может быть применено также к дискретным пространствам и даже обобщено на "некоммутативные пространства" (*унитальные C^*-алгебры*). В частности, для помеченного связного локально конечного графа $G = (V, E)$ с множеством вершин $\mathbf{V} = \{v_1, ..., v_n, ...\}$ метрика Конна задается как

$$\sup_{\|[D,f]\|=\|df\|\le 1}\left|f_{v_i} - f_{v_j}\right|$$

для любых $v_i, v_j \in V$, где $\left\{f = \sum f_{v_i} v_i:\ \sum\left|f_{v_i}\right|^2 < \infty\right\}$ является множеством формальных сумм f, образующих гильбертово пространство, и $\|[D,f]\|$ определяется как $\|[D,f]\| = \sup\left(\sum_{k=1}^{\deg(v_1)}(f_{v_k} - f_{v_i})\right)^{1/2}$.

7.3. ЭРМИТОВЫ МЕТРИКИ И ИХХ ОБОБЩЕНИЯ

Векторным расслоением называется такая геометрическая конструкция, в которой каждой точке топологического пространства M ставится в соответствие векторное пространство так, что все эти векторные пространства, "склеенные вместе", образуют другое топологическое пространство E. Непрерывное отображение π: $E \to M$ называется *проекцией* E на M. Для каждой точки $p \in M$ векторное пространство $\pi^{-1}(p)$ называется *элементарной нитью* векторного расслоения. *Действительным* (*комплексным*) *векторным расслоением* называется такое векторное расслоение π: $E \to M$, элементарные нити $\pi^{-1}(p)$, $p \in M$ которого являются действительными (комплексными) векторными пространствами.

В *действительном векторном расслоении* для каждой точки $p \in M$ элементарная нить $\pi^{-1}(p)$ локально выглядит как векторное пространство $\mathbb{R}^n$, т.е. имеется *открытая окрестность* U точки p, натуральное число n и гомеоморфизм φ: $U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$, такой что для всех $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ мы получаем $\pi(\varphi(x, v) = v$, и отображение $v \to \varphi(x, v)$ дает нам изоморфизм между $\mathbb{R}^n$ и $\pi^{-1}(x)$. Множество U совместно с φ называется *локальной тривиализацией* расслоения. Если существует "глобальная тривиализация", то действительное векторное расслоение называется $\pi: M \times \mathbb{R}^n \to M$ *тривиальным.* Аналогичным образом в комплексном векторном расслоении для каждой точки $p \in M$ элементарная нить $\pi^{-1}(p)$ локально выглядит как векторное пространство $\mathbb{C}^n$. Основным примером комплексного векторного расслоения является тривиальное расслоение $\pi: U \times \mathbb{C}^n \to U$, где U – открытое подмножество множества $\mathbb{R}^k$.

Важными особыми случаями действительного векторного расслоения являются *касательное расслоение* $T(M^n)$ и *кокасательное расслоение* $T^*(M^n)$ *действительного n-мерного многообразия* $M^n_{\mathbb{R}} = M^n$. Важными особыми случаями комплексного векторного расслоения являются касательное расслоение и кокасательное расслоение *комплексного n-мерного многообразия.*

Именно, комплексное n–мерное многообразие $M^n_{\mathbb{C}}$ является топологическим пространством, в котором каждая точка обладает окрестностью, гомеоморфной открытому множеству n-мерного комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^n$, и имеется такой атлас карт, в котором смена координат между картами осуществляется аналитически. (Комплексное) касательное расслоение $T_{\mathbb{C}}(M^n_{\mathbb{C}})$ комплексного многообразия $M^n_{\mathbb{C}}$ есть векторное расслоение всех (комплексных) *касательных пространств* $M^n_{\mathbb{C}}$ в каждой точке $p \in M^n_{\mathbb{C}}$. Его можно получить как комплексификацию $T_{\mathbb{R}}(M^n_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C} = T(M^n) \otimes \mathbb{C}$ соответствующего действительного касательного расслоения, и оно будет называться *комплексифицированным касательным* расслоением $M^n_{\mathbb{C}}$. *Комплексифицированное кокасательное расслоение* $M^n_{\mathbb{C}}$ получается аналогичным образом как $T^*(M^n) \otimes \mathbb{C}$. Любое комплексное n-мерное многообразие $M^n_{\mathbb{C}} = M^n$ можно рассматривать как особый случай действительного $2n$-мерного многообразия, снабженного *комплексной структурой* на каждом касательном пространстве. *Комплексная структура* на действительном векторном пространстве V является структурой комплексного векторного пространства на V, которая совместима с первоначальной действительной структурой. Она полностью определяется оператором умножения на число , роль которого может выполнять произвольное линейное преобразование $J: V \to V$, $J^2 = -id$, где id есть *тождественное отображение.*

Связь (или *ковариантная производная*) является способом определение производной векторного поля вдоль другого векторного поля в векторном расслоении. **Метрической связью** называется линейная связь в векторном расслоении π: $E \to M$, снабженном билинейной формой в элементарных нитях, для которой параллельный перенос вдоль произвольной кусочно гладкой кривой в M сохраняет форму, т.е. *скалярное произведение* двух векторов не изменяется при параллельном переносе. Для случая невырожденной симметричной билинейной формы метрическая связь называется *евклидовой связью*. Для случая невырожденной антисимметричной билинейной формы метрическая связь называется симплектической связью.

Метрика расслоения

Метрикой расслоения называется метрика на векторном расслоении.

Эрмитова метрика

Эрмитовой метрикой на комплексном векторном расслоении π: $E \to M$ называется совокупность **эрмитовых скалярных произведений** (т.е. положительно определенных симметричных сескилинейных форм) на каждой элементарной нити $E_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in M$, которые гладко меняются с точкой p в M. Любое комплексное векторное расслоение имеет эрмитову метрику.

Основным примером векторного расслоения является тривиальное расслоение $\pi: U \times \mathbb{C}^n \to U$, где U – открытое множество в $\mathbb{R}^k$. В этом случае эрмитово скалярное произведение на $\mathbb{C}^n$ и, следовательно, эрмитова метрика на расслоении $\pi: U \times \mathbb{C}^n \to U$ задается выражением

$$\langle u, v \rangle = u^T H \overline{v},$$

где H – положительно определенная *эрмитова матрица*, т.е. комплексная $n \times n$ матрица, отвечающая условиям $H^* = \overline{H}^T = H$ и $\overline{v}^T H v > 0$ для всех $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. В простейшем случае мы получаем $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v}_i$.

Важным особым случаем является эрмитова метрика h на комплексном многообразии M^n, т.е. на комплексифицированном касательном расслоении $T(M^n) \otimes \mathbb{C}$ многообразия M^n. Она является эрмитовым аналогом римановой метрики. В этом случае $h = g + iw$, где ее действительная часть g является римановой метрикой, а ее мнимая часть w – невырожденной антисимметричной билинейной формой, называемой *фундаментальной формой.* Здесь мы имеем и $g(J(x), J(y)) = g(x, y)$, $w(J(x), J(y)) = w(x, y)$ и $w(x, y) = g(x, J(y))$, где оператор J является оператором комплексной структуры на M^n, как правило, $J(x) = ix$. Любая из форм g, w полностью определяет h. Термин "эрмитова метрика" относится также и к соответствующей римановой метрике g, которая придает многообразию эрмитову M^n структуру.

На комплексном многообразии эрмитову метрику h можно выразить в локальных координатах через эрмитов симметричный тензор $((h_{ij}))$:

$$h = \sum_{i,j} h_{ij} dz_i \otimes d\overline{z}_j,$$

где $((h_{ij}))$ является положительно определенной эрмитовой матрицей. Тогда соответствующая фундаментальная форма w примет вид $w = \frac{i}{2}\sum_{i,j} h_{ij} dz_i \otimes d\bar{z}_j$.

Эрмитовым многообразием (или *эрмитовым пространством*) называется комплексное многообразие, снабженное эрмитовой метрикой.

Метрика Кехлера

Метрикой Кехлера (или *кехлеровой метрикой*) называется эрмитова метрика $h = g + iw$ на комплексном многообразии M^n, фундаментальная форма w которой является *замкнутой,* т.е. удовлетворяет условию $dw = 0$. *Кэлерово многообразие* является комплексным многообразием, снабженным кэлеровой метрикой.

Если h выражена в локальных координатах, т.е. $h = \sum_{i,j} h_{ij} dz_i \otimes d\bar{z}_j$, то соответствующую форму w можно записать как $w = \frac{i}{2}\sum_{i,j} h_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$, где $\wedge$ является антисимметричным *V-произведением*, т.е. $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ (следовательно, $dx \wedge dx = 0$). Именно, w является *дифференциальной 2-формой* на M^n, т.е. тензором второго порядка, антисимметричным относительно перестановки любой пары индексов: $w = \sum_{i,j} f_{ij} h_{ij} dx^i \wedge dx^i$, где f_{ij} есть функция на M^n. В*нешняя производная* dw формы w задается как $dw = \sum_{i,j}\sum_{k} \frac{\partial f_{ij}}{dx_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_k$. Если $dw = 0$, то w является *симплектической* (т.е. замкнутой невырожденной) дифференциальной 2-формой. Такие дифференциальные 2-формы называются *формами Кехлера.*

Термин "**метрика Кехлера**" можно отнести также и к соответствующей римановой метрике g, которая придает многообразию M^n кехлерову структуру. Тогда многообразие Кехлера определяется как комплексное многообразие, снабженное римановой метрикой и кэлеровой формой на соответствующем действительном многообразии.

Метрика Хессе

Для гладкой функции f на открытом подмножестве действительного векторного пространства соответствующая метрика Хессе определяется как

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Метрику Хессе называют также **аффинной метрикой Кехлера,** поскольку метрика Кехлера на комплексном многообразии имеет аналогичное описание вида $\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$.

Метрика Калаби–Яо

Метрикой Калаби–Яо называется **метрика Кехлера,** которая **является Риччи-плоской.**

Многообразие Калаби–Яо (или *пространство Калаби–Яо*) – односвязное комплексное многообразие, снабженное метрикой Калаби–Яо. Его можно рассматривать как $2n$–мерное (шестимерный случай представляет особый интерес) гладкое многообразие с группой голономии (т.е. множеством линейных преобразований касательных векторов, проистекающих из параллельного переноса вдоль замкнутых контуров) в специальной унитарной группе.

Метрика Кехлера–Эйнштейна

Метрика Кехлера–Эйнштейна (или **метрика Эйнштейна**) – **метрика Кехлера** на комплексном многообразии M^n, у которой *тензор кривизны Риччи* пропорционален метрическому тензору. Эта пропорциональность является аналогом *уравнения поля Эйнштейна* в общей теории относительности.

Многообразием Кехлера–Эйнштейна (или *многообразием Эйнштейна*) называется комплексное многообразие, снабженное метрикой Кехлера–Эйнштейна. В этом случае тензор кривизны Риччи, рассматриваемый как оператор на касательном пространстве, является умножением на константу.

Такая метрика существует на любой *области* $D \subset \mathbb{C}^n$, которая является ограниченной и *псевдовыпуклой.* Ее можно задать *линейным элементом*

$$ds^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j,$$

где u есть решение *краевой задачи*: $\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right) = e^{2u}$ на D, и на $u = \infty$ на ∂D.

Метрика Кехлера–Эйнштейна является полной метрикой. На единичном диске $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ она совпадает с **метрикой Пуанкаре.**

Метрика Ходжа

Метрика Ходжа – метрика Кехлера, *фундаментальная форма w* которой определяет интегральный класс когомологий или, эквивалентно, имеет интегральные периоды.

Многообразие Ходжа – комплексное многообразие, снабженное метрикой Ходжа. Компактное комплексное многообразие является многообразием Ходжа тогда и только тогда, когда оно изоморфно гладкому алгебраическому подмногообразию некоторого комплексного проективного пространства.

Метрика Фубини–Штуди

Метрика Фубини–Штуди – метрика Кехлера на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$, определяемая через *эрмитово скалярное произведение* $\langle\ ,\ \rangle$ в $\mathbb{C}^{n+1}$. Она задается *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{\langle x, x\rangle\langle dx, dx\rangle - \langle x, d\bar{x}\rangle\langle \bar{x}, dx\rangle}{\langle x, x\rangle^2}.$$

Расстояние между двумя точками $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$, $(y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{C}P^n$, где $x =$ $= (x_1, \ldots, x_{n+1})$, $y = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbf{C}n \backslash \{0\}$, равно

$$\arccos \frac{|\langle x, y\rangle|}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}.$$

Метрика Фубини–Штуди является **метрикой Ходжа.** Пространство $\mathbb{C}P^n$, снабженное метрикой Фубини–Штуди, называется эрмитовым эллиптическим пространством (см. **Эрмитова эллиптическая метрика**).

Метрика Бергмана

Метрикой Бергмана называется **метрика Кехлера** на ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, задаваемая *линейным элементом*

$$ds^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \ln K(z,z)}{\partial z_i \partial z_j} dz_i d\bar{z}_j,$$

где $K(z, u)$ является *функцией ядра Бергмана.* Метрика Бергмана инвариантна относительно автоморфизмов области D; она является полной, если область D однородна. Для *единичного диска* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ метрика Бергмана совпадает с **метрикой Пуанкаре** (см. также ***p*-метрика Бергмана**, гл. 13).

Функция ядра Бергмана определяется следующим образом: рассмотрим область $D \subset \mathbb{C}^n$, в которой существуют аналитические функции $f \neq 0$ класса $L_2(D)$ по отношению к лебеговой мере; множество этих функций образует гильбертово пространство $L_{2,a}(D) \subset L_2(D)$ с ортогональным базисом $(\phi_i)_i$; *функция ядра Бергмана* в области $D \times D \subset \mathbb{C}^{2n}$ задается как $K_D(z,u) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\phi_i(u)}$.

Гиперкехлерова метрика

Гиперкехлеровой метрикой называется риманова метрика g на $4n$-мерном *римановом многообразии,* совместимая с кватернионной структурой на касательном расслоении многообразия. Именно, метрика g является метрикой Кехлера по отношению к трем структурам Кехлера (I, w_I, g), (J, w_J, g) и (K, w_K, g), соответствующим комплексным структурам, как эндоморфизмам касательного расслоения, которые отвечают условиям кватернионной взаимосвязи

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -JIK = -1.$$

Гиперкехлеровым многообразием называется риманово многообразие, снабженное гиперкехлеровой метрикой. Это – особый случай многообразия Кехлера. Все гиперкехлеровы многообразия являются Риччи-плоскими. Компактные четырехмерные гиперкехлеровы многообразия называются *K_3-поверхностями* и изучаются в алгебраической геометрии.

Метрика Калаби

Метрика Калаби – гиперкехлерова метрика на кокасательном расслоении $T^*(\mathbb{C}P^{n+1})$ *комплексного проективного пространства* $\mathbb{C}P^{n+1}$. Для $n = 4k + 4$ эта метрика может быть задана *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-r^{-1}} + \frac{1}{4} r^2 (1 - r^{-4}) \lambda^2 + r^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2) + \frac{1}{2}(r^2 - 1)(\sigma_{1\alpha}^2 + \sigma_{2\alpha}^2) + \frac{1}{2}(r^2 + 1)\left(\sum_{1\alpha}^{2} + \sum_{2\alpha}^{2} \right),$$

где $\left(\lambda, \nu_1, \nu_2, \sigma_{1\alpha}, \sigma_{2\alpha}, \sum_{1\alpha} \sum_{2\alpha} \right)$ с α, пробегающим k значений, являются левоинвариантными *1-формами* (т.е. линейными действительными функциями) на смежном классе $SU(k + 2)/U(k)$. Здесь является *унитарной группой*, состоящей из комплексных $k \times k$ *унитарных матриц*, а $SU(k)$ – *специальной унитарной группой* с определителем 1.

Для $k = 0$ метрика Калаби и **метрика Эугучи–Хэнсона** совпадают.

Метрика Стензеля

Метрикой Стензеля называется гиперкехлерова метрика на кокасательном расслоении $T^*(S^{n+1})$ сферы S^{n+1}.

***SO*(3)-инвариантная метрика**

***SO*(3)-инвариантной метрикой** называется 4-мерная гиперкехлерова метрика с *линейным элементом*, заданным в формализме Бианки-IX как

$$ds^2 = f^2(t)dt^2 + \sigma^2(t)\sigma_1^2 + b^2(t)\sigma_2^2 + c^2(t)\sigma_3^2,$$

где инвариантные *1-формы* σ_1, σ_2, σ_3, из $SO(3)$ выражены в терминах *углов Эйлера* θ, ψ, ϕ как $\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sin\psi d\theta - \sin\theta\cos\psi d\phi)$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\cos\psi d\theta + \sin\theta\sin\psi d\phi)$, $\sigma_3 = \frac{1}{2}(d\psi + son\theta d\phi)$ и нормализация выбрана так, что $\sigma_1 \wedge \sigma_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} d\sigma_k$. Координату t всегда можно выбрать с использованием соответствующей перепараметризации так, что $f(t) = \frac{1}{2}abc$.

Метрика Атья–Хитчина

Метрика Атья–Хитчина является полной регулярной *SO*(3)-инвариантной метрикой с *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{1}{4}a^2b^2c^2\left(\frac{dk}{k(1-k^2)K^2}\right)^2 + a^2(k)\sigma_1^2 + b^2(k)\sigma_2^2 + c^2(k)\sigma_3^2,$$

где a, b, c – функции от k, $ab = -K(k)(E(k) - K(k))$, $bc = -K(k)(E(k) - (1 - k^2)K(k))$, $ac = -K(k)(E(k)$ и $K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно с $0 < k < 1$. Координата t задается по формуле $t = \frac{2K(1-k^2)}{\pi K(k)}$ с точностью до аддитивной постоянной.

Метрика Тауба-NUT

Метрикой Тауба-NUT называется **полная регулярная *SO*(3)-инвариантная метрика** с *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{1}{4}\frac{r+m}{r-m}dr^2 + (r^2 - m^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 4m^2\frac{r-m}{r+m}\sigma_3^2,$$

где m – соответствующий модульный параметр, координата r связана с t формулой $r = m + \frac{1}{2mt}$.

Метрика Эугучи и Хэнсона

Метрикой Эугучи–Хэнсона называется **полная регулярная *SO*(3)-инвариантная метрика** с линейным элементом

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{a}{r}\right)^4} + r^2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^4\right)\sigma_3^2\right),$$

где α – модульный параметр, координата r связана с координатой t формулой $r_2 = a^2 \coth(a^2 t)$.

Метрика Эугучи–Хэнсона совпадает с четырехмерной **метрикой Калаби.**

Комплексная финслерова метрика

Комплексной финслеровой метрикой называется полунепрерывная сверху функция $F : T(M^*) \to \mathbb{R}_+$ на комплексном многообразии M^n с аналитическим касательным расслоением $T(M^n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. F^2 является гладкой на $\breve{M}^n$,, где $\breve{M}^n$ – дополнение (в $T(M^n)$) нулевого сечения.
2. $F(p, x) > 0$ для всех и $p \in M^n$ и .

$$x \in M_p^n.$$

3. $F(p, \lambda x) = |\lambda| F(p, x)$ для всех $p \in M^n$, $x \in T_p(M^n)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Функция $G = F^2$ может быть локально выражена в терминах координат $(p_1, ..., p_n, x_1, ..., x_n)$; *финслеров метрический тензор* комплексной финслеровой метрики задается матрицей $((G_{ij})) = \left(\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2 \partial x_i \partial}{\partial x_i \partial \bar{x}_j}\right)\right)$, называемой *матрицей Леви.* Если матрица $((G_{ij}))$ является положительно определенной, то комплексная финслерова метрика F называется *строго псевдовыпуклой.*

Полуметрика, уменьшающая расстояния

Пусть d – полуметрика, заданная на некотором классе $\mathcal{M}$ комплексных многообразий, содержащем *единичный диск* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Она называется **полуметрикой, уменьшающей расстояния** для всех аналитических отображений, если для любого аналитического отображения $f : M_1 \to M_2, M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ неравенство $d(f(p), f(q)) \le d(p, q)$ справедливо для всех $p, q \in M_1$ (см. **Метрика Кобайаши, Метрика Каратеодори, Метрика Ву**).

Метрика Кобайаши

Пусть **D** – *область* в $\mathbb{C}^n$. Пусть $\mathbb{O}(\Delta, D)$ – множество всех аналитических отображений f: $\Delta \to D$, где $\Delta = \{z \in \mathbb{C} |z| < 1\}$ – *единичный диск.*

Метрика Кобайаши (или **метрика Кобайаши – Ройдена**) F_K есть комплексная финслерова метрика, заданная как

$$F_K(z, u) = \inf\{\alpha > 0 : \exists f \in \mathbb{O}(\Delta, D), f(0) = z, \alpha f'(0) = u\}$$

для всех $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$. Она является обобщением **метрики Пуанкаре** на многомерные области. $F_K(z, u) \ge F_C(z, u)$, где F_C – **метрика Каратеодори.** Если D выпукла и $d(z, u) = \inf\left\{\lambda : z + \frac{u}{\alpha} \in D,\ \text{если}\ |\alpha| > \lambda\right\}$, то $\frac{d(z, u)}{2} \le F_K(z, u) = F_C(z, u) \le$ $\le d(z, u)$.

Для комплексного многообразия M^n **полуметрика Кобайаши** задается как $F_K(p, u) = \inf\{\alpha > 0 : \exists f \in \mathbb{O}(\Delta, M^n), f(0) = p, \alpha f'(0) = u\}$ для всех $p \in M^n$ и $u \in T_p(M^n)$. $F_K(p, u)$ является полунормой касательного вектора u, называемой *полунормой Кобайаши.* F_K будет метрикой, если многообразие M^n *тугое,* т.е. $\mathbb{O}(\Delta, M^n)$ является *нормальным семейством.*

Полуметрика Кобайаши является бесконечно малой формой так называемого **полурасстояния Кобайаши** (или *псевдорасстояния Кобайаши*) K_{M^n} на M^n, которое определяется следующим образом. Для заданных $p, q \in M^n$ *цепь дисков* α от p до q есть семейство точек $p = p^0, p^1, ..., p^k = q$ из M^n, пар точек $a^1, b^1; ...; a^k, b^k$ единичного диска Δ и аналитических отображений $f_1, ..., f_k$ из Δ в M^n, таких что $f_j(a^j) = p^{j-1}$ и $f_j(b^j) = p^j$ для всех j. *Длина* $l(\alpha)$ цепи α равна $d_p(a^1, b^1) + ...$ $... + d_p(a^k, b^k)$, где d_p есть метрика Пуанкаре. Полурасстояние Кобайаши K_{M^n} на M^n – это полуметрика на M^n, заданная как

$$K_{M^n}(p, q) = \inf_{\alpha} l(\alpha),$$

где инфимум взят по всем длинам $l(\alpha)$ цепей дисков α от p до q.

Полурасстояние Кобайаши является **уменьшающим расстояния** для всех аналитических отображений. Это наибольшая из всех полуметрик на M^n, которые являются уменьшающими расстояния для всех аналитических отображений из Δ в M^n, где расстояния на Δ измеряются в метрике Пуанкаре. K_Δ совпадает с метрикой Пуанкаре, а $K_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$.

Многообразие называется *гиперболическим по Кобайаши,* если полурасстояние Кобайаши является на нем метрикой. Многообразие будет гиперболическим по Кобайаши тогда и только тогда, когда оно биголоморфно ограниченной однородной области.

Метрика Кобайаши–Буземана

Полуметрикой Кобайаши–Буземана на комплексном многообразии M^n называется дважды двойственный образ **полуметрики Кобайаши** на M^n. Она является метрикой, еслиM^n – *тугое* многообразие.

Метрика Каратеодори

Пусть D будет область в $\mathbb{C}^n$, и $\mathbb{O}(D, \Delta)$ – множество всех аналитических отображений f: $D \to \Delta$, где $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ – *единичный диск.*

Метрикой Каратеодори F_C называется **комплексная финслерова метрика,** заданная как

$$F_C(z, u) = \sup\left\{|f'(z)u| : \ f \in \mathbb{O}(D, \Delta)\right\}$$

для любых $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$. Она является обобщением **метрики Пуанкаре** на многомерные области. $F_C(z, u) \le F_K(z, u)$, где F_K – метрика Кобайаши. Если D выпукла и $d(z, u) = \inf\left\{\lambda : z + \frac{u}{\alpha} \in D, \text{ если } |\alpha| > \lambda\right\}$, то $\frac{d(z, u)}{2} \le F_C(z, u) = F_K(z, u) \le d(z, u)$.

Для комплексного многообразия M^n **полуметрика Каратеодори** F_C определяется как

$$F_C(p, u) = \sup\left\{|f'(p)u| : f \in \mathbb{O}(M^n, \Delta)\right\}$$

для всех $p \in M^n$ и $u \in T_p(M^n)$. F_C является метрикой, если M^n – тугое.

Полурасстояние Каратеодори (или *псевдорасстояние Каратеодори*) C_M является полуметрикой на комплексном многообразии M^n, заданной как

$$C_{M^n}(p, q) = \sup\left\{d_P(f(p), f(q)) : f \in \mathbb{O}(M^n, \Delta)\right\},$$

где d_P – **метрика Пуанкаре.** В общем случае интегральная полуметрика для бесконечно малой формы полуметрики Каратеодори **является** внутренней для полурасстояния Каратеодори, но не совпадает с ним.

Полурасстояние Каратеодори является **уменьшающим расстояния** для всех аналитических отображений. Это наименьшая полуметрика, уменьшающая расстояния. C_Δ совпадает с метрикой Пуанкаре, а $C_{C^n} \equiv 0$.

Метрика Азукавы

Пусть D – *область* в C^n. Пусть $g_D(z,u) = \sup\{f(u) : f \in K_D(z)\}$, где $K_D(z)$ – множество всех *логарифмически плюрисубгармонических функций* f: $D \to [0,1)$, таких что существуют M, $r > 0$ с $F(u) \le M\| u - z \|_2$ для всех $u \in B(z,r) \subset D$:; здесь $\| \cdot \|$ – l_2-норма на $\mathbb{C}^n$, а $B(z,r) = \left\{x \in \mathbb{C}^n : \| z - x_2 \|_2 < r\right\}$.

Метрика Азукавы (в общем случае, полуметрика) F_A есть **комплексная финслерова метрика,** определяемая как

$$F_A(z,u) = \lim_{\lambda \to 0} \sup \frac{1}{|\lambda|} g_D(z, z + \lambda)$$

для всех $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$. Она "лежит между" **метрикой Каратеодори** F_C и **метрикой Кобайаши** $F_K : F_C(z,u) \le F_A(z,u) \le F_K(z,u)$ для всех $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$. Если область D выпукла, то все эти метрики совпадают.

Метрика Азукавы является бесконечно малой формой так называемого **полурасстояния Азукавы.**

Метрика Сибони

Пусть D – *область* в C^n. Пусть $K_D(z)$ – множество всех *логарифмически плюрисубгармонических функций* f: $D \to [0,1)$, таких что существуют M, $r > 0$ с $f(u) \le M \| u - z \|_2$ для всех $u \in B(z,r) \subset D$; здесь $\| \cdot \|_2$ – l_2-норма на $\mathbb{C}^n$, а $B(z,r) = \left\{x \in \mathbb{C}^n : \| z - x \|_2 < r\right\}$. Пусть $C^2_{\text{loc}}(z)$ – множество всех функций класса C^2 в некоторой открытой окрестности точки z.

Метрика Сибони (в общем случае, полуметрика) F_S есть **комплексная финслерова метрика,** задаваемая уравнением

$$F_S(z,u) = \sup_{f \in K_D(z) \cap C^2_{\text{loc}}(z)} \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) u_i \bar{u}_j}$$

для всех $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$. Она "лежит между" **метрикой Каратеодори** F_C и **метрикой Кобайаши** $F_K : F_C(z,u) \le F_S(z,u) \le F_A(z,u) \le F_K(z,u)$ для всех $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$, где F_A есть **метрика Азукавы.** Если область D выпукла, то все эти метрики совпадают.

Метрика Сибони является бесконечно малой формой так называемого **полурасстояния Сибони.**

Метрика Ву

Метрикой Ву W_{M^n} называется полунепрерывная сверху эрмитова метрика на комплексном многообразии M^n, которая является **уменьшающей расстояния** для всех аналитических отображений. Именно, для двух n-мерных комплексных многообразий M_1^n и M_2^n и $W_{M_2^n}(f(p), f(q) \leq \sqrt{n} W_{M_1^n}(p,q)$ неравенство выполняется для всех $p, q \in M_1^n$.

Инвариантные метрики, включая метрики Каратеодори, Кобайаши, Бергмана и Кехлера–Эйнштейна, играют важную роль в теории комплексных функций и выпуклой геометрии. Метрики Каратеодори и Кобайаши применяются в основном из-за свойства уменьшения расстояния, но они почти никогда не являются эрмитовыми метриками. С другой стороны, метрика Бергмана и метрика Кехлера–Эйнштейна являются эрмитовыми (более того, метриками Кехлера), однако обычно они не являются метриками, уменьшающими расстояния.

Метрика Тейхмюллера

Римановой поверхностью R называется одномерное комплексное многообразие. Две римановы поверхности R_1 и R_2 называются *конформно эквивалентными,* если существует биективная аналитическая функция (т.е. конформный гомеоморфизм) из R_1 в R_2. Точнее, рассмотрим замкнутую риманову поверхность R_0 данного *рода* $g \geq 2$. Для замкнутой римановой поверхности R рода построим пару (R, f), где f: $R_0 \to R$ – гомеоморфизм. Две пары (R, f) и (R_1, f_1) называются конформно эквивалентными, если существует конформный гомеоморфизм h: $R \to R_1$, такой что отображение $(f_1)^{-1} \cdot h \cdot f : R_0 \to R_0$ гомотопно тождественному отображению.

Абстрактная риманова поверхность $R^* = (R, f)^*$ – это класс эквивалентности всех римановых поверхностей, конформно эквивалентных R. Множество всех классов эквивалентности называется *пространством Тейхмюллера* $T(R_0)$ поверхности R_0. Для замкнутых поверхностей R_0 данного рода g пространства $T(R_0)$ являются изометрически изоморфными, что позволяет говорить о пространстве *Тейхмюллера* T_g пространств ода g. T_g есть комплексное многообразие. Если R_0 получено из компактной поверхности рода $g \geq 2$ посредством удаления n точек, то комплексная размерность T_g равна $3g - 3 + n$.

Метрика Тейхмюллера – это метрика на T_g, определенная как

$$\frac{1}{2} \inf_h \ln K(h)$$

для любых $R_1^*, R_2^* \in T_g$, где $h : R_1 \to R_2$ есть квазиконформный гомеоморфизм, гомотопический тождественному отображению, а $K(h)$ – *максимальне растяжение для* h. Именно, существует единственное экстремальное отображение, называемое *отображением Тейхмюллера,* которое минимизирует максимальное растяжение для всех таких h, и расстояние между R_1^* и R_2^* равно $\frac{1}{2} \ln K$, где константа K является растяжением отображения Тейхмюллера.

В терминах *экстремальной длины* $\mathrm{ext}_{R^*}(\gamma)$ расстояние между R_1^* и R_2^* можно записать как

$$\frac{1}{2} \ln \sup_\gamma \frac{\mathrm{ext}_{R_1^*}(\gamma)}{\mathrm{ext}_{R_2^*}(\gamma)},$$

где супремум грань берется по всем простым замкнутым кривым на R_0.

Пространство Тейхмюллера T_g с метрикой Тейхмюллера на нем является **геодезическим** метрическим пространством (более того, **прямым** G**-пространством**), однако оно не является ни гиперболическим по Громову, ни **глобально неотрицательно искривленным по Буземану**.

Квазиметрика Терстона на *пространстве Тейхмюллера* T_g задается как

$$\frac{1}{2}\inf_h \ln \| h \|_{\mathrm{Lip}}$$

для любых $R_1^*, R_2^* \in T_g$, где $h : R_1 \to R_2$ – квазиконформный гомеоморфизм, гомотопический тождественному отображению, а $\| \cdot \|_{\mathrm{Lip}}$ – *липшицева норма* на множестве всех инъективных функций $f : X \to Y$, задаваемая как $\| f \|_{\mathrm{Lip}} =$ $= \sup_{x,y \in X, x \neq y} \dfrac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)}$.

Пространство модулей R_g конформных классов римановых поверхностей рода g получается путем факторизации T_g некоторой счетной группой его автоморфизмов, называемой *модулярной группой.* Примерами метрик, связанных с модулями и пространствами Тейхмюллера, помимо метрики Тейхмюллера, являются **метрика Вейля-Петерсона, метрика Квилена, метрика Каратеодори, метрика Кобайаши, метрика Бергмана**, *метрика Чен Ян Мока, метрика Макмуллена, асимптотическая метрика Пуанкаре, метрика Риччи, возмущенная метрика Риччи, VHS-метрика.*

Метрика Вейля–Петерсона

Метрикой Вейля–Петерсона называется **метрика Кехлера** на пространстве Тейхмюллера $T_{g,n}$ абстрактных римановых поверхностей рода g с n разрывами и отрицательной эйлеровой характеристикой.

Метрика Вайля–Петерсона является **гиперболической по Громову** тогда и только тогда, когда (Брок и Фарб, 2006) комплексная размерность $3g - 3 + n$ пространства $T_{g,n}$ не больше, чем 2.

Метрика Гиббонса–Мантона

Метрика Гиббонса–Мантона является $4n$-мерной **гиперкехлеровой метрикой** на пространстве модулей n-монополей при допущении изометрического действия n-мерного тора T^n. Она может быть также описана с помощью гиперкехлеровой факторизации плоского кватернионного векторного пространства.

Метрика Замолодчикова

Метрикой Замолодчикова называется метрика на пространстве модулей двумерных конформных теорий поля.

Метрики на детерминантных прямых

Пусть M^n – n-мерное компактное гладким многообразие, а F – плоское векторное расслоение на M^n. Пусть $H^{\bullet}(M^n, F) = \otimes_{i=0}^n H^i(M^n, F)$ – *когомология де Рама многообразия* M^n с коэффициентами из F. Для n-мерного векторного пространства V его детерминантная прямая $\det V$ определяется как верхняя внешняя степень V, т.е. $\det V = \wedge^n V$. Для конечномерного градуированного векторного пространства $V = \otimes_{i=0}^n V_i$ детерминантная прямая пространства V задается как тензорное произведение $\det V = \otimes_{i=0}^n (\det V_i)^{(-1)^i}$. Следовательно, детерминантную прямую

$\det H^{\bullet}(M^n, F)$ когомологии $H^{\bullet}(M^n, F)$ можно записать как $\det H^{\bullet}(M^n, F) = = \otimes_{i=0}^{n} (\det H^i(M^n, F))^{(-1)^i}$.

Метрикой Рейдемейстера называется метрика на $H^{\bullet}(M^n, F)$, определяемая заданной гладкой триангуляцией многообразия M^n и классическим кручением Рейдемейстера–Франца.

Пусть g^F и $g^{T(M^n)}$ – будут гладкие метрики на векторном расслоении F и касательном расслоении $T(M^n)$ соответственно. Эти метрики порождают каноническую L^2-**метрику** $h^{H^*(M^n,F)}$ на $H^{\bullet}(M^n, F)$. **Метрика Рэя–Синглера** на $\det H^{\bullet}(M^n, F)$ может быть определена как произведение метрики, порожденной на $\det H^{\bullet}(M^n, F)$ метрикой $h^{H^{\bullet}(M^n,F)}$, и аналитического *кручения Рэя–Синглера.* **Метрику Милнора** на $\det H^{\bullet}(M^n, F)$ можно определить аналогичным способом, используя *аналитическое кручение Милнора.* Если g^F плоская, то обе приведенные выше метрики совпадают с метрикой Рейдемейстера. Применив коэйлерову структуру, можно определить *модифицированную метрику Рэя–Синглера* на $\det H^{\bullet}(M^n, F)$.

Метрикой Пуанкаре–Рейдемейстера называется метрика на когомологической детерминантной прямой $\det H^{\bullet}(M^n, F)$ замкнутого связного ориентированного нечетномерного многообразия M^n. Ее можно построить, комбинируя деформацию Рейдемейстера с двойственностью Пуанкаре. Точно так же можно задать скалярное произведение Пуанкаре–Рейдемейстера на $\det H^{\bullet}(M^n, F)$,, которое полностью определяет метрику Пуанкаре–Рейдемейстера, но содержит дополнительный знак или фазовую информацию.

Метрикой Квилена называется метрика на прообразе когомологической детерминантной прямой компактного эрмитова одномерного комплексного многообразия. Ее можно задать как произведение L^2-метрики и аналитического кручения Рэя–Синглера.

Суперметрика Кехлера

Суперметрика Кехлера – обобщение метрики Кехлера на *супермногообразие. Супермногообразие* есть обобщение обычного многообразия с использовасним *фермионных,* а также *бозонных* координат. Бозонные координаты – обычные числа, в то время как фермионные координаты являются *грассмановыми числами.*

Метрика Хофера

Симплектическим многообразием (M^n, w), $n = 2k$ называется гладкое четномерное многообразие M^n, снабженное *симплектической формой*, т.е. замкнутой невырожденной 2-формой w.

Лагранжевым многообразием называется k-мерное гладкое подмногообразие L^k симплектического многообразия (M^n, w), $n = 2k$, такое что форма w тождественно равна нулю на L^k, т.е. для любого $p \in L^k$ и любых $x, y \in T_p(L^k)$ имеем $w(x, y) = 0$.

Пусть $L(M^n, \Delta)$ – множество всех лагранжевых подмногообразий замкнутого симплектического многообразия (M^n, w), диффеоморфного данному лагранжеву подмногообразию Δ. Гладкое семейство $\alpha = \{L_t\}_t$, $t \in [0,1]$ лагранжевых подмногообразий $L_t \in L(M^n, \Delta)$ называется точным путем, соединяющим L_0 и L_1, если существует гладкое отображение $\Psi : \Delta \times [0,1] \to M^n$, такое что для каждого

$t \in [0,1]$ имеют место соотношения $\Psi(\Delta \times \{t\}) = L_t$ и $\Psi * w = dH_t \wedge dt$ для некоторой гладкой функции $H: \Delta \times [0,1] \to \mathbb{R}$. *Длина Хофера* $l(\alpha)$ точного пути α задается как $l(\alpha) = \int_0^1 \left\{ \max_{p \in \Delta} H(p,t) - \min_{p \in \Delta} H(p,t) \right\} dt.$

Метрика Хофера на множестве $L(M^n, \Delta)$ определяется как

$$\inf_{\alpha} l(\alpha)$$

для любых $L_0, L_1 \in L(M^n, \Delta)$, где инфимум берется по всем точным путям на $L(M^n, \Delta)$, соединяющим L_0 и L_1.

Метрику Хофера можно определить аналогичным способом на группе $\mathrm{Ham}(M^n, w)$ *гамильтоновых диффеоморфизмов* замкнутого симплектического многообразия (M^n, w), элементы которого являются разовыми отображениями *гамильтоновых потоков* ϕ_t^H: это $\inf_{\alpha} l(\alpha)$, где инфимум берется по всем гладким путям $\alpha = \{\phi_t^H\}$, $t \in [0,1]$, соединяющим ϕ и ψ.

Метрика Сасакьяна

Метрика Сасакьяна – метрика положительной скалярной кривизны на *контактном многообразии,* естественно адаптированном к *контактной структуре.* Контактное многообразие, снабженное Метрикой Сасакьяна, называется *пространством Сасакьяна* и является нечетномерным аналогом *многообразий Кехлера.*

Метрика Картана

Форма Киллинга (или форма *Киллинга–Картана*) на конечномерной *алгебре Ли* Ω над полем $\mathbb{F}$ есть симметричная билинейная форма

$$B(x,y) = \mathrm{Tr}(ad_x \cdot d_y),$$

где Tr обозначает *след* линейного оператора и ad_x является образом x под действием *сопряженного представления* Ω, т.е. линейного оператора на векторном пространстве Ω, заданного правилом $z \to [x,z]$, где [,] – скобки Ли.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис алгебры Ли Ω и $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k$, где γ_{ij}^k – соответствующие *структурные постоянные.* Тогда форма Киллинга задается по формуле

$$B(x_i, x_j) = g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{il}^k \gamma_{ik}^l.$$

Метрический тензор $((g_{ij}))$ называется, особенно в теоретической физике, **метрикой Картана.**

Глава 8

Расстояния на поверхностях и узлах

8.1. ОБЩИЕ МЕТРИКИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Поверхность – действительное двумерное *многообразие* M^2, т.е. **хаусдорфово пространство,** каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной или плоскости $\mathbb{E}^2$, или замкнутой полуплоскости (см. гл. 7).

Компактная ориентируемая поверхность называется *замкнутой,* если она не имеет границы, и *поверхностью с краем* – иначе. Существуют и компактные неориентируемые поверхности (замкнутые или с краем); простейшей такой поверхностью является *лист Мёбиуса.* Некомпактные поверхности без границы называются открытыми.

Любая замкнутая связная поверхность гомеоморфна либо сфере с g (цилиндрическими) ручками или сфере с g *лентами Мёбиуса* (т.е. лентами, скрученными подобно листу Мёбиуса). В обоих случаях число g называется *родом* поверхности. При наличии ручек поверхность ориентируема и назывется *тором, двойным тором* и *тройным тором* для $g = 1$, 2 и 3 соответственно. Для случая лент Мёбиуса поверхность неориентируема и называется *действительной проективной плоскостью, бутылкой Клейна и поверхностью Дика* соответственно для $g = 1$, 2 и 3. Род поверхности – это максимальное число непересекающихся простых замкнутых кривых, которые могут быть вырезаны из поверхности без потери связности (теорема жордановой кривой для поверхностей).

Характеристика Эйлера–Пуанкаре поверхности равно (одинаковому для всех многогранных разложений данной поверхности) числу $\chi = v - e + f$, где v, e и f – количество соответственно вершин, ребер и граней разложения. Если поверхность ориентируема, то имеет место равенство $\chi = 2 - 2g$, если нет, то $\chi = 2 - g$. Каждая поверхность с краем гомеоморфна сфере с соответствующим количеством (непересекающихся) дыр (т.е. того, что остается после удаления открытого диска) и ручек или лент Мёбиуса. Если h – количество дыр, то для ориентируемой поверхности выполняется равенство $\chi = 2 - 2g - h$, а равенство $\chi = 2 - g - h$, для неориентируемой.

Числом связности поверхности называется наибольшее число замкнутых сечений, которые можно провести по поверхности, не разделяя ее на две и более частей. Это число равно $3 - \chi$ для замкнутых поверхностей и $2 - \chi$ – для поверхностей с краем. Поверхность с числом связности 1, 2 и 3 называется соответственно *односвязной, двусвязной* и *трехсвязной.* Сфера является односвязной поверхностью, а тор – трехсвязной.

Поверхность можно рассматривать как метрическое пространство с собственной **внутренней метрикой** или как пространственную фигуру. Поверхность в $\mathbb{E}^3$ называется *полной,* если оно образует **полное** метрическое пространство по отношению к своей внутренней метрике.

Поверхность называется *дифференцируемой, регулярной* или *аналитической* соответственно, если в окрестности каждой ее точки она может быть выражена как

$$r = r(u,v) = r(x_1(u,v), x_2(u,v), r_3(u,v)),$$

где *радиус-вектор* $r = (u, v)$ является дифференцируемым, *регулярным* (т.е. достаточное число раз дифференцируемым) или действительно аналитическим соответственно, при том что вектор-функция удовлетворяет условию $r_u \times r_v \neq 0$.

Любая регулярная поверхность имеет внутреннюю метрику с линейным элементом (или *первой фундаментальной формой*)

$$ds^2 = dr^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2,$$

где $E(u,v) = \langle r_u, r_u \rangle$, $F(u,v) = \langle r_u, r_v \rangle$, $G(u,v) = \langle r_v, r_v \rangle$. Длина кривой, определяемой на поверхности по формулам $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [0,1]$ равна

$$\int_0^1 \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 dt},$$

а расстояние между любыми точками $p, q \in M^2$ задается как инфимум длин всех кривых на M^2, соединяющих p и q. **Риманова метрика** является обобщением первой фундаментальной формы поверхности.

Применительно к поверхностям рассматриваются два вида кривизны: *гауссова кривизна* и *средняя кривизна*. Для их расчета в заданной точке поверхности рассмотрим пересечение поверхности плоскостью, содержащей фиксированный *нормальный вектор*, т.е. вектор, перпендикулярный поверхности в данной точке. Данное пересечение – плоская кривая. *Кривизна* k этой плоской кривой называется *нормальной кривизной* поверхности в заданной точке. При изменении плоскости нормальная кривизна k также будет меняться, и мы получим два экстремальных значения – максимальную кривизну k_1 и минимальную кривизну k_2, называемые *главными кривизнами* поверхности. Кривизна считается *положительной,* если кривая изгибается в том же направлении, что и выбранная нормаль, и *отрицательной* – иначе. *Гауссова кривизна* равна $K = k_1 k_2$ (она может быть полностью задана в терминах первой фундаментальной формы). *Средняя кривизна* $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$.

Минимальной поверхностью называется поверхность со средней кривизной, равной нулю, или, эквивалентно, поверхность минимальной площади при заданном крае.

Римановой поверхностью называется одномерное *комплексное многообразие* или двумерное действительное многообразие с комплексной структурой, т.е. такое, в котором локальные координаты в окрестностях точек соотносятся через комплексные аналитические функции. Ее можно представить как деформированный вариант комплексной плоскости. Все римановы поверхности являются ориентируемыми. Замкнутые римановы поверхности представляют собой геометрические модели *комплексных алгебраических кривых*. Каждое связное риманово пространство можно преобразовать в *полное* двумерное *риманово многообразие* с постоянным радиусом кривизны, равным 0,1 или 1. Римановы поверхности с кривизной –1 называются *гиперболическими,* каноническим примером таких поверхностей является *единичный диск* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Римановы поверхности с нулевой кривизной называются *параболическими,* типовым примером является плоскость $\mathbb{C}$. Римановы поверхности с радиусом кривизны 1 называются *эллиптическими.* Типовым примером таковых является *риманова сфера* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Регулярная метрика

Внутренняя метрика поверхности называется **регулярной**, если ее можно определить с помощью *линейного элемента*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

где коэффициенты формы ds^2 являются регулярными функциями.

Любая регулярная поверхность, заданная формулой $r = r(u, v)$, обладает регулярной метрикой с *линейным элементом* ds^2, где $E(u,v) = \langle r_u, r_u \rangle$, $F(u,v) = \langle r_u, r_v \rangle$, $G(u,v) = \langle r_v, r_v \rangle$.

Аналитическая метрика

Внутренняя метрика поверхности называется **аналитической,** если она может быть определена с помощью *линейного элемента*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

где коэффициенты формы ds^2 являются аналитическими функциями.

Любая аналитическая поверхность, заданная формулой $r = r(u, v)$, обладает аналитической метрикой с *линейным элементом* $d\,s^2$, где $E(u,v) = \langle r_u, r_u \rangle$, $F(u,v) = \langle r_u, r_v \rangle$, $G(u,v) = \langle r_v, r_v \rangle$.

Метрика положительной кривизны

Метрика положительной кривизны – внутренняя метрика *поверхности положительной кривизны.*

Поверхностью положительной кривизны называется поверхность в $\mathbb{E}^3$, которая в каждой точке обладает положительной гауссовой кривизной.

Метрика отрицательной кривизны

Метрикой отрицательной кривизны называется внутренняя метрика *поверхности отрицательной кривизны*.

Поверхность отрицательной кривизны – поверхность в $\mathbb{E}^3$, которая в каждой точке обладает отрицательной гауссовой кривизной. Поверхность отрицательной кривизны локально имеет седловидную (вогнутую) структуру. Внутренняя геометрия поверхности постоянной отрицательной кривизны (в частности, псевдосферы) локально совпадает с геометрией *плоскости Лобачевского.* В $\mathbb{E}^3$ не существует поверхности, внутренняя геометрия которой полностью совпадает с геометрией плоскости Лобачевского (т.е. полной регулярной поверхности с постоянной отрицательной кривизной).

Метрика неположительной кривизны

Метрикой неположительной кривизны называется внутренняя метрика *седловидной поверхности.*

Седловидная поверхность является обобщением поверхности отрицательной кривизны: дважды непрерывно дифференцируемая поверхность называется седловидной тогда и только тогда, когда в каждой точке поверхности ее гауссова кривизна является неположительной. Такие поверхности можно рассматривать как антиподы *выпуклых поверхностей,* однако они не образуют такого естественного класса, как выпуклые поверхности.

Метрика неотрицательной кривизны

Метрикой неотрицательной кривизны называется внутренняя метрика *выпуклой поверхности.*

Выпуклая поверхность – это *область* (т.е. связное открытое множество) на границе выпуклого тела в $\mathbb{E}^3$ (в некотором смысле это антипод седловидной поверхности). Вся граница выпуклого тела называется *полной выпуклой поверхностью.* Если тело конечно (ограничено), то полная выпуклая поверхность называется *замкнутой.* Иначе она называется *бесконечной* (бесконечная выпуклая поверхность гомеоморфна плоскости или цилиндру круглого сечения).

Любая выпуклая поверхность M^2 в $\mathbb{E}^3$ является *поверхностью ограниченной кривизны. Полная гауссова кривизна* $w(A) = \iint_A K(x)d\sigma(x)$ множества $A \subset M^2$ всегда неотрицательна (здесь $\sigma(\cdot)$ – *площадь,* а $K(x)$ – *гауссова кривизна* M^2 в точке x), т.е. выпуклая поверхность может рассматриваться как *поверхность неотрицательной кривизны.*

Внутренняя метрика выпуклой поверхности называется **выпуклой метрикой** (не следует путать с **метрической выпуклостью**, см. гл. 1) применительно к теории поверхностей, т.е. она удовлетворяет *условию выпуклости*: сумма углов любого треугольника, стороны которого являются кратчайшими кривыми, не меньше, чем π.

Метрика с альтернативной кривизной

Метрикой с альтернативной кривизной называется внутренняя метрика на поверхности с альтернативной (положительной или отрицательной) гауссовой кривизной.

Плоская метрика

Плоская метрика – внутренняя метрика на *развертываемой поверхности,* т.е. поверхности, на которой гауссова кривизна всюду равна нулю.

Метрика ограниченной кривизны

Метрикой ограниченной кривизны называется внутренняя метрика ρ на *поверхности ограниченной кривизны.*

Поверхность M^2 с внутренней метрикой называется поверхностью ограниченной кривизны, если существует последовательность таких римановых метрик ρ_n, заданных на M^2, что для любого компактного множества $A \subset M^2$ имеет место условие равномерной сходимости $\rho_n \to \rho$, и последовательность $|w_n|(A)$ является ограниченной, где $|w_n|(A) = \iint_A K(x)d\sigma(x)$ – *тотальная абсолютная кривизна* метрики ρ_n (здесь $K(x)$ – гауссова кривизна поверхности M^2 в точке x, а $\sigma(\cdot)$ – *площадь*).

Λ-метрика

Λ-метрикой (или *метрикой типа* Λ) называется **полная** метрика на поверхности с кривизной, ограниченной сверху отрицательной константой.

Λ-метрика не имеет вложений в $\mathbb{E}^3$. Это является обобщением классического результата Гильберта (1901): в $\mathbb{E}^3$ не существует каких-либо регулярных поверхностей постоянной отрицательной кривизны (т.е. поверхностей, внутренняя геометрия которых полностью совпадает с геометрией плоскости Лобачевского).

(*h*, Δ)-метрика

(*h*, Δ)-метрикой называется метрика на поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной.

Полная (h, Δ)-метрика не допускает *регулярных изометрических вложений* в трехмерное евклидово пространство (см. **Λ-метрика**).

***G*-расстояние**

Связное множество G точек на поверхности M^2 называется геодезическим регионом, если для каждой точки $x \in G$ существует *диск* $B(x, r)$ с центром в x, такой что $B_G = G \cap B(x,r)$ имеет одну из следующих форм: $B_G = B(x,r)$ (x – *регулярная внутренняя точка* G); B_G – полудиск $B(x, r)$ (x – *регулярная граничная точка* G); B_G – сектор $B(x, r)$, не являющийся полудиском (x – *угловая точка* G); B_G состоит из конечного числа секторов $B(x, r)$, которые не имеют иных общих точек, кроме x (x – *узловая точка* G).

***G*-расстояние** между любыми точками x и $y \in G$ определяется как инфимум длин всех спрямляемых кривых, соединяющих x и $y \in G$ и полностью принадлежащих G.

Конформно инвариантная метрика

Пусть R – риманова поверхность. *Локальный параметр* (или *локальный униформизирующий параметр, локальный униформизатор*) является комплексной переменной z, рассматриваемой как непрерывная функция $z_{p0} = \phi_{p0}(p)$ точки $p \in R$, которая задана всюду в некоторой окрестности (параметрической окрестности) $V(p_0)$ точки $p_0 \in R$ и которая реализует гомеоморфное отображение (параметрическое отображение) $V(p_0)$ на диск (*параметрический диск*) $\Delta(p_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r(p_0)\}$, где $\phi_{p0}(p_0) = 0$. Под действием параметрического отображения любая точечная функция $g(p)$, определяемая в параметрической окрестности $V(p_0)$, становится функцией локального параметра $z : g(p) = g(\phi_{p_0}^{-1}(z)) = G(z)$.

Конформно инвариантной метрикой называется дифференциал $\rho(z)\,|dz|$ на римановой поверхности R, который инвариантен относительно выбора локального параметра z. Таким образом, каждому локальному параметру $z(z : U \to \overline{\mathbb{C}})$ ставится в соответствие функция $\rho_z : z(U) \to [0, \infty]$ так, что для любых локальных параметров z_1 и z_2 имеем

$$\frac{\rho_{z_2}(z_2(p))}{\rho_{z_1}(z_1(p))} = \left|\frac{dz_1(p)}{dz_2(p)}\right| \text{ для любых } p \in U_1 \cap U_1 \cap U_2.$$

Каждый линейный дифференциал $\lambda(z)dz$ и каждый *квадратичный дифференциал* $Q(z)dz^2$ порождают конформно инвариантные метрики $|\lambda(z)|\,|dz|$ и $|Q(z)|^{1/2}\,|dz|$ соответственно (см. ***Q*-метрика**).

***Q*-метрика**

***Q*-метрикой** называется **конформно инвариантная метрика** $\rho(z)|dz| = |Q(z)|^{1/2}|dz|$ на римановой поверхности R, задаваемая через *квадратичный дифференциал* $Q(z)dz$.

Квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2$ – нелинейный элемент на римановой поверхности R, который инвариантен относительно к выбора локального параметра z. Таким образом, каждому локальному параметру $z(z : U \to \overline{\mathbb{C}})$ ставится в соответствие функция $Q_z : (U) \to \overline{\mathbb{C}}$ такая, что для любых локальных параметров z_1 и z_2 имеем

$$\frac{Q_{z_2}(z_2(p))}{Q_{z_1}(z_1(p))} = \left(\frac{dz_1(p)}{dz_2(p)}\right)^2$$

для любых $p \in U_1 \cap U_2$.

Экстремальная метрика

Экстремальной метрикой называется конформно инвариантная метрика в *задаче модулюса* для семейства Γ локально спрямляемых кривых на римановой поверхности R, которая реализует инфимум в определении *модулюса* $M(\Gamma)$.

Формально, пусть Γ – семейство локально спрямляемых кривых на римановой поверхности R и пусть P – непустой класс конформно инвариантных метрик $\rho(z)|dz|$ на R, таких что $\rho(z)$ является квадратично интегрируемой в z-плоскости для каждого локального параметра z, а интегралы

$$A_\rho(R) = \int\int_R \rho^2(z)dxdy \quad \text{и} \quad L_\rho(\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma}\int_y \rho(z)|dz|$$

не являются одновременно равными 0 или ∞ (подразумевается, что каждый из вышеприведенных интегралов – это интеграл Лебега). *Модулюс семейства кривых* Γ определяется как

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in P}\frac{A_\rho(R)}{(L_\rho(\Gamma))^2}.$$

Экстремальная длина семейства кривых Γ равна $\sup_{\rho\in P}\frac{(L_\rho(U))^2}{A_\rho(R)}$, т.е. является величиной, обратной $M(\Gamma)$.

Задача модулюса для Γ определяется следующим образом: пусть P_L – подкласс P, такой что для любых $\rho \in (z)|dz| \in P_L$ и любой $\gamma \in \Gamma$ имеем $P_L \neq \emptyset$, Если , то модулюс $M(\Gamma)$ семейства Γ может быть записан как $M(\Gamma) = \inf_{\rho\in P_L} A_\rho(R)$. Каждая метрика из P_L называется **допустимой метрикой** для задачи модулюса на Γ. Если существует ρ^*, для которой

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in P_L} A_\rho(R) = A_{\rho^*}(R),$$

метрика $\rho^*|dz|$ называется **экстремальной метрикой** для задачи модулюса на Γ.

Метрика поверхности Фреше

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство, M^2 – компактное двумерное многообразие, f – непрерывное отображение f: $M^2 \to X$, называемое *параметризованной поверхностью,* а σ: $M^2 \to M^2$ – гомеоморфизм M^2 на себя. Две параметризированных поверхности f_1 и f_2 называются *эквивалентными,* если $\inf_\sigma \max_{\rho\in M^2} d(f_1(p), f_2(\sigma(p)) = 0$, где инфимум берется по всем возможным гомеоморфизмам σ. Класс f^* параметризированных поверхностей, эквивалентных f, называется *поверхностью Фреше.* Это является обобщением понятия поверхности в евклидовом пространстве для случая произвольного метрического пространства (X, d).

Метрикой поверхности Фреше называется метрика на множестве всех поверхностей Фреше, определяемая как

$$\inf_{\sigma} \max_{\rho \in M^2} d(f_1(p), f_2(\sigma(p)))$$

для любых поверхностей Фреше f_1^* и f_2^*, где инфимум берется по всем возможным гомеоморфизмам σ (см. **Метрика Фреше**).

8.2. ВНУТРЕННИЕ МЕТРИКИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

В данном разделе перечислены внутренние метрики, определяемые их *линейными элементами* (которые в действительности, являются двумерными **римановыми метриками**) для некоторых избранных поверхностей.

Метрика квадрики

Квадрикой (или *квадратичной поверхностью, поверхностью второго порядка*) называется множество точек в $\mathbb{E}^3$, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени. Существует 17 классов таких поверхностей, в том числе *эллипсоиды, однополостные* и *двухполостные гиперболоиды, эллиптические параболоиды, гиперболические параболоиды, эллиптические, гиперболические* и *параболические цилиндры и конические поверхности.*

Цилиндр, например, может быть в параметрической форме задан с помощью следующих уравнений:

$$x_1(u,v) = a\cos v, \quad x_2(u,v) = a\sin v, \quad x_3(u,v) = u.$$

Внутренняя метрика на нем задается *линейным элементом*

$$ds^2 = du^2 + a^2 dv^2.$$

Эллиптический конус (т.е. конус с эллиптическим сечением) определяется в параметрической форме следующими уравнениями:

$$x_1(u,v) = a\frac{h-u}{h}\cos v, \quad x_2(u,v) = b\frac{h-u}{h}\sin v, \quad x_3(u,v) = u,$$

где h – *высота, a – большая полуось* и b – малая полуось конуса. Внутренняя метрика на конусе задается *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{h^2 + a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v}{h^2}du^2 + s\frac{(a^2-b^2)(h-u)\cos v\sin v}{h^2}dudv +$$
$$+\frac{(h-u)^2(a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v)}{h^2}dv^2.$$

Метрика сферы

Сфера является *квадрикой,* координаты которой в декартовой системе выражены уравнением $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2 = r^2$, где точка (a, b, c) – центр сферы, а $r > 0$ – ее радиус. Сфера радиуса r с центром в начале координат может быть задана в параметрической форме следующими уравнениями:

$$x_1(\theta, \phi) = r\sin\theta\cos\phi, \quad x_2(\theta, \phi) = r\sin\theta\sin\phi, \quad x_3(\theta, \phi) = r\cos\phi,$$

где *азимутальный угол* $\phi \in [0, 2\pi]$ и *полярный угол* $\theta \in [0, \pi]$. Внутренняя метрика на сфере (именно, двумерная **сферическая метрика**) задается *линейным элементом*

$$ds^2 = r^2 d\theta + r^2 \sin^2\theta d\phi^2.$$

Сфера радиуса r имеет постоянную положительную гауссову кривизну, равную r.

Метрика эллипсоида

Эллипсоид – квадрика, заданная декартовым уравнением $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$, или следующими уравнениями в параметрической форме:

$$x_1(\theta, \phi) = a\cos\phi\sin\theta, \quad x_2(\theta, \phi) = b\sin\phi\sin\theta, \quad x_3(\theta, \phi) = c\cos\theta,$$

где *азимутальный угол* $\phi \in [0, 2\pi]$ и *полярный угол* $\theta \in [0, \pi]$ Внутренняя метрика на эллипсоиде задается *линейным элементом*

$$ds^2 = (b^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi)\sin^2\theta d\phi^2 + (b^2 - a^2)\cos\phi\sin\phi\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi +$$
$$+ ((a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)d\theta^2.$$

Метрика сфероида

Сфероидом называется *эллипсоид* с двумя одинаковыми по длине осями. Он является также *поверхностью вращения,* заданной в параметрической форме следующими уравнениями:

$$x_1(u, v) = a\sin v\cos u, \quad x_2(u, v) = a\sin v\sin u, \quad x_3(u, v) = c\cos v,$$

где $0 \le u \le 2\pi$ и $0 \le v < \pi$. Внутренняя метрика на сфероиде задается *линейным элементом*

$$ds^2 = a^2\sin^2 v du^2 + \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 + (a^2 - c^2)\cos(2v)\right)dv^2.$$

Метрика гиперболоида

Гиперболоид – квадрика, которая может быть одно- или двухполостной. *Однополостным гиперболоидом* называется образуемая вращением гиперболы относительно перпендикуляра, делящего пополам линию между фокусами, а *двухполостной гиперболоид* – это поверхность, образуемая вращением гиперболы относительно линии, соединяющей фокусы. Однополостной гиперболоид, ориентированный по оси x_3, задается декартовым уравнением $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ или следующими уравнениями в параметрической форме:

$$x_1(u, v) = a\sqrt{1 + u^2}\cos v, \quad x_2(u, v) = a\sqrt{1 + u^2}\sin v, \quad x_3(u, v) = cu,$$

где $v \in [0, 2\pi]$. Внутренняя метрика на гиперболоиде задается *линейным элементом*

$$ds^2 = \left(c^2 + \frac{a^2u^2}{u^2 + 1}\right)du^2 + a^2(u^2 + 1)dv^2.$$

Метрика поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, образуемая вращением двумерной кривой относительно некоторой оси. Ее можно задать в параметрической форме с помощью следующих уравнений:

$$x_1(u,v) = \phi(v)\cos u, \quad x_2(u,v) = \phi(v)\sin u, \quad x_3(u,v) = \psi(v).$$

Внутренняя метрика на ней задается *линейным элеменом*

$$ds^2 = \phi^2 du^2 + (\phi^2 + \psi^2)dv^2.$$

Метрика псевдосферы

Псевдосферой называется половина *поверхности вращения*, образуемой вращением трактрисы относительно ее асимптоты. Она задается следующими уравнениями в параметрической форме:

$$x_1(u,v) = \operatorname{sech} u \cos v, \; x_2(u,v) = \operatorname{sech} u \sin v, \; x_3(u,v) = u - \operatorname{tgh} u,$$

где $u \geq 0$ и $0 \leq v < 2\pi$.

Внутренняя метрика на ней задается *линейнм элементом*

$$ds^2 = \operatorname{tgh}^2 u du^2 + \operatorname{sich}^2 u dv^2.$$

Псевдосфера имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну, равную –1, и в этом смысле является аналогом сферы с постоянной положительной гауссовой кривизной.

Метрика тора

Тор является поверхностью, имеющей тип 1. Азимутально симметричный относительно оси x_3 тор задается декартовым уравнением $\left(c - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 + x_3^2 = a^2$ или следующими уравнениями в параметрической форме:

$$x_1(u,v) = (c + a\cos v)\cos u, \quad x_2(u,v) = (c + a\cos v)\sin u, \quad x_3(u,v) = a\sin v,$$

где $c > a$ и $u, v \in [0, 2\pi]$. Внутренняя метрика на торе задается *линейным элементом*

$$ds^2 = (c + a\cos v)^2 du + a^2 dv^2.$$

Метрика винтовой поверхности

Винтовой поверхностью (или *поверхностью винтового движения*) называется поверхность, описываемая плоской кривой γ, которая, вращаясь с постоянной скоростью относительно оси, одновременно движется вдоль нее с равномерной скоростью. Если γ находится в плоскости оси вращения x_3 и определена уравнением $x_3 = f(u)$, то позиционный вектор винтовой поверхности будет равен

$$r = (u\cos v, \; usonv, \; f(u) = hv), \quad h = \text{const},$$

и внутренняя метрика на ней задается *линейным элементом*

$$ds^2 = (1 + f^2)du^2 + 2hf'dudv + (u^2 + h^2)dv^2.$$

Если f = const, то получаем *геликоид*; если $h = 0$, то получаем *поверхность вращения.*

Метрика поверхности Каталана

Поверхностью Каталана называется минимальная поверхность, в параметрической форме задаваемая следующими уравнениями:

$$x_1(u,v) = u - \sin u \cosh v, \quad x_2(u,v) = 1 - \cos u \cosh v, \quad x_3(u,v) = 4\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sinh\left(\frac{v}{2}\right).$$

Внутренняя метрика на ней задается линейным элементом

$$ds^2 = 2\cosh^2\left(\frac{v}{2}\right)(\cosh v - \cos u)du^2 + 2\cosh^2\left(\frac{v}{2}\right)(\cosh v - \cos u)dv^2.$$

Метрика обезьяньего седла

Обезьяньим седлом называется поверхность, задаваемая декартовым уравнением $x_3 = x_1(x_1^2 - 3x_2^2)$ или следующими уравнениями в параметрической форме:

$$x_1(u,v) = u, \quad x_2(u,v) = v, \quad x_3(u,v) = u^3 - 3uv^2.$$

По такой поверхности обезьяна могла бы передвигаться, опираясь одновременно ногами и хвостом. Внутренняя метрика на такой поверхности задается *линейным элементом*

$$ds^2 = (1 + (su^2 - 3v^2)^2 du^2 - 2(18uv(u^2 - v^2))dudv + (1 + 36u^2v^2)dv^2).$$

8.3. РАССТОЯНЯ НА У ЗЛАХ

Узлом называется замкнутая самонепересекающаяся кривая, вложимая в S^3. *Тривиальным узлом* (или *незаузленностью*) O называется замкнутый незаузленный контур. Обобщением понятия узла является понятие *звена. Звено* представляет собой множество непересекающихся узлов. Каждому звену соответствует его *поверхность Зейферта*, т.е. компактная ориентируемая поверхность с данным звеном в качестве границы. Два узла (звена) называются *эквивалентными,* если можно плавно перейти от одного к другому. Формально, звено задается как гладкое одномерное *подмногообразие* 3-сферы S^3; узел – это звено, состящее из одной компоненты; звенья L_1 и L_2 называются эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f: $S^3 \to S^3$, такой что $f(L_1) = L_2$.

Всю информацию об узле можно представить, используя *диаграммы узла* – такой проекции узла на плоскость, что не более чем две точки узла проецируются в одну и ту же точку на плоскости и в каждой такой точке указано, какая из линий является ближайшей к плоскости, обычно посредством удаления части нижней линии. Две различные диаграммы могут представлять один и тот же узел. Значительная часть теории узлов посвящена выяснению ответа на вопрос, когда две диаграммы описывают один и тот же узел.

Распутывание узлов является операцией, изменяющей положение пересекающихся линий относительно друг друга (сверху или снизу) в двойной точке данной диаграммы. *Распутывающее число* узла K является минимальным числом элементарных операций по распутыванию узлов, необходимых для превращения диаграммы узла K в диаграмму тривиального узла, где минимум берется по всем диаграммам узла K. Грубо говоря, распутывающее число есть наименьшее количество протаскиваний узла K через самого себя, необходимых для его распутывания.

#-распутывающая операция диаграммы узла K является аналогом распутывающей операции для #-*части* диаграммы, состоящей из двух пар параллельных линий, из которых одна пара при пересечении проходит над другой. Таким образом, распутывающее действие изменяет положение пересекающихся линий по высоте в каждой из вершин полученного четырехугольника.

Гордиево расстояние

Гордиево расстояние – метрика на множестве всех узлов, определяемая для данных узлов K и K' как минимальное число распутывающих операций, необходимых для превращения диаграммы узла K в диаграмму узла K', где минимум берется по всем диаграммам узла K, из которых можно перейти к диаграммам узла K'. *Распутывающее число* диаграммы угла K равно гордиеву расстоянию между K и тривиальным узлом O.

Пусть rK – узлел, полученный из K как его зеркальное отражение и пусть $-K$ – противоположно ориентированный узлел. **Расстоянием положительной рефлексии** $\mathrm{Re}\,f_+(K)$ называется гордиево расстояние между K и rK. **Расстоянием отрицательной рефлексии** $\mathrm{Re}\,f_-(K)$ называется гордиево расстояние между K и $-rK$. **Инверсивным расстоянием** Inv (K) называется гордиево расстояние между K и $-K$.

Гордиево расстояние – случай $л = 1$ $\boldsymbol{C_k}$**-расстояния**, которое равно минимальному числу C_k-*ходов*, небходимому для трансформирования K в K'; Хабиро и Гусаров доказали, что для $k > 1$число операций будет конечным тогда и только тогда, когда оба узла имеют одни и те же *инварианты Васильева порядка менее k*. C_1-*ход* – это однократное изменение пересечения. C_2-ход (или *дельта-ход*) – это одновременное изменение пересечений для трех простых дуг, формирующих треугольник. C_2- и C_3-расстояния называются соответственно **дельта расстоянием** и **расстоянием зацепления.**

#-гордиево расстояние

#-гордиевым расстоянием (см., например, [Mura85]) называется метрика на множестве всех узлов, определенная для узлов K и K' как минимальное число #-распутывающих операций, необходимых для перехода от диаграммы узла K к диаграмме узла K', где минимум берется по всем диаграммам узла K, которые преобразуются в диаграммы узла K'.

Пусть rK – узел, полученный из K как его зеркальное отражение и пусть $-K$ – противоположно ориентированный узел. **Расстоянием положительной #-рефлексии** $\mathrm{Re}\,f_+^{\#}(K)$ называется #-гордиево расстояние между K и rK. **Расстоянием отрицательной #-рефлексии** $\mathrm{Re}\,f^{\#}(K)$ называется #-гордиево расстояние между K и $-rK$; **#-инверсивным расстоянием** $\mathrm{Inv}(K)$ является #-гордиево расстояние между K и $-K$.

Глава 9

Расстояния на выпуклых телах, конусах и симплициальных комплексах

9.1. РАССТОЯНИЕ НА ВЫПУКЛЫХ ТЕЛАХ

Выпуклым телом в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^N$ называется компактное *выпуклое подмножество* в $\mathbb{E}^N$. Оно называется собственным, если имеет непустую внутренность. Обозначим пространство всех выпуклых тел в $\mathbb{E}^N$ через K, и пусть K_p будет подпространством всех собственных выпуклых тел.

Любое метрическое пространство (K, d) на K называется **метрическим пространством выпуклых тел.** Метрические пространства выпуклых тел, в частности метризация посредством **хаусдорфовой метрики** или метрики симметрической разности, являются основополагающими элементами анализа в выпуклой геометрии (см., например, [Grub93]).

Для $C, D \in K\backslash\{\varnothing\}$ *сложение Минковского* и *умножение Минковского на неотрицательный скаляр* определяются как $C + D = \{x + y: x \in C, y \in D\}$ и $\alpha C = \{\alpha x: xC\}$, $\alpha \geq 0$ соответственно. Абелева полугруппа $(K, +)$, снабженная операторами умножения на неотрицательный скаляр, может рассматриваться как *выпуклый конус.*

Опорная функция h_C: $S^{n-1} \to \mathbb{R}$ для $C \in K$ задается как $h_C(u) = \sup\{\langle u, x\rangle : x \in C\}$ для любого $u \in S^{n-1}$, где S^{n-1} – $(n - 1)$-мерная единичная сфера в $\mathbb{E}^n$ и $\langle,\rangle$ – *скалярное произведение* на $\mathbb{E}^n$.

Для множества $X \subset \mathbb{E}^n$ его *выпуклая оболочка*, $\mathrm{conv}(X)$ определяется как минимальное *выпуклое* множество, которому X принадлежит.

Отклонение площади

Отклонение площади (или **эталонная метрика**) является метрикой на множестве K_p в $\mathbb{E}^2$ (т.е. на множестве плоских выпуклых дисков), определенной как

$$A(C\Delta D),$$

где $A(\cdot)$ – площадь и Δ – *симметрическая разность.* Если $C \subset D$, то выражение принимает вид $A(D) - A(C)$.

Отконение периметра

Отклонение периметра является метрикой на L_p в $\mathbb{E}^2$, заданной как

$$2p(\mathrm{con}\,v(C \cup D)) - p(C) - p(D),$$

где $p(\cdot)$ – *периметр.* Для случая $C \subset D$ оно равно $p(D) - p(C)$.

Метрика средней ширины

Метрикой средней ширины называется метрика на K_p в $\mathbb{E}^2$, заданная как

$$2W(\mathrm{conv}(C \cup D)) - W(C) - W(D),$$

где $W(\cdot)$ – *средняя ширина*: $W(C) = p(C)/\pi$, если – *периметр.*

Метрика Помпейю–Хаусдорфа–Бляшке

Метрикой Помпейю–Хаусдорфа–Бляшке (или **хаусдорфовой метрикой**) называется метрика на K, заданная как

$$\max\left\{\sup_{x\in C}\inf_{y\in D} \| y - y \|_2 \ \sup_{y\in D}\inf_{x\in C} \| x - y \|_2\right\},$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{E}^2$.

На языке опорных функций, соответственно с использованием сложения Минковского, она имеет вид

$$\sup_{u\in S^{n-1}} \left|h_C(u) - h_D(u)\right| = \left\|h_C - h_D\right\|_\infty = \inf\left\{\lambda \ge 0 : C \subset D + \lambda\overline{B}^n, D \subset C + \lambda\overline{B}^n\right\},$$

где $\overline{B}^n$ – *единичный шар* пространства $\mathbb{E}^n$.

Данную метрику можно определить, используя любую норму на $\mathbb{R}^n$ вместо евклидовой. Обобщая, можно сказать, что она задается для пространства ограниченных замкнутых подмножеств произвольного метрического пространства.

Метрика Помпейю–Эгглестона

Метрикой Помпейю–Эгглестона называется метрика на K, заданная как

$$\sup_{x\in C}\inf_{y\in D}\left\|x - y\right\|_2 + \sup_{y\in D}\inf_{x\in C}\left\|x - y\right\|_2,$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{E}^2$.

На языке опорных функций, соответственно, с использованием сложения Минковского, она имеет вид

$$\max\left\{0, \sup_{u\in S^{n-1}} (h_C(u) - h_D(u))\right\} + \max\left\{0, \sup_{u\in S^{n-1}} (h_D(u) - h_C(u))\right\} =$$

$$= \inf\left\{\lambda \ge 0 : C \subset D + \lambda\overline{B}^n\right\} + \inf\left\{\lambda \ge 0 : D \subset C + \lambda\overline{B}^n\right\},$$

где $\overline{B}^n$ – единичный шар пространства $\mathbb{E}^n$.

Данную метрику можно определить, используя любую норму на $\mathbb{R}^n$ вместо евклидовой. Обобщая, можно сказать, что она задается для пространства ограниченных замкнутых подмножеств произвольного метрического пространства.

Метрика МакКлюра–Витале

Для $1 \le p \le \infty$, **метрикой МакКлюра–Витале** называется метрика на K, определенная как

$$\left(\int_{S^{n-1}} \left|h_C(u) - h_D(u)\right|^p d\sigma(u)\right)^{1/p} = \left\|h_C - h_D\right\|_p.$$

Метрика Флориана

Метрика Флориана это метрика на K, заданная как

$$\int_{S^{n-1}} \left|h_C(u) - h_D(u)\right| d\sigma(u) = \left\|h_C - h_D\right\|_1.$$

Она может быть выражена в форме $2S(\mathrm{conv}(C \cup D)) - S(C) - S(D)$ для $n = 2$ (см. **Отклонение периметра**); ее можно также выразить в форме $nk_n(2W(\mathrm{conv}(C \cup D)) - W(C) - W(D)$ для $n \geq 2$ (см. **Метрика средней ширины**). Здесь $S(\cdot)$ – площадь поверхности, k_n – объем единичного шара $\overline{B}^n$ в $\mathbb{E}^n$ и $W(\cdot)$ – средняя ширина: $W(C) = \frac{1}{nk_n} \int_{S^{n-1}} (h_C(u) + h_C(-u)) d\sigma(u)$.

Расстояние Соболева

Расстояние Соболева – метрика на K, определенная как

$$\|h_C - h_D\|_w,$$

где $\|\cdot\|_w$ – 1-*норма Соболева* на множестве $C_{S^{n-1}}$ всех непрерывных функций на *единичной сфере* S^{n-1} пространства $\mathbb{E}^n$.

1-*норма Соболева* задается как $\|f\|_w = \langle f, f\rangle_w^{1/2}$, где $\langle\, ,\, \rangle_w$ – *скалярное произведение* на $C_{S^{n-1}}$, заданное как

$$\langle f, g\rangle_w = \int_{S^{n-1}} (fg + \nabla_s(f, g)) dw_0, \quad w_0 = \frac{1}{n \cdot k_n} w,$$

$\nabla_s(f, g) = \langle \mathrm{grad}_s f, \mathrm{grad}_s g\rangle$, $\langle\, ,\, \rangle$ – *скалярное произведение* на $\mathbb{E}^n$ и grad_s – *градиент* на S^{n-1} (см. [ArWe92]).

Метрика Шепарда

Метрикой Шепарда называется метрика на K, заданная как

$$\ln(1 + 2\inf\{\lambda \geq 0 : C \subset D + \lambda(D - D), D \subset C + \lambda(C - C)\}).$$

Метрика Никодима

Метрика Никодима (или **метрика симметрической разности**) является метрикой на K, заданной как

$$V(C \Delta D),$$

где $V(\cdot)$ – *объем* (т.е. лебегова n-мерная мера) и Δ – симметрическая разность. Для $n = 2$ получаем **отклонение площади.**

Метрика Штейнгауса

Метрика Штейнгауза (или **однородная метрика симметрической разности расстояние Штейнгауса**) является метрикой на K_p, заданной как

$$\frac{V(C \Delta D)}{V(C \cup D)},$$

где $V(\cdot)$ – *объем*. Таким образом, она равна $\frac{d_\Delta(C, D)}{V(C \cup D)}$, где d_Δ есть **метрика Никодима.** Эта метрика ограничена; она аффинно инвариантна, в то время как метрика Никодима инвариантна только относительно сохраняющих объем аффинных преобразований.

Расстояние Эгглестона

Расстоянием Эгглестона (или **симметрическим отклонением площади поверхности**) называется расстояние на K_p, определяемое как

$$S(C \cup D) - S(C \cap D),$$

где $S(\cdot)$ – *площадь поверхности*. Данное расстояние метрикой не является.

Метрика Асплунда

Метрикой Асплунда называется метрика на пространстве $K_p/\approx$ классов аффинной эквивалентности в K_p, определяемая как

$$\ln \inf\{\lambda \geq 1 : \exists T : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n \text{ аффинна, } x \in \mathbb{E}^n, \; C \subset T(D) \subset \lambda C + x\},$$

для любых классов эквивалентности и с представителями C^* и D^* соответственно.

Метрика Макбета

Метрика Макбета – метрика на пространстве $K_p/\approx$ классов аффинной эквивалентности в K_p, определяемая как

$$\ln \inf\{|\det T \cdot P| : \exists T, P : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n \text{ регулярное аффинное, } C \subset T(D), D \subset P(C)\}$$

для любых классов эквивалентности C^* и D^* с представителями C и D, соответственно.

Ее можно записать так же, как

$$\ln \delta_1(C, D) + \ln \delta_1(D, C),$$

где $\delta_1(C, D) = \inf_T \left\{ \frac{V(T(D))}{V(C)}; \; C \subset T(D) \right\}$ и T есть регулярное аффинное отображение $\mathbb{E}^n$ на себя.

Метрика Банаха–Мазура

Метрикой Банаха–Мазура называется метрика на пространстве $K_p/\approx$ классов эквивалентности собственных центрально-симметричных выпуклых тел по отношению к линейным преобразованиям, определяемая как

$$\ln \inf\{\lambda \geq 1 : \exists T : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n \text{ линейное, } C \subset T(D) \subset \lambda C)\}$$

для любых классов эквивалентности C^* и D^* и с представителями C и D соответственно.

Эта метрика является особым случаем **расстояния Банаха–Мазура** между n-мерными *нормированными пространствами.*

Разделяющее расстояние

Разделяющее расстояние есть минимальное евклидово расстояние между двумя непересекающимися выпуклыми телами C и D в $\mathbb{E}^n$ (в общем случае, **расстояние между множествами** между любыми двумя непересекающимися подмножествами $\mathbb{E}^n$): $\inf\{|x-y|_2 : x \in C, y \in D\}$; при этом $\sup\{|x-y|_2 : x \in C, y \in D\}$ называется **перекрывающим расстоянием.**

Расстояние глубины проникновения

Расстояние глубины проникновения между двумя взаимно проникающими выпуклыми телами C и D в $\mathbb{E}^n$ (в общем случае, между любыми двумя взаимно проникающими подмножествами множества $\mathbb{E}^n$) есть минимальное *расстояние переноса* одного тела относительно другого так, чтобы внутренности C и D стали непересекающимися:

$$\min\{\|t\|_2 : \text{interior}\,(C+t)\cap D=\emptyset\}.$$

Это расстояние является естественным обощенном евклидова **разделяющего расстояния** для непересекающихся объектов на случай перекрывающихся объектов. Данное расстояние можно определить как $\inf\{d(C, D + x): x \in \mathbb{E}^n\}$ или $\inf_s d(C, s(D))$, где инфимум берется по всем подобиям s: $\mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ или…, где d – одна из указанных выше метрик.

Расстояние порядка роста

Для выпуклых многогранников **расстояние порядка роста** (см. подробнее [GiOn96]) определяется как величина на которую объекты должны увеличиться относительно их начального размера до момента соприкосновения поверхностями.

Разность Минковского

Разность Минковского на множестве всех компактных подмножеств, в частности на множестве всех *скульптурных объектов* (или *объектов произвольной формы*) в $\mathbb{R}^3$, определяется как

$$A - B = \{x - y: x \in A, y \in B\}.$$

Если считать B свободно перемещающимся и имеющим постоянную ориентацией объектом, то разностью Минковского является множество, которое содержит все переносы B, влекущие пересечение с A. Ближайшая точка от границы разности Минковского $\partial(A - B)$ до начала координат дает **разделяющее расстояние** между A и B. Если оба объекта пересекаются, то начало координат лежит внутри разности Минковского и полученное расстояние можно рассматривать как **расстояние глубины проникновения**.

Максимальное расстояние многоугольника

Максимальное расстояние многоугольника – расстояние между двумя выпуклыми многоугольниками $P = (p_1, ..., p_n)$ и $Q = (q_1, ..., q_n)$, определяемое как

$$\max_{i,j}\|p_i - q_j\|_2, \quad i\in\{1,\dots,n\}, \quad j\in\{1,\dots,m\}.$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма.

Расстояние Гренандера

Пусть $P = (p_1, ..., p_n)$ и $Q = (q_1, ..., q_n)$ – два непересекающихся выпуклых многоугольника и $l(p_i, q_j)$, $l(p_m, q_l)$, – две пересекающиеся *критические* опорные линии для P и Q. Тогда **расстояние Гренандера** между P и Q определится как

$$\|p_i - q_j\|_2 + \|p_m - q_l\|_2 - \Sigma(p_i, p_m) - \Sigma(g_j, g_l),$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма и $\Sigma(p_i, p_m)$ – сумма длин ребер ломаной $p_i,\dots, p_m$.

Здесь $P = (p_1,\dots, p_n)$ – выпуклый многоугольник с вершинами в стандартной форме, т.е. вершины указываются в системе декартовых координат в направлении по часовой стрелке и при этом нет трех последовательных коллинеарных вершин. Прямая l является *опорной прямой* для P, если множество внутренних точек P

полностью лежит по одну сторону от l. Если имеются два непересекающихся многоугольника P и Q, то прямая $l(p_i, q_j)$ будет *критической опорной прямой*, если она является опорной прямой для P в p_i, опорной прямой для Q в q_j, при этом P и Q лежат по разные стороны от $l(p_i, q_j)$.

9.2. РАССТОЯНИЯ НА КОНУСАХ

Выпуклым конусом C в действительном векторном пространстве V называется подмножество C множества V, такое что $C + C \subset C$, $\lambda C \subset C$ для любого $\lambda \geq 0$ и $C \cap (-C) = \{0\}$. Конус C порождает *частичный порядок* на V по закону

$$x \preceq y \text{ тогда и только тогда, когда } y - x \in C.$$

Порядок $\preceq$ подчиняется векторной структуре V, т.е., если $x \preceq y$ и $z \preceq u$, то $x + z \preceq y + u$, и если $x \preceq y$, то $\lambda x \preceq \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$. Элементы $x, y \in V$ называются *сравнительными*, то обозначается как $x \sim y$, если существуют положительные действительные числа α и β, такие что $\alpha y \preceq x \preceq \beta y$. Сравнимость является отношением эквивалентности: ее классы эквивалентности (принадлежащие C или $-C$) называются *частями* (или *компонентами, составными частями*).

Для выпуклого конуса C подмножество $S = \{x \in C\colon T(x) = 1\}$, где $T\colon V \to \mathbb{R}$ есть некоторый положительный линейный функционал, называется *поперечным сечением* конуса C.

Выпуклый конус C называется *почти архимедовым*, если замыкание его сужения на любое двумерное подпространство также является конусом.

Томсоновская метрика частей

Пусть C – выпуклый конус в действительном векторном пространстве V. **Томсоновская метрика частей** на *части* $K \subset C\backslash\{0\}$ задается как

$$\ln \max\{m(x, y), m(y, x)\}$$

для любых $x, y \in K$, где $m(x, y) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}\colon y \preceq \lambda x\}$.

Если конус C *почти архимедов*, то часть K, снабженная томсоновской метрикой частей, является **полным** метрическим пространством. Если конус C конечномерен, то мы получаем *хордовое пространство*, т.е. метрическое пространство, в котором имеется выделенное множество геодезических, удовлетворяющих определенным аксиомам. *Положительный конус* $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon\ x_i \geq 0$ для $1 \leq i < n$, снабженный Томсоновоской метрикой частей, изометричен *нормированному пространству*, которое можно рассматривать как плоское.

Если взять замкнутый конус C в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью, то внутренность конуса int$C$ можно рассматривать как n-мерное многообразие M^n. Если для любого касательного вектора $v \in T_p(M^n)$, $p \in M^n$ задана норма $\| v \|^T_p = \inf\{\alpha > 0 : -\alpha p \preceq v \preceq \alpha p\}$, то длина любой кусочно дифференцируемой кривой γ: $[0, 1] \to M^n$ может быть записано как $l(\gamma) = \int_0^1 \| \gamma'(t) \|^T_{\gamma(t)}\, dt$, а расстояние между x и y будет равно $\inf_\gamma l(\gamma)$, где инфимум берется по всем таким кривым γ с $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$.

Гильбертова проективная полуметрика

Для выпуклого конуса C в действительном векторном пространстве V **гильбертова проективная полуметрика** есть полуметрика на $C\backslash\{0\}$, задаваемая как

$$\ln(m(x, y) \cdot m(y, x))$$

для любых $x, y \in C\backslash\{0\}$, где $m(x,y) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}: \ y \preceq \lambda x\}$.. Она равна 0 тогда и только тогда, когда $x = \lambda y$ для некоторых $\lambda > 0$, и становится метрикой на пространстве лучей конуса.

Если конус C конечномерен, а S является поперечным сечением C (в частности, $S = \{x \in C\colon \|x\| = 1\}$, где $\|\cdot\|$ – норма на V), то для любых различных точек $x, y \in S$ расстояние между ними равно $|\ln(x, y, z, t)|$, где z, t – точки пересечения линии $l_{x,y}$ с границей S и (x, y, z, t) – ангармоническое отношение точек x, y, z, t.

Если конус C *почти архимедов* и конечномерен, то каждая часть конуса C является *хордовым пространством* относительно гильбертовой проективной метрики. Конус *Лоренца* $\{(t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}: \ t^2 > x_1^2 + \ldots + x_n^2\}$, снабженный гильбертовой проективной метрикой, изометричен n-мерному *гиперболическому пространству. Положительный конус* $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \ldots x_n): \ x_i \geq 0$ для $1 \leq i \leq n$, снабженный гильбертовой проективной метрикой, изометричен *нормированному пространству*, которое можно рассматривать как плоское.

Если взять замкнутый конус C в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью, то внутренность конуса $\mathrm{int}C$ можно рассматривать как n-мерное многообразие M^n. Если для любого касательного вектора $v \in T_p(M^n)$ задана полунорма $\| v \|_p^H = m(p, v) - m(v, p)$, то длина любой кусочно дифференцируемой кривой γ: $[0, 1] \to M^n$ равна $l(\gamma) = \int_0^1 \| \gamma'(t) \|_{\gamma(t)}^H \, dt$, а расстояние между x и y равно $\inf_\gamma l(\gamma)$, где инфимум берется по всем таким кривым γ с $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$.

Метрика Бушеля

Возьмем выпуклый конус C в действительном векторном пространстве V. **Метрика Бушеля** на множестве $S = \left\{ x \in C: \ \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1 \right\}$ (в общем случае на любом поперечном сечении конуса C) задается как

$$\frac{1 - m(x, y) \cdot m(y, x)}{1 + m(x, y) \cdot m(y, x)}$$

для любых $x, y \in S$, где $m(x,y) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}: \ y \preceq \lambda x\}$. Именно, она равна $\mathrm{tg}\, h\left(\frac{1}{2} h(x, y)\right)$, где h – **гильбертова проективная полуметрика**.

***k*-ориентированное расстояние**

Симплициальный конус C в $\mathbb{R}^n$ определяется как пересечение n (открытых или замкнутых) полупространств, каждая из опорных плоскостей которых проходит через начало координат. Для любого множества X, состоящего из n точек на *единичной сфере*, существует единственный симплициальный конус C, содержащий все эти точки. *Оси* конуса C – n лучей, где каждый луч исходит из начала координат и содержит одну из точек множества X.

Для *разбиения* $\{C_1,..., C_k\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ на множество симплициальных конусов $C_1,..., C_k$ ***k*-ориентированным расстоянием** называется метрика на $\mathbb{R}^n$, заданная как

$$d_k(x - y)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$, где для любого $x \in C_i$ значение $d_k(x)$ есть длина наикратчайшего пути от начала координат до точки x при перемещении только по направлениям, параллельным осям конуса C.

Метрики конуса

Конусом Con(X, d) *над метрическим пространством* (X, d) называется фактор-произведение $X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, полученное отождествлением всех точек нити $X \times \{0\}$. Точка, соответствующая множеству $X \times \{0\}$, называется *вершиной* конуса.

Метрика евклидова конуса – метрика на Con(X), заданная для любых (x, y), $(y, s) \in$ Con(X, d) как

$$\sqrt{t^2 + s^2 - 2ts\cos(\min\{d(x, y), \pi\})}.$$

Конус Con(X, d) с этой метрикой называется *евклидовым конусом над метрическим пространством* (X, d).

Если (X, d) – компактное метрическое пространство диаметра <2, то **метрикой Кракуса** называется метрика на Con(X, d), определяемая для любых (x, y), $(y, s) \in$ Con(X, d) как

$$\min\{s, t\}d(x, y) + | t - s |.$$

Конус Con(X, d) с метрикой Кракуса допускает существование единственной срединной точки для каждой пары его точек, если (X, d) обладает таким свойством.

Если M^n является многообразием с (псевдо)римановой метрикой g, то можно рассматривать метрику $dr^2 + r^2g$ (в общем случае метрику $\frac{1}{k}dr^2 + r^2g,\ k \neq 0$) на Con$(M^n) = M^n \times \mathbb{R}_{>0}$.

Метрика взвеси

Сферический конус (или *взвесь*) $\Sigma(X)$ над метрическим пространством (X, d) есть фактор-произведение $X \times [0, a]$, полученное отождествлением всех точек нитей $X \times \{0\}$ и $X \times \{a\}$.

Если (X, d) является **пространством длины** с диаметром diam$(X) \leq \pi$ и $a = \pi$, то **метрикой взвеси** называется метрика на $\Sigma(X)$, заданная для любых (x, y), y, s) $\in \Sigma(X)$ как

$$\arccos(\cos t \cos s + \sin t \sin s \cos d(x, y)).$$

9.3. РАССТОЯНИЯ НА СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСАХ

r-Мерный *симплекс* (или *геометрический симплекс, гипертетраэдр*) представляет собой выпуклую оболочку $r + 1$ точек из $\mathbb{E}^n$, которые не принадлежат никакой $(r - 1)$-плоскости. Симплекс получил свое название потому, что обозначает простейший возможный выпуклый многогранник в любом заданном пространстве. Граница r-симплекса имеет $r + 1$ 0-*граней* (вершин многогранника), $\frac{r(r+1)}{2}$ 1-

граней (ребер многогранника) и $\binom{r+1}{i+1}$ *i-граней*, где $\binom{r}{i}$ – биномиальный коэффициент. *Вместимость* (т.е. *многомерный объем*) симплекса может быть вычислена с помощью *определителя Кэли–Менгера*. Правильный r-мерный симплекс обозначается как α_r.

Грубо говоря, *геометрический симплициальный комплекс* – пространство с *триангуляцией*, т.е. разбиением его на замкнутые симплексы таким образом, что любые два симплекса либо вообще не пересекаются, либо пересекаются по общей грани.

Абстрактный симплициальный комплекс S – множество с элементами, называемыми *вершинами*, в которых выделено семейство непустых подмножеств, называемых *симплексами*, таким образом, что каждое непустое подмножество симплекса s является симплексом, называемым *гранью* s, и каждое одноэлементное подмножество является симплексом. Симплекс называется i-мерным, если состоит из $i + 1$ вершин. *Размерностью* S является максимальная размерность его симплексов. Для каждого симплициального комплекса S существует триангуляция многогранника, для которой S является симплициальным комплексом. Такой геометрический симплициальный комплекс обозначается GS и называется *геометрической реализацией* S.

Симплициальная метрика

Пусть S – абстрактный симплициальный комплекс и GS – геометрический симплициальный комплекс, являющийся геометрической реализацией S. Точки GS можно отождествить с функциями α: $S \to [0, 1]$, для которых множество $\{x \in S: \alpha(x) \neq 0\}$ является симплексом в S и $\sum_{x \in S} \alpha(x) = 1$. Число $\alpha(x)$ называется x-й *барицентрической координатой* α.

Симплициальная метрика – метрика, заданная на GS как

$$\sqrt{\sum_{x \in S} (\alpha(x) - \beta(x))^2}.$$

Многогранная метрика

Многогранной метрикой называется **внутренняя метрика** связного геометрического симплициального комплекса в $\mathbb{E}^n$, в котором отождествленные границы изометричны Именно, она определяется как инфимум длин всех ломаных линий, соединяющих точки x и y так, что каждое из звеньев принадлежит одному из симплексов.

Примером многогранной метрики является внутренняя метрика на поверхности многогранника в $\mathbb{E}^n$. Многогранную метрику можно рассматривать на комплексе симплексов в *пространстве постоянной кривизны*. В общем случае многогранные метрики рассматриваются для комплексов, являющихся *многообразиями* или *многообразиями с краем*.

Метрика полиэдральных цепей

r-Мерная *полиэдральная цепь* A в $\mathbb{E}^n$ задается линейным выражением $\sum_{i=1}^{m} d_i t_i^r$, где для любого i величина t_i^r является r-мерным симплексом в $\mathbb{E}^n$. *Границей* цепи является линейная комбинация границ симплексов цепи. Границей r-мерной полиэдральной цепи является $(r-1)$-мерная цепь.

Метрикой полиэдральных цепей является **метрика нормы**

$$\| A - B \|$$

на множестве $C_r(\mathbb{E}^n)$ всех r-мерных полиэдральных цепей. В качестве нормы на $C_r(\mathbb{E}^n)$ может быть принята.

1. *Масса* полиэдральной цепи, т.е. $|A| = \sum_{i=1}^{m} |d_i||t_i^r|$, где $|t^r|$ – объем звена t_i^r.

2. *Бемольная норма* полиэдральной цепи, т.е. $|A|^b = \inf_D\{|A - \partial D| + |D|\}$, где $|D|$ – масса D, ∂D – граница D и инфимум берется по всем $(r+1)$-мерным полиэдральным цепям; пополнение метрического пространства $(C_r^b(\mathbb{E}^n), |\cdot|^b)$ бемольной нормой является **сепарабельным банаховым пространством**, обозначаемым как $C_r^b(\mathbb{E}^n)$, его элементы известны как r-мерные *бемольные плоские цепи*.

3. *Диезная норма* полиэдральной цепи, т.е.

$$|A|^b = \inf\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} |d_i||t_i^r||v_i|}{r+1} + \left| \sum_{i=1}^{m} d_i T_{v_i} t_i^r \right|^b \right),$$

где $|A|^b$ – бемольная норма A и инфимум берется по всем *сдвигам* v (здесь $T_v t^r$ – звено, полученное перемещением t^r на вектор v длины $|v|$); пополнение метрического пространства $(C_r(\mathbb{E}^n), |\cdot|^\#)$ диезной нормой является сепарабельным банаховым пространством, обозначаемым как $C_r^\#(\mathbb{E}^n)$, его элементы называются *r-мерными диезными плоскими цепями*. Бемольная цепь конечной массы является диезной. Если $r = 0$, то $|A|^b = |A|^\#$.

Метрическое пространство *полиэдральных коцепей* (т.е. линейных функций полиэдральных цепей) может быть задано аналогичным способом. В качестве нормы полиэдральной коцепи X может быть принята:

1. Комасса полиэдральной коцепи, т.е. $|X(A)$, где $X(A)$ – значение коцепи X на цепи A.

2. Бемольная конорма полиэдральной коцепи, т.е. $|X|^b = \sup_{|A|^b=1}\{X(A)|$.

3. Диезная конорма полиэдральной коцепи, т.е. $|X|^\# = \sup_{|A|^\#=1}|X(A)|$.