

Предисловие

Разрезы и метрики хорошо известны и являются очень важными объектами в теории графов, задачах комбинаторной оптимизации, и в целом в дискретной математике. Они появляются и в других областях математики и ее приложений, таких как метрическая геометрия, геометрия чисел, комбинаторная теория матриц, теория блок-схем, квантовая механика, статистическая физика, анализ и теория вероятностей. В действительности понятие разреза очень многогранно: разрезы можно рассматривать, как объекты теории графов, метрики или коэффициенты корреляции.

Многообразие результатов принуждает нас ограничиться в выборе тем. Основное внимание в книге сконцентрировано на геометрической стороне теории разрезов и метрик, в частности, на полиэдрах. Цель работы состоит в том, чтобы собрать различные результаты, полученных в независимых областях математики, и представить их в рамках единой концепции. Мы стараемся показать, как эти разнообразные результаты связываются воедино с помощью теории разрезов и метрик, и, в частности, с помощью разрезного конуса и разрезного многогранника. При подборе тем мы старались выделять те аспекты, которые наименее изучены, и для которых до сих пор не было известно единообразной интерпретации. Более того, книга ориентирована на подробное исследование взаимосвязей между различными областями науки. Исходя из этого, некоторые темы представлены со всеми подробностями и полными доказательствами, а некоторые только затронуты; упомянуты лишь основные результаты, а для дальнейшего изучения приведены соответствующие ссылки.

Данная книга задумана как учебник и справочник для научных работников, аспирантов и студентов, интересующихся дискретной математикой и ее взаимосвязями с другими областями математики или ее приложений. В частности, книга может представлять интерес для исследователей, занимающихся алгебраической и геометрической комбинаторикой или комбинаторной оптимизацией.

Книга разделена на пять частей, в которых рассматриваются следующие темы: ℓ_1 -метрики и метрики, вложимые в гиперкуб, гиперметрики и многогранники Делоне в решетках, метрическая структура графов,

блок-схемы и их связь с вложениями в гиперкуб, дальнейшие геометрические вопросы, связанные с разрезными полиэдрами.

Вопросы комбинаторной оптимизации не рассматриваются здесь во всей их полноте. Это связано с тем, что исследования разрезов и метрик с этой точки зрения подробно представлены в научной литературе. Известно несколько обзоров соответствующих работ, например, Франк [1990] (исследования многопродуктовых потоков) и Поляк и Туза [1995] (исследования задачи о максимальном разрезе). Тем не менее, мы приводим некоторые последние выдающиеся достижения в этой области. Например, обсуждается новый полуопределенный аппроксимационный алгоритм Геманса и Уильямса, а также результат Бурже и Липшица о ℓ_1 -вложениях с малыми искажениями и его применение (Линьялом, Лондоном и Рабиновичем) к аппроксимации многопродуктовых потоков. Более того, попутно упоминается ряд дальнейших результатов, относящихся к задаче о максимальном разрезе и бинарным матроидам.

Мы старались сделать изложение каждой части по возможности независимым; в принципе каждую часть можно читать отдельно от других. При этом для удобства поиска в тексте была выбрана общая система нумерации всех пунктов и утверждений, таких как теоремы, примеры, рисунки и проч. Материал, содержащий дополнительную информацию или слишком длинные доказательства, приведен мелким шрифтом и может быть опущен при первом чтении.

Часть книги, посвященная исследованию связи с геометрией чисел, основана на обзоре, написанном авторами вместе с В. П. Гришухиным (Московское отделение РАН) — см. Деза, Гришухин и Лоран [1995]. Мы благодарны Славе Гришухину за разрешение включить данный материал в эту книгу.

Мы хотим выразить благодарность нескольким институтам, поддержавшим работу над книгой, особенно нашему родному Institute LIENS при отделении математики и программирования Ecole Normale Supérieure за создание хороших условий для работы и стимулирующей обстановки. Мы высоко ценим помощь Жака Бейджбеде в разрешении различных вопросов с L^AT_EX'ом, возникавших при подготовке книги к печати. Первый из авторов благодарен Токийскому Технологическому Университету и Математическому Институту Тайпейской Академии наук. Второй из авторов выражает благодарность Амстердамскому Центру Математики и Программирования (CWI) за гостеприимство

и плодотворное общение во время нескольких продолжительных посещений этого Центра. Мы особенно благодарны Университету города Аусбург и Konrad-Zuse-Zentrum в Берлине, в частности, Мартину Гретшелю за многие полезные обсуждения во время наших визитов, за потраченное время и поддерживающую нас заинтересованность темой книги.

Мы благодарны еще некоторым людям за полезные обсуждения и вклад в тематику данной книги. В частности, первый из авторов выражает теплую благодарность Джину Акьяму, Питеру Камерону, Вальтеру Дебье, Антуану Деза, Комею Фукуде, Марии Гриндель, Зиву Жаботинскому, Ко-Вею Ли, Сергею Шпекторову, Навину Сингху, Иву Розенбергу, Пьеру Розенштейлю и Максимилиану Волошину. Второй из авторов очень благодарен Ласлу Ловасу за глубокие советы и за предоставленную возможность продемонстрировать часть материалов на факультете программирования Йейльского Университета. Автор также благодарит Дэвида Ависа, Ханса-Джурген Бандельта, Виктора Чепоя, Мишеля Конфорти, Катерину де Симон, Сида де Суза, Берту Герардс, Франсуа Лабурта, Франца Редля, Лекса Скрайвера, Адре Себо и Брюса Шепарда.

Мы с теплотой вспоминаем нашего дорогого друга и коллегу Свата Поляка¹⁾, который всегда был энергичен, великодушен и проявлял искренний интерес к теме книги и затрагиваемым в ней вопросам.

¹⁾ Погиб в автомобильной катастрофе в 1996 г. — *Прим. ред.*

Предисловие к русскому изданию

Мы рады, что наша книга выходит на русском языке. Этот перевод позволил дать окончательные ссылки на многие статьи, вышедшие за последние 3 года, прошедшие со времени публикации этой книги. Несколько неточностей (особенно в формулировке предложений 10.2.1, 14.4.7 на страницах 130, 214, а также на страницах 243, 329, 545) были исправлены. Несколько новых замечаний и соответствующих им ссылок было добавлено на страницах 324, 542–543, 545–546 в разделах 21.4, 31.6.2 английского издания.

Мы благодарим всех, кто участвовал в переводе этой книги и, в особенности, И. Яценко, — директора МЦНМО, В. Гришухина, — научного редактора книги, и переводчиков Е. Пантелееву и П. Сергеева.

Париж, 20 июня 2000.

Мишель Деза.

Глава 1.

Краткий обзор книги

В этой главе представлено краткое описание тем, рассмотренных в книге. Основным предметом изучения книги являются многогранники и конусы, связанные с разрезами и метриками. Интересные задачи, касающиеся данных полиэдров, возникают в самых разных областях математики и ее приложений. Оказывается, что эти полиэдры рассматривались независимо целым рядом автором, использующих различные математические методы. Одна из задач данной книги состоит в том, чтобы, с одной стороны, продемонстрировать разнообразие и богатство результатов, связанных с такими полиэдрами, а с другой — показать, что все они допускают общую интерпретацию, как проявление различных свойств одного множества объектов. Изучению разрезов и метрик значительно способствует разнообразие тем, в которых возникают соответствующие задачи. Результаты, полученные независимо в разных областях, оказываются эквивалентными, установленные факты не являются обособленными, и различные точки зрения дают новые интерпретации, позволяют глубже понять внутренние взаимосвязи.

Книга разделена на пять частей, посвященных, казалось бы, различным темам. Так, части I–V содержат результаты, относящиеся к следующим областям:

1. исследования метрик, точнее, изометричных вложений в Банаховы ℓ_1 -пространства;
2. геометрия чисел, точнее, геометрия решеток и многогранников Де-Лоне;
3. теория графов, точнее, исследование графа гиперкуба и его изометричных подграфов;
4. теория блок-схем, точнее исследование блок-схем, возникающих в связи с различными вложениями эквидистантных метрик в гиперкуб; затрагиваются также вопросы алгоритмической сложности задачи о вложении в гиперкуб;
5. геометрия полиэдров, точнее, геометрические свойства разрезных и метрических полиэдров (например, описания их фасет, смежно-

сти, симметричности и т. п.); приложения к решению некоторых задач, таких как задача Борсука или задача о пополнении для неотрицательно определенных матриц и матриц евклидовых расстояний.

Изложение каждой из пяти частей сделано, насколько это было возможно, независимым. Поэтому некоторые обозначения и определения повторяются в различных частях в тех случаях, когда соответствующие понятия играют основную роль. В принципе, читатель, интересующийся, например, только аспектами геометрии чисел, может обратиться к части II без предварительного изучения первой части. Следует, однако, учесть, что во второй главе изложены некоторые основные обозначения, относящиеся к графам, полиэдрам, матрицам и алгоритмам, которые в дальнейшем используются на протяжении всей книги.

Ниже дается краткое описание материала, приведенного в частях I–V книги. Это введение предназначено для того, чтобы помочь читателю лучше ориентироваться в нашей книге. Также вводятся некоторые понятия, каждое из которых, впрочем, будет еще раз определено в основном тексте по мере необходимости.

1.1. Краткий обзор части I.

Теория меры: ℓ_1 -вложимость и вероятность

В первой части исследуются пространства расстояний, допускающие изометричное вложение в ℓ_1 -пространство $(\mathbb{R}^m, d_{\ell_1})$ при некотором натуральном m . Через d_{ℓ_1} мы обозначили ℓ_1 -расстояние, определенное формулой:

$$d_{\ell_1}(x, y) := \sum_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i| \quad \text{при } x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Одним из основных результатов является описание таких пространств в терминах разрезных полуметрик. Для данного подмножества S множества $V_n := \{1, \dots, n\}$ *разрезной полуметрикой* $\delta(S)$ называется расстояние на V_n , принимающее значение 1 на паре элементов $i \in S, j \in V_n \setminus S$, и значение 0 при $i, j \in S$ или $i, j \in V_n \setminus S$. Очевидно, что каждая разрезная полуметрика ℓ_1 -вложима. В действительности, расстояние d

тогда, и только тогда является ℓ_1 -вложимым, когда оно представимо в виде неотрицательной линейной комбинации разрезных полуметрик. Другими словами, если через CUT_n обозначить конус, порожденный разрезными полуметриками на V_n , то

$$\text{расстояние } d \text{ изометрично } \ell_1\text{-вложимо} \iff d \in \text{CUT}_n.$$

Конус CUT_n называется *разрезным конусом*. Также рассматриваются изометричные вложения в гиперкуб. Назовем расстояние d на V_n *вложимым в гиперкуб*, если пространство расстояний (V_n, d) допускает изометричное вложение в пространство $(\{0, 1\}^m, d_{\ell_1})$ при некотором $m \geq 1$, т. е. если можно найти n таких двоичных векторов $v_1, \dots, v_n \in \{0, 1\}^m$, что

$$d(i, j) = d_{\ell_1}(v_i, v_j) \quad \text{при всех } i, j \in V_n.$$

В действительности вложимые в гиперкуб расстояния на V_n суть элементы разрезного конуса CUT_n , представимые в виде неотрицательной целочисленной комбинации разрезных полуметрик.

Обозначим через $\text{CUT}_n^\square$ *разрезной многогранник*, определяемый как выпуклая оболочка разрезных полуметрик $\delta(S)$ при $S \subseteq V_n$. Таким образом, многогранник $\text{CUT}_n^\square$ состоит из тех расстояний, которые представимы в виде выпуклой комбинации разрезных полуметрик. Разрезные конус и многогранник допускают также следующее описание в терминах пространств с мерой. Расстояние d принадлежит разрезному конусу CUT_n (разрезному многограннику $\text{CUT}_n^\square$) тогда и только тогда, когда существует такое пространство с мерой (соответственно вероятностное пространство) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ и такие n элементов (соответственно случайных событий) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, что

$$d(i, j) = \mu(A_i \triangle A_j) \quad \text{при всех } i, j \in V_n$$

(см. раздел 4.2).

Есть и другое множество полиэдров, тесно связанных с разрезными полиэдрами, которое имеет очень хорошее описание в приведенной выше интерпретации в терминах пространств с мерой. *Корреляционный вектор* $\pi(S)$ данного подмножества S множества V_n определяется формулами: $\pi(S)_{ij} = 1$, если i и j одновременно принадлежат S ; $\pi(S)_{ij} = 0$, в противном случае ($i, j \in V_n$). Конус, порожденный корреляционными векторами $\pi(S)$ при $S \subseteq V_n$ называется *корреляционным конусом* и обозначается через COR_n . Аналогично, через $\text{COR}_n^\square$ обозначается *корреляционный многогранник*, определяемый как выпуклая оболочка корреляционных векторов. Эти полиэдры допускают следующее описание (см. раздел 5.3): вектор p принадлежит корреляционному конусу

COR_n (соответственно корреляционному многограннику $\text{COR}_n^\square$) тогда и только тогда, когда существует такое пространство с мерой (соответственно вероятностное пространство) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ и такие n элементов (соответственно случайных событий) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, что

$$p_{ij} = \mu(A_i \cap A_j) \quad \text{при всех } i, j \in V_n.$$

Таким образом, элементы корреляционного многогранника суть ни что иное, как коэффициенты корреляции в множестве из n элементов, что и объясняет слово «корреляция» в названии этих полиэдров.

В действительности этот факт является аналогом упомянутого выше результата для разрезных полиэдров. Дело в том, что корреляционный конус COR_n (или многогранник $\text{COR}_n^\square$) является образом разрезного конуса CUT_{n+1} (или многогранника $\text{CUT}_{n+1}^\square$) под действием линейного взаимно-однозначного отображения (так называемого ковариантного отображения — см. раздел 5.2). Это простое, но очень интересное соответствие, так как оно позволяет переносить результаты с разрезных на корреляционные полиэдры и обратно. Одна из целей данной книги состоит в том, чтобы объединить и дать единообразное описание результатов, полученных разными авторами в этих двух контекстах (разрезы/коэффициенты корреляции).

Корреляционный многогранник приводит к правильной постановке классической задачи теории вероятностей, называемой также задачей Буля, которую можно сформулировать следующим образом: для n данных случайных событий $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ дать хорошую оценку вероятности $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ того, что хотя бы одно из этих событий произойдет, считая известными попарные корреляции $\mu(A_i \cap A_j)$. Хорошие нижние оценки для $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ можно получить из неравенств, выполненных для всех точек из $\text{COR}_n^\square$ (см. раздел 5.4).

Мы уже убедились, что ℓ_1 -вложимые расстояния на V_n являются элементами разрезного конуса CUT_n . Следовательно, проверка ℓ_1 -вложимости сводится к проверке принадлежности разрезному конусу. Эта задача оказывается NP-полной. Более того, описание ℓ_1 -вложимости приводит к определению конуса CUT_n с помощью множества линейных неравенств. Так как конус CUT_n полиэдрален (он порожден конечным множеством разрезных полуметрик), то его можно задать с помощью конечного числа неравенств. Тем не менее, «невозможно» найти полный перечень этих неравенств для произвольного n , так как $\text{NP} \neq \text{co-NP}$. Несмотря на это, известно много классов неравенств, выполненных для CUT_n (или $\text{CUT}_n^\square$). Обзор имеющейся в настоящее время информации

о линейном описании разрезных полиэдров приводится в пятой части. Самыми важными из известных неравенств являются гиперметрические неравенства и неравенства отрицательного типа, которые вводятся в разделе 6.1. Эти неравенства имеют вид

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} \leq 0,$$

где $b_1, \dots, b_n$ — целые числа, отвечающие условию $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ (*гиперметрический* случай) или условию $\sum_{i=1}^n b_i = 0$ (случай *отрицательного типа*). Часть II целиком посвящена гиперметрическим неравенствам и, в частности, их связям с многогранниками Делоне в решетках. Гиперметрические неравенства дают необходимые условия ℓ_1 -вложимости. Фактически, для некоторых классов метрик гиперметричность оказывается достаточным условием ℓ_1 -вложимости. Несколько таких классов приводится в главе 8; они состоят из метрик, возникающих из калиброванных частично упорядоченных решеток, полугрупп и нормированных векторных пространств. Неравенства отрицательного типа вытекают из гиперметрических неравенств и, следовательно, дают более слабые необходимые условия ℓ_1 -вложимости.

Неравенства отрицательного типа являются классическими неравенствами анализа. Они использовались Шенбергом в тридцатых годах для описания ℓ_2 -вложимых пространств расстояний; а именно, Шенберг доказал, что расстояние d является ℓ_2 -вложимым тогда и только тогда, когда квадрат этого расстояния d^2 удовлетворяет неравенствам отрицательного типа. Более того, неравенства отрицательного типа определяют конус, который есть ни что иное, как образ конуса неотрицательно определенных симметричных матриц (порядка $n - 1$, если рассматриваются n -точечные неравенства) под действием некоторого взаимно-однозначного линейного отображения (в действительности того же, которое связывает разрезные и корреляционные полиэдры). Эти результаты приводятся в разделах 6.2 и 6.3 вместе с дальнейшими основными фактами о ℓ_2 -пространствах.

Некоторые дополнительные аспекты исследуются в первой части; в частности операции и функциональные преобразования пространств расстояний, сохраняющие некоторые метрические свойства, такие как ℓ_1 -вложимость, гиперметричность и т. д. (см. главы 7 и 9); определение минимальной размерности объемлющего ℓ_1 -пространства, в которое может быть погружено любое ℓ_1 -вложимое пространство расстояний на n точках; нахождение для данного m минимального числа точек, необхо-

димого для проверки вложимости пространства расстояний в m -мерное ℓ_1 -пространство (см. главу 11).

В главе 10 исследуется вопрос о нахождении вложения Липшица, если допускать малые возмущения расстояний. Бурген [1985] показал, что каждая полуметрика на n точках может быть вложена в некоторое ℓ_1 -пространство при возмущении порядка $O(\log_2 n)$. Этот результат приводится вместе с его приложением (Линьял, Лондон, Рабинович [1994]) к аппроксимации многопродуктовых потоков.

1.2. Краткий обзор части II. Гиперметрические пространства с точки зрения геометрии чисел

Вторая часть целиком посвящена исследованию гиперметрических неравенств и их связи с некоторыми объектами геометрии чисел, а именно решетками и многогранниками Делоне.

Гиперметрическими называются неравенства вида

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} \leq 0,$$

где $b_1, \dots, b_n$ — такие целые числа, что $\sum_{i=1}^n b_i = 1$. Эти неравенства определяют конус, который называется *конусом гиперметрик* и обозначается через HYP_n . Заметим, что неравенства треугольника являются частным случаем гиперметрических неравенств (когда все компоненты b равны нулю, за исключением двух компонент, равных 1, и одной компоненты, равной -1). Таким образом, гиперметричность есть усиление понятия полуметрики. Так как каждая разрезная полуметрика удовлетворяет гиперметрическим неравенствам, то имеет место вложение:

$$\text{CUT}_n \subseteq \text{HYP}_n.$$

Это вложение является равенством при $n \leq 6$ и является строгим при $n \geq 7$. Например, метрика кратчайшего пути на графе $K_7 \setminus P_3$ гиперметрична, но не ℓ_1 -вложима. Графы, для которых метрика кратчайшего пути является гиперметрикой, описаны в главе 17.

Типичные примеры гиперметрических пространств возникают в точечных решетках. Пусть L — точечная решетка в $\mathbb{R}^k$, т. е. дискрет-

ная подгруппа $\mathbb{R}^k$. Рассмотрим сферу $S \subseteq \mathbb{R}^k$, лежащую между точек решетки, т. е. такую, что ни одна точка из L не принадлежит замкнутому шару с границей S . Будем раздувать сферу S , пока она не окажется «жестко зажатой» точками решетки. Тогда множество точек решетки, лежащих на S , наделенное квадратом евклидова расстояния, образует пространство расстояний, которое является не только полуметрическим, но и гиперметрическим. Выпуклая оболочка множества $S \cap L$ точек решетки, лежащих на S , образует многогранник, который называется *многогранником Делоне*. Таким образом, многогранники Делоне обладают интересным свойством — на множестве их вершин можно ввести гиперметрическую структуру. Другими словами, для любого многогранника Делоне P с множеством вершин $V(P)$ пространство расстояний $(V(P), (d_{\ell_2})^2)$ является гиперметрическим пространством. Еще более удивительно, что верно и обратное: каждое гиперметрическое пространство на n точках может быть изометрично вложено в пространство расстояний $(V(P), (d_{\ell_2})^2)$ некоторого многогранника Делоне P размерности $k \leq n - 1$. Эти результаты приводятся в разделе 14.1.

Конус гиперметрик HYP_n определяется с помощью бесконечного числа неравенств. Однако можно показать, что достаточно и конечного их числа для описания HYP_n . Другими словами, HYP_n — полиэдральный конус. В разделе 14.2 приводятся несколько доказательств этого результата. Одно из них существенно опирается на указанное выше соответствие между гиперметриками и многогранниками Делоне и на результат Вороного о конечности числа типов решеток в фиксированной размерности.

Соответствие между гиперметриками и многогранниками Делоне позволяет переносить некоторые понятия с конуса гиперметрик на многогранники Делоне. Например, можно определить *ранг* многогранника Делоне, как размерность наименьшей грани конуса гиперметрик, содержащей соответствующее гиперметрическое расстояние. Затем, в частности, можно определить экстремальные многогранники Делоне, соответствующие крайним лучам конуса гиперметрик. Понятие ранга и соответствие между многогранниками Делоне и гранями конуса гиперметрик исследуются в главе 15.

В разделе 14.3 описываются различные типы многогранников Делоне, возникающие в решетках корней. Среди них есть ровно три экстремальных многогранника — отрезок, многогранник Шлефли 2_{21} (размерности 6) и многогранник Госсета 3_{21} (размерности 7); см. раздел 16.2. Дальнейшие примеры экстремальных многогранников Делоне

приводятся в разделах 16.3 и 16.4; они возникают из других решеток, таких как решетка Лича и решетка Барнса–Уолла. В разделах 16.1 и 16.5 рассматриваются также некоторые связи между экстремальными многогранниками Делоне, равноугольными семействами прямых и совершенными решетками.

В главе 17 подробно исследуются *гиперметрические графы*, т. е. графы, метрика кратчайшего пути на которых гиперметрична. Эти графы могут быть описаны как изометричные подграфы прямого произведения графов трех типов, а именно графов полукубов, графов $K_{n \times 2}$ и графов Госсета G_{56} . Более того, ℓ_1 -графы выделяются как те, среди сомножителей которых нет графа Госсета. Приводится несколько более точных результатов, в частности, для надстроенных графов и графов, обладающих некоторыми свойствами регулярности. Обсуждаются дальнейшие описания для двудольных графов, наделенных усеченной метрикой (принимаяющей значение 1 на парах смежных точек, и 2 — на не смежных).

При этом встречается класс, состоящий из связных регулярных графов, для которых минимальное собственное значение матрицы смежности не менее -2 . Этот класс хорошо изучен в научной литературе. Кроме реберных и графов $K_{n \times 2}$ в нем содержится 187 графов из списка, подразделенного на три группы. Каждая из этих групп задается некоторым параметром. Интересно, что этот параметр допускает интерпретацию в терминах ассоциированных многогранников Делоне с помощью понятия гиперметричности (см. раздел 17.2). Таким образом, это пример нового подхода к известной теме: гиперметричность проливает новый свет на классическое понятие.

1.3. Краткий обзор части III. Вложения графов

В третьей части исследуются различные метрические свойства и свойства вложимости графов. Для данного графа $G = (V, E)$ рассматривается ассоциированная с ним *метрика кратчайшего пути* d_G , определенная на множестве вершин V графа G , когда расстояние между двумя вершинами $i, j \in V$ полагается равным длине кратчайшего пути между i и j в G . Основной задачей третьей части является изучение

структуру графов, метрика кратчайшего пути которых обладает некоторыми метрическими свойствами, такими как ℓ_1 -вложимость, вложимость в гиперкуб, гиперметричность и т. д.

Изометричные подграфы графов гиперкубов хорошо изучены. Несколько их описаний приводится в главе 19. Одно из них утверждает, что изометричные подграфы графов гиперкубов суть в точности двудольные графы, метрика кратчайшего пути которых удовлетворяет ограниченному классу гиперметрических неравенств, а именно пентагональным неравенствам (гиперметрические неравенства на пяти точках). Изометричная вложимость в граф гиперкуба означает изометричную вложимость в прямое произведение нескольких экземпляров K_2 . В главе 20 исследуются изометричные вложения в произвольные прямые произведения. Хорошо известен следующий результат из теории графов: каждый граф имеет каноническое вложение в (наименьшее) прямое произведение, которое называется *каноническим метрическим представлением* графа. Для двудольных графов это представление позволяет разложить метрику кратчайшего пути в линейную комбинацию примитивных полуметрик. Одним из основных инструментов, лежащих в основе доказательства этих разнообразных результатов, является некоторое отношение эквивалентности, определенное на множестве ребер графа. Число соответствующих классов эквивалентности является инвариантом графа и называется его *изометрической размерностью*. Эта величина есть в точности число сомножителей канонического разложения. Более того, для двудольного графа G изометрическая размерность совпадает с (линейной) размерностью наименьшей грани полуметрического конуса, содержащего d_G .

В главе 21 подробно исследуются ℓ_1 -графы, т. е. графы, метрика кратчайшего пути которых является ℓ_1 -вложимой. Это ослабление понятия вложимости в гиперкуб. Действительно, граф G является ℓ_1 -графом тогда и только тогда, когда его метрика кратчайшего пути d_G вкладывается в гиперкуб с точностью до пропорциональности, т. е., когда расстояние ηd_G вложимо в гиперкуб при некотором целом η . Наименьшее из таких η называется *минимальной шкалой графа*. Доказано, что минимальная шкала ℓ_1 -графа равна либо 1 либо четному числу, и что минимальная шкала не превосходит $n - 2$ для графа с n вершинами. Для ℓ_1 -графов сомножители канонического разложения имеют очень специальный вид — это либо графы полукубов, либо графы $K_{n \times 2}$. Этот результат уже был доказан в разделе 14.3 с помощью многогранников Делоне. Другое, элементарное, доказательство приво-

дится в главе 21, и это доказательство имеет несколько важных приложений. В частности, оно позволяет получить как полиномиальный по времени алгоритм распознавания ℓ_1 -графов, так и описание ℓ_1 -жестких графов (т. е. тех графов, для которых ℓ_1 -вложение, по существу, единственно).

ℓ_1 -графы с минимальной шкалой 1 или 2 суть в точности графы, вложимые в граф полукуба. Их можно описать также в терминах запрещенных изометричных подпространств (см. раздел 21.4).

1.4. Краткий обзор части IV.

Вложения в гиперкуб и блок-схемы

В четвертой части подробно исследуется задача о вложении в гиперкуб. Для данного расстояния d на V_n можно поставить следующий вопрос: является ли d вложимым в гиперкуб? Если «да», то когда это вложение единственно? В этом случае расстояние d называется h -жестким. («Единственность» понимается здесь с точностью до некоторых тривиальных операций.) Если расстояние d не является h -жестким, то какие оно допускает вложения?

Есть некоторые классы метрик, для которых ответ на первый вопрос, очевидно, положителен. Так будет, например, в случае *эквидистантной метрики* $2t\mathbb{1}_n$, где t — натуральное число; $2t\mathbb{1}_n$ есть метрика на V_n , принимающая значение $2t$ на каждой паре различных точек. Тогда представляют интерес только последние два вопроса.

С другой стороны, есть некоторые классы метрик для которых определение вложимости в гиперкуб представляет собой сложную задачу. В действительности проверка вложимости в гиперкуб для произвольной метрики является NP-трудной задачей. Тем не менее, для некоторых классов метрик описать вложимость в гиперкуб можно с помощью ряда условий, выполнимость которых проверяется за полиномиальное время. Несколько таких классов представлено в главе 24. Среди этих классов мы подробно исследуем классы метрик, принимающие два различных значения вида $a, 2a$ (a — натуральное), или три значения вида $a, b, a + b$ (a, b — натуральные, не являющиеся четными одновременно). Например, проверка вложимости в гиперкуб для класса расстояний на n точках со значениями в множестве $\{2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$ или $\{3, 5, 8\}$ может быть проведена за полиномиальное по n время. С другой

стороны, та же задача для класса расстояний со значениями в множестве $\{2, 3, 4, 6\}$ является NP-полной проблемой. Также исследуется класс метрик, имеющих «двудольную» структуру, т. е. таких метрик на V_n , для которых существует такое подмножество S точек, что любые две точки принадлежащие множеству S (или его дополнению) находятся на расстоянии 2. Один из основных методов распознавания вложимости в гиперкуб для данных классов метрик состоит в том, что они содержат большое число эквидистантных h -жестких подметрик; это позволяет получать информацию о структуре метрик, исходя из локальной структуры некоторых подметрик.

Главы 22 и 23 в основном посвящены эквидистантной метрике $2t\mathbb{1}_n$. В главе 22 приводятся некоторые ограничения на величины n и t , при которых метрика $2t\mathbb{1}_n$ является h -жесткой. Например, $2t\mathbb{1}_n$ является h -жесткой при $n \geq t^2 + t + 3$. Более того, для $n = t^2 + t + 2$ (при $t \geq 3$) метрика $2t\mathbb{1}_n$ является h -жесткой тогда и только тогда, когда не существует проективной плоскости порядка t . В главе 23 исследуется, какие возможны вложения в гиперкуб метрики $2t\mathbb{1}_n$ в случае, когда она не является h -жесткой. Легко убедиться, что возможные вложения в гиперкуб метрики $2t\mathbb{1}_n$ соответствуют $(2t, t, n - 1)$ -блок-схемам (где $(2t, t, n - 1)$ -блок-схема есть такое семейство $\mathcal{B}$ подмножеств V_{n-1} , что каждая точка из V_{n-1} принадлежит $2t$ элементам $\mathcal{B}$, и любые две различные точки из V_{n-1} принадлежат t общим элементам $\mathcal{B}$.) Тем самым мы приходим к вопросу о нахождении таких блок-схем с заданными параметрами. Эта тема подробно изучается в главе 23. Например, хорошо известный результат Райзера гласит, что каждая блок-схема, отвечающая вложению метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб, имеет не менее $n - 1$ блока, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $n = 4t$ и существует матрица Адамара порядка $4t$. Таким образом, два важных класса блок-схем (проективные плоскости и блок-схемы Адамара) играют большую роль в изучении множества вложений эквидистантных метрик. Явное описание всех возможных вложений в гиперкуб метрики $2t\mathbb{1}_n$ приводится в разделе 23.4 для следующих значений параметров: $t \leq 2$ и $(t = 3, n = 5)$.

В главе 25 собраны результаты, относящиеся к разрезным решеткам. Разрезная решетка состоит из векторов, представимых в виде целочисленной комбинации разрезных полуметрик. Заметим, что принадлежность как разрезному конусу, так и разрезной решетке является необходимым условием вложимости данного расстояния d в гиперкуб. В разделе 25.3 исследуются графы, семейство разрезов

которых образует базис Гильберта; в случае произвольных графов это сводится к вопросу о том, когда сформулированное выше необходимое условие является достаточным. В разделе 25.1 приводится описание разрезных и некоторых связанных с ними решеток. В разделе 25.2 строятся примеры расстояний, принадлежащих и разрезному конусу и разрезной решетке, но не являющихся вложимыми в гиперкуб.

1.5. Краткий обзор части V.

Фасеты разрезного конуса и разрезного многогранника

В пятой части дается обзор известных результатов о структуре граней и геометрии разрезного конуса и разрезного многогранника.

Основное свойство состоит в том, что все фасеты разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ могут быть получены из фасет $\text{CUT}_n^\square$, содержащих данную вершину; это достигается с помощью так называемой операции переключения. В частности, все фасеты многогранника $\text{CUT}_n^\square$ могут быть получены из фасет разрезного конуса CUT_n . Таким образом, для изучения структуры граней можно ограничиться разрезным конусом. Как было упомянуто выше, нахождение полного линейного описания разрезных полиэдров является по-видимости безнадежной задачей. Тем не менее, известны большие классы неравенств. Два класса — гиперметрические неравенства и неравенства отрицательного типа уже были введены. Неравенства отрицательного типа никогда не могут определять фасету разрезного конуса, так как они подчинены гиперметрическим неравенствам. С другой стороны, гиперметрические неравенства содержат обширный класс неравенств, задающих фасету: они исследуются в главе 28.

Неравенства треугольника, которые являются очень специальным случаем гиперметрических неравенств, подробно исследуются в главе 27. Несмотря на их простоту, треугольные фасеты уже содержат значительную информацию о разрезных полиэдрах. Например, с их помощью задача о нахождении максимального разреза может быть сформулирована, как задача линейного программирования. Более того, треугольные неравенства дают полное линейное описание разрезного

конуса CUT_n при $n \leq 4$. Их проекций уже достаточно для описания разрезного многогранника произвольного графа G , не содержащего K_5 в качестве подграфа (и, следовательно, планарного).

В разделе 27.4 мы отклоняемся от основной темы к циклическим многогранникам бинарных матроидов. Циклические пространства бинарных матроидов суть ни что иное, как семейства множеств, замкнутые относительно операции симметрической разности. Таким образом, семейство разрезов графов представляет собой пример циклического пространства. Операция переключения применима в более широких границах бинарных матроидов, причем для циклических полиэдров имеются аналоги неравенств треугольника (точнее, их проекций). Тогда некоторые вопросы, поставленные для разрезных полиэдров, можно сформулировать в более общей ситуации бинарных матроидов; например, вопросы о линейной релаксации с помощью неравенств треугольника или базисах Гильберта. Обзор основных результатов в этой области приводится в разделе 27.4.

Гиперметрические неравенства и неравенства отрицательного типа принадлежат к более обширному классу целевых неравенств, описанному в разделе 28.4. Хотя сами лакунные неравенства недостаточно изучены, ослабление этого понятия (при менее жестких ограничениях в правой части) служит основой для получения очень хороших аппроксимаций для задачи о максимальных разрезах (см. раздел 28.4.1).

В главе 29 исследуются клик-паутинные неравенства, являющиеся обобщением гиперметрических. В главе 30 представлены некоторые другие классы неравенств: неравенства надстроенных деревьев, линейно-блочно-циклические неравенства, циркулянтные неравенства, парашютные неравенства, и т. д. В разделе 30.6 дается полное линейное описание конуса CUT_n при $n \leq 7$.

Глава 31 содержит описания нескольких геометрических свойств разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ и его релаксации с помощью полуметрического многогранника $\text{MET}_n^\square$ (определенного неравенствами треугольника). В разделе 31.6 исследуется реберная структура этих многогранников. Например, любые два разреза смежны как в разрезном многограннике, так и в полуметрическом многограннике. Следовательно, граф 1-остова разрезного многогранника является полным графом. Более того, многогранники $\text{CUT}_n^\square$ и $\text{MET}_n^\square$ имеют много общих симплицальных граней в размерностях до $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Это показывает, что многогранник $\text{MET}_n^\square$ достаточно плотно обернут вокруг

многогранника $\text{CUT}_n^\square$. В разделе 31.7 изучается евклидово расстояние от гиперплоскости, содержащей фасету многогранника $\text{CUT}_n^\square$ до центра тяжести $\text{CUT}_n^\square$. Формулируется гипотеза, что это расстояние минимизируется на треугольных фасетах, что проверяется для фасет, заданных неравенствами с коэффициентами в множестве $\{0, 1, -1\}$ и асимптотически в некоторых других случаях. Симплициальные фасеты рассматриваются в разделе 31.8. Оказывается, что при $n \leq 7$ большая часть фасет многогранника $\text{CUT}_n^\square$ является симплексами. На самом деле, около 97% фасет $\text{CUT}_n^\square$ — симплексы! Этот удивительный факт вполне может оказаться общим для произвольных n .

Дальнейшие геометрические результаты приводятся в разделах 31.1–31.4. Борсук [1933] поставил вопрос, возможно ли разбить произвольное множество X точек в $\mathbb{R}^d$ на $d + 1$ подмножеств так, чтобы каждое из них имело диаметр меньший, чем диаметр X . Отрицательный ответ на этот вопрос был получен Каном и Калаи [1993] с помощью конструкции, использующей разрезы, которая приводится в разделе 31.1. Результат раздела 31.2 показывает, как из неравенств, выполненных для разрезного многогранника, получить неравенства, выполненные для углов между парами векторов из некоторого множества. В частности, это позволяет ответить на давний вопрос Фейеша Тота [1959], касающийся максимального значения суммы всех попарных углов между n векторами. В разделе 31.3 рассматривается задача о пополнении для частично неотрицательно определенных матриц. Оказывается, что необходимые условия для задачи пополнения могут быть получены из неравенств, выполненных для разрезного многогранника, что есть переформулировка результата раздела 31.2. Наконец, в разделе 31.4 рассматривается задача о пополнении для частично евклидовых матриц; т. е. исследуются проекции конуса отрицательного типа. Эти две задачи пополнения очень близки и тесно связаны с полиэдрами, исследуемыми в этой книге.

Глава 2.

Основные определения

В этой главе вводятся некоторые основные определения, относящиеся к графам, полиэдрам, матрицам и алгоритмической сложности. Здесь представлены только самые основные понятия, дальнейшие определения даются в тексте по мере необходимости. За более подробной информацией читатель может обратиться, например, к следующим учебникам: Бонди и Мурти [1976] — графы, Грюнбаум [1967], Скрайвер [1991a] — многогранники, Ланкастер и Тисменецкий [1985] — матрицы, и Гери и Джонсон [1982] — алгоритмы и алгоритмическая сложность.

2.1. Графы

Граф $G = (V, E)$ состоит из конечного множества V *вершин* и конечного множества E *ребер*. Каждое ребро $e \in E$ есть пара вершин u и v , которые называются его *концами*; данное ребро e мы будем также обозначать через (u, v) или uv . Две вершины называются *смежными*, если они соединены ребром. Два ребра называются параллельными, если у них оба конца совпадают. В дальнейшем мы рассматриваем только *простые* графы, т. е. графы без петель и кратных ребер. *Степенью* вершины $v \in V$ называется число ребер, содержащих v . Граф G называется *полным*, если любые две его вершины смежны. Полный граф с n вершинами принято обозначать через K_n ; будем считать, что множеством вершин этого графа является $V_n := \{1, \dots, n\}$, а множеством ребер — $E_n := \{ij \mid i \neq j \in V_n\}$ (где через ij обозначена неупорядоченная пара целых чисел i и j , т. е. пары ij и ji совпадают).

Граф G называется *двудольным*, если есть такое разбиение $V = V_1 \cup V_2$ множества его вершин, что никакие две вершины ни в V_1 ни в V_2 не смежны. Будем говорить, что множества V_1, V_2 образуют *биразбиение* графа G . Если G — двудольный граф с таким биразбиением (V_1, V_2) , что каждая вершина из V_1 смежна с каждой вершиной из V_2 ,

то G называется *полным двудольным графом*. Обозначим через K_{n_1, n_2} полный двудольный граф с биразбиением (V_1, V_2) , где $|V_1| = n_1$ и $|V_2| = n_2$. Полный двудольный граф $K_{1, n}$ $n \geq 1$ иногда называется *звездой*.

Для данного подмножества $S \subseteq V$ множества вершин графа G обозначим через $\delta_G(S)$ множество ребер G , у которых один конец принадлежит S , а другой — $V \setminus S$; $\delta_G(S)$ называется *разрезом*¹⁾, *заданным множеством S* .

Рассмотрим граф $G = (V, E)$. Граф $H = (W, F)$ называется *подграфом* графа G , если $W \subseteq V$ и $F \subseteq E$. Для данного множества вершин $W \subseteq V$ обозначим через $G[W]$ подграф графа G , *индуцированный* множеством W ; множество его вершин есть W , а ребрами соединены те вершины, которые смежны в графе G . Будем говорить, что множество W индуцирует *клику* в графе G , если любые две вершины из W смежны, т. е. если $G[W]$ — полный граф. *Паросочетанием* в графе G называется такое подмножество $F \subseteq E$ ребер, что никакие два ребра из F не имеют общих вершин; паросочетание F называется *совершенным*, если каждая вершина графа G принадлежит ровно одному ребру из F .

Для данного множества $F \subseteq E$ ребер графа G обозначим через $G \setminus F := (V, E \setminus F)$ граф, полученный *удалением* F . При $F = \{e\}$ вместо $G \setminus \{e\}$ мы будем также использовать обозначение $G \setminus e$. *Стягиванием* ребра $e := uv$ графа G называется отождествление концов u и v этого ребра и удаление параллельных ребер, которые могли возникнуть при этом; G/e есть граф, полученный стягиванием ребра e . Для множества ребер $F \subseteq E$ обозначим через G/F граф, полученный из G стягиванием всех ребер из F (в произвольном порядке). Граф H называется *минором* графа G , если он может быть получен из G с помощью операций удаления и стягивания ребер и удаления вершин.

В дальнейшем часто будут использоваться следующие графы:

- *Путь* P_n с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ и ребрами $v_i v_{i+1}$ при $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

¹⁾ Таким образом, $\delta_G(S)$ обозначает здесь множество ребер. В действительности, символ $\delta(S)$ будет, как правило, использоваться в книге для обозначения 0 — 1-вектора, а именно разрезной полуметрики, заданной множеством S (см. раздел 3.1). Если G — полный граф K_n , то характеристический вектор разреза $\delta_G(S)$ совпадает с разрезной полуметрикой $\delta(S)$, заданной множеством S . Тем не менее, обозначение $\delta_G(S)$ из теории графов будет использоваться только во вполне определенных местах книги, где будет подчеркиваться, что $\delta_G(S)$ есть множество ребер. Поэтому не должно произойти никакой путаницы между этими двумя обозначениями $\delta_G(S)$ и $\delta(S)$.

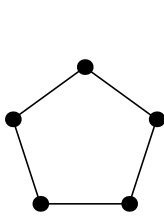
- Цикл C_n с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ и ребрами $v_i v_{i+1}$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$ вместе с ребром $v_1 v_n$.
- Граф гиперкуба $H(n, 2)$ с множеством вершин $V = \{0, 1\}^n$, в котором ребрами соединены такие пары векторов $x, y \in \{0, 1\}^n$, что $|\{i \in [1, n] \mid x_i \neq y_i\}| = 1$.
- Граф полукуба $\frac{1}{2}H(n, 2)$ с множеством вершин

$$V = \left\{ x \in \{0, 1\}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \in 2\mathbb{Z} \right\},$$

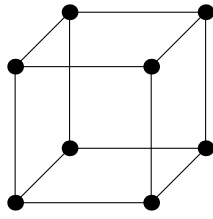
в котором ребрами соединены такие пары $x, y \in \{0, 1\}^n$, что

$$|\{i \in [1, n] \mid x_i \neq y_i\}| = 2.$$

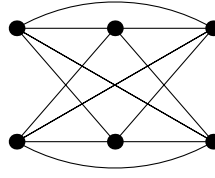
- Граф $K_{n \times 2}$ с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n}\}$, в котором ребрами соединены все пары вершин из V кроме n пар $v_1 v_{n+1}, \dots, v_n v_{2n}$. Другими словами, $K_{n \times 2}$ есть полный граф K_{2n} с удаленным совершенным паросочетанием.



Цикл C_5



Граф гиперкуба $H(3, 2)$



Граф $K_{3 \times 2}$

Рис. 2.1.1

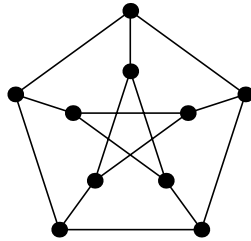


Рис. 2.1.2. Граф Петерсена P_{10}

Два графа $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция $f: V \rightarrow V'$, что

$$uv \in E \iff f(u)f(v) \in E';$$

это обозначается через $G \simeq G'$. Среди указанных выше графов есть несколько изоморфных; например,

$$H(2, 2) \simeq C_4, \quad K_{2 \times 2} \simeq C_4, \quad \frac{1}{2}H(2, 2) \simeq K_2, \\ \frac{1}{2}H(3, 2) \simeq K_4, \quad \frac{1}{2}H(4, 2) \simeq K_{3 \times 2}.$$

Графы C_5 , $H(3, 2)$ и $K_{3 \times 2}$ приведены на рисунке 2.1.1. *Граф Петерсена* P_{10} , который также будет использоваться в некоторых ситуациях, приведен на рисунке 2.1.2.

Граф G называется *связным*, если каждые две его вершины $u, v \in G$ соединены некоторым путем в G ; графы, не обладающие этим свойством, называются *несвязными*. *Лесом* называется граф без циклов; *деревом* называется связный лес. *Эйлеровым* называется граф, представимый в виде объединения циклов, не имеющих общих ребер (или, что то же самое, граф, в котором все вершины имеют четную степень).

Рассмотрим две операции на графах — прямое произведение и клик-сумму. *Прямым произведением* графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф $G = G_1 \times G_2$ с множеством вершин

$$V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1 \text{ и } v_2 \in V_2\},$$

ребрами которого являются такие пары $((u_1, u_2), (v_1, v_2))$ ($u_1, v_1 \in V_1$, $u_2, v_2 \in V_2$), что либо $(u_1, v_1) \in E_1$ и $u_2 = v_2$, либо $u_1 = v_1$ и $(u_2, v_2) \in E_2$.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$. Пусть V_1 и V_2 такие подмножества V , что $V = V_1 \cup V_2$, а множество $W = V_1 \cap V_2$ индуцирует клику в G . Более того, предположим, что ни одна вершина из $V_1 \setminus W$ не соединена ни с одной вершиной из $V_2 \setminus W$. Тогда G называется *k-клик-суммой* графов $G_1 := G[V_1]$ и $G_2 := G[V_2]$, где $k := |W|$. Не выделяя размера общей клики, можно называть граф G просто *клик-суммой* графов G_1 и G_2 .

Надстройкой ∇G графа G называется граф, полученный из G добавлением новой вершины (*отмеченной точки* надстройки), соединенной со всеми вершинами графа G . Кроме того, *реберным графом* $L(G)$ графа G называется граф, вершинами которого являются ребра графа G , причем две вершины смежны в $L(G)$ тогда и только тогда, когда соответствующие ребра имеют общий конец в G .

2.2. Полиэдры

Предполагается, что читатель хорошо знаком с основами линейной алгебры. Через $\mathbb{R}$ (соответственно, через $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$) мы будем обозначать множество действительных (соответственно рациональных, целых и натуральных) чисел. Для данных множества E и его подмножества $S \subseteq E$ *характеристический вектор* $\chi^S \in \mathbb{R}^E$ (вектор инцидентности) определяется условиями:

$$\chi_e^S := \begin{cases} 1 & \text{при } e \in S; \\ 0 & \text{при } e \in E \setminus S. \end{cases}$$

Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Через M^T мы обозначаем матрицу, транспонированную к матрице M , а через x^T — вектор, транспонированный к вектору x . Таким образом,

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{при } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Напомним, что *размерность* $\dim(X)$ множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ есть величина, на единицу меньшая числа элементов наибольшего подмножества из аффинно независимых элементов множества X . Множество $X \subseteq \mathbb{R}^k$ имеет *полную размерность*, если $\dim(X) = n$. *Ранг* $\text{rang}(X)$ множества X определяется как число элементов наибольшего подмножества из линейно независимых элементов множества X . Введем обозначения для линейных оболочек. Для данных множеств $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ положим

$$\mathbb{K}(X) := \left\{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \in \mathbb{K} \quad \text{при всех } x \in X \right\}.$$

(Здесь мы считаем, что все коэффициенты λ_x , кроме конечного числа, равны нулю.) При $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ множество $\mathbb{Z}(X)$ называется *целочисленной оболочкой* множества X , при $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+$ множество $\mathbb{R}_+(X)$ называется *конической оболочкой*¹⁾ X , а при $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_+$ — целочисленным конусом, порожденным множеством X . Нам потребуется также *аффинная целочисленная оболочка* множества X , определенная как

$$\mathbb{Z}_{af}(X) := \left\{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \in \mathbb{Z} \quad \text{при всех } x \in X \text{ и } \sum_{x \in X} \lambda_x = 1 \right\}.$$

¹⁾ Или просто *конусом* над X . — *Прим. перев.*

и *выпуклая оболочка* множества X , определенная как

$$\text{Conv}(X) := \left\{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \geq 0 \text{ при всех } x \in X \text{ и } \sum_{x \in X} \lambda_x = 1 \right\}.$$

Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если $\text{Conv}(X) = X$. *Выпуклым телом* в $\mathbb{R}^n$ называется компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ полной размерности. *Поляр* X° множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ определяется, как

$$X^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T y \leq 1 \quad \forall y \in X\}.$$

Множество X называется *центрально-симметричным*, если оно вместе с каждой точкой x содержит и точку $-x$. Рассмотрим подробнее конические и выпуклые оболочки.

Конусы и многогранники. Напомним несколько основных определений, относящихся к конусам и полиэдрам. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *конусом*¹⁾, если $\mathbb{R}_+(X) = X$. Если конус C имеет вид $C = \mathbb{R}_+(X)$, то говорится, что конус C *порожден* множеством X , а элементы X — *образующие* C . Конус C называется *конечно порожденным*, если он может быть порожден с помощью конечного числа образующих, т. е., если $C = \mathbb{R}_+(X)$ для некоторого конечного множества X . Поляр конуса $C \subseteq \mathbb{R}^n$ можно также описать, как

$$C^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T y \leq 0 \quad \forall y \in C\}.$$

Выпуклые множества вида $\text{Conv}(X)$, где X — конечное множество, называются *многогранниками*.

Пусть A — некоторая $m \times n$ -матрица, и $b \in \mathbb{R}^m$ — некоторый вектор. Тогда множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

называется *полиэдром*. Очевидно, что каждый полиэдр выпукл и является конусом, если вектор b нулевой. Конусы вида $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ называются *полиэдрами*.

Классический результат, приписываемый обычно Минковскому и Вейлю, утверждает, что многогранники и ограниченные полиэдры есть, на самом деле, одно и то же понятие. (Множество $P \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если существует такая константа R , что $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq R$ при всех $x = (x_i)_{i=1}^n \in P$.) Другими словами, каждый многогранник P , заданный, как выпуклая оболочка конечного множества X , можно представить, как множество решений конечной системы $Ax \leq b$ линейных

¹⁾ Следовательно, по нашему определению, конус всегда является выпуклым.

неравенств; такая система называется *линейным описанием* многогранника P . Аналогичный результат имеет место и для конусов: конус C конечно порожден тогда и только тогда, когда его можно представить, как множество решений конечной системы $Ax \leq 0$ однородных линейных неравенств; такая система называется *линейным описанием* конуса C . Другими словами, конус конечно порожден тогда и только тогда, когда он полиэдрален.

На практике, нахождение линейного описания многогранника P или конуса C (при условии, что они заданы с помощью своих образующих) может оказаться очень сложной задачей. Одной из задач данной книги является получение информации о линейном описании некоторых специальных многогранника и конуса, а именно разрезного многогранника и разрезного конуса:

$$\text{CUT}_n^\square := \text{Conv}(\chi^{\delta_{K_n}(S)} \mid S \subseteq V_n), \quad \text{CUT}_n := \mathbb{R}_+(\chi^{\delta_{K_n}(S)} \mid S \subseteq V_n).$$

Другой хорошо известный результат, которым мы в свое время воспользуемся — *теорема Каратеодори*. Ее можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Если $x \in \mathbb{R}_+(X)$, то $x \in \mathbb{R}_+(X')$, где X' — некоторое подмножество X , состоящее из линейно независимых элементов. Если $x \in \text{Conv}(X)$, то $x \in \text{Conv}(X')$, где X' — некоторое подмножество X , состоящее из аффинно независимых элементов.

В дальнейшем часто будут использоваться следующие многогранники:

- n -мерный симплекс α_n ; т. е. многогранник

$$\text{Conv}(0, e_1, \dots, e_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \ (1 \leq i \leq n), \quad \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \right\}.$$

- n -мерный ортаэдр¹⁾ β_n ; т. е. многогранник

$$\text{Conv}(\pm e_1, \dots, \pm e_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq 1 \quad \text{при всех } a \in \{\pm 1\}^n \right\}.$$

- n -мерный куб γ_n ; т. е. следующий многогранник:

$$\text{Conv}(\{0, 1\}^n) = [0, 1]^n.$$

(Через e_i здесь обозначены координатные орты в $\mathbb{R}^n$.) Два многогранника P и P' в $\mathbb{R}^n$ называются *аффинно эквивалентными*, если $P' = f(P)$,

¹⁾ Этот выпуклый n -мерный многогранник двойственен n -мерному кубу. Название «ортаэдр» было предложено Е. П. Барановским (см. Барановский [1991]). — Прим. ред.

где f — аффинная биекция $\mathbb{R}^n$. *Симплекс* — это произвольный многогранник вида $\text{Conv}(X)$, где множество X состоит из аффинно независимых элементов. Аналогично, *симплициальный конус* — это конус вида $\mathbb{R}_+(X)$, где множество X состоит из линейно независимых элементов. В действительности, символ α_n будет в дальнейшем использоваться для обозначения любого n -мерного симплекса. Точно так же, β_n и γ_n будут обозначать ортаэдр и гиперкуб с точностью до аффинной эквивалентности. Заметим, что (при тех же допущениях) многогранники α_1, β_1 и γ_1 совпадают, а $\beta_2 = \gamma_2$. На рисунке 2.2.1 приведены многогранники α_3 (тетраэдр), β_3 (октаэдр) и γ_3 (стандартный куб).

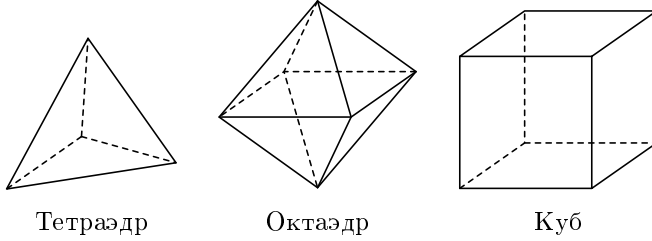


Рис. 2.2.1

Грани. Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^n$. Множество $F \subseteq P$ называется *гранью* P , если для каждой точки $x \in F$ из существования разложения вида $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ и $y, z \in P$ следует, что $y, z \in F$. Единственной гранью размерности $\dim(P)$ является сам многогранник P . Грани размерности $\dim(P) - 1$ называются *фасетами* многогранника P . Грань размерности 0 имеет вид $\{x\}$; соответствующие точки x называются *вершинами* многогранника P . Грани размерности 1 называются *ребрами* многогранника P . Две вершины $x, y \in P$ называются смежными в P , если множество $\{\alpha x + (1 - \alpha)y \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$ есть ребро многогранника P . Каждому многограннику P можно сопоставить его *граф 1-остова*, который определяется следующим образом. Множеством его вершин служит множество вершин многогранника P , а две вершины соединяются ребром в этом графе, если они смежны в P . Например, графами 1-остовов многогранников α_n, β_n и γ_n являются, соответственно, полный граф K_{n+1} , граф $K_{n \times 2}$ и граф гиперкуба $H(n, 2)$.

Грань F многогранника P называется *симплициальной*, если F — симплекс, т. е., если все вершины P , принадлежащие F , аффинно независимы.

Рассмотрим неравенство $v^T x \leq v_0$ при фиксированных векторах $v \in \mathbb{R}^n$ и $v_0 \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что это неравенство *выполнено* для многогранника P , если $v^T x \leq v_0$ при всех $x \in P$. Тогда очевидно, что множество

$$F := \{x \in P \mid v^T x = v_0\}$$

является гранью многогранника P ; такая грань называется *индуцированной* неравенством $v^T x \leq v_0$. На самом деле, каждая грань многогранника P индуцирована некоторым выполненным для P неравенством.

Предыдущие определения можно распространить на конусы следующим образом. Пусть C — конус в $\mathbb{R}^n$. *Гранью* конуса C называется такое множество $F \subseteq C$, что для каждой точки $x \in F$ из существования разложения вида $x = y + z$ ($y, z \in C$) следует, что $y, z \in F$. Грани размерности $\dim(C) - 1$ называются *фасетами*, а грани размерности 1 — *крайними лучами* конуса C . При фиксированном векторе $v \in \mathbb{R}^n$ неравенство $v^T x \leq 0$ *выполнено* для конуса C , если $v^T x \leq 0$ при всех $x \in C$. Тогда множество

$$\{x \in C \mid v^T x = 0\}$$

называется *гранью конуса C , индуцированной* неравенством $v^T x \leq 0$. В полиэдральном конусе C каждая грань может быть получена таким образом. Грань F конуса C называется *симплициальной*, если F — симплициальный конус.

Теорема двойственности линейного программирования. *Задача линейного программирования* состоит в максимизации (минимизации) значений линейного функционала на некотором полиэдре. Типичным примером такой задачи является нахождение следующей величины:

$$(P) \quad \max(c^T x \mid Ax \leq b),$$

которую также записывают в виде

$$\max_{Ax \leq b} c^T x,$$

где A — некоторая $m \times n$ матрица, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Линейный функционал $c^T x$ часто называют *целевой функцией* задачи (P). С линейной задачей (P) ассоциирована *двойственная* ей линейная задача (D), состоящая в нахождении

$$(D) \quad \min(b^T y \mid y^T A = c^T, y \geq 0),$$

(P) называется *прямой* задачей. Следующий результат, который называется *теоремой двойственности линейного программирования*, устанавливает основополагающую связь между задачами (P) и (D).

Теорема 2.2.2. Рассмотрим некоторую $m \times n$ матрицу A и векторы $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Имеет место равенство:

$$\max(c^T x \mid Ax \leq b) = \min(b^T y \mid y^T A = c^T, y \geq 0),$$

при условии, что оба множества $\{x \mid Ax \leq b\}$ и $\{y \mid y^T A = c^T, y \geq 0\}$ — непустые. ■

Эта теорема допускает другие эквивалентные формулировки. Например:

$$\max(c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0) = \min(b^T y \mid y^T A \geq c^T, y \geq 0),$$

$$\max(c^T x \mid Ax = b, x \geq 0) = \min(b^T y \mid y^T A \geq c^T).$$

2.3. Алгоритмы и сложность

Алгоритмическая сложность не является основной темой этой книги, но, тем не менее, мы встречаемся с рядом задач, представляющих особый интерес с точки зрения сложности. Мы не будем математически точно определять понятия алгоритма и сложности, а дадим только некоторые «наивные» определения, которых будет вполне достаточно для наших целей. Точные формулировки можно найти, например, в учебниках Гери и Джонсона [1982] или Пападимитриу и Стайглица [1985].

Рассмотрим некоторую задачу (P), причем для удобства будем считать, что (P) является задачей разрешимости (т. е. ответом которой является «да» или «нет»). За (P) можно принять, например, любую из следующих задач:

(P1) Задача о ℓ_1 -вложимости.

Дано: Рационально-значное расстояние d на множестве $V_n = \{1, \dots, n\}$.
Вопрос: Является ли расстояние d изометрично ℓ_1 -вложимым? Другими словами, найдется ли n таких векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Q}^m$ (при некотором натуральном m), что $d(i, j) = d_{\ell_1}(v_i, v_j)$ при всех $i, j \in V_n$?

(P2) Задача о вложении в гиперкуб для графов.

Дано: Граф $G = (V, E)$.

Вопрос: Может ли граф G быть изометрично вложен в гиперкуб?

Исходные данные каждой задачи должны быть как-то описаны с помощью входных переменных. В задаче (P1) на вход поступает $\binom{n}{2}$ чисел

$d(i, j)$, а в задаче (P2) — граф G , который можно задать, например, его матрицей смежности. *Размер (size)* исходных данных есть число бит, необходимое для представления входных переменных в двоичной записи. (Например, размер целого числа p есть $\text{size}(p) = \lceil \log_2(|p| + 1) \rceil$; размер рационального числа $\frac{p}{q}$ есть $\text{size}(p) + \text{size}(q) + 1$; размер рациональной $m \times n$ матрицы A есть $mn + \sum_{i,j} \text{size}(a_{ij})$, и т. д.) Предположим, что имеется алгоритм, решающий задачу (P). Его сложность вычисляется как общее число элементарных операций, выполняемых в процессе исполнения данного алгоритма (считается, что такие элементарные операции, как арифметические действия, сравнения, условные операторы и т. п. выполняются за единицу времени). Алгоритм называется *полиномиальным по времени*, если общее число элементарных операций можно представить в виде $p(l)$, где $p(\cdot)$ — многочлен, а l — размер исходных данных.

Задачи разбиваются на несколько классов сложности. Класс P состоит из тех задач разрешимости, которые имеют полиномиальное по времени решение. Класс NP состоит из тех задач разрешимости, у которых для каждого ответа «да» существует алгоритм, проверяющий этот ответ за полиномиальное время (причем, вообще говоря, неизвестно, как найти сам этот алгоритм за полиномиальное время). Аналогично, класс со-NP состоит из тех задач, для которых каждый ответ «нет» можно проверить за полиномиальное время. Ясно, что $P \subseteq NP \cap \text{со-NP}$.

Например, задача (P1) принадлежит классу NP (так как можно показать, что если расстояние d является ℓ_1 -вложимым, то существует такой набор $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$, задающий вложение расстояния d , что размер каждого v_i ограничен полиномом от размера d ; см. раздел 4.4). С другой стороны, как мы убедимся в главе 19, задача (P2) принадлежит классу P.

Среди задач класса NP некоторые являются наиболее сложными. Задача из класса NP называется NP-полной, если решающий ее полиномиальный по времени алгоритм мог бы быть один раз использован в качестве процедуры в полиномиальном по времени алгоритме, решающем любую задачу класса NP. Задача называется NP-трудной, если из существования полиномиального по времени алгоритма, ее решающего, следует существование такого же алгоритма, решающего произвольную задачу класса NP; заметим, что не требуется принадлежности данной задачи классу NP, и разрешается неоднократное обращение к соответствующей процедуре. Стандартный метод установления принадлежности данной задачи (P) классу NP-трудных состоит в доказательстве

того, что некоторая другая задача, про которую уже известно, что она NP-трудна, полиномиально сводится к данной. Задача (P) называется *полиномиально сводимой* к задаче (Q), если полиномиальный по времени алгоритм решения (Q) может быть построен с помощью полиномиального алгоритма решения (P). Например, задача о вложении в гиперкуб для произвольных расстояний является NP-трудной. Обычно оптимизационный вариант NP-полной задачи разрешения является также и NP-трудной задачей. Например, задача о максимальном разрезе:

Для данного вектора $w \in \mathbb{Q}^{E_n}$ найти такое множество $S \subseteq V_n$, что величина $w^T \delta(S)$ максимальна

является NP-трудной, так как следующая проблема NP-полна:

Существует ли для данного вектора $w \in \mathbb{Q}^{E_n}$ и данного числа $K \in \mathbb{Q}$ такое множество $S \subseteq V_n$, что $w^T \delta(S) \geq K$?

(Смотрите раздел 4.4.)

Напомним, что для двух функций $f(n)$ и $g(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) запись $f(n) = O(g(n))$ означает, что существует такая константа $C > 0$, что $f(n) \leq Cg(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Аналогично, запись $f(n) = \Omega(g(n))$ означает, что при некоторой константе $C > 0$ неравенство $f(n) \geq Cg(n)$ выполнено при всех $n \in \mathbb{N}$.

2.4. Матрицы

Здесь собраны некоторые предварительные замечания, относящиеся к матрицам. Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если $A^T A = I$, т. е., если обратная матрица A^{-1} совпадает с транспонированной A^T . Обозначим через $OA(n)$ множество ортогональных $n \times n$ матриц. Ортогональные матрицы суть изометрии евклидова пространства, т. е. линейные преобразования $\mathbb{R}^n$, сохраняющие евклидову метрику. Хорошо известен важный факт, состоящий в том, что любые два конгруэнтных множества точек можно совместить сдвигом и некоторым ортогональным преобразованием. Сформулируем этот факт ниже, для удобства дальнейших ссылок. Напомним, что $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$ ($x \in \mathbb{R}^n$).

Лемма 2.4.1. *Пусть $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}^n$ и $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ — такие два множества векторов, что $\|u_i - u_j\|_2 = \|v_i - v_j\|_2$ при всех $i, j = 1, \dots, p$. Тогда существуют такая матрица $A \in OA(n)$ и вектор a , что*

$A(u_i - a) = v_i$ при всех $i = 1, \dots, p$. Более того, такая матрица единственна, если аффинный ранг множества $\{u_1, \dots, u_p\}$ равен $n + 1$. ■

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — симметрическая $n \times n$ матрица. Матрица A называется *неотрицательно определенной*, если неравенство $x^T A x \geq 0$ выполнено при всех $x \in \mathbb{R}^n$ (или, что то же самое, при всех $x \in \mathbb{Z}^n$); это обозначается как $A \succeq 0$. Матрица A является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда все ее собственные значения неотрицательны, или, что то же самое, когда неотрицательны все ее главные миноры, т. е. $\det(A_I) \geq 0$, где $A_I := (a_{ij})_{i,j \in I}$ при $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, а через $\det(A_I)$ обозначен определитель матрицы A_I .

Симметрическая $n \times n$ матрица $A = (a_{ij})$ определяется своей верхнетреугольной частью (включая диагональ), т. е. может быть закодирована вектором $(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$. Обозначим через PSD_n множество таких векторов $(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$, что соответствующая симметрическая $n \times n$ матрица (a_{ij}) (полагая $a_{ij} = a_{ji}$) неотрицательно определена. Множество PSD_n есть конус в $\mathbb{R}^{E_n}$, который носит название *неотрицательно определенного конуса*.

Квадратичной формой называется функция вида

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto x^T A x = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j,$$

где $A = (a_{ij})$ — симметрическая $n \times n$ матрица; форма называется неотрицательно определенной, если¹⁾ неотрицательно определена матрица A .

Матрицей Грама $\text{Gram}(v_1, \dots, v_n)$ набора векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^k$ ($k \geq 1$) называется $n \times n$ матрица, (i, j) -й элемент которой равен $v_i^T v_j$. Легко убедиться, что ранг матрицы Грама $\text{Gram}(v_1, \dots, v_n)$ равен рангу системы $(v_1, \dots, v_n)$. Любая матрица Грама, очевидно, неотрицательно определена. Хорошо известно, что верно и обратное утверждение, а именно, что каждую неотрицательно определенную матрицу можно представить как матрицу Грама некоторой системы векторов. Сформулируем ниже этот результат в виде леммы, так как это утверждение неоднократно потребуется в дальнейшем.

Лемма 2.4.2. Пусть $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ — симметрическая неотрицательно определенная $n \times n$ матрица ранга $k \leq n$. Тогда A есть матрица Грама, т. е. найдется n таких векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^k$, что $a_{ij} = v_i^T v_j$ при всех $1 \leq i, j \leq n$. Ранг системы $(v_1, \dots, v_n)$ равен k . Более

¹⁾ Это эквивалентно просто неотрицательности формы. — Прим. перев.

того, если $v'_1, \dots, v'_n$ — другой набор таких векторов из $\mathbb{R}^k$, что $a_{ij} = v_i'^T v_j'$ при всех $1 \leq i, j \leq n$, то $v'_i = Uv_i$ ($1 \leq i \leq n$) для некоторой ортогональной матрицы U .

Доказательство. По предположению матрица A имеет ровно k отличных от нуля собственных значений, каждое из которых положительно. Таким образом, существует такая $n \times n$ матрица Q_0 , что $Q_0 D Q_0^T$, где D — диагональная $n \times n$ матрица, у которой только k элементов, например $(1, 1), \dots, (k, k)$ отличны от нуля (и равны 1). Обозначим через Q $n \times k$ подматрицу Q_0 , образованную первыми ее k столбцами. Тогда $A = Q Q^T$, т. е. $a_{ij} = v_i^T v_j$ при всех $1 \leq i, j \leq n$, где $v_1^T, \dots, v_n^T$ — строки матрицы Q . Легко заметить, что ранг системы $(v_1, \dots, v_n)$ равен рангу k матрицы A . Единственность (с точностью до ортогональных преобразований) следует из леммы 2.4.1. ■

Проверить, является ли данная матрица неотрицательно определенной, можно за полиномиальное время. Следующий результат находится в книге Грётшеля, Ловаса и Скрайвера [1988] (с. 295). Для полноты изложения приведем также и доказательство этого факта.

Предложение 2.4.3. Пусть $A = (a_{ij})$ — симметрическая $n \times n$ матрица с рациональными элементами. Существует полиномиальный по времени алгоритм, проверяющий является ли матрица A неотрицательно определенной и выдающий вектор $x \in \mathbb{Q}^n$ такой, что $x^T A x < 0$, в противном случае.

Доказательство. Алгоритм основан на методе Гауссовых исключений и действует следующим образом. Сначала проверяем, верно ли, что $a_{11} \geq 0$. Если не верно, то матрица A не является неотрицательно определенной, так как $x^T A x = a_{11} < 0$ при $x = (1, 0, \dots, 0)^T$. Пусть $a_{11} = 0$. Тогда, если хотя бы один из элементов a_{1i} отличен от нуля при $i \in \{2, \dots, n\}$, то матрица A не является неотрицательно определенной. Действительно, полагая $x_i := -1$, $x_j := 0$ при $j \neq 1, i$, и выбирая $x_1 \in \mathbb{Q}$ так, что $2x_1 a_{1,i} - a_{ii} > 0$, получаем неравенство $x^T A x < 0$. Если $a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$, то матрица $A \succeq 0$ тогда и только тогда, когда неотрицательно определена ее $(n-1) \times (n-1)$ подматрица $A' := (a_{ij})_{i,j=2}^n$. Более того, если уже известен вектор $y \in \mathbb{Q}^{n-1}$ такой, что $y^T A' y < 0$, то $x^T A x < 0$ при $x := (0, y) \in \mathbb{Q}^n$.

Пусть теперь $a_{11} > 0$. Рассмотрим $(n-1) \times (n-1)$ матрицу $A' := (a'_{ij})_{i,j=2}^n$, полученную «вращением» A относительно элемента a_{11} :

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \quad \text{при } i, j = 2, \dots, n.$$

При этом $A \succeq 0$ тогда и только тогда, когда $A' \succeq 0$. Более того, предположим, что уже найден вектор $y \in \mathbb{Q}^{n-1}$ такой, что $y^T A' y < 0$. Опишем, как построить такой вектор $x \in \mathbb{Q}^n$, что $x^T A x < 0$. Положим $x := (\alpha, y)$, где число α необходимо определить. Запишем $A := \begin{pmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{pmatrix}$. Тогда $x^T A x = \alpha^2 a_{11} + 2\alpha y^T b + y^T B y$, где

$$y^T B y = \sum_{i,j=2}^n y_i y_j a_{ij} = \sum_{i,j=2}^n y_i y_j \left(a'_{ij} + \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right) = y^T A' y + \frac{1}{a_{11}} (y^T b)^2.$$

Таким образом, $x^T A x = \alpha^2 a_{11} + 2\alpha y^T b + y^T A' y + \frac{1}{a_{11}} (y^T b)^2$. Обозначим через D дискриминант этого квадратного (по α) трехчлена. Тогда $D = -a_{11} y^T A' y > 0$. Следовательно, если выбрать $\alpha \in \mathbb{Q}$ так, что $\frac{-y^T b - \sqrt{D}}{a_{11}} < \alpha < \frac{-y^T b + \sqrt{D}}{a_{11}}$, то при $x := (\alpha, y) \in \mathbb{Q}^n$ выполнено неравенство $x^T A x < 0$.

Во всех случаях мы свели задачу к матрице размера $n - 1$. Более того, можно проверить, что элементы этой матрицы не могли сильно вырасти по сравнению с элементами начальной матрицы, т. е. их размеры полиномиально ограничены размером исходной матрицы A (за подробностями можно обратиться к книге Грётшеля, Ловаса и Скрайвера [1988]). ■

Рассмотрим симметрическую $n \times n$ матрицу M . *Индексом инерции* $\text{In}(M)$ матрицы M называется тройка (p, q, s) , где p (соответственно q, s) есть число положительных (соответственно отрицательных или нулевых) собственных значений M ; ясно, что $n = p + q + s$. Хорошо известно, что если P — невырожденная матрица, то индексы инерции матриц M и PMP^T совпадают; это и есть *закон инерции* Сильвестра. При вычислении этих индексов удобно пользоваться следующим результатом.

Лемма 2.4.4. Пусть M — симметрическая матрица, имеющая следующий блочный вид:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix},$$

где матрица C невырождена. Тогда

$$\text{In}(M) = \text{In}(C) + \text{In}(A - BC^{-1}B^T), \quad \det(M) = \det(C) \cdot \det(A - BC^{-1}B^T).$$

(Матрица $A - BC^{-1}B^T$ называется *дополнением Шура* матрицы C в M .)

Доказательство. Имеет место следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} I & BC^{-1} \\ 0^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BC^{-1}B^T & 0 \\ 0^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C^{-1}B^T & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} = M.$$

По закону инерции индексы инерции матриц M и $\begin{pmatrix} A - BC^{-1}B^T & 0 \\ 0^T & C \end{pmatrix}$ совпадают. Следовательно, $\text{In}(M) = \text{In}(C) + \text{In}(A - BC^{-1}B^T)$. ■

Закончим эту главу леммой, которая потребуется нам в дальнейшем.

Лемма 2.4.5. Пусть M — симметрическая $n \times n$ матрица, а U — такое подпространство в $\mathbb{R}^k$, что $x^T M x \leq 0$ при всех $x \in U$. Если размерность U равна $n - 1$, то матрица M имеет не более одного положительного собственного значения.

Доказательство. Предположим, от противного, что у матрицы M есть два собственных положительных значения λ_1 и λ_2 . Пусть u_1 и u_2 — собственные векторы, отвечающие значениям λ_1 и λ_2 соответственно, причем $u_1^T u_2 = 0$ и $\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = 1$. Обозначим через V подпространство $\mathbb{R}^n$, натянутое на векторы u_1 и u_2 . Тогда $x^T M x > 0$ при всех $x \in V$, $x \neq 0$. Действительно, если $x = a_1 u_1 + a_2 u_2$, то $x^T M x = a_1^2 \lambda_1 + a_2^2 \lambda_2 > 0$ при $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Так как размерности пространств U и V равны $n - 1$ и 2 соответственно, то существует ненулевой вектор $x \in U \cap V$. Тогда, с одной стороны $x^T M x \leq 0$ (так как $x \in U$), а с другой $x^T M x > 0$ (так как $x \in V$). Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Часть I.

**Метрический взгляд:
 ℓ_1 -вложимость
и вероятность**

Введение

Классической задачей анализа является задача изометрического вложения, которая состоит в ответе на вопрос, может ли данное пространство расстояний (X, d) быть изометрически вложено в некоторое предписанное «объемлющее» пространство. В литературе наиболее часто исследуется случай, когда «объемлющее» пространство является Гильбертовым пространством. Работа в этом направлении была начата с некоторых результатов Кэли [1841], и позднее продолжена, в частности, Менгером [1928, 1931, 1954], Шёнбергом [1935, 1937, 1938a, 1938b] и Блюменталем [1953]. Один из хорошо известных результатов Шенберга состоит в том, что пространство расстояний (X, d) изометрически L_2 -вложимо тогда и только тогда, когда расстояние d^2 удовлетворяет ряду линейных неравенств (так называемые неравенства отрицательного типа). Эти результаты позднее были расширены в контексте L_p -пространств. Для наших исследований важен результат Бретаньоля, Дакуна-Кастеля и Кривина [1966], утверждающий, что пространство (X, d) изометрически L_p -вложимо тогда и только тогда, когда то же имеет место для каждого *конечного* подпространства пространства (X, d) .

Нашей задачей является изучение проблемы изометрического вложения в случае, когда объемлющим пространством является Банахово L_1 -пространство. Наши методы в основном являются комбинаторными. Случай $p = 1$ является особым среди всех L_p -пространств. Действительно, согласно упомянутому выше результату, мы можем ограничиться конечными пространствами расстояний. Далее, одним из основных фактов, касающихся L_1 , является то, что конечное пространство расстояний (X, d) изометрически L_1 -вложимо тогда и только тогда, когда d принадлежит так называемому разрезному конусу, порожденному всеми разрезными полуметриками. Этот конус конечно порожден. Следовательно, L_1 -вложимость (X, d) может быть характеризована конечным числом линейных неравенств.

Однако, в отличие от L_2 -случая, известны не все неравенства из этого списка. На самом деле, в свете статуса сложности родственной задачи о максимальном разрезе, маловероятно, что этот список будет когда-нибудь полностью описан. Одной из задач нашей книги является обзор информации, известной об этом списке.

Следовательно, проблема характеристики L_1 -вложимости сводится к чисто комбинаторной проблеме описания структуры разрезного конуса. Интерес к этому конусу мотивирован еще и тем, что он имеет отношение к нескольким трудным задачам комбинаторной оптимизации.

Часть 1 организована следующим образом. Глава 3 содержит предварительные сведения о пространствах расстояний. Основные связи, существующие между разрезным конусом и L_1 -метриками, мы рассматриваем в главе 4, и, в эквивалентной форме контекста ковариаций, в главе 5. Два основных необходимых условия L_1 -вложимости, именно, гиперметрические условия и условия отрицательного типа, представлены в главе 6. Здесь обсуждаются несколько характеристик для L_2 -метрик, в том числе результат Шенберга в терминах условий отрицательного типа и результат Менгера о компактности. Главы 7 и 8 описывают некоторые операции на L_1 -метриках. В главе 8 мы исследуем метрические пространства, возникающие из нормированных векторных пространств, частично упорядоченных решеток и полугрупп; во всех случаях характеристика L_1 -вложимости дана в терминах гиперметрических условий и условий отрицательного типа. Вложения Липшица с искажениями исследуются в главе 10, вместе с приложением к аппроксимации многопродуктовых потоков в графах. Наконец, в главе 11 мы группируем несколько дополнительных результатов о ℓ_1 -вложениях в пространство фиксированной размерности и о минимальной ℓ_p -размерности a , в главе 12, пытаемся проиллюстрировать широкие возможности использования L_1 -метрик.

Глава 3.

Предварительные сведения о расстояниях

Здесь мы вводим все понятия и определения, нужные нам в части 1, в частности, касающиеся пространств расстояний, изометрических вложений, пространств меры, и основных для наших исследований пространств: Банаховых ℓ_p - и L_p -пространств для $1 \leq p \leq \infty$. В книге будут существенным образом рассматриваться случаи $p = 1$, евклидов случай $p = 2$ и полуметрический случай $p = \infty$. Общий случай $p \geq 1$ мы будем рассматривать только эпизодически. Однако мы вводим все определения для произвольного p , что позволяет иметь единое обозначение для различных параметров и, кроме того, подчеркнуть специфику случая $p = 1$.

3.1. Пространства расстояний и ℓ_p -пространства

Расстояния и полуметрики: Определения и примеры. Пусть X — некоторое множество. Функция $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *расстоянием* на X , если d *симметрично*, т. е. удовлетворяет условию $d(i, j) = d(j, i)$ для всех $i, j \in X$, и если $d(i, i) = 0$ для всех $i \in X$. Тогда (X, d) называют *пространством расстояний*. Если d удовлетворяет, кроме того, следующим неравенствам:

$$(3.1.1) \quad d(i, j) \leq d(i, k) + d(j, k)$$

для всех $i, j, k \in X$, то d называют *полуметрикой* на X . Кроме того, если $d(i, j) = 0$ только для $i = j$, то d называют *метрикой* на X . Неравенство (3.1.1) называют *неравенством треугольника*.

Пусть $V_n := \{1, \dots, n\}$ и $E_n := \{ij \mid i, j \in V_n, i \neq j\}$, где символ ij обозначает неупорядоченную пару целых чисел i, j , т. е. ij и

ji считаются идентичными. Пусть d — расстояние на множестве V_n . Так как имеет место симметрия и так как $d(i, i) = 0$ для $i \in V_n$, мы можем представить расстояние d как вектор $(d_{ij})_{1 \leq i < j \leq n} \in \mathbb{R}^{E_n}$. Обратно, каждый вектор $d \in \mathbb{R}^{E_n}$ порождает расстояние d на V_n , учитывая симметрию и то, что расстояние равно 0 на диагональных парах. Следовательно, расстояние d на V_n может быть представлено как (симметрическая с нулями на главной диагонали) функция на $V_n \times V_n$ или как вектор в $\mathbb{R}^{E_n}$. Мы часто будем использовать эти два представления расстояний на V_n ; различие будет видно из контекста. Кроме того, мы будем использовать оба символа $d(i, j)$ и d_{ij} для обозначения расстояния между двумя точками i и j .

Пусть d — расстояние на множестве V_n . Его *матрица расстояния* определена как $n \times n$ симметрическая матрица D , (i, j) -й член которой равен $d(i, j)$ для всех $i, j \in V_n$. Следовательно, все диагональные члены D равны нулю.

Неравенства треугольника (3.1.1) (для $i, j, k \in V_n$) определяют конус в пространстве $\mathbb{R}^{E_n}$, называемый *полуметрическим конусом* и обозначаемый MET_n ; его элементами являются полуметрики на V_n .

Очень простые примеры полуметрик могут быть получены следующим образом. Для данного целого $t \geq 1$ пусть $t\mathbb{1}_n$ обозначает¹⁾ обозначает *эквидистантную метрику* на V_n , принимающую значение t на каждой паре из E_n ; очевидно, $t\mathbb{1}_n$ является метрикой на V_n .

Для данного подмножества $S \subseteq V_n$ пусть $\delta(S)$ обозначает расстояние на V_n , принимающее значение 1 на парах (i, j) с $i \in S, j \in V_n \setminus S$, и значение 0 на остальных парах. Очевидно, $\delta(S)$ является полуметрикой (не метрикой при $n \geq 3$); она называется *разрезной полуметрикой*²⁾.

Для данного нормированного³⁾ пространства $(E, \|\cdot\|)$ метрика $d_{\|\cdot\|}$ может быть определена на E как

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$$

для всех $x, y \in E$; метрика $d_{\|\cdot\|}$ называется *метрикой нормы* или *метрикой Минковского*.

¹⁾ В обозначении $t\mathbb{1}_n$ символ n указывает число точек, на которых эта метрика определена, а не размерность пространства, содержащего $t\mathbb{1}_n$.

²⁾ Разрезные полуметрики также называются в литературе метриками расщепления, или диссимилиации, или бинарными метриками (см., например, Бандельт и Дресс [1992], Фише [1987a], Ле Кальве [1987]).

³⁾ Напомним, что *нормой* векторного пространства E называется функция $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$, такая что $\|x\| = 0$ если и только если $x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, и $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для $x, y \in E$.

Для любого $p \geq 1$ векторное пространство $\mathbb{R}^m$ может быть снабжено ℓ_p -нормой $\|\cdot\|_p$, определенной как

$$\|x\|_p = \left(\sum_{1 \leq k \leq m} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

для $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда соответствующая метрика нормы обозначается d_{ℓ_p} и называется ℓ_p -метрикой. Таким образом, $d_{\ell_p}(x, y) = \|x - y\|_p$ для $x, y \in \mathbb{R}^m$. Метрическое пространство $(\mathbb{R}^m, d_{\ell_p})$ обозначается ℓ_p^m . Аналогично, ℓ_∞^m обозначает метрическое пространство $(\mathbb{R}^m, d_{\ell_\infty})$, где d_{ℓ_∞} является метрикой нормы, ассоциированной с нормой $\|\cdot\|_\infty$, которая определяется как

$$\|x\|_\infty = \max(|x_k| : 1 \leq k \leq m),$$

для $x \in \mathbb{R}^m$.

Для $1 \leq p < \infty$ метрическое пространство ℓ_p^∞ состоит из множества бесконечных последовательностей $x = (x_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, для которых сумма $\sum_{i \geq 0} |x_i|^p$ конечна, снабженного расстоянием $d(x, y) = \left(\sum_{i \geq 0} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$. Аналогично, ℓ_∞^∞ есть множество ограниченных бесконечных последовательностей $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, снабженных расстоянием

$$d(x, y) = \max(|x_i - y_i| : i \geq 0).$$

Другим классическим расстоянием на множестве R^m является *расстояние Хэмминга* d_H , определенное как

$$d_H(x, y) := |\{i \in [1, m] : x_i \neq y_i\}|$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^m$. Следовательно, на бинарных векторах $x, y \in \{0, 1\}^m$ расстояние Хэмминга $d_H(x, y)$ и ℓ_1 -расстояние $d_{\ell_1}(x, y)$ совпадают.

Другими примерами метрических пространств являются графические метрические пространства, возникающие из связных графов. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и пусть d_G (или $d(G)$) обозначает *метрику пути* на G^1 , где, для двух вершин $i, j \in V$, $d_G(i, j)$ равно длине кратчайшего пути из i в j в графе G . Тогда (V, d_G) называется *графическим метрическим пространством*, ассоциированным с G . Графическое метрическое пространство, ассоциированное с графом гиперкуба $H(m, 2)$, называется *метрическим пространством гиперкуба*. Заметим, что графическое метрическое пространство, ассоциированное с $H(m, 2)$, совпадает с пространством расстояний $(\{0, 1\}^m, d_{\ell_1})$.

¹⁾ Или просто метрику G . — Прим. ред.

Если $G = (V, E)$ есть некоторый граф и $w = (w_e)_{e \in E}$ есть неотрицательные веса, связанные с его ребрами, то аналогично можно определить метрику²⁾ $d_{G,w}$ на весовом графе (G, w) . Именно, для двух вершин $i, j \in V$ $d_{G,w}(i, j)$ обозначает наименьшую величину $\sum_{e \in P} w_e$, где P есть путь из i в j в графе G .

Изометрические вложения. Пусть (X, d) и (X', d') — два пространства расстояний. Тогда (X, d) называется *изометрически вложимым* в (X', d') , если существует отображение φ (*изометрическое вложение*) из X в X' , такое что

$$d(x, y) = d'(\varphi(x), \varphi(y))$$

для всех $x, y \in X$. Можно сказать также, что (X, d) есть *изометрическое подпространство* пространства (X', d') . Все рассматриваемые здесь вложения являются изометрическими, так что мы будем часто в изложении пропускать слово «изометрическое».

Для двух графов G и H мы запишем $G \hookrightarrow H$ и скажем, что G является *изометрическим подграфом* H , если $(V(G), d_G)$ есть изометрическое подпространство $(V(H), d_H)$.

Очевидно, если (X, d) вложимо в (X', d') , то то же имеет место для любого подпространства (Y, d) , где $Y \subseteq X$. Иногда бывает достаточно проверить вложимость всех подпространств (Y, d) пространства (X, d) на ограниченном числе точек, чтобы убедиться во вложимости самого пространства (X, d) в (X', d') . Наименьшее число точек, достаточных для проверки, называется (следуя Блюменталю [1953]) *порядком конгруенции* (X', d') . Более точно, говорят, что (X', d') имеет *порядок конгруенции* p , если для каждого пространства расстояний (X, d)

$$(Y, d) \text{ вложимо в } (X', d') \text{ для каждого } Y \subseteq X \text{ с } |Y| \leq p$$

$$\Downarrow$$

$$(X, d) \text{ вложимо в } (X', d')$$

и p есть наименьшее такое число (возможно, бесконечное).

Пространство расстояний (X, d) называется ℓ_p -*вложимым*, если оно изометрически вложимо в пространство ℓ_p^m для некоторого целого $m \geq 1$. Наименьшее такое m называется ℓ_p -*размерностью* (X, d) и

²⁾ Более корректно было бы говорить о «полуметрике», так как расстояние между различными точками может быть равным нулю, если равны нулю некоторые веса. Однако для удобства мы оставим терминологию «метрика».

обозначается $m_{\ell_p}(X, d)$. Мы определяем *минимальную ℓ_p -размерность* $m_{\ell_p}(n)$ как

$$(3.1.2) \quad m_{\ell_p}(n) := \max\{m_{\ell_p}(X, d) : |X| = n \text{ и } (X, d) \ell_p\text{-вложимо}\};$$

т. е. $m_{\ell_p}(n)$ есть такое наименьшее целое число m , что каждое ℓ_p -вложимое расстояние на n точках может быть вложено в ℓ_p^m . (Известно, что $m_{\ell_p}(n)$ конечно; именно, $m_{\ell_p}(n) \leq \binom{n}{2}$ для всех n и p . Смотрите раздел 11.2.) Пространство расстояний (X, d) называется ℓ_p^∞ -*вложимым*, если оно является изометрическим подпространством ℓ_p^∞ .

Пространство расстояний (X, d) называется *вложимым в гиперкуб*, если его можно изометрически вложить в некоторое метрическое пространство гиперкуба $(\{0, 1\}^m, d_{\ell_1})$ для некоторого целого $m \geq 1$. Так как метрическое пространство гиперкуба $(\{0, 1\}^m, d_{\ell_1})$ является изометрическим подпространством ℓ_1^m , каждое вложимое в гиперкуб пространство расстояний является ℓ_1 -вложимым. (Именно, если d принимает только рациональные значения, то пространство (X, d) ℓ_1 -вложимо тогда и только тогда, когда $(X, \lambda d)$ вложимо в гиперкуб для некоторого целого λ ; см. предложение 4.3.8.)

Основные наблюдения для ℓ_p -метрик. Очевидно, если расстояние d ℓ_p -вложимо, то d является полуметрикой и, кроме того, αd ℓ_p -вложимо для любого $\alpha > 0$. С другой стороны, сумма $d_1 + d_2$ двух ℓ_p -вложимых расстояний d_1 и d_2 не всегда является ℓ_p -вложимой. Другими словами, множество ℓ_p -вложимых расстояний в общем случае не является конусом. Однако, два экстремальных случая $p = 1$ и $p = \infty$ представляют собой исключение. В каждом из этих случаев множество ℓ_p -вложимых расстояний на V_n образует конус, который, кроме того, является полиэдральным.

Случай $p = 1$ имеет непосредственное отношение к основной теме этой книги. Действительно, ℓ_1 -вложимые расстояния на n точках являются в точности теми расстояниями, которые можно представить как неотрицательные линейные комбинации разрезных полуметрик. Следовательно, они образуют конус, разрезный конус CUT_n , который является полиэдральным, так как порождается 2^{n-1} разрезными полуметриками. (Детали даны в разделе 4.1.)

Рассмотрим теперь случай $p = \infty$. Очевидно, каждое ℓ_∞ -вложимое расстояние является полуметрикой. Обратно, каждая полуметрика на V_n является ℓ_∞^{n-1} -вложимой. Действительно, следующие n векторов

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n-1}$, где

$$v_i := (d(1, i), d(2, i), \dots, d(n-1, i)) \quad \text{для } i = 1, \dots, n,$$

дают изометрическое вложение (V_n, d) в $(\mathbb{R}^{n-1}, d_{\ell_\infty})$. Таким образом,

$$\text{MET}_n = \{d \in \mathbb{R}^{E_n} \mid d \text{ — } \ell_\infty\text{-вложимо}\}.$$

Следовательно, ℓ_∞ -вложимые расстояния на V_n образуют конус, полуметрический конус MET_n . Этот конус является полиэдральным, так как определяется конечным числом линейных неравенств (именно, $3\binom{n}{2}$ неравенствами треугольника). Кроме того, минимальная ℓ_∞ -размерность удовлетворяет неравенству:

$$(3.1.3) \quad m_{\ell_\infty}(n) \leq n-1.$$

Хотя ℓ_p -вложимые расстояния на V_n не образуют конуса, если $1 < p < \infty$, p -е степени этих расстояний конус образуют. Для $1 \leq p < \infty$, положим

$$(3.1.4) \quad \text{NOR}_n(p) := \{d \in \mathbb{R}^{E_n} \mid \sqrt[p]{d} \text{ — } \ell_p\text{-вложимо}\},$$

где $\sqrt[p]{d}$ обозначает вектор $(\sqrt[p]{d_{ij}})_{ij \in E_n}$. Тогда множество $\text{NOR}_n(p)$ является конусом, неполиэдральным в случае $1 < p < \infty$; кроме того, каждая разрезная полуметрика лежит на экстремальном луче конуса $\text{NOR}_n(p)$ (см. лемму 11.2.2). Заметим, что конусы $\text{NOR}_n(1)$ и CUT_n совпадают. Конус $\text{NOR}_n(2)$ (соответствующий евклидову расстоянию) тоже интенсивно исследовался в литературе; некоторые результаты по этой теме собраны в разделе 6.2. Мы хотим обратить внимание на то, что хотя $\text{NOR}_n(1) = \text{CUT}_n$ выглядит проще чем $\text{NOR}_n(2)$, так как он является полиэдральным конусом с очень простыми экстремальными лучами, мы не знаем линейного (с помощью неравенств) описания $\text{NOR}_n(1)$. На самом деле, исследование структуры граней конуса $\text{NOR}_n(1) = \text{CUT}_n$ составляет важную часть этой книги, особенно полно изложенную в части 5.

В заключение сравним единичные шары различных ℓ_p -пространств. Пусть B_p обозначает единичный шар в ℓ_p^n , определяемый как

$$B_p := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}.$$

Тогда $B_\infty = [-1, 1]^n$ есть n -мерный гиперкуб γ_n (с длиной стороны 2), B_1 совпадает с n -мерным ортаэдром β_n , и B_2 есть обычный евклидов единичный шар. Имеют место следующие включения:

$$B_1 \subseteq B_p \subseteq B_\infty \quad \text{для } 1 \leq p \leq \infty,$$

которые следуют из хорошо известного неравенства Йенсена (см., в частности, раздел 2.10 в Харди, Литльвуд, Полиа [1934]):

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq p < q \leq \infty.$$

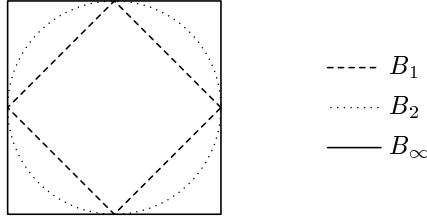


Рис. 3.1.5. Единичные шары для ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_∞ -норм

На рисунке (3.1.5) показаны три шара B_1 , B_2 и B_∞ размерности $n = 2$. Заметим, что шары B_1 и B_∞ связаны биекцией $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определяемой как

$$(3.1.6) \quad x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) := \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

(которая поворачивает плоскость на 45 градусов и сжимает ее в $\frac{1}{\sqrt{2}}$ раз). Действительно, можно проверить, что $\|x\|_\infty = \|f(x)\|_1$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Следовательно, отображение f порождает изометрию между пространствами расстояний $(\mathbb{R}^2, d_{\ell_\infty})$ и $(\mathbb{R}^2, d_{\ell_1})$.

3.2. Пространства с мерой и L_p -пространства

Определим теперь пространство расстояний $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, которое связано с произвольным пространством с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Для этого напомним некоторые определения¹⁾ пространств меры. Пусть Ω есть некоторое множество и пусть $\mathcal{A}$ есть σ -алгебра подмножеств Ω ,

¹⁾ Дополнительную информацию о пространствах с мерой и интегрируемых функциях можно найти в учебнике Рудина [1966].

т. е. $\mathcal{A}$ есть набор подмножеств Ω , удовлетворяющий следующим свойствам:

$$\begin{cases} \Omega \in \mathcal{A}, \\ \text{если } A \in \mathcal{A}, \text{ то } \Omega \setminus A \in \mathcal{A}, \\ \text{если } A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ с } A_k \in \mathcal{A} \text{ для всех } k, \text{ то } A \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Функция $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *мерой* на $\mathcal{A}$, если она аддитивна, т. е.

$$\mu\left(\bigcup_{k \leq 1} A_k\right) = \sum_{k \geq 1} \mu(A_k)$$

для всех попарно непересекающихся множеств $A_k \in \mathcal{A}$, и если $\mu(\emptyset) = 0$. Заметим, что здесь всегда предполагается, что меры неотрицательны. *Пространством с мерой* называется тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, состоящая из множества Ω , σ -алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств Ω и меры μ на $\mathcal{A}$. *Вероятностное пространство* есть пространство меры с тотальной мерой $\mu(\Omega) = 1$.

Для данной функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ее L_p -норма определяется как

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(\omega)|^p \mu(d\omega) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ обозначает множество функций $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, которые удовлетворяют условию $\|f\|_p < \infty$. L_p -норма определяет метрическую структуру на $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, именно, при задании $\|f - g\|_p$ как расстояния между двумя функциями $f, g \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Пространство расстояний (X, d) называется L_p -*вложимым*, если оно является подпространством $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ для некоторого пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Классическим примером L_p -пространства является пространство $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, где Ω есть открытый интервал $(0, 1)$, $\mathcal{A}$ есть семейство Борелевых подмножеств интервала $(0, 1)$, и μ есть мера Лебега; оно обозначается просто $L_p(0, 1)$.

Теперь мы рассмотрим связи, существующие между L_p -пространствами и ℓ_p -пространствами:

- (i) Если $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ есть множество всех подмножеств Ω и μ есть *мера мощности*, т. е. $\mu(A) = |A|$, если A — конечное подмножество Ω , и $\mu(A) = \infty$ в противном случае, то $L_p(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, |\cdot|)$ совпадает с пространством ℓ_p^{∞} .
- (ii) Если $\Omega = V_m$ есть множество мощности m , $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ и μ есть мера мощности, то $L_p(V_m, 2^{V_m}, |\cdot|)$ совпадает с ℓ_p^m .

Другими словами, ℓ_p^m есть изометрическое подпространство ℓ_p^{∞} , которое, в свою очередь, является L_p -вложимым.

Мы детально рассмотрим L_1 -вложимые расстояния в главе 4. Именно, для конечных пространств расстояний свойства ℓ_1 -, ℓ_1^∞ - или L_1 -вложимости эквивалентны свойству принадлежности разрезному конусу (см. теорему 4.2.6).

Аналогичные результаты известны для случая $p \geq 1$ (см., например, Фише [1994]). Именно, для конечного пространства расстояний (X, d) свойства ℓ_p -, ℓ_p^∞ или L_p -вложимости эквивалентны.

Хотя мы в основном имеем дело с конечными пространствами расстояний, т. е. с пространствами расстояний (X, d) , для которых X конечно, мы рассматриваем также несколько результатов, связанных с бесконечными пространствами расстояний. Например, в разделе 8.3 мы рассматриваем нормированные векторные пространства, для которых их метрики норм L_1 -вложимы. Однако, следующий фундаментальный результат (см. Бретаньоль, Дакуна-Кастель и Кривин [1966]) показывает, что изучение L_p -вложимых пространств может быть сведено к конечному случаю.

Теорема 3.2.1. *Пусть $p \geq 1$ и пусть (X, d) есть пространство расстояний. Тогда (X, d) является L_p -вложимым тогда и только тогда, когда любое конечное подпространство пространства (X, d) является L_p -вложимым.* ■

Аналогично, изучение ℓ_p^m -вложимых пространств может быть сведено к конечному случаю. Следующий результат следует из теоремы компактности логики (как замечено в работе Малиц и Малиц [1992] в случае $p = 1$).

Теорема 3.2.2. *Пусть $p, m \geq 1$ — целые числа и пусть (X, d) есть пространство расстояний. Тогда (X, d) является ℓ_p^m -вложимым тогда и только тогда, когда каждое конечное подпространство пространства (X, d) является ℓ_p^m -вложимым.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратно, предположим, что каждое конечное подпространство пространства (X, d) является ℓ_p^m -вложимым. Фиксируя $x_0 \in X$, мы можем ограничиться нахождением вложения для (X, d) , в котором x_0 отображается в нулевой вектор. Следовательно, мы ищем элемент $(u_x)_{x \in X}$ множества

$$K := \prod_{x \in X} [-d(x_0, x), d(x_0, x)]^m,$$

такой что $\|u_x - u_y\|_p = d(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Для $x, y \in X$ пусть $K_{x,y}$ обозначает подмножество множества K , состоящее из элементов,

удовлетворяющих условию $\|u_x - u_y\|_p = d(x, y)$. По предположению, любое пересечение конечного числа множеств $K_{x,y}$ непусто. Следовательно, так как K компактно (по теореме Тихонова, как декартово произведение компактных множеств) и так как $K_{x,y}$ являются замкнутыми множествами, пересечение $\bigcap_{x,y \in X} K_{x,y}$ непусто, откуда следует ℓ_p^m -вложимость пространства (X, d) . $\blacksquare$

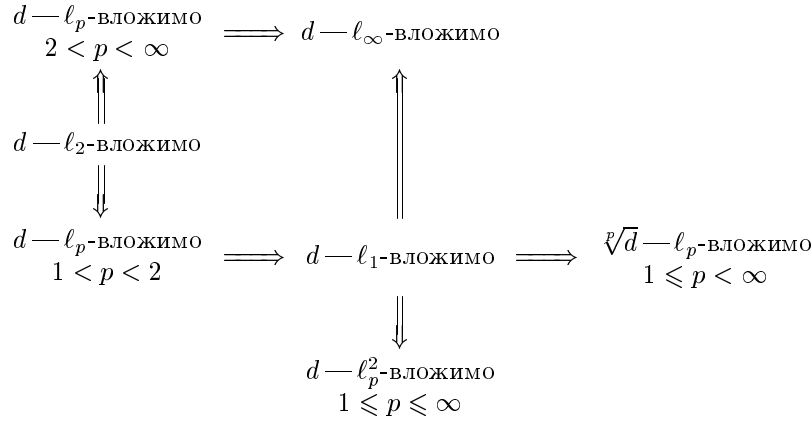


Рис. 3.2.3. Соотношения между различными ℓ_p -пространствами

Наконец, мы введем еще одно полуметрическое пространство. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ есть пространство с мерой. Положим

$$\mathcal{A}_\mu := \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) < \infty\}.$$

Расстояние d_μ на $\mathcal{A}_\mu$ можно определить, положив

$$d_\mu(A, B) = \mu(A \triangle B)$$

для всех $A, B \in \mathcal{A}_\mu$. Тогда d_μ является полуметрикой на $\mathcal{A}_\mu$. Мы назовем d_μ *полуметрикой меры* и пространство $(\mathcal{A}_\mu, d_\mu)$ *полуметрическим пространством меры*. Полуметрика d_μ называется в литературе также расстоянием Фреше–Никодима–Ароншайна. В разделе 9.2 мы рассмотрим родственное расстояние Штейнхауза, которое определяется как

$$\frac{\mu(A \triangle B)}{\mu(A \cap B)}$$

для $A, B \in \mathcal{A}_\mu$. Заметим, что полуметрическое пространство $(\mathcal{A}_\mu, d_\mu)$ является подпространством пространства $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, состоящим из

функций этого пространства, принимающих только значения $\{0, 1\}$. Кроме того, если $\Omega = V_m$ есть конечное множество мощности m , $\mathcal{A} = 2^\Omega$ и μ есть мощность, то пространство (A_μ, d_μ) совпадает с метрическим пространством гиперкуба $(\{0, 1\}^m, d_{\ell_1})$.

Мы закончим этот раздел двумя замечаниями, группирующими результаты об изометрических вложениях, существующих среди различных ℓ_p -пространств. Таблица 3.2.3 суммирует некоторые связи, существующие среди ℓ_p -пространств и упомянутые в нижеследующем замечании 3.2.4.

Замечание 3.2.4. Изометрические вложения среди L_p -пространств. Имеется очень много литературы по изометрическим вложениям среди различных L_p -пространств; см., например, Уэллс и Уильямс [1975], Дор [1976], Болл [1987], Любич и Вазерштейн [1993]. Мы суммируем здесь некоторые основные результаты. Следующее утверждение доказано в Дор [1976]. Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$ и $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Тогда ℓ_r^m является изометрическим подпространством $L_p(0, 1)$ тогда и только тогда, когда либо (i) $p \leq r < 2$, либо (ii) $r = 2$, либо (iii) $m = 2$ и $p = 1$.

Следовательно, например, ℓ_r^3 изометрически не вложимо в $L_p(0, 1)$, если $r > 2$. В Бретаньоль, Дакуна-Кастель и Кривин [1966] уже было показано, что $L_p(0, 1)$ изометрически вложимо в $L_1(0, 1)$ для всех $1 \leq p \leq 2$. Как переформулировку вышеприведенного результата, мы получаем следующие импликации для пространства расстояний (X, d) :

- Если $(X, d) — \ell_p^2$ -вложимо для некоторого $1 \leq p \leq \infty$, то $(X, d) — L_1$ -вложимо.
- Если $(X, d) — \ell_p$ -вложимо для некоторого $1 \leq p \leq 2$, то $(X, d) — L_1$ -вложимо.
- Если $(X, d) — \ell_p$ -вложимо, то $(X, d) — L_p$ -вложимо для всех $1 \leq p \leq \infty$.

Пусть $r \neq p$ такие, что $1 \leq r, p < \infty$ и пусть $m \geq 1$ — целое число. Тогда ℓ_r^m изометрически вложимо в ℓ_p^n для некоторого целого $n \geq 1$ тогда и только тогда, когда $r = 2$ и p — четное целое число (Любич и Вазерштейн [1993]). Для данного четного целого p определим $N(m, p)$ как наименьшее целое $n \geq 1$, для которого ℓ_2^m изометрически вложимо в ℓ_p^n . В Любич и Вазерштейн [1993] показано, что $N(2, p) = \frac{p}{2} + 1$ и что для любых $p \geq 2$ и $m \geq 1$ $\max(N(m-1, p), N(m, p-2)) \leq N(m, p) \leq \binom{m+p-1}{m-1}$. Точная величина $N(m, p)$ известна для малых значений p, m ; например, $N(3, 4) = 6$, $N(3, 6) = 11$, $N(3, 8) = 16$, $N(7, 4) = 28$, $N(8, 6) = 120$, $N(23, 4) = 276$, $N(23, 6) = 2300$, $N(24, 10) = 98280$.

Следовательно, для данных r и $m \in \mathbb{N}$, таких что $1 < r \leq 2 < m$, мы получаем, что ℓ_r^m изометрически не вложимо в ℓ_1^n (n — положительное число), но ℓ_r^m вложимо в $L_1(0, 1)$ и, кроме того, каждое конечное подпространство пространства ℓ_r^m на s точках вложимо в $\ell_1^{\binom{s}{2}}$. ■

Замечание 3.2.5. Упомянем здесь некоторые наблюдения, сделанные в Фише [1994]. Во-первых, легко проверить, что каждая полуметрика на 3 точках изометрически вложима в ℓ_p^2 для всех $1 \leq p \leq \infty$. Кроме того, каждая полуметрика на 4 точках изометрически вложима в ℓ_1^2 . С другой стороны, существуют полуметрики на 4 точках, изометрически не вложимые в ℓ_p для любого $1 < p < \infty$. В качестве такого примера рассмотрим расстояние d на $X := \{1, 2, 3, 4\}$, взяв значение 2 на парах (1, 3) и (2, 4) и значение 1 на всех остальных парах.

Можно легко проверить, что d не ℓ_p -вложимо для всех $1 < p < \infty$. Действительно, предположим, что существуют векторы $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^N$, определяющие ℓ_p -вложение d . Для каждой координаты $m \in [1, N]$ рассмотрим расстояние d^m на X , определенное как $d_{ij}^m := |u_i(m) - u_j(m)|$ для $i, j \in X$. Теперь мы используем тот факт, что d удовлетворяет некоторым неравенствам треугольника как равенствам. Легко заметить (используя неравенство Минковского), что каждое d^m удовлетворяет тем же неравенствам треугольника, что и d . Из этого следует, что для каждой координаты m либо (i) $u_1(m) = u_2(m) \leq u_3(m) = u_4(m)$, либо (ii) $u_2(m) = u_3(m) \leq u_1(m) = u_4(m)$. Обозначая через N_1 (соответственно, через N_2) множество координат m , для которых имеет место (i) (соответственно, (ii)), и положив $a := \sum_{m \in N_1} |u_1(m) - u_3(m)|^p$, $b := \sum_{m \in N_2} |u_1(m) - u_2(m)|^p$, мы получим, что $a = b = 1$ и $2^p = a + b$, что дает противоречие при $p > 1$. ■

Глава 4.

Разрезной конус и ℓ_1 -метрики

В этой главе мы представляем основные связи, существующие между разрезным конусом и метриками. Мы покажем, как члены разрезного конуса могут быть интерпретированы в терминах ℓ_1 -метрик и полуметрических пространств меры; см., в частности, теорему 4.2.6, в которой получено несколько эквивалентных характеристик. Мы введем также в разделе 4.3 несколько основных понятий, которые будут использоваться в книге, именно, понятия жесткости, размера, шкалы и реализаций. В разделе 4.4 мы рассмотрим несколько основных проблем, связанных с разрезными полиэдрами, и определим их статус сложности.

4.1. Конус и разрезной многогранник

Здесь мы даем точное определение разрезного конуса и разрезного многогранника. Начнем с повторения понятия разрезной полуметрики. Для данного подмножества S множества $V_n = \{1, \dots, n\}$, пусть $\delta(S)$ обозначает вектор из $\mathbb{R}^{E_n}$, определенный как

$$(4.1.1) \quad \begin{aligned} \delta(S)_{ij} &= 1, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| &= 1, \\ &\text{и } \delta(S)_{ij} = 0 & \text{в противном случае,} \end{aligned}$$

для $1 \leq i < j \leq n$. Очевидно, $\delta(S)$ определяет расстояние на V_n , являющееся полуметрикой; из этих соображений $\delta(S)$ называется *разрезной полуметрикой*. Заметим, что позднее мы будем отбрасывать слово «полуметрика» и просто говорить «разрез» или «вектор разреза». Здесь мы используем слово «полуметрика» для того, чтобы подчеркнуть, что мы работаем с пространствами расстояний.

Конус в $\mathbb{R}^{E_n}$, порожденный разрезными полуметриками $\delta(S)$ для $S \subseteq V_n$, называется *разрезным конусом*¹⁾ и обозначается CUT_n .

¹⁾ Конус CUT_n известен в литературе также как *конус Хамминга*; см., например, Авис [1977, 1981], Ассуард и Деза [1982] и др.

Многогранник в $\mathbb{R}^{E_n}$, который определяется как выпуклая оболочка полуметрик разрезов $\delta(S)$ для $S \subseteq V_n$, называется *разрезным многогранником* и обозначается $\text{CUT}_n^\square$. Следовательно,

(4.1.2)

$$\text{CUT}_n = \left\{ \sum_{S \subseteq V_n} \lambda_S \delta(S) \mid \lambda_S \geq 0 \text{ для всех } S \subseteq V_n \right\},$$

(4.1.3)

$$\text{CUT}_n^\square = \left\{ \sum_{S \subseteq V_n} \lambda_S \delta(S) \mid \sum_{S \subseteq V_n} \lambda_S = 1 \text{ и } \lambda_S \geq 0 \text{ для всех } S \subseteq V_n \right\}.$$

Иногда удобно рассматривать вместо V_n произвольное конечное множество X . Разрезной конус $\text{CUT}(X)$ и разрезной многогранник $\text{CUT}^\square(X)$ на X определяются совершенно аналогично¹⁾. Таким образом,

$$\text{CUT}(V_n) = \text{CUT}_n \text{ и } \text{CUT}^\square(V_n) = \text{CUT}_n^\square.$$

Заметим, что CUT_n и $\text{CUT}_n^\square$ тривиальны для $n = 2$, так как в этом случае мы имеем только одну ненулевую разрезную полуметрику на V_2 . Поэтому далее мы будем предполагать, что $n \geq 3$.

Имеется очень много литературы по разрезным полиэдрам; мы будем ссылаться на соответствующую литературу в тексте по мере необходимости. Упомянем пока несколько областей, в которых возникают эти полиэдры. Разрезный многогранник возникает в связи с таким основным геометрическим вопросом: каковы линейные неравенства, которым удовлетворяют попарные углы множества векторов? Оказывается, неравенства, допустимые для разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$, дают допустимые отношения для попарных углов множества из n единичных векторов (см. разделы 6.4 и 31.2). Как будет показано в следующем разделе, разрезный конус естественным образом возникает в контексте ℓ_1 -метрик. С другой стороны, разрезной многогранник играет также важную роль в комбинаторной оптимизации, так как позволяет сформулировать задачу о максимальном разрезе. Для данных весов $w = (w_{ij}) \in \mathbb{R}^{E_n}$, ассоциированных с парами $ij \in E_n$, *задача о максимальном разрезе* состоит

¹⁾ Позднее (в разделах 25.3 и 27.3) мы будем использовать понятия $\text{CUT}(G)$ и $\text{CUT}^\square(G)$ для обозначения проекций CUT_n и $\text{CUT}_n^\square$ на подпространство, индексированное множеством ребер графа G . Данные понятия не следует смешивать с понятиями $\text{CUT}(X)$ и $\text{CUT}^\square(X)$, используемыми для разрезных полиэдров полного графа с множеством вершин X .

в нахождении разреза $\delta(S)$, вес которого $w^T \delta(S)$ является наибольшим из возможных. Следовательно, это задача:

$$(4.1.4) \quad \max_{S \subseteq V_n} w^T \delta(S),$$

которая может быть переформулирована как задача оптимизации на разрезном многограннике:

$$\max_{x \in \text{CUT}_n^\square} w^T x.$$

Это трудная задача, для которой нет известного алгоритма с полиномиальным числом шагов (полиномиальным по n и размеру w); см. раздел 4.4. Задача о максимальном разрезе имеет много приложений в различных областях. Например, и задача определения основного состояния системы спинов в статистической физике, и задача минимизации числа паразитных контактов при проектировании многослойных плат могут быть обе сформулированы как примеры задач о максимальном разрезе. Эти два приложения детально исследованы в Барахона, Грётшель, Юнгер и Райнелт [1988]. Мы расскажем о применении к системе спинов в разделе 4.5. Другие применения и связи упомянуты в разделе 5.1, в терминах квадратичного булева программирования. Читатель может обратиться к обзорной статье Поляка и Туза [1995] для дополнительной информации о задаче о максимальном разрезе, и использовать аннотированную библиографию Лоран [1997a] для подробных ссылок.

4.2. ℓ_1 -пространства

Каждый элемент d разрезного конуса CUT_n определяет полуметрику на n точках, так как удовлетворяет всем неравенствам треугольника (3.1.1). Следовательно, естественным является вопрос характеристики всех полуметрик, принадлежащих разрезному конусу. Основной результат состоит в том, что полуметрика принадлежит разрезному конусу тогда и только тогда, когда она изометрически ℓ_1 -вложима, результат, впервые полученный в Ассуад [1980a]. Несколько других эквивалентных характеристик установлены в теореме 4.2.6. Результаты этого раздела¹⁾ взяты из Ассуад [1980b] и из Ассуад и Деза [1982]. Мы начнем с нескольких промежуточных результатов.

¹⁾ Результат предложения 4.2.1 был получен уже в Авис [1977].

Предложение 4.2.1. Пусть $d = (d_{ij})_{1 \leq i < j \leq n} \in \mathbb{R}^{E_n}$. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $d \in \text{CUT}_n$ (соответственно, $d \in \text{CUT}_n^\square$).
- (ii) Существует пространство с мерой (соответственно, вероятностное пространство) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ и события $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, такие, что $d_{ij} = \mu(A_i \triangle A_j)$ для всех $1 \leq i < j \leq n$.

Доказательство. (i) $\implies$ (ii) Предположим, что $d \in \text{CUT}_n$. Тогда

$$d = \sum_{S \subseteq \{1, \dots, n\}} \lambda_S \delta(S),$$

где $\lambda(S) \geq 0$ для всех S . Определим пространство меры $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ следующим образом. Пусть Ω обозначает семейство подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, пусть $\mathcal{A}$ обозначает семейство подмножеств Ω , и пусть μ обозначает меру на $\mathcal{A}$, определенную как

$$\mu(A) := \sum_{S \in A} \lambda_S$$

для каждого $A \in \mathcal{A}$ (т. е. A есть набор подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$). Положим

$$A_i := \{S \in \Omega \mid i \in S\}.$$

Тогда

$$\mu(A_i \triangle A_j) = \mu(\{S \in \Omega : |S \cap \{i, j\}| = 1\}) = \sum_{S \in \Omega : |S \cap \{i, j\}| = 1} \lambda_S = d_{ij}$$

для всех $1 \leq i < j \leq n$. Кроме того, если $d \in \text{CUT}_n^\square$, то $\sum_S \lambda_S = 1$, т. е. $\mu(\Omega) = 1$, откуда следует, что $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ есть вероятностное пространство.

(ii) $\implies$ (i) Обратно, предположим, что $d_{ij} = \mu(A_i \triangle A_j)$ для $1 \leq i < j \leq n$, где $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ есть пространство с мерой и $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Положим

$$A^S := \bigcap_{i \in S} A_i \cap \bigcap_{i \notin S} (\Omega \setminus A_i)$$

для каждого $S \subseteq \{1, \dots, n\}$. Тогда

$$A_i = \bigcup_{S \mid i \in S} A^S, \quad A_i \triangle A_j = \bigcup_{S \mid |S \cap \{i, j\}| = 1} A^S \quad \text{и} \quad \Omega = \bigcup_S A^S.$$

Таким образом,

$$d = \sum_{S \subseteq \{1, \dots, n\}} \mu(A^S) \delta(S),$$

откуда следует, что d принадлежит разрезному конусу CUT_n . Кроме того, если $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — вероятностное пространство, т. е. если $\mu(\Omega) = 1$, то $\sum_S \mu(A^S) = 1$, откуда следует, что d принадлежит разрезному многограннику $\text{CUT}_n^\square$. ■

Предложение 4.2.2. Пусть $d \in \mathbb{R}^{E_n}$ и (V_n, d) — соответствующее пространство расстояний. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $d \in \text{CUT}_n$.
- (ii) (V_n, d) является ℓ_1 -вложимым, т. е. существуют n векторов $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ (для некоторого m), такие, что $d_{ij} = \|u_i - u_j\|_1$ для всех $1 \leq i < j \leq n$.

Доказательство. (i) $\implies$ (ii) Предположим, что $d \in \text{CUT}_n$. Тогда

$$d = \sum_{1 \leq k \leq m} \lambda_k \delta(S_k),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ и $S_1, \dots, S_m \subseteq V_n$. Для $1 \leq i \leq n$ определим вектор $u_i \in \mathbb{R}^m$ с компонентами $(u_i)_k = \lambda_k$, если $i \in S_k$, и $(u_i)_k = 0$ в противном случае, для $1 \leq k \leq m$. Тогда $d_{ij} = \|u_i - u_j\|_1$ для $1 \leq i < j \leq n$. Это показывает, что (V_n, d) является ℓ_1 -вложимым.

(ii) $\implies$ (i) Предположим, что (V_n, d) является ℓ_1 -вложимым, т. е. что существуют n векторов $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ (для некоторого $m \geq 1$), таких, что $d_{ij} = \|u_i - u_j\|_1$ для $1 \leq i < j \leq n$. Покажем, что $d \in \text{CUT}_n$. Из аддитивности ℓ_1 -нормы следует, что достаточно доказать это утверждение для случая $m = 1$. Следовательно, мы можем предположить, что $d_{ij} = |u_i - u_j|$, где $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности мы можем предположить также, что $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$. Тогда легко проверить, что

$$d = \sum_{1 \leq k \leq n-1} (u_{k+1} - u_k) \delta(\{1, 2, \dots, k-1, k\}).$$

Это показывает, что $d \in \text{CUT}_n$. ■

Замечание 4.2.3. Доказательство предложения 4.2.2 дает, на самом деле, следующий результат: если расстояние d на V_n может быть представлено в виде неотрицательной линейной комбинации m разрезных полуметрик, т. е. если $d = \sum_{k=1}^m \lambda_k \delta(S_k)$, где $\lambda_k \geq 0$ для всех k , то d является ℓ_1 -вложимым. ■

Имеет место и характеристизация полуметрик, вложимых в гиперкуб, аналогичная характеристизации предложения 4.2.2.

Предложение 4.2.4. Пусть $d \in \mathbb{R}^{E_n}$ и (V_n, d) — ассоциированное пространство расстояний. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $d = \sum_{S \subseteq V_n} \lambda_S \delta(S)$ для некоторых неотрицательных целых λ_S .
- (ii) (V_n, d) является вложимым в гиперкуб, т. е. существуют n векторов $u_1, \dots, u_n \in \{0, 1\}^m$ (для некоторого m), таких, что $d_{ij} = \|u_i - u_j\|_1$ для всех $1 \leq i < j \leq n$.
- (iii) Существует конечное множество Ω и n подмножеств $A_1, \dots, A_n$ множества Ω , таких что $d_{ij} = |A_i \triangle A_j|$ для всех $1 \leq i < j \leq n$.
- (iv) (V_n, d) является изометрическим подпространством пространства $(\mathbb{Z}^m, d_{\ell_1})$ для некоторого целого $m \geq 1$.

Доказательство. Доказательство (i) $\iff$ (ii) аналогично доказательству предложения 4.2.2. Именно, для (i) $\implies$ (ii) предположим, что $d = \sum_{k=1}^m \delta(S_k)$ (позволяя повторения). Рассмотрим бинарную $n \times m$ матрицу M , столбцами которой являются характеристические векторы множеств $S_1, \dots, S_m$. Если $u_1, \dots, u_n$ обозначают строки M , то имеет место соотношение $d = \|u_i - u_j\|_1$, дающее вложение (V_n, d) в гиперкуб размерности m . Обратно, для (ii) $\implies$ (i) рассмотрим матрицу M , строками которой являются n данных векторов $u_1, \dots, u_n$. Пусть $S_1, \dots, S_m$ есть подмножества множества $\{1, \dots, n\}$, и характеристические векторы которых являются столбцами M . Тогда имеет место соотношение $d = \sum_{k=1}^m \delta(S_k)$, дающее разложение d в неотрицательную целую комбинацию полуметрик разрезов.

Утверждение (iii) является переформулировкой (ii), импликация (iii) $\implies$ (iv) очевидна, а (iv) $\implies$ (i) следует из доказательства импликации (ii) $\implies$ (i) предложения 4.2.2. $\blacksquare$

Теперь мы установим связь с L_1 -пространствами.

Лемма 4.2.5. Пусть (X, d) есть пространство расстояний. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) (X, d) является L_1 -вложимым.
- (ii) (X, d) является подпространством полуметрического пространства с мерой $(\mathcal{A}_\mu, d_\mu)$ для некоторого пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Доказательство. Импликация (ii) $\implies$ (i) очевидна, так как $(\mathcal{A}_\mu, d_\mu)$ является подпространством $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Проверим, что (i) $\implies$ (ii). Достаточно показать, что каждое пространство $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ является подпространством пространства $(\mathcal{B}_\nu, d_\nu)$ некоторого пространства с мерой $(T, \mathcal{B}, \nu)$. Для этого положим $T := \Omega \times \mathbb{R}$, $\mathcal{B} := \mathcal{A} \times \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ есть семейство

борелевских подмножеств $\mathbb{R}$, и $\nu := \mu \otimes \lambda$, где λ есть мера Лебега на $\mathbb{R}$. Для $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ пусть

$$E(f) = \{(w, s) \in \Omega \otimes \mathbb{R} \mid s > f(w)\}$$

обозначает его эпиграф. Тогда отображение $f \mapsto E(f) \triangle E(0)$ задает изометрическое вложение из $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ в $(\mathcal{B}_\nu, d_\nu)$, так как имеет место соотношение $\|f - g\|_1 = \nu(E(f) \triangle E(g))$. ■

Следующий результат суммирует эквивалентные характеристики, полученные для членов разрезного конуса CUT_n .

Теорема 4.2.6. Пусть $d \in \mathbb{R}^{E_n}$ и (V_n, d) — его ассоциированное пространство расстояний. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $d \in \text{CUT}_n$.
- (ii) (V_n, d) ℓ_1 -вложимо.
- (iii) (V_n, d) L_1 -вложимо.
- (iv) Существует пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ и $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, такие что $d_{ij} = \mu(A_i \triangle A_j)$ для всех $1 \leq i < j \leq n$.
- (v) (V_n, d) является изометрическим подпространством пространства ℓ_1^∞ .

Рассмотрим теперь свойство выпуклости разрезных полуметрик, входящих в разложение ℓ_1 -вложимого расстояния. Нам понадобится новое определение.

Определение 4.2.7. Пусть (X, d) есть пространство расстояний. Подмножество $U \subseteq X$ называется d -выпуклым, если $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ и из того, что $x, y \in U$, следует, что $z \in U$.

Выпуклые множества естественным образом возникают в контексте ℓ_1 -метрик. Именно,

Лемма 4.2.8. Пусть (X, d) — ℓ_1 -вложимое пространство расстояний и пусть $d = \sum_{A \subseteq X} \lambda_A \delta(A)$, где $\lambda_A \geq 0$ для всех $A \subseteq X$. Тогда множества A и $X \setminus A$ являются d -выпуклыми для любой разрезной полуметрики $\delta(A)$, входящей в разложение с положительным коэффициентом $\lambda_A > 0$.

Доказательство. Результат следует из того, что любое равенство треугольника, выполняющееся на d , выполняется так же для любой разрезной полуметрики $\delta(A)$, входящей в разложение d . ■

Мы завершим раздел замечанием о том, как эквивалентность (i) $\iff$ (ii) предложения 4.2.4 может быть обобщена в контексте пространств Хамминга и мультиразрезов. Пусть $q \geq 2$ — некоторое целое число и пусть $S_1, \dots, S_q$ есть q попарно непересекающихся подмножеств V_n , образующих разбиение V_n , т. е. таких, что $S_1 \cup \dots \cup S_q = V_n$. Тогда *мультиразрезной полуметрикой* $\delta(S_1, \dots, S_q)$ называется вектор из $\mathbb{R}^{E_n}$, определенный как

$$\delta(S_1, \dots, S_q)_{ij} = 0, \text{ если } i, j \in S_h \text{ для некоторого } h, 1 \leq h \leq q,$$

$$\delta(S_1, \dots, S_q)_{ij} = 1, \text{ в противном случае}$$

для $1 \leq i < j \leq n$. Можно легко проверить следующее утверждение.

Предложение 4.2.9. Пусть $d \in \mathbb{R}^{E_n}$, пусть (V_n, d) — его ассоциированное пространство расстояний и пусть $q_1, \dots, q_k \geq 1$ — целые числа. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $d = \sum_{h=1}^k \delta(S_1^{(h)}, \dots, S_{q_h}^{(h)})$, где $(S_1^{(h)}, \dots, S_{q_h}^{(h)})$ есть разбиение V_n для каждого $h = 1, \dots, k$.
- (ii) (V_n, d) является изометрическим подпространством пространства Хэмминга $(\prod_{h=1}^k \{0, 1, \dots, q_h - 1\}, d_H)$. ■

Следовательно, мы вновь получаем эквивалентность (i) $\iff$ (ii) предложения 4.2.4 в случае, когда $q_1 = \dots = q_k = 2$. Заметим, что пространство Хэмминга $(\prod_{h=1}^k \{0, 1, \dots, q_h - 1\}, d_H)$ совпадает с графическим метрическим пространством графа $\prod_{h=1}^k K_{q_h}$ (граф, полученный как декартово произведение полных графов $K_{q_1}, \dots, K_{q_k}$). Заметим также, что

$$\delta(S_1, \dots, S_q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \delta(S_i)$$

для каждого разбиения $(S_1, \dots, S_q)$ множества V_n . Следовательно, каждое пространство Хэмминга ℓ_1 -вложимо со шкалой 2 (см. определение ниже).

Например, рассмотрим расстояние $d := (1, 1, 1, 2; 1, 2, 2; 2, 1; 1) \in \mathbb{R}^{E_5}$. Тогда пространство расстояний (V_5, d) является изометрическим подпространством пространства Хэмминга $(\{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}, d_H)$. Чтобы увидеть это, рассмотрим изометрическое вложение

$$i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \mapsto v_i \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\},$$

где $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (1, 0)$, $v_3 = (2, 0)$, $v_4 = (0, 1)$ и $v_5 = (2, 1)$. Равносильно, d можно представить как следующую сумму мультиразрезных полуметрик: $d = \delta(\{1, 4\}, \{2\}, \{3, 5\}) + \delta(\{1, 2, 3\}, \{4, 5\})$.

4.3. Реализации, жесткость, размер и шкала

Мы собрали здесь несколько определений, относящихся к ℓ_1 -вложимости и вложимости в гиперкуб. Именно, для ℓ_1 -метрики мы определяем понятия реализаций, жесткости, размера и шкалы.

Реализации. Мы определяем здесь понятия $\mathbb{R}_+$ - и $\mathbb{Z}_+$ -реализаций для ℓ_1 -метрики; они будут особенно часто использоваться в части 4.

Определение 4.3.1. Пусть d есть расстояние на V_n . Любое разложение

$$d = \sum_{S \subseteq V_n} \lambda_S \delta(S),$$

где $\lambda_S \geq 0$ (соответственно, $\lambda_S \in \mathbb{Z}_+$) для всех S , называется $\mathbb{R}_+$ -реализацией (соответственно, $\mathbb{Z}_+$ -реализацией) для d .

Следовательно, для ℓ_1 -вложимого расстояния d на V_n , мы можем говорить как о ℓ_1 -вложении d (которое состоит из n векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$), таких что $d_{ij} = \|v_i - v_j\|_1$ для всех $i, j \in V_n$), так и о $\mathbb{R}_+$ -реализации (которая является представлением d в виде неотрицательной линейной комбинации разрезных полуметрик).

Аналогично, если d является вложимым в гиперкуб, мы можем говорить как о вложении d в гиперкуб (которое состоит из векторов $v_1, \dots, v_n \in \{0, 1\}^m$ ($m \geq 1$), таких что $d_{ij} = \|v_i - v_j\|$ для всех $i, j \in V_n$), так и о $\mathbb{Z}_+$ -реализации (которая является представлением d в виде неотрицательной целой линейной комбинации разрезных полуметрик). Бинарная $n \times n$ матрица M , строками которой являются векторы $v_1, \dots, v_n$ (дающие вложение d в гиперкуб) называется *матрицей h -реализации* (или просто *матрицей реализации*) для d . Если $S_1, \dots, S_m$ обозначают подмножества V_n , характеристические векторы которых являются столбцами M , то $d = \sum_{j=1}^m \delta(S_j)$ является $\mathbb{Z}_+$ -реализацией d . Этот простой факт является основной идеей доказательства эквивалентности (i) $\iff$ (ii) в предложении 4.2.4.

Если $v_1, \dots, v_n$ есть ℓ_1 -вложение d , то $n \times t$ матрица M , строками которой являются векторы $v_1, \dots, v_n$, также называется *матрицей реализации* для d . Заметим, однако, что соответствующая $\mathbb{R}_+$ -реализация не может быть немедленно получена из M как в случае гиперкуба (мы видели в доказательстве предложения 4.2.2, как построить $\mathbb{R}_+$ -реализацию в этом случае).

Например, рассмотрим расстояние на V_4 , определенное как $d := (3, 1, 3; 4, 4; 2) \in \mathbb{R}^{E_4}$. Векторы $v_1 = (1, 1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 1, 1, 1, 1)$ дают гиперкубическое вложение d , соответствующее следующей $\mathbb{Z}_+$ -реализации d :

$$d = \delta(\{1, 2\}) + 2\delta(\{2\}) + \delta(\{4\}) + \delta(\{2, 4\}),$$

с ассоциированной матрицей реализации $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Жесткость. Пусть (V_n, d) есть пространство расстояний. Тогда (V_n, d) называется ℓ_1 -жестким, если допускает единственную $\mathbb{R}_+$ -реализацию. Аналогично, (V_n, d) называется h -жестким, если допускает единственную $\mathbb{Z}_+$ -реализацию. Как показывает следующий результат, понятие ℓ_1 -жесткости имеет прямое отношение к существованию симплициальных фасет разрезного конуса.

Лемма 4.3.2. Пусть $C := \mathbb{R}_+(v_1, \dots, v_p) \subseteq \mathbb{R}^m$ — конус, в котором каждый вектор v_i лежит на экстремальном луче C . Предположим, кроме того, что C не является симплициальным конусом. Тогда каждая внутренняя точка C допускает по меньшей мере два (на самом деле бесконечно много) различных разложения в неотрицательную линейную комбинацию генераторов $v_1, \dots, v_p$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что C является полноразмерным. Пусть $x \in C$ лежит внутри C . По теореме Каратеодори, $x = \sum_{h=1}^m \lambda_h v_{i_h}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ и $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ — линейно независимое подмножество множества $\{v_1, \dots, v_p\}$. Если $k \leq m-1$, то легко построить другое разложение x . (Действительно, пусть H — гиперплоскость, содержащая $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}, x$. Так как x — внутренняя точка C , H разрезает C на две непустые части и, следовательно, $x = y + z$, где y принадлежит одной части, а z другой.) Предположим теперь, что $k = m$. Так как C несимплициальный конус, мы имеем $p \geq k+1$, т. е. существует $v_{k+1} \in \{v_1, \dots, v_p\} \setminus \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$. Так как множество $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v_{k+1}\}$ линейно зависимо, существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, такие что $\sum_{h=1}^k \alpha_h v_{i_h} + v_{k+1} = 0$. Тогда $x = \sum_{h=1}^m (\lambda_h + \lambda \alpha_h) v_{i_h} + \lambda v_{k+1}$ является другим разложением x , если положить $\lambda := 1$ в случае, когда все α_h неотрицательны, и $\lambda := \min\left(-\frac{\lambda_h}{\alpha_h} \mid \alpha_h < 0\right)$ в противном случае. ■

Следствие 4.3.3. Следующие утверждения эквивалентны для пространства расстояний (V_n, d) .

- (i) (V_n, d) ℓ_1 -жестко, т. е. имеется единственный способ разложения d в неотрицательную линейную комбинацию ненулевых разрезных полуметрик.
- (ii) d лежит на симплицальной грани CUT_n .

Доказательство. Импликация (ii) $\implies$ (i) очевидна, в то время как (i) $\implies$ (ii) следует из леммы 4.3.2, примененной к наименьшей грани CUT_n , содержащей d . ■

Понятие h -жесткости может быть переформулировано в терминах матриц h -реализации. Пусть (V_n, d) есть пространство расстояний, вложимое в гиперкуб. Пусть M есть матрица h -реализации для (V_n, d) . Следующие операции (а), (б), (в) на M дают новые матрицы h -реализации для (V_n, d) :

- (а) Перестановка столбцов M .
- (б) Прибавление по модулю 2 бинарного вектора к каждой строке M .
- (в) Добавление к M или удаление из M столбца, являющегося нулевым вектором или вектором, состоящим из одних единиц.

Два гиперкубических вложения (V_n, d) называются *эквивалентными*, если их матрицы реализации могут быть получены одна из другой с помощью операций (а), (б), (в). Тогда (V_n, d) является h -жестким тогда и только тогда, когда оно имеет единственное вложение в гиперкуб, с точностью до эквивалентности.

ℓ_1 - и h -размер. Рассмотрим теперь понятие ℓ_1 -размера и h -размера. Предположим, что d — расстояние на V_n . Если $d = \sum_{\emptyset \neq S \subset V_n} \lambda_S \delta(S)$ есть разложение d в линейную комбинацию ненулевых разрезных полуметрик, то величина $\sum_{\emptyset \neq S \subset V_n} \lambda_S$ называется его *размером*. Кроме того, если d ℓ_1 -вложимо, то величина

$$s_{\ell_1}(d) := \min \left(\sum_{\emptyset \neq S \subset V_n} \lambda_s \mid d = \sum_{\emptyset \neq S \subset V_n} \lambda_s \delta(S) \text{ с } \lambda_S \geq 0 \text{ для всех } S \right)$$

называется *минимальным ℓ_1 -размером d* . Аналогично, если d вложимо в гиперкуб, то

$$s_h(d) := \min \left(\sum_{\emptyset \neq S \subset V_n} \lambda_s \mid d = \sum_{\emptyset \neq S \subset V_n} \lambda_s \delta(S) \text{ с } \lambda_S \in \mathbb{Z}_+ \text{ для всех } S \right)$$

называется *минимальным h -размером d* . Этот параметр имеет следующую интерпретацию: минимальный h -размер d равен минимальной размерности гиперкуба, в который d может быть изометрически вложено.

Можно легко получить некоторые границы для величины $s_{\ell_1}(d)$. Предположим, что $d = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq V_n} \lambda_S \delta(S)$ с $\lambda_S \geq 0$ для всех S . Так как $n - 1 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \delta(S)(i, j) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ для каждого подмножества $S \neq \emptyset, V_n$, мы получаем

$$(4.3.6) \quad \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j)}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \leq \sum_{\emptyset \neq S \subseteq V_n} \lambda_S \leq \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j)}{n - 1}.$$

Кроме того, равенство для нижней границы (4.3.6) имеет место в том и только в том случае, когда разложение d использует только эквиразрезы (т. е. $\lambda_S \neq 0$ только если $|S| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$), и равенство для верхней границы имеет место в том и только в том случае, когда разложение d использует только звездные разрезы (т. е. $\lambda_S \neq 0$ только если $|S| = 1$).

Пример 4.3.7. Пусть $2\mathbb{1}_n$ обозначает эквидистантную метрику на V_n , принимающую значение 2 на всех парах. Тогда $2\mathbb{1}_n$ является ℓ_1 -жесткой тогда и только тогда, когда $n = 3$. Действительно, $2\mathbb{1}_3$ является ℓ_1 -жесткой, так как конус разрезов CUT_3 является симплицальным конусом, и $2\mathbb{1}_n$ не ℓ_1 -жестка для $n \geq 4$, так как

$$2\mathbb{1}_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \delta(\{i\}) = \frac{1}{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \delta(\{i, j\})$$

имеет две различных $\mathbb{R}_+$ -реализации.

С другой стороны, $2\mathbb{1}_n$ является h -жесткой тогда и только тогда, когда $n \neq 4$, и ее единственная $\mathbb{Z}_+$ -реализация имеет вид $2\mathbb{1}_n = \sum_{i=1}^n \delta(\{i\})$; см. теорему 22.0.6. Метрика $2\mathbb{1}_4$ имеет дополнительную $\mathbb{Z}_+$ -реализацию, именно, $2\mathbb{1}_4 = \delta(\{1, 2\}) + \delta(\{1, 3\}) + \delta(\{1, 4\})$.

Следовательно, $s_h(2\mathbb{1}_n) = n$ для $n \neq 4$ и $s_h(2\mathbb{1}_4) = 3$. С другой стороны, $s_{\ell_1}(2\mathbb{1}_n) = \frac{4(n-1)}{n}$, если n четное и $s_{\ell_1}(2\mathbb{1}_n) = \frac{4n}{n+1}$, если n нечетное. ■

Используя теорему двойственности линейного программирования, минимальный ℓ_1 -размер можно выразить как

$$s_{\ell_1}(d) = \max(v^T d \mid v \in \mathbb{R}^{E_n}, v^T \delta(S) \leq 1 \text{ для всех } S \subseteq V_n).$$

Ясно, что в этой задаче максимизации достаточно рассмотреть векторы $v \in \mathbb{R}^{E_n}$, для которых неравенство $v^T x \leq 1$ определяет фасету многогранника разрезов $\text{CUT}_n^\square$.

В качестве иллюстрации упомянем точную формулировку для $s_{\ell_1}(d)$ в случае $n \leq 5$. Все фасеты CUT_n известны для $n \leq 5$. А именно, они определяются неравенствами треугольника (3.1.1), если $n \leq 4$, и они определяются неравенствами треугольника (3.1.1) вместе с пентагональными неравенствами (6.1.9), если $n = 5$. Это позволяет получить, что для $d \in \text{CUT}_4$

$$s_{\ell_1} = \max \left(\frac{d(i, j) + d(i, k) + d(j, k)}{2} \mid 1 \leq i < j < k \leq 4 \right)$$

и для $d \in \text{CUT}_5$

$$s_{\ell_1}(d) = \max \left(\frac{d(i, j) + d(i, k) + d(j, k)}{2} \mid 1 \leq i < j < k \leq 5; \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq 5} d(i, j)}{6}; \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq 5} d(i, j) - 2 \sum_{1 \leq j < 5, j \neq i} d(i, j)}{2} \mid 1 \leq i \leq 5 \right).$$

Шкала. Следующий результат является непосредственным следствием предложений 4.2.2 и 4.2.4.

Предложение 4.3.8. Пусть (V_n, d) — пространство расстояний, где d принимает только рациональные значения. Тогда (V_n, d) ℓ_1 -вложимо тогда и только тогда, когда $(V_n, \eta d)$ вложимо в гиперкуб для некоторого скаляра η . ■

Пусть d — расстояние на V_n , которое принимает только рациональные значения и ℓ_1 -вложимо. Каждое целое η , для которого $(V_n, \eta d)$ вложимо в гиперкуб, называется *шкалой* (V_n, d) ; тогда мы говорим также, что d вложимо в гиперкуб со шкалой η . Наименьшее такое η называется *минимальной шкалой* и обозначается $\eta(d)$.

Легко видеть, что все целочисленные ℓ_1 -вложимые расстояния на V_n допускают единую шкалу.

Лемма 4.3.9. Существует целое α , такое что αd вложимо в гиперкуб для каждого ℓ_1 -вложимого расстояния d на V_n , принимающего только целые значения.

Доказательство. Пусть X — множество линейно независимых разрезных полуметрик на V_n , пусть M_X обозначает матрицу, столбцы которой являются элементами X , и пусть α_X обозначает наименьшую абсолютную величину определителя $|X| \times |X|$ несингулярной подматрицы матрицы M_X . Тогда мы определим α как наименьшее общее кратное

целых α_X (для произвольного множества линейно независимых полуметриков разрезов). Это целое α удовлетворяет лемме. Действительно, пусть d — целочисленное ℓ_1 -вложимое расстояние на V_n . По теореме Каратеодори d можно разложить как $d = \sum_{\delta(S) \in X} \lambda_S \delta(S)$, где X есть множество линейно независимых разрезов полуметриков и $\lambda_S > 0$ для всех S . Пусть A есть несингулярная подматрица M_X с $|\det A| = \alpha_X$, пусть E обозначает множество индексов для строк A и пусть $d_E := (d_{ij})_{ij \in E}$. Тогда $A\lambda = d_E$, т. е. $\lambda = A^{-1}d_E$. Применяя правило Крамера, мы получим, что $(\det A)\lambda$ является целым числом. Это показывает, что αd вложимо в гиперкуб. ■

Из вышеприведенного доказательства можно получить следующую (очень грубую) верхнюю границу

$$\eta(d) \leq \binom{n}{2}!$$

для минимальной шкалы целочисленного ℓ_1 -вложимого расстояния d на V_n (так как определитель $k \times k$ бинарной матрицы меньше или равен $k!$ по абсолютной величине).

Определим η_n как наименьшее целое η , такое что ηd вложимо в гиперкуб для любого ℓ_1 -вложимого целочисленного расстояния d на V_n , удовлетворяющего условию

$$d(i, j) + d(i, k) + d(j, k) \in 2\mathbb{Z} \quad \text{для всех } i, j, k \in V_n.$$

(Это условие требует, чтобы d могло быть разложено как *целая* сумма полуметриков разрезов, и очевидно необходимо для вложимости в гиперкуб; см. предложение 25.1.1.) Следовательно, $\eta_n \leq \prod_{k=1}^{\binom{n}{2}} k!$. На самом деле, как мы увидим в разделе 25.2, $\eta_n = 1$ для $n \geq 5$ и $\eta_6 = 2$.

4.4. Вопросы сложности

Здесь мы формулируем несколько основных проблем, относящихся к разрезовым полуметрикам, и определяем их статус сложности. Типичным путем проверки того, что данная задача (P) является NP-трудной, является проверка того, что некоторая известная NP-сложная задача (P0) полиномиально сводится к ней. Как отправную точку мы используем следующую хорошо известную задачу:

(P0) Задача разбиения.

Объект: неотрицательный целый вектор $b = (b_1, \dots, b_n)$.

Вопрос: можно ли разбить b , т. е. существует ли такое множество $S \subseteq V_n$, что $\sum_{i \in S} b_i = \sum_{i \in V_n \setminus S} b_i$?

Сложность: NP-сложная (Карп [1975]).

(P1) Задача о максимальном разрезе (версия существования решения).

Объект: вектор $w \in \mathbb{Z}_+^{E_n}$ и $K \in \mathbb{Z}_+$.

Вопрос: существует ли $S \subseteq V_n$, такое что $w^T \delta(S) \geq K$?

Сложность: NP-сложная (Карп [1975]).

Доказательство. Очевидно, что (P1) лежит в NP. Чтобы доказать, что (P1) является NP-сложной, достаточно заметить (следуя Карпу [1975]), что (P0) полиномиально сводится к ней. Действительно, для данных целых $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}$, определим $w \in \mathbb{Z}^{E_n}$ и $K \in \mathbb{Z}_+$ как $w_{ij} := b_i b_j$ (для $ij \in E_n$) и $K := \frac{1}{4}(\sum_{i=1}^n b_i)^2$. Тогда, для $S \subseteq V_n$, $w^T \delta(S) = (\sum_{i \in S} b_i)(\sum_{i \in V_n \setminus S} b_i) \geq K$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i \in S} b_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i$, т. е. если вектор b может быть разбит. ■

(P2) Задача о максимальном разрезе (оптимизационная версия).

Объект: вектор $w \in \mathbb{Z}_+^{E_n}$.

Вопрос: Найти $S \subseteq V_n$, для которого $w^T \delta(S)$ является максимальным.

Сложность: NP-трудная.

Являясь NP-трудной в общем случае, задача о максимальном разрезе может быть очень легкой для некоторых классов весовых функций. Удобно представлять весовую функцию с помощью соответствующего графа (с ребрами на парах с ненулевым весом). Заметим сначала, что задача о максимальном разрезе остается NP-трудной, когда мы сужаем ее до весовых функций со значениями 0, 1 и до каждого из следующих классов графов: кубических графов (Яннакакис [1978]), графов с ребром, удаление которого дает планарный граф (Барахона [1982]), хордовых графов, тридольных графов, дополнений двудольных графов (Бодлендер и Янсен [1994]). С другой стороны, задача о максимальном разрезе может быть решена в полиномиальное время для некоторых классов графов; например, для планарных графов (Орлова и Дорфман [1972], Хадлок [1975]), в более общем случае для графов без K_5 -минора (Барахона [1983]), а также для графов данного рода с весами ± 1 (Барахона [1981]). (Смотрите также раздел 27.3.2.)

Далее, мы рассмотрим сложность задачи отделения от разрезного конуса CUT_n , так как это даст нам возможность определить сложность проблемы ℓ_1 -вложимости.

(P3) Задача отделения для разрезного конуса.

Объект: рациональное расстояние d на V_n .

Вопрос: принадлежит ли d разрезному конусу CUT_n ? Если нет, найти $a \in \mathbb{Q}^{E_n}$, такое что $a^T d > 0$ и $a^T \delta(S) \leq 0$ для всех $S \subseteq V_n$.

Сложность: NP-трудная (Карзанов [1985]).

Доказательство. Пусть $P_n := \text{CUT}_n \cap \{x \mid \sum_{ij \in E_n} x_{ij} \leq 1\}$. Сначала мы покажем, что проблема (P1) может быть полиномиально сведена к проблеме оптимизации над P_n . Для этого предположим, что даны $w \in \mathbb{Z}_+^{E_n}$ и $K \in \mathbb{Z}_+$. Для $s \neq t \in V_n$ определим новую весовую функцию $w^{st} \in \mathbb{Z}^{E_n}$ как

$$w_{ij}^{st} := \begin{cases} -w_{ij}, & \text{если } i, j \in V_n \setminus \{s, t\}, \\ -w_{ij} + M, & \text{если } i \in \{s, t\}, j \in V_n \setminus \{s, t\}, \\ -w_{ij} + K - 1 - M(n-2), & \text{если } ij = st, \end{cases}$$

для $ij \in E_n$, где $M := \sum_{ij \in E_n} w_{ij}$. Заметим, что $(w^{st})^T \delta(S) = -w^T \delta(S) + K - 1$, если $\delta(S)_{st} = 1$ и что $(w^{st})^T \delta(S) \geq 0$, если $\delta(S)_{st} = 0$. Следовательно, если $\delta(S)_{st} = 1$, то $w^T \delta(S) \geq K$ тогда и только тогда, когда $(w^{st})^T \delta(S) < 0$. Следовательно, для решения (P1) достаточно решить проблему:

$$\min_{x \in P_n} (w^{st})^T x$$

для каждой из $\binom{n}{2}$ пар $st \in E_n$ и проверить, не является ли минимум отрицательным. Так как (P1) является NP-сложной, мы получаем, что задача оптимизации над P_n является NP-трудной. Используя результаты из Грётшель, Ловас и Скрайвер [1988] (именно, полиномиальную эквивалентность между задачами оптимизации и отделения над полиэдрами), мы получаем, что задача отделения для P_n является NP-трудной. Так как задача отделения над P_n очевидно эквивалентна задаче отделения над CUT_n , мы получаем, что (P3) является NP-трудной. ■

(P5) Задача вложимости.

Объект: Рациональное расстояние d на V_n . *Вопрос:* Принадлежит ли d разрезному конусу CUT_n (т. е. является ли d ℓ_1 -вложимым)?

Сложность: NP-сложная (Авис и Деза [1991]).

Доказательство. Сначала мы проверим, что (P5) лежит в NP. Действительно, если $d \in \text{CUT}_n$, то d можно разложить как $d = \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta(S_i)$ для некоторых неотрицательных скаляров α_i , где $m \leq \binom{n}{2}$ (по теореме Каратеодори). Тогда многогранник $\{\alpha \in \mathbb{R}_+^m \mid d = \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta(S_i)\}$ непуст. Следовательно, он содержит рациональный вектор α , размер

которого полиномиально ограничен n и размером d (используем теорему 10.1 в Скрайвер [1991a]). Следовательно, это α свидетельствует о том, что проверка может быть проведена в полиномиальное (по размеру d) время. Это показывает, что (P5) лежит в NP. Теперь мы можем сказать, что (P5) является NP-сложной, так как задача отделения (P3) является NP-трудной. Действительно, снова рассмотрим многогранник $P_n = \text{CUT}_n \cap \{x \mid \sum_{ij \in E_n} x_{ij} \leq 1\}$ вместо CUT_n . Так как P_n является полноразмерным ограниченным многогранником, для которого мы знаем внутреннюю точку (например, $\frac{1}{\binom{n}{2} + 1} \mathbb{1}_n$), из общих результатов в Грётшель, Ловас и Скрайвер [1988] следует, что задача отделения для P_n полиномиально сводится к задаче принадлежности к P_n (используя, в частности, (4.3.11) и теоремы 6.3.2 и 6.4.9). ■

(P6) Задача гиперкубической вложимости.

Объект: Целое расстояние d на V_n .

Вопрос: Вложимо ли d в гиперкуб?

Сложность: NP-трудная; NP-сложная, когда d имеет точку с расстояниями 3 до всех других точек, и все остальные расстояния принадлежат множеству $\{0, 2, 4, 6\}$ (Хватал [1980]; см. теорему 24.1.8).

Многие другие задачи, относящиеся к разрезным полуметрикам, являются трудными задачами. Например, таковы задачи вычисления минимального ℓ_1 -размера $s_{\ell_1}(d)$ для ℓ_1 -вложимого расстояния d или вычисления минимального h -размера $s_h(d)$ для расстояния d , вложимого в гиперкуб. Например, рассмотрим эквидистантную метрику $d = 2t\mathbb{1}_{t^2+t+1}$ (на $t^2 + t + 1$ точках). Тогда вычисление минимального h -размера d будет давать ответ на вопрос о существовании конечных проективных плоскостей. Действительно, можно показать, что $s_h(d) \geq t^2 + t + 1$, с равенством тогда и только тогда, когда существует проективная плоскость порядка t (см. раздел 23.3). Из тех же соображений, вычисление минимальной шкалы для $d \in \text{CUT}_n$ также является трудной задачей. Если d_n обозначает расстояние на V_n , принимающее значение 1 для всех пар, исключая значение 2 для единственной пары, то

$$\eta(d_n) = 2 \min(t \mid 4t \geq s_h(2t\mathbb{1}_n))$$

(см. (7.4.5)). Следовательно, мы опять пришли к вопросу вычисления минимального h -размера эквидистантной метрики. Дополнительные детали об этих примерах можно найти в разделе 7.4.

Нахождение полного линейного описания разрезного конуса CUT_n (или разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$) также является трудной задачей. Используя NP-сложность задачи о максимальном разрезе, из

результата Карпа и Пападимитриу [1982] следует, что не существует линейного описания CUT_n (или $\text{CUT}_n^\square$) полиномиальной длины, если только $\text{NP} \neq \text{co-NP}$.

Следовательно, многие вопросы о разрезных полиэдрах являются трудными. Однако, мы представим в этой книге несколько результатов, связанных с примерами задач, когда эти вопросы становятся доступными. Например, хотя задача гиперкубического вложения является NP-трудной для произвольных расстояний, она может быть решена в полиномиальное время для некоторых классов метрик; несколько таких классов описаны в главе 24. Полное линейное описание для разрезного конуса CUT_n неизвестно для всех n ; однако известны большие классы допустимых неравенств и фасет (дающие полное линейное описание для $n \leq 7$); см. часть 5. Кроме того, для некоторых классов метрик известные классы неравенств уже достаточны для характеристики ℓ_1 -вложимости; см. замечание 6.3.5. Как было замечено выше, для некоторых специальных примеров весовых функций задача о максимальном разрезе становится решаемой в полиномиальное время. Мы рассмотрим также несколько классов допустимых для разрезного конуса неравенств, для которых проблема отделения может быть решена в полиномиальное время (см. раздел 29.5); следовательно, эти системы неравенств дают хорошо описываемое линейное расширение многогранника разрезов, что может быть использовано для аппроксимации задачи о максимальном разрезе.

4.5. Приложение к статистической физике

Мы опишем здесь приложение задачи о максимальном разрезе к одной задаче, возникающей в статистической физике; именно, к задаче определения основных состояний системы спинов.

Мы начнем с переформулировки задачи о максимальном разрезе (4.1.4) в виде следующей квадратичной задачи ± 1 -оптимизации:

$$(4.5.1) \quad \max_{x \in \{\pm 1\}^n} \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} w_{ij} (1 - x_i x_j).$$

(Действительно, при $S := \{i \in [1, n] \mid x_i = 1\}$ для $x \in \{\pm 1\}^n$, весовая функция определяет вес $w^T \delta(S)$ соответствующего разреза.) Задача, которую мы обсудим ниже, будет иметь вид (4.5.1).

Одной из центральной тем в физике является исследование свойств спиновых систем. Было предложено много теорий с целью моделирования спиновых систем и объяснения их поведения. Одной из наиболее часто используемых моделей является модель Изинга, как из-за ее простоты, так и из-за ее точности в представлении ситуаций реального мира. Как мы увидим позднее¹⁾, некоторые аспекты этой модели приводят к задачам оптимизации вида (4.5.1).

Спиновая система реализуется в сплаве магнитных примесей, растворенных в немагнитном металле. Сплавами, обладающими поведением спиновой системы, являются, например, Cu Mn, металлический кристалл Au Fe, или изолятор Eu Sr S. При очень низких температурах спиновая система достигает состояния с минимальной энергией, называемого основным состоянием. Это состояние может быть найдено минимизацией гамильтониана, представляющего полную энергию системы. Оказывается, эта задача есть задача о максимальном разрезе в некотором графе.

Предположим, что данная система спинов состоит из n магнитных примесей (атомов). Каждый магнитный атом i имеет магнитную ориентацию (спин), который, в модели Изинга, представлен переменной $s_i \in \{\pm 1\}$ (подразумевающей Северный магнитный полюс «вверх» или «вниз»). Между любой парой i, j атомов имеется взаимодействие J_{ij} , которое зависит от немагнитного материала и расстояния r_{ij} между атомами. Ориентация внутреннего магнитного поля представлена переменной $s_0 \in \{\pm 1\}$ и его сила константой h . Тогда энергия системы дается гамильтонианом:

$$H := - \sum_{1 \leq i < j \leq n} J_{ij} s_i s_j - h \sum_{i=1}^n s_0 s_i.$$

Нахождение состояния с минимальной энергией есть задача:

$$\min_{s \in \{\pm 1\}^{n+1}} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} J_{ij} s_i s_j - h \sum_{i=1}^n s_0 s_i,$$

которая легко может быть приведена к виду (4.5.1). Таким образом, мы получаем пример задачи о максимальном разрезе.

¹⁾ Читатель может обратиться к Барахоне, Грётшелю, Юнгеру и Райнелту [1988], или Годзилу, Грётшелю и Уэлшу [1995] за дополнительными сведениями по этой теме, и к Мезарду, Паризи и Виразоро [1987] для введения в общую теорию спин-частиц.

Так как взаимодействие J_{ij} убывает при убывании расстояния r_{ij} , можно положить $J_{ij} = 0$ для далеко расположенных атомов. Кроме того, есть два пути получения взаимодействий J_{ij} , которые интенсивно исследуются гауссовская модель, где J_{ij} выбраны в соответствии с гауссовским распределением, и $\pm J$ -модель, где взаимодействия принимают только два значения $\pm J$ (согласно некоторому распределению). Можно также предположить, что атомы равномерно расположены на 2- или 3-мерной квадратной решетке; тогда взаимодействия между атомами не равны нулю только на ребрах решетки. В этой модели задача нахождения основных состояний системы спинов формулируется как задача о максимальном разрезе на графе, который совпадает с этой 2- или 3-мерной решеткой плюс универсальная вершина (соответствующая внутреннему магнитному полю), соединенная со всеми вершинами решетки.

Задача о максимальном разрезе на этом графе является NP-трудной, как упоминалось ранее в разделе 4.4. На самом деле, если исключить влияние внутреннего магнитного поля, задача остается NP-трудной в 3-мерном случае (Барахона [1982]), но становится полиномиальной в 2-мерном случае (так как 2-мерная решетка является планарным графом). Интересно, что классическая техника, используемая Орловой и Дорфманом [1972] при решении задачи о максимальном разрезе на планарных графах (сведение проблемы к проблеме «китайского почтальона» в дуальном графе) была независимо открыта в области физики Тулузом [1977].

Статья Тулуза вместе с работами Бише, Мейнарда, Раммала и Ури [1980] и Барахона, Мейнарда, Раммала и Ури [1982] являются первыми в исследовании спиновых систем с точки зрения оптимизации. С тех пор было предпринято множество попыток нахождения алгоритма, позволяющего вычислить точные основные состояния системы спинов, в упоминавшиеся ранее случаях. Эти алгоритмы по существу являются алгоритмами типа «ветвей и отсечений» и используют знания о разрезном многограннике (в частности, циклические неравенства, представленные в разделе 27.3.1). Вычислительные результаты можно найти в Грётшель, Юнгер и Райнелт [1987], Барахона, Грётшель, Юнгер и Райнелт [1988], Барахона, Юнгер и Райнелт [1989], Барахона [1994], Де Симоне, Диль, Юнгер, Муцель, Райнелт и Ринальди [1995, 1996] и в статьях, цитируемых в этих работах.

Глава 5.

Корреляционный конус и $\{0, 1\}$ -ковариантности

Здесь мы вводим другое множество полиэдров: корреляционный конус и корреляционный многогранник, которые рассматривались в литературе в связи с несколькими различными проблемами (среди них теория вероятностей, квантовая логика, или оптимизация). Корреляционные полиэдры эквивалентны, с точностью до линейной биекции, разрезным полиэдрам. Как следствие, любой результат о разрезных полиэдрах имеет прямой аналог для корреляционных полиэдров, и наоборот. Эти связи в деталях рассмотрены в разделах 5.2 и 5.3, а приложение к булевой задаче в теории вероятностей описано в разделе 5.4.

5.1. Корреляционные конус и многогранник

Как и ранее, положим $V_n = \{1, \dots, n\}$, и пусть $E_n = \{ij \mid i, j \in V_n, i \neq j\}$ обозначает множество неупорядоченных пар элементов из V_n . В дальнейшем мы часто будем идентифицировать V_n с множеством диагональных пар ii для $i = 1, \dots, n$. Другими словами, вектор $p \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$ можно индексировать парами ij для $1 \leq i \leq j \leq n$.

Главными объектами этого раздела являются корреляционные конус и многогранник, к введению которых мы сейчас и переходим. Пусть S — подмножество множества V_n . Определим вектор $\pi(S) = (\pi(S)_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$ как

$$(5.1.1) \quad \pi(S)_{ij} = 1, \quad \text{если } i, j \in S \quad \text{и} \quad \pi(S)_{ij} = 0 \quad \text{в противном случае,}$$

для $1 \leq i \leq j \leq n$; $\pi(S)$ называется *корреляционным вектором*. Конус в $\mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$, порожденный корреляционными векторами $\pi(S)$ для $S \subseteq V_n$,

называется *корреляционным конусом* и обозначается COR_n . Многогранник в $\mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$, определяемый как выпуклая оболочка корреляционных векторов $\pi(S)$ для $S \subseteq V_n$, называется *корреляционным многогранником* и обозначается $\text{COR}_n^\square$. Следовательно,

(5.1.2)

$$\text{COR}_n = \left\{ \sum_{S \subseteq V_n} \lambda_S \pi(S) \mid \lambda_S \geq 0 \text{ для всех } S \subseteq V_n \right\},$$

(5.1.3)

$$\text{COR}_n^\square = \left\{ \sum_{S \subseteq V_n} \lambda_S \pi(S) \mid \sum_{S \subseteq V_n} \lambda_S = 1 \text{ и } \lambda_S \geq 0 \text{ для всех } S \subseteq V_n \right\}.$$

Иногда бывает удобно рассматривать вместо V_n произвольное конечное множество X . Тогда корреляционный конус обозначается $\text{COR}(X)$, а корреляционный многогранник обозначается $\text{COR}^\square(X)$. Следовательно,

$$\text{COR}(V_n) = \text{COR}_n \quad \text{и} \quad \text{COR}^\square(V_n) = \text{COR}_n^\square.$$

Заметим, что $\pi(S)$ совпадает с верхней треугольной частью (включая диагональ) матрицы $(\chi^S)(\chi^S)^T$, где $\chi^S \in \{0, 1\}^n$ обозначает характеристический вектор множества S . Следовательно, неравенства, допустимые для COR_n , могут быть интерпретированы как симметрические $n \times n$ формы, неотрицательные на бинарных аргументах; эта точка зрения использована в Деза [1973a].

Корреляционный многогранник рассматривается в литературе в связи с проблемами, возникающими в различных областях. Ниже мы упомянем некоторые из них.

Корреляционный многогранник играет, например, важную роль в комбинаторной оптимизации. Действительно, он позволяет сформулировать хорошо известную NP-трудную задачу оптимизации, а именно, *задачу квадратичного 0-1-программирования без ограничений*:

$$(5.1.4) \quad \max_{x \in \{0, 1\}^n} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij} x_i x_j$$

(где $c_{ij} \in \mathbb{R}$ для всех i, j). Ясно, что эта проблема может быть переформулирована в виде

$$\max_{p \in \text{COR}_n^\square} c^T p.$$

Имеется много работ, посвященных этой задаче; мы упомянем некоторые из них, например, Де Симоне [1989], Исаченко [1989], Падберг [1989],

Борош и Хаммер [1991, 1993], Буассен [1994]. В этих работах многогранник $\text{COR}_n^\square$ чаще называется *булевым квадратичным многогранником*.

Как будет показано ниже в разделе 5.3, члены $\text{COR}_n^\square$ можно интерпретировать как совместные корреляции событий в некотором вероятностном пространстве. Этот факт объясняет название «корреляционный многогранник», которое было введено Питовским [1986]. Для $n = 3$ корреляционный многогранник $\text{COR}_3^\square$ назван там многогранником Бэлла–Вигнера. В этом контексте корреляционный многогранник возникает в связи с булевой проблемой, которую мы обсудим в разделе 5.4. Эта интерпретация была независимо открыта несколькими авторами, в частности, Мак Раэ и Дэвидсоном [1972], Ассуадом [1979, 1980b], Питовским [1986, 1989, 1991], и так далее. Интересно, что эти авторы пришли к ней из разных математических областей, от математической физики и квантовой логики до анализа.

Корреляционный многогранник возникает также в области квантовой механики в связи с так называемой проблемой представимости для матриц плотности второго порядка. Эти матрицы были введены как средство для представления физических свойств системы частиц (см. Лёвдин [1955]). Именно, изучение некоторых их свойств (в частности, диагональных элементов) ведет к рассмотрению корреляционного многогранника. Смотри, например, Йоселовф и Кун [1969], Мак Раэ и Дэвидсон [1972]. Имеется большая литература по этой теме; мы отсылаем читателя к Деа и Лоран [1994b, 1994c], где дан детальный обзор этих связей с обширной библиографией. Другой пример, в котором возникает корреляционный многогранник (точнее, его поляр), связан с изучением двухчастных операторов (см. Эрдал [1987]).

Корреляционный конус (или многогранник) очень тесно связан с разрезным конусом (или многогранником). На самом деле, корреляционный конус (или многогранник) есть ни что иное, как образ разрезного конуса (или многогранника) при линейном биективном отображении. Мы опишем это отображение в разделе 5.2. Как следствие, мы получим несколько характеристик элементов корреляционного конуса и многогранника, которые являются двойниками характеристик, данных в предыдущем разделе для разрезных полиэдров; см. раздел 5.3. Приложение к булевой проблеме мы рассмотрим в разделе 5.4. Булева проблема может быть сформулирована следующим образом: Для данных n событий $A_1, \dots, A_n$ вероятностного пространства, найти хорошие оценки для вероятности $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ их объединения в терминах вероятностей $\mu(A_i \cap A_j)$ их пересечений (или в терминах вероятностей пересечений высшего порядка).

Другим следствием соответствия между корреляционными полиэдрами и разрезными полиэдрами является эквивалентность задачи о максимальном разрезе (4.1.4) и задачи квадратичного 0 – 1-программирования без ограничений (5.1.4). В частности, последняя проблема также является NP-трудной.

5.2. Ковариантное отображение

Простым, но фундаментальным свойством является то, что разрезный конус CUT_{n+1} (соответственно, разрезный многогранник $\text{CUT}_n^\square$) находится во взаимно-однозначном соответствии с корреляционным конусом COR_n (соответственно, с корреляционным многогранником $\text{COR}_n^\square$) при ковариантном отображении, определенном ниже.

Рассмотрим отображение

$$\xi: \mathbb{R}^{E_{n+1}} \mapsto \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$$

из пространства $\mathbb{R}^{E_{n+1}}$ (индексированного $\binom{n+1}{2}$ парами элементов из V_{n+1}) в пространство $\mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$ (индексированное n диагональными парами элементов из V_n и $\binom{n}{2}$ парами различных элементов из V_n), определенное следующим образом:

$$p = \xi(d)$$

для $d = (d_{ij})_{1 \leq i < j \leq n+1}$ и $p = (p_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ с

$$(5.2.1) \quad \begin{cases} p_{ii} = d_{i,n+1} & \text{для } 1 \leq i \leq n, \\ p_{ij} = \frac{1}{2}(d_{i,n+1} + d_{j,n+1} - d_{ij}) & \text{для } 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

или, что равносильно,

$$(5.2.2) \quad \begin{cases} d_{i,n+1} = p_{ii} & \text{для } 1 \leq i \leq n, \\ d_{ij} = p_{ii} + p_{jj} - 2p_{ij} & \text{для } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Отображение ξ называется *ковариантным отображением*. Заметим, что элемент $n+1$ играет особую роль в определении ξ ; если мы хотим подчеркнуть этот факт, мы обозначаем ξ через ξ_{n+1} и говорим, что ξ_{n+1} является ковариантным отображением, *отмеченным на позиции* $n+1$. Отображение ξ очевидно является линейной биекцией из $\mathbb{R}^{V_{n+1}}$ в $\mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$. Можно легко проверить, что для каждого подмножества S множества V_n ,

$$\xi(\delta(S)) = \pi(S).$$

Следовательно,

$$(5.2.3) \quad \xi(\text{CUT}_{n+1}) = \text{COR}_n \quad \text{и} \quad \xi(\text{CUT}_n^\square) = \text{COR}_n^\square,$$

т. е. COR_n (соответственно, $\text{COR}_n^\square$) является ни чем иным, как образом CUT_{n+1} (соответственно, $\text{CUT}_{n+1}^\square$) при ковариантном отображении ξ .

Аналогично, для данного конечного множества X и фиксированного элемента $x_0 \in X$, разрезный конус $\text{CUT}(X)$ и корреляционный конус $\text{COR}(X \setminus x_0)$ (соответственно, разрезный многогранник $\text{CUT}^\square(X)$ и корреляционный многогранник $\text{COR}^\square(X \setminus x_0)$) находятся во взаимно-однозначном соответствии при ковариантном отображении ξ , отмеченном на позиции x_0 (которое обозначается также ξ_{x_0} , если мы хотим подчеркнуть выбор точки x_0). Для полной ясности, мы повторим определение.

Пусть X — некоторое множество (не обязательно конечное) и $x_0 \in X$, пусть d — расстояние на X , и пусть p — симметрическая функция на $X \setminus x_0$. Тогда $p = \xi(d) = \xi_{x_0}(d)$, если

$$(5.2.4) \quad p(x, y) = \frac{1}{2}(d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y)) \quad \text{для всех } x, y \in X \setminus \{x_0\}$$

или, что равносильно,

$$(5.2.5) \quad \begin{cases} d(x, x_0) = p(x, x) & \text{для всех } x \in X \setminus \{x_0\}, \\ d(x, y) = p(x, x) + p(y, y) - 2p(x, y) & \text{для всех } x, y \in X \setminus \{x_0\}. \end{cases}$$

Следовательно, для конечного X ,

$$\xi_{x_0}(\text{CUT}(X)) = \text{COR}(X \setminus \{x_0\}) \quad \text{и} \quad \xi_{x_0}(\text{CUT}^\square(X)) = \text{COR}^\square(X \setminus \{x_0\}).$$

Заметим, что если использовать отношение (5.2.4) для вычисления $p(x, x_0)$, то получим, что $p(x, x_0) = 0$ для всех $x \in X$. Это объясняет, почему мы рассматриваем p определенным только на парах элементов из $X \setminus \{x_0\}$.

Ковариантное отображение появляется в различных областях математики. Например, см. Бандельт и Дресс [1992], Фише [1987а] (где ξ называется *преобразованием Фарриса* или *линейной обобщенной функцией подобия*), Кричли [1988], Курнерт и Пападопулос [1993] (где для метрического пространства (X, d) и его образа $p = \xi(d)$ величина $p(x, y)$ известна как *произведение Громова* элементов $x, y \in X \setminus \{x_0\}$).

Связь между корреляционными полиэдрами и разрезными полиэдрами, сформулированная в (5.2.3), была открыта независимо несколькими авторами (см., например, Хаммер [1965], Деза [1973а], Барахона, Юнгер и Райнелт [1989], Де Симоне [1989]).

«разрезная сторона»	«корреляционная сторона»
$d \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ $\delta(S)$ (для $S \subset V_n$) CUT_{n+1} $\text{CUT}_{n+1}^\square$	$p \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$ $\pi(S)$ COR_n^n $\text{COR}_n^\square$
Неравенства треугольника $d(i, j) - d(i, n+1) - d(j, n+1) \leq 0$ $d(i, n+1) - d(j, n+1) - d(i, j) \leq 0$ $d(j, n+1) - d(i, n+1) - d(i, j) \leq 0$ $d(i, n+1) + d(j, n+1) + d(i, j) \leq 2$ $d(i, j) - d(i, k) - d(j, k) \leq 0$ $d(i, j) + d(i, k) + d(j, k) \leq 2$	$0 \leq p_{ij}$ $p_{ij} \leq p_{ii}$ $p_{ij} \leq p_{jj}$ $p_{ii} + p_{jj} - p_{ij} \leq 1$ $-p_{kk} - p_{ij} + p_{ik} + p_{jk} \leq 0$ $p_{ii} + p_{jj} + p_{kk} - p_{ij} - p_{ik} - p_{jk} \leq 1$
Гиперметрические неравенства $\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} b_i b_j d(i, j) \leq 0,$ где $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\sum_{1 \leq i \leq n+1} b_i = 1$	$\sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i b_j p_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_{ii} \geq 0,$ где $b \in \mathbb{Z}^n$ (т. е. $\left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_i \right) \left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_i - 1 \right) \geq 0,$ полагая $p_{ii} := p_i, p_{ij} := p_i p_j$)
Неравенства отрицательного типа $\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} b_i b_j d(i, j) \leq 0,$ где $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\sum_{1 \leq i \leq n+1} b_i = 0$	$\sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i b_j p_{ij} \geq 0,$ где $b \in \mathbb{Z}^n$
$\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} b_i b_j d(i, j) \leq k(k+1),$ где $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\sum_{1 \leq i \leq n+1} b_i = 2k+1$	$\left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_i - k \right) \left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_i - k - 1 \right) \geq 0,$ где $b \in \mathbb{Z}^n, k \in \mathbb{Z}$

Табл. 5.2.6. Соответствующие неравенства
для разрезов и корреляционных многогранников и конусов

Как следствие (5.2.3), каждое неравенство, допустимое для разрезного многогранника $\text{CUT}_{n+1}^\square$, может быть преобразовано (при ковариантном отображении) в неравенство, допустимое для корреляционного многогранника $\text{COR}_n^\square$, и обратно. Мы формулируем этот факт более точно в предложении 5.2.7, приведенном ниже.

В таблице 5.2.6 мы показываем, как это преобразование выглядит для некоторых классов неравенств, именно, для неравенств треугольника, гиперметрических неравенств и неравенств отрицательного типа (эти неравенства будут исследованы в разделе 6.1 и, более детально, в главе 28).

Предложение 5.2.7. Пусть $a \in \mathbb{R}^{V_n}$, $b \in \mathbb{R}^{E_n}$, $c \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ заданы следующим образом:

$$\begin{cases} c_{i,n+1} = a_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} b_{ij} & \text{для } 1 \leq i \leq n, \\ c_{ij} = -\frac{1}{2} b_{ij} & \text{для } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Для данного $\alpha \in \mathbb{R}$ неравенство

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} c_{ij} d(i, j) \leq \alpha$$

является допустимым (соответственно, определяющим фасету) для разрезного многогранника $\text{CUT}_{n+1}^\square$ тогда и только тогда, когда неравенство

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_i p_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} p_{ij} \leq \alpha$$

является допустимым (соответственно, определяющим фасету) для корреляционного многогранника $\text{COR}_n^\square$.

5.3. Ковариантности

Здесь мы представляем несколько характеристик элементов корреляционного конуса и многогранника; они являются образами результатов раздела 4.2 при ковариантном отображении. Сначала мы введем понятие M -ковариантности. Это понятие изучалось в Ассуад [1979, 1980b] для M , являющегося подмножеством Гильбертова пространства. Мы рассмотрим только случаи, когда $M = R$ или $M = \{0, 1\}$.

Определение 5.3.1. Пусть M — подмножество $\mathbb{R}$. Симметрическая функция $p: X \times X \mapsto \mathbb{R}$ называется M -ковариантностью, если существует измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ и функции $f_x \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (для $x \in X$), принимающие значения в M , такие что

$$p(x, y) = \int_{\Omega} f_x(w) f_y(w) \mu(dw) \quad \text{для всех } x, y \in X.$$

В частности, p является $\{0, 1\}$ -ковариантностью тогда и только тогда, когда существует измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ и множества $A_x \in \mathcal{A}$ (для $x \in X$), такие что

$$p(x, y) = \mu(A_x \cap A_y) \quad \text{для всех } x, y \in X.$$

Следующая лемма показывает, как $\mathbb{R}$ -ковариантности и $\{0, 1\}$ -ковариантности связаны с L_2 - и L_1 -вложимыми пространствами расстояний, соответственно (при ковариантном отображении).

Лемма 5.3.2. Пусть X некоторое множество и пусть $x_0 \in X$. Пусть d — расстояние на X и пусть $p = \xi_{x_0}(d)$ — соответствующая симметрическая функция на $X \setminus \{x_0\}$. Тогда

- (i) $(X, \sqrt{d})$ является L_2 -вложимым тогда и только тогда, когда p является R -ковариантностью на $X \setminus \{x_0\}$.
- (ii) (X, d) является L_1 -вложимым тогда и только тогда, когда p является $\{0, 1\}$ -ковариантностью на $X \setminus \{x_0\}$.

Доказательство. (i) сразу же получается при непосредственной проверке; (ii) получается при непосредственной проверке и использовании леммы 4.2.5. ■

Следовательно, для конечного X функция p является $\{0, 1\}$ -ковариантностью на X тогда и только тогда, когда p принадлежит корреляционному конусу $\text{COR}(X)$. Следующий частный результат является следствием леммы 5.3.2 и теоремы 3.2.1.

Предложение 5.3.3. Пусть p — симметрическая функция на X . Тогда p является $\{0, 1\}$ -ковариантностью на X тогда и только тогда, когда для каждого конечного подмножества Y множества X сужение p на Y является $\{0, 1\}$ -ковариантностью на Y . ■

Теперь мы дадим интерпретацию элементов корреляционного конуса и многогранника в терминах корреляций событий в измеримом пространстве; это аналог предложения 4.2.1 (при ковариантном отображении). Он был переоткрыт в работе Питовского [1986].

Предложение 5.3.4. Пусть $p = (p_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $p \in \text{COR}_n$ (соответственно, $p \in \text{COR}_n^\square$).
- (ii) Существует измеримое пространство (соответственно, вероятностное пространство) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ и события $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, такие что $p_{ij} = \mu(A_i \cap A_j)$ для всех $1 \leq i \leq j \leq n$. ■

Как следствие предложения 5.3.4, каждое неравенство, допустимое для корреляционного многогранника $\text{COR}_n^\square$, можно интерпретировать как неравенство, которому удовлетворяют совместные множества из n событий. Рассмотрим, например, неравенства (на «корреляционной стороне»), соответствующие первым четырем неравенствам треугольника в таблице 5.2.6. Они выражают очень простые свойства совместных вероятностей. Первые три выражают тот факт, что вероятность $\mu(A_i \cap A_j)$ пересечения двух событий A_i, A_j неотрицательна и меньше или равна каждой из вероятностей $\mu(A_i)$ и $\mu(A_j)$. Четвертое неравенство просто говорит о том, что вероятность $\mu(A_i \cup A_j)$ объединения двух событий меньше или равна единице.

Для членов корреляционного конуса, которые могут быть записаны как неотрицательные *целые* линейные комбинации корреляционных векторов, мы можем предположить, что измеримое пространство в предложении 5.3.4 (ii) снабжено мерой равной мощности. Именно, мы имеем следующий результат, являющийся аналогом предложения 4.2.4 (при ковариантном отображении).

Предложение 5.3.5. Пусть $p = (p_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $p = \sum_{S \subseteq V_n} \lambda_S \pi(S)$ для некоторых неотрицательных целых λ_S .
- (ii) Существует конечное множество Ω и n его подмножеств $A_1, \dots, A_n$, таких что $p_{ij} = |A_i \cap A_j|$ для всех $1 \leq i \leq j \leq n$. ■

Вектор p , удовлетворяющий условию (ii) из предложения 5.3.5, называется *моделью пересечения*. Следовательно, модели пересечения порядка n и вложимые в гиперкуб расстояния на $n + 1$ точке являются эквивалентными понятиями (при ковариантном отображении). Проверка того, является ли данный вектор p моделью пересечения, является трудной задачей; Хватал [1980] показал, что эта задача остается NP-сложной, если ограничиться векторами p с $p_{ii} = 3$ для всех $i \in V_n$. С другой стороны, проблема становится полиномиальной, для векторов

p с $p_{ii} = 2$ и всех $i \in V_n$. Мы отсылаем читателя к главе 24, в которой собраны результаты, относящиеся к этой проблеме.

«разрезная сторона»	«корреляционная сторона»
$d \in \text{CUT}_{n+1}$ (соотв. $d \in \text{CUT}_{n+1}^\square$)	$p \in \text{COR}_n$ (соотв. $p \in \text{COR}_n^\square$)
если и только если существует пространство меры (соотв., вероятностное пространство) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ и $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ конечной меры такие что	
$d_{ij} = \mu(A_i \triangle A_j)$ для $1 \leq i < j \leq n+1$ (полагая $A_{n+1} = \emptyset$)	$p_{ij} = \mu(A_i \cap A_j)$ для $1 \leq i \leq j \leq n$
$d = \sum_S \lambda_S \delta(S)$ для некоторых $\lambda_S \in \mathbb{Z}_+$ и для всех S	$p = \sum_S \lambda_S \pi(S)$ для некоторых $\lambda_S \in \mathbb{Z}_+$ и для всех S
если и только если существует множество Ω и его конечные подмножества $A_1, \dots, A_n$, такие что	
$d_{ij} = A_i \triangle A_j $ для $1 \leq i \leq j \leq n+1$ (полагая $A_{n+1} = \emptyset$)	$p_{ij} = A_i \cap A_j $ для $1 \leq i \leq j \leq n$

Табл. 5.3.6. Соответствующие интерпретации для элементов разрезных и корреляционных конусов и многогранников

В таблице 5.3.6 параллельно представлены результаты из предложений 5.3.4 и 5.3.5 для ковариантностей, и соответствующие результаты для расстояний из предложений 4.2.1 и 4.2.4.

5.4. Булева проблема

Здесь мы опишем применение интерпретации корреляционного многогранника, данной в предложении 5.3.4, к следующей проблеме, известной как *булева проблема*. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — вероятностное пространство и пусть $A_1, \dots, A_n$ — n событий из $\mathcal{A}$. Классическими вопросами, идущими от Буля [1854], являются следующие:

Что является наилучшей оценкой для $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ в терминах p_i , если заданы величины $p_i = \mu(A_i)$ для $1 \leq i \leq n$?

Пусть даны величины $p_i := \mu(A_i)$ для $1 \leq i \leq n$ и величины вероятностей пересечений $p_{ij} := \mu(A_i \cap A_j)$ для $1 \leq i < j \leq n$. Что является наилучшей оценкой для $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ в терминах p_i и p_{ij} ?

Легко видеть, что на первый вопрос можно ответить следующим образом:

$$\max(p_1, \dots, p_n) \leq \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \min\left(1, \sum_{1 \leq i \leq n} p_i\right).$$

Как мы увидим ниже, для ответа на второй вопрос используются неравенства, определяющие фасеты корреляционного многогранника $\text{COR}_n^\square$ и других родственных многогранников. Именно, мы имеем следующую нижнюю границу:

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geq \max(w^T p \mid w^T x \leq 1 \text{ определяет фасету для } \text{COR}_n^\square)$$

(см. предложение 5.4.3 и отношение (5.4.4)), а также верхнюю границу, заданную величиной $z_{\max}$, определенной в (5.4.5). Эти оценки для $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ можно получить, используя технику линейного программирования. Это подход, который мы опишем ниже, был рассмотрен, в частности, в работах: Кунейс и Марин [1976] и Питовский [1991].

Пусть p обозначает вектор из $\mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$, определенный как $p_i := \mu(A_i)$ для $1 \leq i \leq n$ и $p_{ij} := \mu(A_i \cap A_j)$ для $1 \leq i < j \leq n$. По предложению 5.3.4 p принадлежит многограннику $\text{COR}_n^\square$. Следовательно, мы можем определить следующие величины¹⁾ $z_{\min}$ и $z_{\max}$:

¹⁾ Заметим, что параметр $z_{\min}$ является для корреляционного конуса аналогом понятия минимального ℓ_1 -размера, определенного в (4.3.4).

$$(5.4.1) \quad z_{\min} := \min \left(\sum_{\emptyset \neq S \subseteq V_n} \lambda_S \mid \sum_{\emptyset \neq S \subseteq V_n} \lambda_S \pi(S) = p, \right. \\ \left. \lambda_S \geq 0 \text{ для } \emptyset \neq S \subseteq V_n \right),$$

$$(5.4.2) \quad z_{\max} := \max \left(\sum_{\emptyset \neq S \subseteq V_n} \lambda_S \mid \sum_{\emptyset \neq S \subseteq V_n} \lambda_S \pi(S) = p, \right. \\ \left. \lambda_S \geq 0 \text{ для } \emptyset \neq S \subseteq V_n \right).$$

Как показывает следующий результат, величины $z_{\min}$ и $z_{\max}$ задают границы для $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$.

Предложение 5.4.3. $z_{\min} \leq \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq z_{\max}$.

Доказательство. Для $S \subseteq V_n$ положим

$$A^S := \bigcap_{i \in S} A_i \cap \bigcap_{i \notin S} (\Omega \setminus A_i).$$

Тогда

$$A_i \cap A_j = \bigcup_{S \subseteq V_n \mid i, j \in S} A^S, \quad \Omega = \bigcup_{S \subseteq V_n} A^S \text{ и } A_1 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{S \subseteq V_n \mid S \neq \emptyset} A^S.$$

Следовательно,

$$p = \sum_{S \subseteq V_n \mid S \neq \emptyset} \mu(A^S) \pi(S),$$

где $\mu(A^S) \geq 0$ для всех S . Поэтому $(\mu(A^S) \mid \emptyset \neq S \subseteq V_n)$ есть допустимое решение задач (5.4.1) и (5.4.2) с целевой функцией $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$. Это доказывает наше утверждение. $\blacksquare$

Используя двойственность линейного программирования, мы можем переформулировать определения $z_{\min}$ и $z_{\max}$. Именно,

$$(5.4.4) \quad z_{\min} = \max(w^T p \mid w^T \pi(S) \geq 1 \text{ для всех } S, \emptyset \neq S \subseteq V_n),$$

и, что легко проверить, достаточно рассмотреть в (5.4.4) векторы w , для которых неравенство $w^T x \leq 1$ определяет фасету $\text{COR}_n^\square$. Аналогично,

$$(5.4.5) \quad z_{\max} = \min(w^T p \mid w^T \pi(S) \geq 1 \text{ для всех } S, \emptyset \neq S \subseteq V_n),$$

где достаточно рассмотреть векторы w , для которых неравенство $w^T x \geq 1$ определяет фасету многогранника $\text{Conv}(\{\pi(S) \mid \emptyset \neq S \subseteq V_n\})$ (который отличен от $\text{COR}_n^\square$, так как не содержит начала координат).

Следовательно, каждое допустимое для $\text{COR}_n^\square$ неравенство дает нижнюю границу для $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ в терминах вероятностей пересечений $p_{ij} = \mu(A_i \cap A_j)$. Многие из таких неравенств известны; см. часть 5, где представлены широкие классы таких неравенств. В качестве иллюстрации мы рассмотрим несколько примеров таких неравенств вместе с соответствующими нижними границами.

С первого взгляда видно, что

$$\frac{n \sum_{1 \leq i \leq n} p_i - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \lceil \frac{n+1}{2} \rceil} \leq \sum_{\emptyset \neq S \subseteq V_n} \lambda_S \leq \frac{n \sum_{1 \leq i \leq n} p_i - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij}}{n}$$

для любого разложения $p = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq V_n} \lambda_S \pi(S)$ с $\lambda_S \geq 0$ для всех S . (Это следует из (4.3.6) при применении ковариантного отображения.) Из определения $z_{\min}$, $z_{\max}$ и предложения 5.4.3 мы получаем:

$$(5.4.6) \quad \frac{n \sum_{1 \leq i \leq n} p_i - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \lceil \frac{n+1}{2} \rceil} \leq \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \\ \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \frac{n \sum_{1 \leq i \leq n} p_i - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij}}{n}.$$

Рассмотрим теперь неравенство:

$$(5.4.7) \quad 2k \sum_{1 \leq i \leq n} p_i - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij} \leq k(k+1).$$

Оно является допустимым для корреляционного многогранника $\text{COR}_n^\square$, если $1 \leq k \leq n-1$. (Кроме того, оно определяет фасету, если $1 \leq k \leq n-2$ и $n \geq 4$. Действительно, оно соответствует (при ковариантном отображении) неравенству

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} + (2k+1-n) \sum_{1 \leq i \leq n} x_{i,n+1} \leq k(k+1),$$

которое определяет фасету $\text{CUT}_{n+1}^\square$ при $1 \leq k \leq n-2$ и $n \geq 4$; см. теорему 28.2.4.) Из этого следует нижняя граница для $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$:

$$(5.4.8) \quad \frac{2}{k+1} \sum_{1 \leq i \leq n} p_i - \frac{2}{k(k+1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij} \leq \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

для каждого k , $1 \leq k \leq n-1$. Граница (5.4.8) была независимо найдена несколькими авторами, включая Чанга [1941], Доусона и Санкоффа [1967], Галамбоша [1977]. Заметим, что (5.4.8) совпадает с нижней границей (5.4.6) в случае $n = 2k$. Случай $k = 1$ в (5.4.8) дает границу

$$\sum_{1 \leq i \leq n} p_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij} \leq \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n),$$

что является специальным случаем границы Бонферрони (5.4.14), упоминаемой ниже. В более общем случае, для данных целых $b_1, \dots, b_n$ и $k \geq 0$ неравенство:

$$(5.4.9) \quad \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(2k+1-b_i)p_i - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j p_{ij} \leq k(k+1)$$

допустимо для $\text{COR}_n^\square$, что дает границу:

$$\frac{1}{k(k+1)} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} p_i b_i(2k+1-b_i) - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j p_{ij} \right) \leq \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n).$$

Для доказательства допустимости неравенства (5.4.9) заметим, что оно может быть записано как

$$(5.4.10) \quad \left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_i - k \right) \left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_i - k - 1 \right) \geq 0$$

с учетом того, что при раскрытии скобок произведение $p_i p_j$ будет заменено переменной p_{ij} (положив $p_{ii} = p_i$).

Замечание 5.4.11. Неравенство (5.4.9) (или (5.4.10)) (или их специальные случаи) было независимо рассмотрено разными авторами, среди них Келли [1968], Дэвидсон [1969], Йоселовф [1970], Мак Раэ и Дэвидсон [1972], Кунейс и Марин [1976], Эрдал [1987], Местечкин [1987], Питовский [1991]. Неравенство (5.4.10) показано на рисунке 5.2.6; оно соответствует (при ковариантном отображении и при задании $b_{n+1} := 2k+1 - \sum_{i=1}^n b_i$) неравенству:

$$(5.4.12) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} b_i b_j x_{ij} \leq k(k+1),$$

которое допустимо для разрезного многогранника разрезов $\text{CUT}_{n+1}^\square$.

Чтобы помочь читателю понять, как это неравенство связано с другими неравенствами, которые будут введены позже, упомянем, что класс неравенств вида (5.4.12) содержит гиперметрические неравенства (определенные в разделе 6.1), как специальный случай. Более точно, (5.4.12) является гиперметрическим неравенством, если $k = 0$. Кроме того, (5.4.12) является переключением гиперметрического неравенства, если последовательность $b_1, \dots, b_{n+1}$ имеет щель 1. (Понятия переключения и щель будут определены позднее в разделах 26.3 и 28.4.) ■

Обобщение на корреляции высших порядков. Ясно, что многие из вышеприведенных исследований могут быть обобщены на корреляции высших порядков. Именно, пусть $\mathcal{I}$ есть семейство подмножеств V_n . Для данного

подмножества S множества V_n его $\mathcal{I}$ -корреляционным вектором называется вектор $\pi^{\mathcal{I}}(S) \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, определенный как $\pi^{\mathcal{I}}(S)_I = 1$, если $I \subseteq V_n$, и $\pi^{\mathcal{I}}(S)_I = 0$ в противном случае, для всех $I \in \mathcal{I}$. Тогда конус $\text{COR}_n(\mathcal{I})$ (соответственно, многогранник $\text{COR}_n^{\square}(\mathcal{I})$) определяется как коническая (соответственно, выпуклая) оболочка всех $\mathcal{I}$ -корреляционных векторов $\pi^{\mathcal{I}}(S)$ для $S \subseteq V_n$.

Для данного целого $1 \leq m \leq n$ пусть $\mathcal{I}_{\leq m}$ обозначает набор всех подмножеств V_n , мощность которых меньше или равна m . Таким образом, $\mathcal{I}_{\leq 2}$ состоит из всех элементов и пар элементов из V_n , и, следовательно, $\text{COR}(\mathcal{I}_{\leq 2})$ и $\text{COR}_n^{\square}(\mathcal{I}_{\leq 2})$ совпадают, соответственно, с COR_n и $\text{COR}_n^{\square}$.

Для $\mathcal{I} = 2^{V_n}$, состоящего из всех подмножеств V_n , $\text{COR}_n^{\square}(2^{V_n})$ является симплексом и $\text{COR}_n(2^{V_n})$ является симплицальным конусом, оба размерности $2^n - 1$. Отсюда, в частности, следует, что каждый корреляционный многогранник $\text{COR}_n^{\square}(\mathcal{I})$ возникает как проекция симплекса $\text{COR}_n^{\square}(2^{V_n})$ (именно, на подпространство $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$).

Результат предложения 5.3.4 легко переносится на случай произвольной $\mathcal{I}$ -корреляции.

Предложение 5.4.13. Пусть $\mathcal{I}$ — непустой набор подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, и пусть $p = (p_I)_{I \in \mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $p \in \text{COR}_n(\mathcal{I})$ (соответственно, $p \in \text{COR}_n^{\square}(\mathcal{I})$).
- (ii) Существует измеримое пространство (соответственно, вероятностное пространство) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ и события $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, такие что $p_I = \mu(\bigcap_{i \in I} A_i)$ для всех $I \in \mathcal{I}$.

Более общая версия булевой проблемы состоит в нахождении оценок для величины $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ в терминах корреляций пересечений $\mu(\bigcap_{i \in I} A_i)$ для $I \in \mathcal{I}$. Имеется очевидный аналог предложения 5.4.3, где границы $z_{\min}$ и $z_{\max}$ даны теперь в терминах многогранников $\text{COR}_n^{\square}(\mathcal{I})$ и $\text{Conv}(\{\pi^{\mathcal{I}}(S) \mid \emptyset \neq S \subseteq V_n\})$ (вместо $\text{COR}_n^{\square}$ и $\text{Conv}(\{\pi(S) \mid \emptyset \neq S \subseteq V_n\})$).

В случае, когда $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\leq m}$, несколько границ для $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ были предложены в литературе в терминах величин:

$$S_k := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

для $1 \leq i \leq n$. Например, имеет место следующая граница:

$$(5.4.14) \quad \begin{cases} \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geq \sum_{1 \leq i \leq m} (-1)^{i-1} S_i & \text{для четного } m, \\ \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{1 \leq i \leq m} (-1)^{i-1} S_i & \text{для нечетного } m, \end{cases}$$

которая впервые была получена Бонферрони [1936]. Позднее было предложено несколько улучшений этой границы; см., например, Борош и Прекопа [1989], Грэбл [1993].

Ясно, что если все величины S_k ($1 \leq k \leq n$) известны, то точное значение $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ дает формула включений-исключений:

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} S_k.$$

Ошибка, с которой $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ можно вычислить приближенно, когда известны S_j только для $j \leq k$ (где $k \leq n$ задано), была исследована Линьялом и Нисаном [1990] и Каном, Линьялом и Самородническим [1997]. Пусть $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ — события в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, удовлетворяющие условию

$$\mu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \mu\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right)$$

для всех $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ с $|I| \leq k$. Тогда Линьял и Нисан [1990] показали, что

$$\frac{\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)}{\mu(B_1 \cup \dots \cup B_n)} \leq \left(\frac{\lambda^k + 1}{\lambda^k - 1}\right)^2, \quad \text{где } \lambda := \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1}.$$

В частности, отношение $\frac{\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)}{\mu(B_1 \cup \dots \cup B_n)}$ ограничено величиной $1 + O\left(\exp\left(-\frac{2k}{\sqrt{n}}\right)\right)$, если $k = \Omega(\sqrt{n})$, и величиной $O\left(\frac{n}{k^2}\right)$, если $k = O(\sqrt{n})$. Недавно Кан, Линьял и Самороднический [1997] показали, что

$$\left|\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) - \mu(B_1 \cup \dots \cup B_n)\right| = \exp\left(-\Omega\left(\frac{k^2}{n \log_2 n}\right)\right).$$

Кроме того, существуют коэффициенты λ_j ($1 \leq j \leq k$), которые могут быть найдены в полиномиальное (по n) время и удовлетворяют условию

$$\left|\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) - \sum_{1 \leq j \leq k} \lambda_j S_j\right| \leq \exp\left(-\Omega\left(\frac{k^2}{n \log_2 n}\right)\right).$$

Проблема вычисления вероятности $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ имеет много приложений; см., например, Кан, Линьял и Самороднический [1997]. Примером такого приложения является проблема перечисления допустимых наборов¹⁾ ДНФ-функции от n переменных $F = C_1 \vee \dots \vee C_m$, где C_j — элементарная конъюнкция. Это трудная проблема; было сделано много попыток аппроксимации этого числа (см. Луби и Величович [1991] и литературу там же). Если мы обозначим через A_j ($j = 1, \dots, m$) множество допустимых наборов для конъюнкции C_j , то число допустимых наборов для F равно $|A_1 \cup \dots \cup A_m|$. В работе Кан, Линьял и Самороднический [1997] показано, что $|A_i \cup \dots \cup A_m|$ однозначно определено, если мы знаем число допустимых наборов для $\bigwedge_{i \in I} C_i$ для каждого $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, такого что $|I| \leq \log_2 n + 1$.

¹⁾ $(0,1)$ - n -вектор x_0 называется допустимым набором для ДНФ-функции $F(x_0)$, если $F(x_0) = 1$ — Прим. ред.

Глава 6.

Условия L_1 -вложимости

В этой главе мы рассматриваем два необходимых условия L_1 -вложимости, именно, гиперметрическое условие и условие отрицательного типа. Имеется много других необходимых условий, возникающих из допустимых неравенств конуса разрезов; они будут описаны в части 5. Здесь мы фокусируем внимание только на гиперметрических условиях и условиях отрицательного типа, которые являются, в некотором смысле, наиболее полезными. Например, имеется несколько классов пространств расстояний, для которых эти условия являются также и достаточными для L_1 -вложимости; см., в частности, главы 8, 19, 24 и замечание 6.3.5. Гиперметрические неравенства будут детально исследованы сами по себе во второй части, и, как фасеты конуса разрезов, в главе 28.

Данная глава организована следующим образом. Гиперметрические условия и условия отрицательного типа введены в разделе 6.1. Некоторые характеристики для ℓ_2 -вложимых пространств рассмотрены в разделе 6.2. Мы представляем, в частности, характеристику в терминах условия отрицательного типа и результат Менгера, касающийся изометрических подпространств m -мерного евклидова пространства. Раздел 6.3 содержит обзор импликаций, существующих между свойствами пространств расстояний быть L_1 -, L_2 -вложимыми, или отрицательного типа, или гиперметрическими. В разделе 6.4 мы подробно исследуем пример сферического пространства расстояний, которое состоит из сферы, снабженной обычным расстоянием по дуге большой окружности. Этот результат в каком-то смысле является промежуточным между ℓ_1 и ℓ_2 . Действительно, каждое сферическое пространство расстояний является ℓ_1 -вложимым и, с другой стороны, евклидово пространство может быть асимптотически реализовано как предел сферических расстояний. Сферическое пространство расстояний будет использовано в разделе 31.3 для решения задачи о положительно полуопределенном пополнении матриц.

6.1. Гиперметрические условия и условия отрицательного типа

6.1.1. Гиперметрические неравенства и неравенства отрицательного типа

Пусть $n \geq 2$ и пусть $b_1, \dots, b_n$ — целые числа. Рассмотрим неравенство:

$$(6.1.1) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_{ij} \leq 0$$

(от переменных d_{ij}). Для удобства введем следующее понятие. Для данного $b \in R^n$ обозначим через $Q_n(b)$ вектор из R^{E_n} , определенный как

$$Q_n(b)_{ij} := b_i b_j \quad \text{для } 1 \leq i < j \leq n.$$

Следовательно, неравенство (6.1.1) можно переписать как $Q_n(b)^T d \leq 0$. Когда параметр n ясен из контекста, мы также обозначаем $Q_n(b)$ через $Q(b)$. Мы можем предположить, что по меньшей мере два из b_i не равны нулю; иначе $Q_n(b) = 0$ и неравенство (6.1.1) не имеет ненулевых решений.

Когда $\sum_{i=1}^n b_i = 1$, неравенство (6.1.1) называется *гиперметрическим неравенством* и, когда $\sum_{i=1}^n b_i = 0$, неравенство (6.1.1) называется *неравенством отрицательного типа*. Неравенство (6.1.1) называется *чистым*, если $|b_i| = 0, 1$ для всех $i \in V_n$. Неравенство (6.1.1) называется *k-гональным неравенством*, если $\sum_{i=1}^n |b_i| = k$. Заметим, что k и $\sum_{i=1}^n b_i$ имеют одинаковую четность.

В частности, 2-гональное неравенство является неравенством отрицательного типа (6.1.1), где $b_i = 1$, $b_j = -1$ для некоторых различных $i, j \in V_n$ и $b_h = 0$ для $h \in V_n \setminus \{i, j\}$; это есть ни что иное, как условие неотрицательности $d_{ij} \geq 0$. Чистое 3-гональное неравенство есть гиперметрическое неравенство (6.1.1), где $b_i = b_j = 1$, $b_k = -1$ для некоторых различных $i, j, k \in V_n$ и $b_h = 0$ для $h \in V_n \setminus \{i, j, k\}$; оно совпадает с неравенством треугольника (3.1.1). Для $\varepsilon = 0, 1$ чистое $(2k + \varepsilon)$ -гональное неравенство имеет вид:

$$\sum_{1 \leq r < s \leq k + \varepsilon} d_{i_r i_s} + \sum_{1 \leq r < s \leq k} d_{j_r j_s} - \sum_{1 \leq r \leq k + \varepsilon, 1 \leq s \leq k} d_{i_r j_s} \leq 0,$$

где $i_1, \dots, i_k, i_{k+\varepsilon}, j_1, \dots, j_k$ — различные индексы из V_n .

Например, 5-гональными неравенствами являются неравенства $Q_n(b)^T d \leq 0$, где b (с точностью до перестановок его компонент) — один из следующих векторов:

$$\begin{aligned} b &= (1, 1, 1, -1, -1, 0, \dots, 0), & b &= (1, 1, 1, -2, 0, \dots, 0), \\ b &= (2, 1, -1, -1, 0, \dots, 0), & b &= (3, -1, -1, 0, \dots, 0), \\ b &= (2, 1, -2, 0, \dots, 0), & b &= (3, -2, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

На рисунке 6.1.2 показаны чистые 4-гональное и 5-гональное неравенства, или, точнее, их левые части. Это нужно понимать так: сплошная линия между вершинами i и j обозначает коэффициент $+1$ для переменной d_{ij} , а пунктирная линия обозначает коэффициент -1 . Чистое 5-гональное неравенство называют также *пентагональным неравенством*.

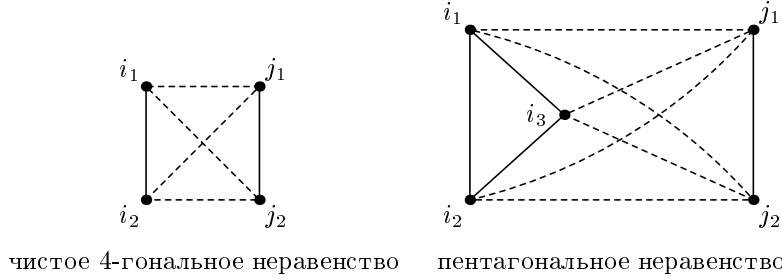


Рис. 6.1.2

Неравенства отрицательного типа являются классическими неравенствами анализа; в частности, они были использованы в Шёнберг [1937, 1938a, 1938b]. Гиперметрические неравенства были рассмотрены несколькими авторами, включая Деза [1960, 1962], Келли [1970a], Барановского [1971, 1973] и, в контексте корреляций или булевого квадратичного программирования (т. е. в форме, определенной в лемме 6.1.14; см. также таблицу (5.2.6)), в Келли [1968], Дэвидсон [1969], Йоселлофф [1970], Мак Раэ и Дэвидсон [1972], Кунейс и Марин [1976], Эрдал [1987], Местечкин [1987], Питовский [1991]. (Напомним замечание 5.4.11.)

Гиперметрические неравенства: $Q_n(b)^T d \leq 0$ для $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ определяют конус в $\mathbb{R}^{E_n}$, называемый *гиперметрическим конусом* и обозначаемый HYP_n . Аналогично, *конусом отрицательного типа*¹⁾

¹⁾ В разделе 31.4 мы будем рассматривать другой конус, родственный NEG_n . Именно, для данного графа $G = (V_n, E)$ конус $\text{NEG}(G)$ определяется как проекция NEG_n на подпространство $\mathbb{R}^E$, индексированное множеством ребер G .

называется конус в $\mathbb{R}^{E_n}$, определяемый неравенствами отрицательного типа: $Q_n(b)^T d \leq 0$ для $b \in Z^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 0$. Если вместо V_n мы рассматриваем произвольное конечное множество X , мы обозначаем гиперметрический конус через $\text{HYP}(X)$.

На самом деле, неравенства отрицательного типа вытекают из гиперметрических неравенств. Другими словами,

$$\text{HYP}_n \subseteq \text{NEG}_n \quad \text{для всех } n \geq 3.$$

Этот результат может быть немедленно получен из таблицы (5.2.6) (если рассмотреть соответствующие неравенства «корреляционной стороны»). Его можно получить также из следующего результата Де-за [1962], который показал, как связаны $(2k+1)$ - и $(2k+2)$ -гональные неравенства.

Предложение 6.1.3. Пусть $k \geq 1$ — целое число. $(2k+2)$ -гональные неравенства следуют из $(2k+1)$ -гональных неравенств.

Доказательство. Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 0$ и $\sum_{i=1}^n |b_i| = 2k+2$. Покажем, что неравенство $Q_n(b)^T d \leq 0$ можно выразить как неотрицательную линейную комбинацию $(2k+1)$ -гональных неравенств. Мы можем без ограничения общности предположить, что $b_i, \dots, b_p > 0 > b_{p+1}, \dots, b_n$ для некоторого p , $1 \leq p \leq n-1$. Для $1 \leq i \leq p$ положим

$$c^{(i)} := (-b_1, \dots, -b_{i-1}, 1-b_i, -b_{i+1}, \dots, -b_p, -b_{p+1}, \dots, -b_n)$$

и для $p+1 \leq i \leq n$ положим

$$c^{(i)} := (b_1, \dots, b_p, b_{p+1}, \dots, b_{i-1}, b_i+1, b_{i+1}, \dots, b_n).$$

Тогда каждый вектор $c^{(i)}$ принадлежит Z^n , имеет сумму членов, равную 1, и сумму абсолютных величин своих членов, равную $2k+1$. Следовательно, каждое неравенство $Q_n(c^{(i)})^T d \leq 0$ является $(2k+1)$ -гональным неравенством. Заметим теперь, что

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |b_i| Q_n(c^{(i)}) = 2k Q_n(b).$$

Это показывает, что $(2k+2)$ -гональное неравенство $Q_n(b)^T d \leq 0$ следует из $(2k+1)$ -гональных неравенств $Q_n(c^{(i)})^T d \leq 0$ ($1 \leq i \leq n$). ■

Например, 4-гональное неравенство: $Q_4(1, 1, -1, -1, 0)^T d \leq 0$ получается при суммировании следующих 3-гональных неравенств:

$$\begin{aligned} Q_4(1, 1, -1, 0)^T d &\leq 0, & Q_4(-1, 0, 1, 1)^T d &\leq 0, \\ Q_4(1, 1, 0, -1)^T d &\leq 0, & Q_4(0, -1, 1, 1)^T d &\leq 0. \end{aligned}$$

Следствие 6.1.4. *Неравенства отрицательного типа следуют из гиперметрических неравенств.* ■

Замечание 6.1.5. Заметим, что из неравенств отрицательного типа неравенства треугольника *не* следуют. Другими словами, расстояние может быть расстоянием отрицательного типа и при этом не быть полуметрикой; т. е. конус отрицательного типа NEG_n не совпадает с конусом полуметрик MET_n . Для доказательства этого рассмотрим, например, расстояние d на V_n , определенное как $d_{1i} = 1$ для $i = 2, \dots, n$ и $d_{ij} = \frac{2n}{n-1}$ для $2 \leq i < j \leq n$. Тогда d не удовлетворяет некоторым неравенствам треугольника, так как $d_{ij} - d_{1j} - d_{1i} = \frac{2}{n-1} > 0$ для любых $i \neq j \in \{2, \dots, n\}$. С другой стороны, легко проверить, что $d \in \text{NEG}_n$ (например, потому, что его образ $\xi_1(d)$ — при ковариантном отображении, фиксированном на позиции 1 — определяет положительно полуопределенную матрицу). Смотрите также замечание 6.1.11, где подчеркивается, что k -гональные неравенства не следуют из $(k+2)$ -гональных неравенств.

С другой стороны, для $d \in \text{NEG}_n$ условие $d_{1n} = 0$ дает, что $d_{1i} = d_{in}$ для всех $i = 2, \dots, n-1$. (Следовательно, метрическое условие частично выполняется.) Кроме того, если d' обозначает расстояние на множестве $V_{n-1} = V_n \setminus \{n\}$, определенное как проекция d (т. е. $d'_{ij} := d_{ij}$ для всех $i, j \in V_{n-1}$), то $d \in \text{NEG}_n$ тогда и только тогда, когда $d' \in \text{NEG}_{n-1}$. Другими словами, для проверки принадлежности конусу отрицательного типа мы можем ограничиться расстояниями, принимающими только положительные значения. То же очевидным образом следует для гиперметрического конуса. ■

Одной из главных причин введения гиперметрических неравенств является то, что они допустимы для конуса разрезов, т. е.

$$(6.1.6) \quad \text{CUT}_n \subseteq \text{HYP}_n.$$

Другими словами,

Лемма 6.1.7. *Каждое пространство расстояний, которое является изометрически ℓ_1 -вложимым, удовлетворяет всем гиперметрическим неравенствам.*

Доказательство. Достаточно показать, что любая разрезная полуметрика удовлетворяет всем гиперметрическим неравенствам. Для

этого пусть $S \subseteq V_n$ и $b \in Z^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 1$. Тогда

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j \delta(S)_{ij} = \sum_{i \in S, j \notin S} b_i b_j = \left(\sum_{i \in S} b_i \right) \left(\sum_{j \notin S} b_j \right) = \left(\sum_{i \in S} b_i \right) \left(1 - \sum_{i \in S} b_i \right)$$

неположительна, так как $\sum_{i \in S} b_i$ является целым числом. $\blacksquare$

6.1.2. Гиперметрические пространства расстояний и пространства расстояний отрицательного типа

Пусть (X, d) — пространство расстояний. Тогда (X, d) называется *гиперметрическим* (соответственно, *отрицательного типа*), если d удовлетворяет всем гиперметрическим неравенствам (соответственно, неравенствам отрицательного типа), т. е. если d удовлетворяет неравенствам

$$(6.1.8) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d(x_i, x_j) \leq 0$$

для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ (соответственно, $\sum_{i=1}^n b_i = 0$) и для всех различных элементов $x_1, \dots, x_n \in X$ ($n \geq 2$).

Заметим, что в вышеприведенном определении условие «различные» для элементов $x_1, \dots, x_n$ можно отбросить. Действительно, предположим, например, что $x_1 = x_2$. Тогда $d(x_1, x_2) = 0$ и $d(x_1, x_i) = d(x_2, x_i)$ для всех i . Следовательно, величина $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d(x_i, x_j)$ может быть переписана как $\sum_{2 \leq i < j \leq n} b'_i b'_j d(x_i, x_j)$ после замены $b'_2 = b_1 + b_2, b'_3 = b_3, \dots, b'_n = b_n$.

Другими словами, (X, d) является гиперметрическим (соответственно, отрицательного типа) тогда и только тогда, когда d удовлетворяет неравенствам (6.1.8) для всех $b \in \{0, -1, 1\}^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ (соответственно, $= 0$) и всех (не обязательно различных) элементов $x_1, \dots, x_n \in X$ ($n \geq 2$).

Для данного целого $k \geq 1$ и $\varepsilon \in \{0, 1\}$ пространство расстояний называется $(2k + \varepsilon)$ -гональным, если d удовлетворяет неравенствам (6.1.8) для всех $b \in Z^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = \varepsilon$ и $\sum_{i=1}^n |b_i| = 2k + \varepsilon$ и для всех $x_1, \dots, x_n \in X$ ($n \geq 2$). Мы получим то же самое определение, если потребуем, чтобы d удовлетворяло этим неравенствам только для чистого b , т. е. b с компонентами из множества $\{0, 1, -1\}$. Например,

(X, d) является 5-гональным тогда и только тогда, когда для всех $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \in X$ имеют место следующие неравенства:

$$(6.1.9) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 3} d(x_i, x_j) + d(y_1, y_2) - \sum_{i=1,2,3; j=1,2} d(x_i, y_j).$$

Это — пентагональное неравенство, которое мы выписываем здесь для удобства дальнейших ссылок.

Заметим, что понятие k -гонального пространства расстояний монотонно относительно k , в том смысле, что $(k+2)$ -гональность влечет k -гональность. Именно,

Лемма 6.1.10. Пусть (X, d) — пространство расстояний.

- (i) Если (X, d) является $(k+2)$ -гональным, то (X, d) является k -гональным, для любого целого $k \geq 2$.
- (ii) Если (X, d) является $(2k+1)$ -гональным, то (X, d) является $(2k+2)$ -гональным, для любого целого $k \geq 1$.

Доказательство. (i) Предположим, что (X, d) является $(k+2)$ -гональным. Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^n |b_i| = k$ и $\sum_{i=1}^n b_i = \varepsilon$, где $\varepsilon = 1$, если k нечетное, и $\varepsilon = 0$, если k четное. Пусть $x_1, \dots, x_n \in X$. Покажем, что $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d(x_i, x_j) \leq 0$. Для этого положим $b' := (b, 1, -1) \in \mathbb{Z}^{n+2}$ и $x_{n+1} = x_{n+2} := x$, где $x \in X$. Тогда $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d(x_i, x_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n+2} b'_i b'_j d(x_i, x_j)$, которая является неположительной по предположению $(k+2)$ -гональности (X, d) . Утверждение (ii) следует из предложения 6.1.3. ■

Замечание 6.1.11. Заметим, что k -гональные неравенства не следуют из $(k+2)$ -гональных неравенств ($k \geq 2$). (Доказательство леммы 6.1.10 на самом деле проходит только на уровне пространств расстояний, так как мы предположили, что две точки x_{n+1} и x_{n+2} совпадают.) Например, из 5-гонального неравенства не следуют неравенства треугольника. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим расстояние d на V_5 , определенное как $d_{ij} = 1$ для всех пар за исключением $d_{12} = \frac{9}{4}$ и $d_{34} = \frac{3}{2}$. Тогда d не удовлетворяет некоторым неравенствам треугольника, например, $d_{12} - d_{13} - d_{23} = \frac{1}{4} > 0$; с другой стороны, легко проверить, что d удовлетворяет всем 5-гональным неравенствам. ■

Замечание 6.1.12. Случай равенства в гиперметрических неравенствах и неравенствах отрицательного типа. Следующий вопрос был рассмотрен Келли [1970a], Ассуадам [1984], Боллом [1990]. Что из себя представляют

пространства расстояний из данного класса, которые удовлетворяют данному гиперметрическому неравенству или неравенству отрицательного типа как равенству?

Например, Келли [1970a] характеризовал конечные подпространства пространства $(\mathbb{R}, d_{\ell_1})$, которые удовлетворяют $(2k+1)$ -гональному неравенству как равенству. Именно, для данных $x_1, \dots, x_{k+1}, y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ равенство

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k+1} |x_i - x_j| + \sum_{1 \leq i < j \leq k} |y_i - y_j| - \sum_{1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq k} |x_i - y_j| = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $y_1, \dots, y_k$ разделяют $x_1, \dots, x_{k+1}$, т. е. если существует такая перестановка α элементов $\{1, \dots, k+1\}$ и такая перестановка β элементов $\{1, \dots, k\}$, что

$$x_{\alpha(1)} \leq y_{\beta(1)} \leq x_{\alpha(2)} \leq y_{\beta(2)} \leq \dots \leq y_{\beta(k)} \leq x_{\alpha(k+1)}.$$

Это можно легко проверить, рассматривая разложение пространства расстояний $(\{x_1, \dots, x_{k+1}, y_1, \dots, y_k\}, d_{\ell_1})$ как неотрицательную сумму разрезов (и используя конструкцию из доказательства предложения 4.2.2 (ii) $\implies$ (i)). Обобщения и родственные результаты можно найти в Келли [1970a] и Ассуад [1984].

Аналогичным образом, Болл [1990] характеризовал скаляры $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, для которых пространство расстояний $(\{x_1, \dots, x_n\}, d_{\ell_1})$ удовлетворяет неравенству отрицательного типа (6.1.1) как равенству при $b = -(n-4), 1, \dots, 1, -2$. Этот результат будет использован в доказательстве предложения 11.2.4 (i) для определения нижней границы минимальной ℓ_1 -размерности пространства расстояний. ■

6.1.3. Аналоги для ковариантностей

Здесь мы рассмотрим, как видоизменяются гиперметрические неравенства и неравенства отрицательного типа при переходе к контексту корреляций (при корреляционном отображении). Эта информация уже была упомянута в таблице (5.2.6); лемма 6.1.14, приведенная ниже, содержит все имеющиеся результаты. Введем сначала новое определение.

Определение 6.1.13. Симметрическая функция $p: X \times X \mapsto \mathbb{R}$ называется функцией положительного типа на X , если для всех $n \geq 2$, $x_1, \dots, x_n \in X$ матрица $(p(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$ является положительно полуопределенной.

Лемма 6.1.14. Пусть X — некоторое множество и $x_0 \in X$. Пусть d — расстояние на X и $p = \xi_{x_0}(d)$ — соответствующая симметрическая функция на $X \setminus \{x_0\}$.

- (i) (X, d) является пространством отрицательного типа тогда и только тогда, когда p является функцией положительного типа на $X \setminus \{x_0\}$.
- (ii) (X, d) является гиперметрическим пространством если и только если p удовлетворяет неравенству:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i b_j p(x_i, x_j) - \sum_{1 \leq i \leq n} b_i p(x_i, x_i) \geq 0,$$

для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ и всех $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \{x_0\}$ ($n \geq 2$).

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \{x_0\}$ и пусть $\varepsilon := \sum_{i=1}^n b_i$. Доказательство основано на следующем наблюдении:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j \leq n} b_i b_j d(x_i, x_j) &= \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} b_i b_i p(x_i, x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j (p(x_i, x_i) + p(x_j, x_j) - 2p(x_i, x_j)) = \\ &= \varepsilon \sum_{1 \leq i \leq n} b_i p(x_i, x_i) - \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i b_j p(x_i, x_j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Очевидным следствием является равенство:

$$(6.1.15) \quad \xi(\text{NEG}_{n+1}) = \text{PSD}_n.$$

Другими словами, конус отрицательного типа NEG_{n+1} находится во взаимно-однозначном соответствии с положительно полуопределенным конусом PSD_n .

6.2. Характеризация L_2 -вложимости

В этом разделе мы изучаем пространства расстояний, которые могут быть изометрически вложимы в некоторое ℓ_2 -пространство. Другими словами, мы изучаем расстояния, которые могут быть реализованы как попарные евклидовы расстояния на некоторой конфигурации точек в пространстве $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$). Эти пространства расстояний относятся к такому хорошо известному и широко исследуемому разделу математики, как *геометрия расстояний*. Начало исследований в этой области восходит к Кэли [1841], который сделал несколько наблюдений, позднее систематизированных Менгером [1928], что привело, в частности, к теории определителей Кэли–Менгера. Исследования

в этой области были продолжены, в частности, Шёнбергом [1935], который получил новую характеризацию ℓ_2 -вложимых расстояний в терминах неравенств отрицательного типа. Монография Блюментала [1953] и сегодня остается классическим трудом по этой тематике. Интерес к геометрии расстояний был в последние годы стимулирован ее многочисленными приложениями, например, к теории многомерного шкалирования (см. статью Де Люю и Хайзер [1982]) и проблеме строения молекул (см. монографию Гриппен и Хавел [1988]).

Этот раздел содержит несколько характеристик ℓ_2 -вложимых пространств расстояний. Сначала мы рассмотрим результат Шёнберга, который дает характеризацию ℓ_2 -вложимости в терминах неравенств отрицательного типа (см. теорему 6.2.2). В качестве приложения мы покажем, что проверка ℓ_2 -вложимости для конечных пространств расстояний может быть сделана в полиномиальное время; это контрастирует с ℓ_1 -случаем, где соответствующая проблема ℓ_1 -вложимости является NP-сложной. Затем мы рассмотрим эквивалентную характеристику в терминах матриц Кэли–Менгера. Другим фундаментальным результатом является результат Менгера об изометрических подпространствах m -мерного евклидова пространства. Более точно, Менгер показал, что пространство расстояний (X, d) может быть изометрически вложено в m -мерное евклидово пространство $(\mathbb{R}^m, d_{\ell_2})$ тогда и только тогда, когда то же свойство выполняется для всех подпространств (X, d) на $m + 3$ точках (см. теорему 6.2.13). Дальнейшие характеристики для ℓ_2 -вложимости можно найти в теореме 6.2.16.

6.2.1. Результат Шёнберга и определители Кэли–Менгера

В первую очередь мы установим соотношение между понятиями функций положительного типа и $\mathbb{R}$ -ковариантностями. Характеризация L_2 -вложимых пространств в терминах отрицательного типа неравенств, данная в нижеприведенной теореме 6.2.2, будет тогда немедленно следовать из лемм 5.3.2 и 6.1.14; этот результат получен Шёнбергом [1935, 1938b]. Таблица (6.2.3) суммирует эти связи¹⁾.

¹⁾ Эквивалентность $\sqrt{d}$ является ℓ_2 -вложимым $\iff p := \xi(d)$ является положительно полуопределенной матрицей (для расстояния d на конечном множестве) была, конечно, известна некоторым другим авторам. Например, она упоминается в статье Юнга и Хаусхолдера [1938].

Лемма 6.2.1. Пусть p — симметрическая функция на X . Тогда p является функцией положительного типа на X тогда и только тогда, когда p является $\mathbb{R}$ -ковариантностью на X .

Доказательство. Предположим сначала, что p есть $\mathbb{R}$ -ковариантность на X . Тогда

$$p(x, y) = \int_{\Omega} f_x(w) f_y(w) \mu(dw)$$

для всех $x, y \in X$, где f_x — действительная функция на $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Пусть $b \in Z^X$ имеет конечный носитель. Тогда

$$\sum_{x, y \in X} b_x b_y p(x, y) = \int_{\Omega} \left(\sum_{x \in X} b_x f_x(w) \right)^2 \mu(dw) \geq 0.$$

Это показывает, что p является функцией положительного типа на X . Обратно, предположим, что p является функцией положительного типа на X . Покажем, что p является $\mathbb{R}$ -ковариантностью на X . В свете результата теоремы 3.2.1 и леммы 5.3.2 мы можем предположить, что X конечно. По предположению, матрица $(p(x, y))_{x, y \in X}$ является положительно полуопределенной. Следовательно, по лемме 2.4.2, она является матрицей Грама. Это показывает, что p является $\mathbb{R}$ -ковариантностью на X . ■

Теорема 6.2.2. Пусть (X, d) — пространство расстояний. Тогда, (X, d) является пространством отрицательного типа тогда и только тогда, когда $(X, \sqrt{d})$ является L_2 -вложимым.

Напомним, что конус $NO\mathbb{R}_n(2)$ был определен в (3.1.4) как множество расстояний на V_n , для которых $\sqrt{d}$ является ℓ_2 -вложимым. Следовательно

$$NEG_n = NOR_n(2).$$

Матрица расстояний, соответствующая пространству расстояний (V_n, d) с $d \in NOR_n(2)$ (т. е., с ℓ_2 -вложимым $\sqrt{d}$), также известна в литературе как *матрица евклидовых расстояний* (см., например, Гоуэр [1985], Хейден, Уэллс, Вей-Мин Лю и Таразага [1991]). Следовательно, множество матриц евклидовых расстояний идентично конусу отрицательного типа. Более полная информация об этом конусе и о его проекциях будет дана в разделе 31.4.

Непосредственным приложением является результат о том, что проблема определения ℓ_2 -вложимости конечного пространства расстояний (X, d) может быть решена в полиномиальное время. Действительно,

эта проблема равносильна ответу на вопрос, является ли симметрическая матрица (p_{ij}) , ассоциированная с $p := \xi(d^2)$, положительно полуопределенной (что может быть выяснено в полиномиальное время; напомним предложение 2.4.3). Напротив, проверка того, является ли (X, d) ℓ_1 -вложимым, является NP-сложной задачей (напомним проблему (P5) в разделе 4.4).

d — расстояние на V_{n+1}		$p := \xi_{n+1}(d)$	
$\sqrt{d}$ — ℓ_2 -вложимо, т. е. $d \in \text{NOR}_n(2)$	$\Longleftrightarrow$	(p_{ij}) является матрицей Грама при $p_{ij} = p_{ji}$	
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$	
$d \in \text{NEG}_{n+1}$	$\Longleftrightarrow$	$(p_{ij}) \in \text{PSD}_n$	

Табл. 6.2.3.

Мы рассмотрим теперь следующий вопрос: для данного ℓ_2 -вложимого расстояния (X, d) найти минимальную размерность m евклидова пространства $l_2^m = (\mathbb{R}^m, d_{\ell_2})$, в которое (X, d) может быть вложено. Этот параметр есть ℓ_2 -размерность (X, d) , обозначаемая как $m_{\ell_2}(X, d)$. Оказывается, ответить на этот вопрос очень легко, так как $m_{\ell_2}(X, d)$ может быть выражено как ранг соответствующей матрицы.

Введем новое понятие. Пусть (X, d) есть конечное пространство расстояний, где $X = \{1, \dots, n\}$. Пусть $x_0 \in X$ и пусть $p = \xi_{x_0}(d)$ обозначает образ d при ковариантном отображении ξ_{x_0} (напомним отношение (5.2.5)). Тогда мы обозначим через $P_{x_0}(X, d)$ $(n-1) \times (n-1)$ матрицу, (i, j) -й элемент которой равен $p(i, j)$ для $i, j \in X \setminus \{x_0\}$. Следующий результат дает способ вычисления ℓ_2 -размерности. Для удобства мы сформулируем его для пространства расстояний, квадратный корень которого является ℓ_2 -вложимым.

Предложение 6.2.4. Пусть (X, d) — конечное пространство расстояний отрицательного типа, т. е. $(X, \sqrt{d})$ ℓ_2 -вложимо. Тогда ℓ_2 -размерность $m_{\ell_2}(X, \sqrt{d})$ пространства $(X, \sqrt{d})$

$$m_{\ell_2}(X, \sqrt{d}) = \text{rank } P_{x_0}(X, d).$$

Доказательство. Применить лемму 2.4.2. ■

Следствие 6.2.5. Пусть (X, d) — конечное пространство расстояний. Тогда $(X, \sqrt{d})$ изометрически вложимо в l_2^r тогда и только тогда, когда матрица $P_{x_0}(X, d)$ положительно полуопределена и ее ранг $\leq r$. Кроме того, если $m_{\ell_2}(X, \sqrt{d}) = r$, то существует подмножество $Y \subseteq X$, такое что $|Y| = r + 1$ и $m_{\ell_2}(Y, \sqrt{d}) = r$. (Существует такое множество Y , содержащее любой данный элемент $x_0 \in X$.) ■

Следовательно,

$$(6.2.6) \quad m_{\ell_2}(n) = n - 1,$$

где $m_{\ell_2}(n)$ есть минимальная ℓ_2 -размерность, определяемая как минимальное целое m , такое что каждое ℓ_2 -вложимое расстояние на n точках вложимо в l_2^m . Некоторые другие выражения для ℓ_2 -размерности пространства расстояний можно получить, используя лемму 6.2.7 и равенство (6.2.10) ниже.

Лемма 6.2.7. Пусть (X, d) — пространство расстояний с ассоциированной матрицей расстояний D , и пусть $x_0 \in X$. Тогда

$$\text{rank } P_{x_0}(X, d) = \text{rank} \left(I - \frac{1}{n} J \right) D \left(I - \frac{1}{n} J \right).$$

(Здесь J обозначает матрицу, состоящую из одних единиц, и I обозначает единичную матрицу.)

Доказательство. Матрицу $\left(I - \frac{1}{n} J \right) D \left(I - \frac{1}{n} J \right)$ легко привести к виду $P_{x_0}(X, d)$ некоторыми перестановками строк и столбцов. ■

Условия для матрицы $P_{x_0}(X, d)$ можно переформулировать в терминах определителей Кэли–Менгера. Эти определители являются классическим понятием геометрии расстояний (см. Блюменталь [1953]). Они определяются следующим образом. Пусть (X, d) — конечное пространство расстояний с $X = \{1, \dots, n\}$ и пусть D — ассоциированная матрица расстояний. Тогда $(n + 1) \times (n + 1)$ симметрическая матрица:

$$(6.2.8) \quad \text{CM}(X, d) := \begin{pmatrix} D & e \\ e^T & 0 \end{pmatrix}$$

(где e обозначает вектор, состоящий из одних единиц) называется *матрицей Кэли–Менгера* для пространства расстояний (X, d) и $\det \text{CM}(X, d)$ называется *определителем Кэли–Менгера*. Матрицы $\text{CM}(X, d)$ и $P_{x_0}(X, d)$ очень тесно связаны. Чтобы увидеть это, рассмотрим 2×2 подматрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицы $\text{CM}(X, d)$, первые строка

и столбец которой индексированы элементом x_0 из X , а вторые строка и столбец соответствуют новому $(n+1)$ -му члену в $\text{CM}(X, d)$. Легко проверить, что его шуровское дополнение¹⁾ в матрице $\text{CM}(X, d)$ совпадает с матрицей $-2P_{x_0}(X, d)$. Следовательно,

$$(6.2.9) \quad \det \text{CM}(X, d) = (-1)^{|X|} 2^{|X|-1} \det P_{x_0}(X, d),$$

$$(6.2.10) \quad \text{rank CM}(X, d) = \text{rank } P_{x_0}(X, d) + 2.$$

Положительная полуопределенность для $P_{x_0}(X, d)$ также может быть выражена в терминах определителя Кэли–Менгера. Действительно, $P_{x_0}(X, d)$ является положительно полуопределенной тогда и только тогда, когда каждая ее собственная подматрица имеет неотрицательный определитель. Но собственная подматрица $P_{x_0}(X, d)$ имеет вид $P_{x_0}(Y, d)$ для некоторого $Y \subseteq X$ с $x_0 \in Y$. Следовательно, мы имеем следующий результат, который был сформулирован в этой форме Менгером [1954].

Предложение 6.2.11. *Пусть (X, d) — конечное пространство расстояний. Тогда*

- (i) *$(X, \sqrt{d})$ является ℓ_2 -вложимым тогда и только тогда, когда*

$$(-1)^{|Y|} \det \text{CM}(Y, d) \geq 0$$

для всех $Y \subseteq X$ (или для всех $Y \subseteq X$, содержащих данную точку $x_0 \in X$).

- (ii) *Пусть $|X| = r + 1$; $X = \{x_0, x_1, \dots, x_r\}$. Тогда $(X, \sqrt{d})$ является ℓ_2 -вложимым с ℓ_2 -размерностью r тогда и только тогда, когда*

$$(-1)^{k+1} \det \text{CM}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\}, d) > 0$$

для всех $k = 1, \dots, r$.

- (iii) *Предположим, что $|X| = r + 2$. Тогда $(X, \sqrt{d})$ является ℓ_2 -вложимым с ℓ_2 -размерностью r тогда и только тогда, когда элементы из X могут быть упорядочены как $x_0, x_1, \dots, x_r, x_{r+1}$ таким образом, что*

$$(-1)^{k+1} \det \text{CM}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\}, d) > 0$$

для всех $k = 1, \dots, r$, и $\det \text{CM}(X, d) = 0$.

- (iv) *Предположим, что $|X| = r + 3$. Тогда $(X, \sqrt{d})$ является ℓ_2 -вложимым с ℓ_2 -размерностью r тогда и только тогда, когда элементы*

¹⁾ Шуровским дополнением невырожденной подматрицы A_1 в матрице $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$

здесь называется матрица $A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2$, получающаяся в процессе исключения Гаусса. — Прим. ред.

из X могут быть упорядочены как $x_0, x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}$ таким образом, что

$$(-1)^{k+1} \det \text{CM}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\}, d) > 0$$

для всех $k = 1, \dots, r$,

$$\det \text{CM}(X \setminus \{x_{r+1}\}, d) = 0 \quad \text{и} \quad \det \text{CM}(X \setminus \{x_{r+2}\}, d) = 0. \quad \blacksquare$$

Замечание 6.2.12. Заметим, что $\det \text{CM}(X, d) = 2d(x_0, x_1) \geq 0$, если $|X| = 2$, $X = \{x_0, x_1\}$. Кроме того, если $|X| = 3$, $X = \{x_0, x_1, x_2\}$, и если мы положим $a := d(x_0, x_1)$, $b := d(x_0, x_2)$ и $c := d(x_1, x_2)$, то можно проверить, что

$$\begin{aligned} \det \text{CM}(X, d) &= \\ &= (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c})(-\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\det \text{CM}(X, d) \leq 0$, если $\sqrt{d}$ удовлетворяет неравенствам треугольника. Значит, любое полуметрическое пространство на 3 точках ℓ_2 -вложимо. Кроме того, если (X, d) есть пространство расстояний на $|X| = 4$ точках, то $(X, \sqrt{d})$ является ℓ_2 -вложимым тогда и только тогда, когда $\sqrt{d}$ является полуметрикой и $\det \text{CM}(X, d) \geq 0$. $\blacksquare$

6.2.2. Результат Менгера

Для бесконечного пространства расстояний (X, d) из теоремы 3.2.1 известно, что (X, d) L_2 -вложимо если и только если это выполняется для каждого конечного подпространства (X, d) . Менгер [1928] показал¹⁾, что для проверки вложимости в m -размерное пространство l_2^m достаточно рассмотреть подпространства (X, d) на $m + 3$ точках.

Теорема 6.2.13. Для данного $m \geq 1$, пространство расстояний (X, d) может быть изометрически вложено в l_2^m тогда и только тогда, когда для каждого²⁾ $Y \subseteq X$ с $|Y| = m + 3$, (Y, d) может быть изометрически вложено в l_2^m .

Этот результат будет следовать из следующего утверждения.

¹⁾ Детальное изложение этого вопроса можно найти в Менгер [1931] и в монографиях Менгера [1954] и Блюменталя [1953]. Аналогичный вопрос для случая L_1 -пространств будет рассмотрен в разделе 11.1.

²⁾ Заметим, что результат останется верным и в том случае, когда мы предположим только, что (Y, d) изометрически вложено в l_2^m для каждого $Y \subseteq X$ с $|Y| = m + 3$ и содержащего данный элемент $x_0 \in X$. Этот факт будет использован в разделе 6.4 для доказательства теоремы 6.4.8.

Теорема 6.2.14. *Для данного $m \geq 1$ пространство расстояний (X, d) может быть изометрически вложено в l_2^m тогда и только тогда, когда существует целое число r ($0 \leq r \leq m$) и подмножество $Y := \{x_0, x_1, \dots, x_r\}$ множества X , такое что*

- (i) *пространство расстояний (Y, d) может быть изометрически вложено в l_2^r , но не в l_2^{r-1} .*
- (ii) *для любых $x, y \in X$ пространство расстояний $(Y \cup \{x, y\}, d)$ может быть изометрически вложено в l_2^r .*

Тогда $m_{\ell_2}(X, d) = r$.

Перед доказательством мы введем новое понятие. Пусть (X, d) и (X', d') — два пространства расстояний и пусть $x_1, \dots, x_k \in X$, $x'_1, \dots, x'_k \in X'$. Мы пишем

$$x_1, \dots, x_k \sim x'_1, \dots, x'_k$$

если соответствующие подпространства изометричны, т. е. если $d(x_i, x_j) = d'(x'_i, x'_j)$ для всех $i, j = 1, \dots, k$. Когда $x_1, \dots, x_k$ есть векторы из $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), расстояние превращается в евклидово. Другими словами, запись $x_1, \dots, x_k \sim x'_1, \dots, x'_k$ означает, что $\|x_i - x_j\|_2 = d'(x'_i, x'_j)$ для всех i, j .

Доказательство теорем 6.2.13 и 6.2.14. Предположим сначала, что каждое подпространство пространства (X, d) на $m+3$ точках вложено в l_2^m ; покажем существование r и $x_0, \dots, x_r \in X$, удовлетворяющих условиям (i), (ii) из теоремы 6.2.14. Для этого определим r как наименьшее целое, такое что каждое подпространство (X, d) на $r+3$ точках вложено в l_2^r . Тогда существует $Y \subseteq X$ с $|Y| = r+2$, такое что (Y, d) не вложено в l_2^{r-1} . Следовательно, $m_{\ell_2}(Y, d) = r$. По следствию 6.2.5, мы можем найти точки $x_0, \dots, x_r \in Y \subseteq X$, для которых $m_{\ell_2}(\{x_0, \dots, x_r\}, d) = r$. Следовательно, эти $r+1$ точки удовлетворяют условиям (i), (ii).

Обратно, предположим, что существует целое r и некоторые точки $x_0, x_1, \dots, x_r \in X$, удовлетворяющие условиям (i), (ii) из теоремы 6.2.14. Покажем, что (X, d) вложено в l_2^r . По (i), существует множество векторов $x'_0, \dots, x'_r \in \mathbb{R}^r$ (аффинного ранга $r+1$), такое что

$$x_0, x_1, \dots, x_r \sim x'_0, x'_1, \dots, x'_r.$$

Для данного $x \in X$ пространство расстояний $(\{x_0, x_1, \dots, x_r, x\}, d)$ вложено в l_2^r по (ii). Следовательно, существуют вектора $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_r, \bar{x} \in \mathbb{R}^r$, такие что

$$x_0, x_1, \dots, x_r, x \sim \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_r, \bar{x}.$$

Так как $x'_0, \dots, x'_r \sim \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_r$, можно найти (по лемме 2.4.1) ортогональное преобразование g пространства $\mathbb{R}^r$, отображающее каждое $\bar{x}_i$ в

x'_i (для $i = 0, 1, \dots, r$). Положив $x' := g(\bar{x})$, мы получим вектор $x' \in \mathbb{R}^r$, такой что

$$x_0, x_1, \dots, x_r, x \sim x'_0, x'_1, \dots, x'_r, x'.$$

Такой вектор x' единственен (так как $x'_0, x'_1, \dots, x'_r$ имеют полный аффинный ранг $r + 1$). Следовательно, это определяет отображение $x \in X \mapsto x' \in \mathbb{R}^r$. Покажем теперь, что $d(x, y) = \|x' - y'\|_2$ для всех $x, y \in X$. Пусть $x, y \in X$. По (ii), существуют векторы $x''_0, x''_1, x''_r, x'', y'' \in \mathbb{R}^r$, такие что

$$x_0, x_1, \dots, x_r, x, y \sim x''_0, x''_1, \dots, x''_r, x'', y''.$$

Следовательно,

$$x'_0, x'_1, \dots, x'_r, x' \sim x''_0, x''_1, \dots, x''_r, x'' \text{ и } x'_0, x'_1, \dots, x'_r, y' \sim x''_0, x''_1, \dots, x''_r, y''.$$

Используя лемму 2.4.1, мы можем найти ортогональное преобразование f' (соответственно, f'') пространства $\mathbb{R}^r$, отображающее x'_i в x''_i (для $i = 0, 1, \dots, r$) и x' в x'' (соответственно, y' в y''). Следовательно, два отображения f' и f'' совпадают (так как они совпадают на множестве полного аффинного ранга). Из этого следует, что $x', y' \sim x'', y''$. Так как $x, y \sim x'', y''$, мы получаем, что $x, y \sim x', y'$. Это завершает доказательство. $\blacksquare$

Заметим, что теорема 6.2.13 является лучшей из возможных. Действительно, существуют пространства, не вложимые в l_2^m , в то время как каждое их подпространство на $m + 2$ точках вложимо в l_2^m . Другими словами, порядок конгруенции пространства расстояний $l_2^m = (\mathbb{R}^m, d_{\ell_2})$ равен $m + 3$.

Такой пример можно построить следующим образом. Пусть

$$x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^m$$

— вершины равностороннего симплекса Δ в $\mathbb{R}^m$, с длиной стороны, равной a . Обозначим через x_{m+1} центр этого симплекса и через b — евклидово расстояние от x_{m+1} до каждой вершины x_i из Δ . Наконец, обозначим через c евклидово расстояние от x_{m+1} до гиперплоскости, опорной к любой фасете Δ . Определим расстояние d на множестве $X := \{0, 1, \dots, m + 1, m + 2\}$, положив

$$d(i, j) := a \quad \text{для } i \neq j \in \{0, 1, \dots, m\},$$

$$d(i, m + 1) = d(i, m + 2) := b \quad \text{для } i = 0, 1, \dots, m,$$

$$d(m + 1, m + 2) := 2c.$$

(X, d) не является l_2^m -вложимым (на самом деле, не является ℓ_2 -вложимым). С другой стороны, каждое подпространство (X, d) на $m + 2$

точках вложимо в l_2^m . (Действительно, это очевидно для подпространств $(X \setminus \{m+2\}, d)$ и $(X \setminus \{m+1\}, d)$. Это верно также для подпространств $(X \setminus \{i\}, d)$, где $i = 0, \dots, m$. Для проверки этого обозначим через x'_i точку, симметричную точке x_{m+1} относительно гиперплоскости, определенной точками $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$; тогда

$$0, \dots, i-1, i+1, \dots, m, m+1, m+2 \sim x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m, x_{m+1}, x'_i.)$$

Например, для размерности $m = 1$ матрица расстояний

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

дает пример не ℓ_2 -вложимой метрики, для которой каждое трехточечное подпространство вложимо в прямую l_2^1 .

С другой стороны, Менгер показал, что для пространства расстояний (X, d) на более чем $m+3$ точках проверка l_2^m -вложимости его подпространств на $m+2$ точках достаточна для проверки l_2^m -вложимости всего пространства (X, d) (см. Менгер [1931] или Блюменталь [1953]).

Теорема 6.2.15. Пусть (X, d) — пространство расстояний с $|X| \geq m+4$. Тогда (X, d) изометрически l_2^m -вложимо тогда и только тогда, когда (Y, d) изометрически l_2^m -вложимо для каждого $Y \subseteq X$ с $|Y| \leq m+2$.

Доказательство этого результата основано на внимательном анализе свойств «препятствий» в теореме 6.2.13; они возникают в пространствах на $m+3$ точках, не вложимых в l_2^m , в то время как все их подпространства на $m+2$ точках вложимы в l_2^m .

6.2.3. Дальнейшие характеристики

Здесь мы дадим несколько эквивалентных характеристик для пространств расстояний отрицательного типа. Эквивалентность (i) $\iff$ (ii) в нижеприведенной теореме 6.2.16 доказана в Гоуэр [1982], (i) $\iff$ (iii) в Хейден и Уэллс [1988], и (i) $\implies$ (iv) упомянута в Грэхем и Уинклер [1985].

Теорема 6.2.16. Пусть (X, d) — конечное пространство расстояний с $X = \{1, \dots, n\}$. Пусть D — ассоциированная $n \times n$ матрица

расстояний и пусть $\text{CM}(X, d)$ — матрица Кэли–Менгера, определенная формулой (6.2.8). Рассмотрим следующие утверждения.

- (i) (X, d) — пространство отрицательного типа.
- (ii) Матрица $(I - es^T)(-D)(I - se^T)$ положительно полуопределена для всех $s \in \mathbb{R}^n$ с $s^T e = 1$ (e обозначает вектор, состоящий из одних единиц).
- (iii) Матрица $\text{CM}(X, d)$ имеет точно одно положительное собственное значение.
- (iv) Матрица D имеет точно одно положительное собственное значение (если D не нулевая матрица).

Тогда (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\implies$ (iv).

Доказательство. (i) $\iff$ (ii) Пусть $s \in \mathbb{R}^n$ с $s^T e = 1$ и пусть $K := I - se^T$ и $A := K^T(-D)K$. Тогда для $x \in \mathbb{R}^n$ мы имеем, что $x^T A x = y^T(-D)y$, положив $y = Kx$. Легко проверить, что область K состоит из векторов $y \in \mathbb{R}^n$, таких что $\sum_{i=1}^n y_i = 0$. Следовательно, мы получаем, что A положительно полуопределена тогда и только тогда, когда $y^T(-D)y \geq 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$, таких что $\sum_{i=1}^n y_i = 0$, т. е. когда (X, d) — пространство отрицательного типа.

(i) $\iff$ (iii) Пусть $x_0 \in X$. Рассмотрим 2×2 подматрицу $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицы $\text{CM}(X, d)$ со строками и столбцами, индексированными двумя элементами x_0 и $n+1$. Мы используем уже упоминавшийся ранее факт, что шуровское дополнение для C в $\text{CM}(X, d)$ равно матрице $-2P_{x_0}(X, d)$. Следовательно, применяя лемму 2.4.4 и используя то, что C имеет единственное положительное собственное значение, мы получаем, что $P_{x_0}(X, d) \succeq 0$ тогда и только тогда, когда матрица $\text{CM}(X, d)$ имеет точно одно положительное собственное значение. Результат следует теперь из того, что условия $P_{x_0}(X, d) \succeq 0$ и «пространство (X, d) есть пространство отрицательного типа» эквивалентны.

(i) $\implies$ (iv) Матрица D имеет по крайней мере одно положительное собственное значение, так как все ее диагональные члены равны нулю. Если (X, d) есть пространство отрицательного типа, то, по лемме 2.4.5, D имеет не более одного положительного собственного значения, так как $x^T D x \leq 0$ имеет место для всех x на $(n-1)$ -мерном подпространстве пространства $\mathbb{R}^n$. Следовательно, D имеет точно одно положительное собственное значение. $\blacksquare$

Замечание 6.2.17. Пусть (X, d) — пространство расстояний с $X = \{1, \dots, n\}$ и пусть $s \in \mathbb{R}^n$ с $s^T e = 1$. Положим $d(i, \cdot) := \sum_{j \in X} s_j d(i, j)$ для $i \in X$ и $d(\cdot, \cdot) := \sum_{i, j \in X} s_i s_j d(i, j)$. Тогда матрица $A :=$

$= (I - es^T)(-D)(I - se^T)$, рассмотренная в теореме 6.2.16 (ii), имеет элементы вида:

$$a_{ij} := d(i, \cdot) + d(j, \cdot) - d(\cdot, \cdot) - d(i, j) \quad \text{для } i, j \in X.$$

В случае, когда $s = \frac{1}{n}e$, матрица A уже была рассмотрена Торгерсоном [1952], который показал, что $(X, \sqrt{d})$ является ℓ_2 -вложимым тогда и только тогда, когда A положительно полуопределена.

Заметим, что если (X, d) — пространство отрицательного типа, то можно выбрать векторы $u_1, \dots, u_n$, дающие ℓ_2 -вложение $(X, \sqrt{d})$, таким образом, что $\sum_{i \in X} s_i u_i = 0$, и тогда матрица $\frac{1}{2}A$ совпадет с матрицей Грама векторов $u_1, \dots, u_n$ (что снова показывает эквивалентность (i) и (ii) в теореме 6.2.16). В частности, если x_0 — заданный элемент из X , а s — соответствующий координатный вектор, то $\frac{1}{2}A$ совпадает с матрицей $P_{x_0}(X, d)$, увеличенной на нулевую строку и на нулевой столбец в позиции x_0 . ■

Следующий результат рассматривает случай, когда матрица расстояний D имеет постоянную сумму по строкам (равную $\frac{e^T D e}{e^T e}$); т. е. когда вектор e , состоящий из одних единиц, является собственным вектором D . Этот результат можно найти в Хейден и Таразага [1993]; см. также Александер [1977].

Теорема 6.2.18. Пусть (X, d) — пространство расстояний с $X = \{1, \dots, n\}$ и с ненулевой матрицей расстояний D . Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) (X, d) есть пространство отрицательного типа и D имеет постоянную сумму по строкам.
- (ii) D имеет точно одно положительное собственное значение и постоянную сумму по строкам.
- (iii) Существуют векторы $u_1, \dots, u_n$, дающие ℓ_2 -вложение $(X, \sqrt{d})$, лежащие на сфере, центр которой совпадает с барицентром векторов u_i .

Кроме того, при этих условиях $m_{\ell_2}(X, \sqrt{d}) = \text{rank } D - 1$ и радиус r сферы, содержащей вектора u_i , дающие ℓ_2 -вложение $(X, \sqrt{d})$, задается соотношением: $r^2 = \frac{1}{2n} \sum_{j \in X} d_{ij}$.

Доказательство. Импликация (i) $\implies$ (ii) содержится в теореме 6.2.16.

(ii) $\implies$ (iii) По предположению, $De = \lambda e$, где $\lambda := \frac{1}{n} e^T De$, и матрица $\frac{\lambda}{n} ee^T - D$ положительно полуопределена. Следовательно, существуют векторы $u_1, \dots, u_n$, такие что $\frac{\lambda}{n} - d_{ij} = v_i^T v_j$ для всех $i, j \in X$, где $u_i := \frac{1}{\sqrt{2}} v_i$ ($i \in X$). Следовательно, $d_{ij} = (\|u_i - u_j\|_2)^2$ для $i, j \in X^1$. По построению, u_i лежат на сфере с центром в начале координат радиуса $\frac{\lambda}{2n}$, и барицентр этих векторов совпадает с началом координат, так как

$$\left(\left\| \sum_{i \in X} v_i \right\|_2 \right)^2 = \sum_{i, j \in X} v_i^T v_j = \sum_{i, j \in X} \left(\frac{\lambda}{n} - d_{ij} \right) = n\lambda - e^T De = 0.$$

Кроме того, $m_{\ell_2}(X, \sqrt{d})$ равно рангу системы $(u_1, \dots, u_n)$, т. е. рангу матрицы $\frac{\lambda}{n} ee^T - D$, который, как легко проверить, равен $\text{rank } D - 1$.

(iii) $\implies$ (i) Предположим, что $u_1, \dots, u_n$ дают ℓ_2 -вложение $(X, \sqrt{d})$ и что $\sum_{i \in X} u_i = 0$ и $\|u_i\|_2 = r$ для всех $i \in X$, для некоторого $r > 0$. Тогда

$$\sum_{j \in X} d_{ij} = \sum_{j \in X} ((\|u_i\|_2)^2 + (\|u_j\|_2)^2 - 2u_i^T u_j) = 2nr^2$$

не зависит от $i \in X$. Это также дает нужную величину для радиуса r . ■

6.3. Цепь импликаций

В этом разделе рассматриваются все известные импликации, существующие между свойствами пространств расстояний быть L_1 -, L_2 -вложимыми, отрицательного типа и гиперметрическими.

Теорема 6.3.1. Пусть (X, d) — конечное пространство расстояний с ассоциированной матрицей расстояний D . Рассмотрим следующие утверждения.

- (i) (X, d) L_2 -вложимо.
- (ii) (X, d) L_1 -вложимо.

¹⁾ И $v_i^T v_i = \frac{\lambda}{n}$ для всех $i \in X$. — Прим. ред.

- (iii) (X, d) гиперметрично.
 - (iv) (X, d) отрицательного типа.
 - (v) $(X, \sqrt{d})$ L_2 -вложимо.
 - (vi) D имеет точно одно положительное собственное значение.
- Мы имеем цепь импликаций: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi).

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) является классическим результатом анализа; для доказательства см. предложение 6.4.12. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) следует из леммы 6.1.7, и (iii) $\Rightarrow$ (iv) — из следствия 6.1.4. Наконец, (iv) $\Leftrightarrow$ (v) следует из теоремы 6.2.2, и (iv) $\Rightarrow$ (vi) — из теоремы 6.2.16. ■

Пример 6.3.2. Пусть $K_{2,3}$ обозначает полный двудольный граф с множеством вершин $\{x_1, x_2, x_3\} \cup \{y_1, y_2\}$, и пусть $d(K_{2,3})$ обозначает его метрику. Тогда $d(K_{2,3})(x_i, x_j) = d(K_{2,3})(y_1, y_2) = 2$ и $d(K_{2,3})(x_i, y_j) = 1$. Следовательно, $d(K_{2,3})$ не удовлетворяет пентагональному неравенству (6.1.9). На рисунке 6.3.3 числа в скобках показывают, как выбрать числа $b_1, \dots, b_5$ так, чтобы получить $Q(b)^T d(K_{2,3}) > 0$. Следовательно, $d(K_{2,3})$ не является гиперметрическим. Следовательно, $d(K_{2,3})$ не ℓ_1 -вложимо. На самом деле, $d(K_{2,3})$ даже не отрицательного типа, так как матрица расстояний для $K_{2,3}$ имеет два положительных собственных значения. ■

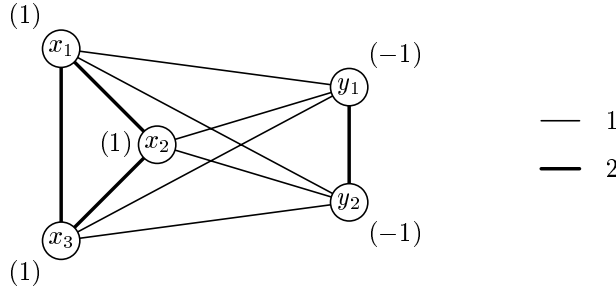


Рис. 6.3.3. Метрика $K_{2,3}$ не пятигональна.

Замечание 6.3.4. Сингулярные матрицы ℓ_1 -расстояний. Пусть (X, d) — конечное пространство расстояний. Если (X, d) является ℓ_p -вложимым для некоторого $1 \leq p \leq 2$, то (X, d) является ℓ_1 -вложимым (см. замечание 3.2.4) и, следовательно, его матрица расстояний имеет точно одно положительное собственное значение. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — различные точки из $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$). Из результатов Шёнберга [1937, 1938a, 1938b] можно заметить, что для $1 \leq p \leq 2$ матрица ℓ_p -расстояний $(\|v_i - v_j\|_p)_{i,j=1}^n$ имеет $n - 1$ отрицательных собственных значения, т. е. несингулярна. Это неверно для $p = 1$. Например,

матрица ℓ_1 -расстояний для векторов $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (1, 0)$, $v_3 = (0, 1)$ и $v_4 = (1, 1)$ является сингулярной. Было дано несколько характеристик для конфигураций различных точек $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$), для которых матрица ℓ_1 -расстояний несингулярна (см. Рид и Сан [1993]; см. также Лин и Пинкус [1993] для приложений к задаче интерполяции так называемыми жесткими функциями¹⁾). В частности, пусть $A = (a_{ij})$ — матрица, в которой элемент a_{ij} обозначает число позиций, на которых координаты векторов v_i и v_j совпадают (т. е. $m - a_{ij}$ равно расстоянию Хэмминга между v_i и v_j). Матрица A положительно полуопределенна. Кроме того, A положительно определена тогда и только тогда, когда матрица $(\|v_i - v_j\|_1)_{i,j=1}^n$ несингулярна. ■

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) теоремы 6.3.1 является, в общем случае, строгой (как было впервые замечено Ассуадом [1977] и Ависом [1981]). В частности¹⁾, она строгая при $7 \leq |X| < \infty$. Другими словами, включение $\text{CUT}_n \subseteq \text{HYP}_n$ является строгим при $n \geq 7$. Чтобы увидеть это, достаточно найти неравенство, определяющее фасету для CUT_n и не являющееся гиперметрическим. В части 5 описано много таких неравенств.

Однако имеется много примеров классов пространств расстояний (X, d) , для которых свойства быть гиперметрическим и L_1 -вложимым эквивалентны. Такие примеры для бесконечного X будут рассмотрены в главе 8. Ниже мы суммируем все, что известно по этому вопросу.

Замечание 6.3.5. Здесь мы даем список пространств расстояний (X, d) , для которых L_1 -вложимость может быть характеризована множеством $\mathcal{I}$ неравенств, каждое из которых либо гиперметрическое неравенство, либо неравенство отрицательного типа.

(i) (V_n, d) с $n \leq 6$; $\mathcal{I}$ состоит из гиперметрических неравенств, т. е. $\text{CUT}_n = \text{HYP}_n$ для $n \leq 6$ (см. раздел 30.6). Более точно, $\mathcal{I}$ состоит из p -гональных неравенств с $p = 3, 5$ в случае $n = 5$, и $p = 3, 5, 7$ в случае $n = 6$.

¹⁾ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *жесткой* если существует $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}^n$ такие, что $f(x) = \varphi(xa)$.

¹⁾ Эта импликация остается строгой и в случае $X = \mathbb{N}$. Действительно, рассмотрим пример расстояния d на $\mathbb{N}$, полученного при взятии последовательно сферических t -расширений (см. раздел 7.3) метрики пути графа Шлефли G_{27} . Следовательно, d_{ij} равно длине кратчайшего пути, связывающего i и j в G_{27} , если i и j являются вершинами в G_{27} , и $d_{ij} = t$ в остальных случаях. d является гиперметрическим для $t \geq \frac{4}{3}$ (по предложению 14.4.6), но не является L_1 -вложимым (так как метрика пути для G_{27} лежит на экстремальном луче гиперметрического конуса на 27 точках; см. раздел 16.2).

(ii) Нормированное пространство $(\mathbb{R}^m, d_{\|\cdot\|})$; $\mathcal{I}$ состоит из неравенств отрицательного типа (см. теорему 8.3.1).

(iii) Нормированное пространство $(\mathbb{R}^m, d_{\|\cdot\|})$, единичный шар которого является многогранником; $\mathcal{I}$ состоит из 7-гональных неравенств (см. теорему 8.3.2).

(iv) (L, d_v) , где $(L, \preceq)$ есть частично упорядоченная решетка, v есть положительная оценка на L , и $d_v(x, y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y)$ для $x, y \in L$; $\mathcal{I}$ состоит из 5-гональных неравенств или, что эквивалентно, $\mathcal{I}$ состоит из неравенств отрицательного типа (см. теорему 8.1.3 и пример 8.2.6).

(v) $(\mathcal{A}, d)$, где $\mathcal{A}$ — семейство подмножеств множества Ω , замкнутое относительно симметрической разности, v — неотрицательная функция на $\mathcal{A}$, такая что $v(\emptyset) = 0$, и $d(A, B) := v(A \triangle B)$ для $A, B \in \mathcal{A}$; $\mathcal{I}$ состоит из неравенств отрицательного типа (см. следствие 8.2.8).

(vi) Графическое пространство $(V, d(G))$, где G есть связный двудольный граф с множеством вершин V ; $\mathcal{I}$ состоит из 5-гональных неравенств (см. теорему 19.2.1).

(vii) Графическое пространство $(V, d(G))$, где G есть связный граф по меньшей мере на 37 вершинах, имеющий вершину, связанную со всеми остальными вершинами; $\mathcal{I}$ состоит из неравенств отрицательного типа и 5-гональных неравенств (см. следствие 17.1.10 (ii)).

(viii) Графическое пространство $(V, d(G))$, где G есть связный граф по меньшей мере на 28 вершинах, имеющий вершину, связанную со всеми остальными вершинами; $\mathcal{I}$ состоит из гиперметрических неравенств (см. следствие 7.1.10 (ii)). ■

Мы закончим двумя примерами применения неравенств отрицательного типа к геометрическим вопросам, взятыми из работы Деза и Маехара [1994]. Первый из них имеет отношение к следующей теореме Ранкина [1995] (связанной с проблемой определения максимального числа непересекающихся шаров, которые можно упаковать в данный шар).

Теорема 6.3.6. Пусть $R < \frac{1}{\sqrt{2}}$ и пусть N_R обозначает максимальное число N точек $x_1, \dots, x_N$, которые можно расположить в замкнутом (евклидовом) шаре радиуса R таким образом, чтобы $\|x_i - x_j\|_2 \geq 1$ для всех $i \neq j = 1, \dots, N$. Тогда $N_R = \left\lfloor \frac{1}{1 - 2R^2} \right\rfloor$.

Доказательство. Короткое доказательство можно получить, используя неравенства отрицательного типа. Предположим, что $x_1, \dots, x_N$ лежат в шаре с центром x_0 и радиуса R и что $\|x_i - x_j\|_2 \geq 1$ для всех $i \neq j = 1, \dots, N$. Применяя неравенство отрицательного типа $Q(-n, 1, \dots, 1)^T x \leq 0$ к расстоянию d на $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, определенному как $d(x_i, x_j) := (\|x_i - x_j\|_2)^2$ для всех i, j , мы получим неравенство:

$$N \sum_{i=1}^N d(x_0, x_i) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq N} d(x_i, x_j).$$

Так как $d(x_0, x_i) \leq R^2$ и $d(x_i, x_j) \geq 1$ для $i \neq j \leq n$, отсюда следует, что $N^2 R^2 \geq \binom{N}{2}$; тогда $N \leq N_R := \left\lfloor \frac{1}{1-2R^2} \right\rfloor$. Равенство достигается при взятии в качестве $x_1, \dots, x_N$ $N := N_R$ вершин регулярного $(N-1)$ -мерного симплекса с длиной стороны 1 и $x_0 := \frac{1}{N} \sum_i x_i$. ■

Следующий результат касается обобщения хорошо известной теоремы параллелограмма на высшие размерности. Эта теорема утверждает, что для данных четырех различных точек имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} (\|x_1 - y_1\|_2)^2 + (\|x_1 - y_2\|_2)^2 + (\|x_2 - y_1\|_2)^2 + (\|x_2 - y_2\|_2)^2 \geq \\ \geq (\|x_1 - x_2\|_2)^2 + (\|y_1 - y_2\|_2)^2, \end{aligned}$$

а равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 y_1 x_2 y_2$ — параллелограмм.

Для данного многогранника P линейный сегмент, связывающий две вершины P , называется *диагональю* P , если он не принадлежит ни одной из собственных граней P . *n -параллелепипедом* называется векторная сумма n сегментов с общей начальной точкой, такая что ни один сегмент не содержится в аффинной оболочке других (при $n = 2$ это параллелограмм).

Теорема 6.3.7. Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^n$, комбинаторно эквивалентный n -мерному гиперкубу, пусть $G(P) := (V_P, E_P)$ обозначает граф его реберного скелета, и пусть D_P обозначает множество диагоналей P . Тогда

$$\sum_{xy \in E_P} (\|x - y\|_2)^2 \geq \sum_{xy \in D_P} (\|x - y\|_2)^2,$$

с равенством тогда и только тогда, когда P является n -параллелепипедом.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n . Оно основано на тождестве

$$\sum_{i,j=1}^n (\|x_i - y_j\|_2)^2 - \sum_{1 \leq i < i' \leq n} (\|x_i - x_{i'}\|_2)^2 + (\|y_i - y_{i'}\|_2)^2 = n^2 (\|p - q\|_2)^2$$

для всех точек $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, если положить $p := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $q := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$. Детали доказательства см. в статье Деза и Маехара [1994].

■

6.4. Пример: Пространство сферических расстояний

Здесь мы опишем классический пример ℓ_1 -вложимого пространства расстояний, именно, пространство сферических расстояний. Это пространство расстояний, определенное на сфере S , при расстоянии между двумя точками $x, y \in S$, заданном как

$$(6.4.1) \quad r \cdot \arccos \left(\frac{(x - c)^T (x - y)}{r^2} \right),$$

где c обозначает центр S и r обозначает ее радиус. Величина (6.4.1) известна как *сферическое расстояние* (или *метрика большой окружности*) между x и y . (Это геодезическое расстояние на сфере S между точками x и y , которое совпадает с углом между двумя векторами, проведенными из c к x и y .) Очевидно, мы можем предположить, что сфера S имеет центр в начале координат и что ее радиус равен 1 (с точностью до шкалы расстояния). Пусть S_m обозначает m -мерную единичную сферу, т. е.

$$S_m := \left\{ x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1 \right\}.$$

Мы будем обозначать через S_m пространство расстояний (S_m, d_S) , где d_S является расстоянием, определенным по формуле (6.4.1), т. е.

$$(6.4.2) \quad d_S(x, y) := \arccos(x^T y) \quad \text{для всех } x, y \in S_m.$$

Аналогично, пусть $S_{m,r}$ обозначает пространство расстояний $(S_{m,r}, d_S)$, где $S_{m,r}$ есть m -мерная сфера с центром в начале координат радиуса r ,

а расстояние d_S определено по (6.4.1). Таким образом, $S_m = S_{m,1}$. Пространство расстояний $S_{m,r}$ называется *пространством сферических расстояний*. Мы отсылаем читателя к Блюменталу [1953] для детального изучения метрических свойств этих пространств расстояний. Напомним здесь некоторые свойства, наиболее полезные для наших исследований.

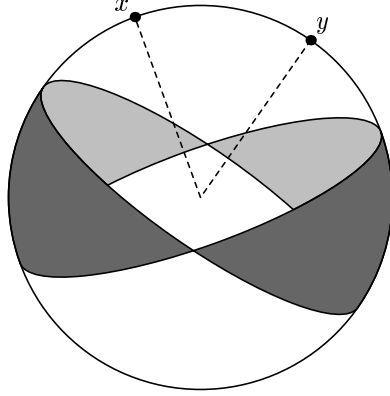


Рис. 6.4.3. $H(x) \Delta H(y)$ совпадает с заштрихованной областью.

Первое основное свойство пространств сферических расстояний состоит в том, что они ℓ_1 -вложимы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим для точки $x \in S_m$ *полусферу* $H(x)$, содержащую x ; именно, $H(x)$ состоит из точек $y \in S_m$, таких что $d_S(x, y) \leq \frac{\pi}{2}$ или, что равносильно, $x^T y \geq 0$. Рассмотрим также меру μ на S_m , определенную как

$$\mu(A) := \frac{\text{vol}(A)}{\text{vol}(S_m)} \quad \text{для } A \subseteq S_m.$$

(здесь $\text{vol}(A)$ обозначает m -мерный объем A .) Следовательно, сфера S_m , снабженная мерой μ , является вероятностным пространством. Тогда

$$(6.4.4) \quad \mu(H(x) \Delta H(y)) = \frac{1}{\pi} \arccos(x^T y) \quad \left(= \frac{1}{\pi} d_S(x, y) \right) \quad \text{для } x, y \in S_m.$$

Это соотношение можно легко проверить; впервые оно было замечено Келли [1970b]. Рисунок 6.4.3 иллюстрирует случай $m = 2$. Результат

приведенной ниже теоремы 6.4.5¹⁾) является немедленным следствием соотношения (6.4.4), если использовать предложение 4.2.1.

Теорема 6.4.5. *Для данных $u_1, \dots, u_n \in S_m$ вектор*

$$\left(\frac{1}{\pi} \arccos(u_i^T u_j) \right)_{1 \leq i < j \leq n}$$

принадлежит разрезному многограннику $\text{CUT}_n^\square$. Следовательно, пространство сферических расстояний $\mathcal{S}_{m,r}$ является изометрически ℓ_1 -вложимым для всех $r > 0$, $m \geq 1$.

Оказывается, как показывают нижеприведенные результаты, изометрические подпространства пространств сферических расстояний тесно связаны с пространствами евклидовых расстояний.

Пусть d — расстояние на множестве $V_n := \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим симметрическую матрицу¹⁾ $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, определенную как

$$a_{ij} := \cos(d_{ij}) \quad \text{для } i, j = 1, \dots, n.$$

Следовательно, все диагональные члены A равны 1. Кроме того, пусть $\tilde{d}$ обозначает расстояние на множестве $V_n \cup \{x_0\}$ (x_0 — новый элемент, не принадлежащий V_n), определенное как

$$\tilde{d}(x_0, i) = 1 \quad \text{для } i \in V_n,$$

$$\tilde{d}(i, j) = 2 - 2 \cos(d(i, j)) = 4 \sin^2 \left(\frac{d(i, j)}{2} \right) \quad \text{для } i, j \in V_n.$$

¹⁾ Другими словами, теорема 6.4.5 показывает, как получить неравенства, допустимые для попарных углов в множестве из n единичных векторов; а именно, рассматривая допустимые неравенства для разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$. Мы напомним об этом факте в разделе 31.2.

²⁾ Мы не можем получить аналога теоремы 6.4.5 для родственных эллиптических пространств расстояний. *Эллиптическое пространство расстояний $\mathcal{E}\ell_m$* может быть получено из сферического пространства расстояний $\mathcal{S}_m$ путем отождествления антиподальных точек и задания величины $\min(d_S(x, y), \pi - d_S(x, y))$ в качестве расстояния между $x, y \in S_m$. Эллиптическое пространство расстояний $\mathcal{E}\ell_m$ является полуметрическим пространством (Блюменталь [1953]), но не является гиперметрическим пространством (на самом деле, даже не 5-гональным (Келли [1970b])). Другое различие между сферическим и эллиптическим пространствами расстояний связано с определением их порядков конгруенции. Как мы увидим в теореме 6.4.8, порядок конгруенции сферического пространства расстояний $\mathcal{S}_m$ можно легко определить; с другой стороны, порядок конгруенции эллиптического пространства расстояний $\mathcal{E}\ell_m$ известен только для размерности $m \leq 2$ (см. Зайдель [1975] и библиографию в этой статье).

¹⁾ В разделе 31.3 мы будем подробно изучать множество положительно полуопределенных матриц с диагональными членами, равными 1. В частности, мы будем использовать теорему 6.4.5.

Теорема 6.4.6. Пусть $m \geq 1$ целое число, а $d, \tilde{d}$ и A определены вышеуказанным образом. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) Пространство расстояний (V_n, d) является изометрическим подпространством m -мерного пространства S_m сферических расстояний.
- (ii) $d_{ij} \in [0, \pi]$ для всех $i, j \in V_n$ и матрица A положительно полуопределена и $\text{rank } A \leq m + 1$.
- (iii) $d_{ij} \in [0, \pi]$ для всех $i, j \in V_n$ и пространство расстояний $V_n \cup \{x_0\}$ может быть изометрически вложено в l_2^{m+1} .

Доказательство. Эквивалентность (i) $\iff$ (ii) очевидна. Действительно, (V_n, d) является изометрическим подпространством S_m тогда и только тогда, когда существуют $u_1, \dots, u_n \in S_m$, такие что $\cos(d(i, j)) = u_i^T u_j$ для всех $i, j \in V_n$; это имеет место, если матрица A положительно полуопределена и имеет ранг $\leq m + 1$. Эквивалентность (ii) $\iff$ (iii) следует из следствия 6.2.5 и того факта, что A совпадает с матрицей $P_{x_0}(V_n \cup \{x_0\}, \tilde{d})$. ■

Следствие 6.4.7. Пространство расстояний (V_n, d) изометрически вложимо в $S_{m,r}$ (для некоторого $m \geq 1$) тогда и только тогда, когда $d_{ij} \in [0, \pi r]$ для всех $i, j \in V_n$ и матрица $A := \left(\cos \left(\frac{d_{ij}}{r} \right) \right)_{i,j=1}^n$ положительно полуопределена. Тогда наименьшее m , такое что (V_n, d) вложимо в $S_{m,r}$, есть $m = \text{rank } A - 1$. ■

Используя предложение 6.4.6, можно легко получить результат компактности для пространств сферических расстояний, аналогичный результату компактности для евклидовых пространств из теоремы 6.2.13; этот результат можно найти в книге Блюменталь [1953].

Теорема 6.4.8. Для данного $m \geq 1$, пространство расстояний (X, d) может быть изометрически вложено в m -мерное пространство сферических расстояний S_m тогда и только тогда, когда то же следует для каждого подпространства (Y, d) , где $Y \subseteq X$ с $|Y| = m + 3$. ■

В частности, порядок конгруенции пространства сферических расстояний S_m равен $m + 3$. Чтобы увидеть это, рассмотрим пространство расстояний (X, d) , где $|X| \geq m + 3$ и $d_{ij} := \arccos \left(-\frac{1}{m+1} \right)$ для всех $i \neq j \in X$. Тогда (X, d) не вложимо в S_m (так как матрица $(\cos(d_{ij}))_{i,j \in X}$ не положительно полуопределена). С другой стороны,

каждое подпространство (Y, d) с $|Y| = m + 2$ вложимо в $\mathcal{S}_m$ (так как матрица $(\cos(d_{ij}))_{i,j \in Y}$ положительно полуопределена и имеет ранг $m + 1$).

Имеются и другие близкие связи между сферическими и евклидовыми расстояниями. Именно, как показал Шёнберг [1935], каждое множество аффинно независимых векторов, снабженное евклидовым расстоянием, можно изометрически вложить в некоторое пространство сферических расстояний. И, если вектора не являются независимыми, то евклидовы расстояния могут быть асимптотически реализованы как пределы сферических расстояний. Это позволяет получить хорошо известную импликацию: « ℓ_2 -вложимость $\implies \ell_1$ -вложимость».

Предложение 6.4.9. Пусть $u_0, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ аффинно независимы. Тогда пространство расстояний $(\{u_0, u_1, \dots, u_n\}, d_{\ell_2})$ является изометрическим подпространством $\mathcal{S}_{n,r}$, для некоторого достаточно большого r .

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $u_0 := 0$. По предположению, матрица $P := (p_{ij} := u_i^T u_j)_{i,j=1}^n$ положительно полуопределена. Пусть $A(r)$ есть $(n+1) \times (n+1)$ симметрическая матрица с элементами $a_{ij} := \cos\left(\frac{d_{ij}}{r}\right)$ для $i, j = 0, 1, \dots, n$. В свете следствия 6.4.7 достаточно проверить, что $A(r) \succ 0$ для достаточно большого r . Для матриц A и B будем говорить, что $A \sim B$, если $A \succ 0 \iff B \succ 0$. Очевидно, $A(r) \sim B(r)$, где 00-элемент $B(r)$ равен $b_{00} := 1$, 0*i*-элемент равен $b_{0i} := a_{0i} - 1$ (для $i = 1, \dots, n$) и ij -элемент равен $b_{ij} := a_{ij} - a_{0i} - a_{0j} + 1$ (для $i, j = 1, \dots, n$) (чтобы увидеть это, нужно вычесть строку, индексированную 0, из всех других строк и столбец, индексированный 0, из всех других столбцов). Теперь мы используем то, что $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$. Тогда каждый элемент $B(r)$ можно выразить как $b_{0i} := -\frac{1}{2r^2}p_{ii} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$, $b_{ij} = \frac{1}{r^2}p_{ij} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$. Следовательно, после подходящего нормирования $B(r)$, мы получим, что $A(r) \sim B(r) \sim C(r)$, где 00-й элемент $C(r)$ равен $4r^2$, 0*i*-й элемент $C(r)$ равен $p_{ii} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$, и ij -й элемент $C(r)$ равен $p_{ij} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$. Легко проверить, что $C(r) \succ 0$ для любого достаточно большого r . (Заметим, что достаточно проверить, что $n+1$ собственных

подопределителя $C(r)$, расположенные по диагонали, положительны, что верно при достаточно большом r по предположению $P \succ 0$.) ■

Замечание 6.4.10. Предложение 6.4.9 можно расширить до произвольного множества векторов, лежащих на одной прямой. Но его нельзя расширить до произвольного множества векторов в размерности $n \geq 2$. В качестве контрпримера возьмем за $u_1, \dots, u_{n+1}$ вершины равностороннего симплекса и за u_0 барицентр симплекса. Пространство расстояний $(\{u_0, u_1, \dots, u_{n+1}\}, d_{\ell_2})$ не вложимо ни в какое пространство сферических расстояний. ■

Покажем теперь, как евклидово расстояние может быть аппроксимировано сферическими расстояниями¹⁾. Для этого пусть $u_i, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$. Оценим попарные евклидовы расстояния между ними. Так, положим $d_{ij} := \|u_i - u_j\|_2$ для $i, j = 1, \dots, n$. Покажем, что d можно представить как предел расстояний $d^{(r)}$ (при $r \rightarrow \infty$), где каждое $d^{(r)}$ может быть изометрически вложено в $\mathcal{S}_{m,r}$. Интуитивно эта идея очень проста. Именно, для $r > 0$ рассмотрим сферу $S^{(r)}$ в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ с центром $c := (0, \dots, 0, r)$ и радиусом r . Можно рассматривать $S^{(r)}$ как сферу, лежащую выше $\mathbb{R}^m$, рассматриваемого как гиперплоскость $x_{m+1} = 0$ в $\mathbb{R}^{m+1}$. Каждый вектор $u \in \mathbb{R}^m$ с $\|u\|_2 \leq r$ можно «поднять» к точке $u^{(r)} \in S^{(r)}$, положив

$$u^{(r)} := \left(u, r - \sqrt{r^2 - (\|u\|_2)^2} \right).$$

Пусть $r \geq \max_{i=1}^n \|u_i\|_2$. Для $i = 1, \dots, n$ пусть $u_i^{(r)} \in S^{(r)}$ есть «подъем» u_i , определенный выше. Положим

$$d^{(r)}(i, j) := r \cdot \arccos \left(\frac{(u_i - c)^T (u_j - c)}{r^2} \right) \quad \text{для } i, j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, $d^{(r)}(i, j)$ представляет собой сферическое расстояние на сфере $S^{(r)}$ между $u_i^{(r)}$ и $u_j^{(r)}$. Очевидно, эта длина стремится к евклидову расстоянию $\|u_i - u_j\|_2$, когда r стремится к бесконечности, т. е.

$$(6.4.11) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} d^{(r)}(i, j) = \|u_i - u_j\|_2.$$

Более точно, $d^{(r)}(i, j)$ можно оценить для больших r следующим образом:

$$d^{(r)}(i, j) = r \cdot \arccos \left(\frac{\sqrt{r^2 - (\|u_i\|_2)^2} \sqrt{r^2 - (\|u_j\|_2)^2} + u_i^T u_j}{r^2} \right) =$$

¹⁾ Этот факт был замечен в Келли [1975].

$$\begin{aligned}
&= r \cdot \arccos \left(\sqrt{1 - \frac{(\|u_i\|_2)^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{(\|u_j\|_2)^2}{r^2}} + \frac{u_i^T u_j}{r^2} \right) \approx \\
&\quad \approx r \cdot \arccos \left(1 - \frac{(\|u_i - u_j\|_2)^2}{2r^2} \right) \approx \|u_i - u_j\|_2.
\end{aligned}$$

(Здесь мы используем, что $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ и $\arccos(1-x^2) \approx \sqrt{2}x$ при $x \rightarrow 0$.) ■

Предложение 6.4.12. *Для пространства расстояний (X, d)*

d изометрически ℓ_2 -вложимо $\implies d$ изометрически ℓ_1 -вложимо.

Доказательство. Следует из приведенных выше рассуждений, формулы (6.4.11) и теоремы 6.4.5. ■

6.5. Пример: расстояния Кальмансона

Мы упомянем здесь о другом классе ℓ_1 -вложимых полуметрик, возникающем из так называемых расстояний Кальмансона. Эти расстояния имеют, кроме того, такое интересное свойство: они дают примеры задачи коммивояжера, решаемые в полиномиальное время.

Пусть d — расстояние на множестве $V_n = \{1, \dots, n\}$. Мы говорим, что d есть *расстояние Кальмансона*, если оно удовлетворяет условиям:

$$\max(d_{ij} + d_{rs}, d_{is} + d_{jr}) \leq d_{ir} + d_{js}$$

для всех $1 \leq i \leq j \leq r \leq s \leq n$. В этом определении важен порядок элементов; так что мы говорим также, что d есть расстояние Кальмансона по отношению к данному упорядочиванию $1, \dots, n$. Кроме того, удобно рассматривать элементы $1, \dots, n$ как лежащие на окружности в этом циклическом порядке. Для $1 \leq i < j \leq n$ положим

$$\alpha_{ij}(d) := d_{ij} + d_{i+1, j+1} - d_{i, j+1} - d_{i+1, j}$$

(индексы взяты по модулю n) и $[i, j] := \{i, i+1, \dots, j-1, j\}$. Чепой и Фише [1998] заметили следующий факт.

Лемма 6.5.1. *Каждое расстояние d на V_n может быть разложено как*

$$2d = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij}(d) \delta([i+1, j]).$$

Доказательство основано на простой проверке. ■

Введем еще одно определение. Расстояние d на V_n называется *циклически разложимым*, если его можно разложить как

$$d = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} \delta([i+1, j])$$

для некоторых неотрицательных скаляров α_{ij} ($1 \leq i < j \leq n$); следовательно, оно является ℓ_1 -вложимым. Так как все $\alpha_{ij}(d)$ неотрицательны, если d — расстояние Кальмансона, то из леммы 6.5.1 мы получаем, что каждое расстояние Кальмансона циклически разложимо. Обратно, легко проверить, что каждое циклически разложимое расстояние является расстоянием Кальмансона. Следовательно, мы имеем следующий результат¹⁾.

Предложение 6.5.2. *Расстояние является расстоянием Кальмансона тогда и только тогда, когда оно циклически разложимо (с тем же самым упорядочиванием).* ■

Пример 6.5.3. Рассмотрим несколько примеров расстояний Кальмансона. Во-первых, метрика расстояний весового дерева является расстоянием Кальмансона при некотором упорядочивании вершин дерева (Бандельт и Дресс [1992]). Для построения другого примера рассмотрим множество точек $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ такое, что x_i лежат на границе их выпуклой оболочки и расположены по границе в указанном порядке. Тогда множество X , снабженное евклидовым расстоянием²⁾ d_{ℓ_2} , дает расстояние Кальмансона, соответствующее данному порядку (Кальмансон [1975]). Чтобы увидеть это, рассмотрим четыре точки x_i, x_j, x_r, x_s , расположенные именно в этом порядке на границе. Тогда отрезки $[x_i, x_r]$ и $[x_j, x_s]$ пересекаются в точке y . Мы получаем, что

$$\begin{aligned} d_{\ell_2}(x_i, x_j) + d_{\ell_2}(x_r, x_s) &\leq \\ &\leq d_{\ell_2}(x_i, y) + d_{\ell_2}(y, x_j) + d_{\ell_2}(x_r, y) + d_{\ell_2}(y, x_s) = \\ &= d_{\ell_2}(x_i, x_r) + d_{\ell_2}(x_j, x_s). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

¹⁾ Эквивалентность между расстояниями Кальмансона и циклически разложимыми расстояниями была доказана ранее Кристофером, Фарахом и Триком [1996]; однако их доказательство более сложное, чем представленное здесь доказательство Чепоя и Фише [1998].

²⁾ Аналогичный результат получится, если вместо евклидова расстояния мы рассмотрим произвольную метрику на $\mathbb{R}^2$ с нормой, или, в более общем случае, проективную метрику (которая будет определена позднее).

С вычислительной точки зрения, Дейнеке, Рудольф и Вёгинджер [1995] показали, что проверить, является ли расстояние на n точках расстоянием Кальмансона для некоторого упорядочивания элементов, и найти это упорядочивание можно за время $O(n^2 \log n)$. В заключение рассмотрим применение этих рассуждений к проблеме коммивояжера.

Замечание 6.5.4. Приложение к задаче коммивояжера. Задача коммивояжера¹⁾ может быть сформулирована следующим образом. Для данного расстояния d на V_n найти гамильтоновы цикл $(i_1, \dots, i_n)$, вес которого

$$\sum_{h=1}^{n-1} d(i_h, i_{h+1}) + d(i_n, i_1)$$

является минимальным. Это NP-трудная задача. Она остается NP-трудной для евклидовых расстояний (т. е. если d представляет евклидовы расстояния между множеством точек в некотором пространстве $\mathbb{R}^m$) и, следовательно, для ℓ_1 -расстояний. Однако, как было уже замечено Кальмансоном [1975], задача коммивояжера может быть очень легко решена для расстояний Кальмансона. Действительно, предположим, что d есть расстояние Кальмансона на V_n с упорядочиванием $1, \dots, n$. Тогда гамильтоновы цикл $(1, \dots, n)$ имеет минимальный вес. Действительно, из леммы 6.5.1 мы получаем, что вес контура $(1, \dots, n)$ равен $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij}(d)$. С другой стороны, величина $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij}(d)$ является нижней границей для веса любого гамильтонова цикла (так как цикл и разрез пересекаются по меньшей мере по двум ребрам). ■

¹⁾ Для полной информации по этой задаче см. Лоулера, Ленстра, Ринной Кан и Шмойс [1985].

Глава 7.

Операции

В этой главе мы рассмотрим несколько операций, позволяющих расширить данное расстояние на V_n до некоторого расстояния на V_{n+1} . Примерами таких операций являются операции гэйт-расширения, антиподального расширения, ферического расширения, которые описаны соответственно в разделах 7.1, 7.2 и 7.3. Мы рассмотрим также операции прямого произведения, тензорного произведения и 1-суммы, в разделах 7.5 и 7.6. В частности, мы обсудим условия, при которых эти операции сохраняют метрические свойства, такие как ℓ_1 -вложимость или вложимость в гиперкуб, гиперметрические и отрицательного типа условия, или принадлежность к разрезной решетке. *Разрезная решетка* $\mathcal{L}_n$ определяется как

$$\mathcal{L}_n := \left\{ \sum_S \lambda_S \delta(S) \mid \lambda_S \in \mathbb{Z} \text{ для всех } S \right\}.$$

Дополнительная информация о $\mathcal{L}_n$ будет дана в разделе 25.1. В разделе 7.4 мы детально исследуем пример графа $K_{n \times 2}$. Этот граф играет, в частности, центральную роль в теории ℓ_1 -вложений. Действительно, это один из возможных множителей (кроме графа полукуба и графа Госсета), которые могут входить в каноническое представление гиперметрического или ℓ_1 -графа (см. теоремы 14.3.6 и 14.3.7). Специфику графа $K_{n \times 2}$ демонстрирует также следующий результат Камерона, Гётальса, Зайделя и Шульта [1976]: единственными связными регулярными графами на $n > 28$ вершинах, матрица смежности которых имеет минимальное собственное значение ≥ -2 , являются реберные графы и графы $K_{n \times 2}$.

7.1. Операция гэйт-расширения

Пусть d — расстояние на $V_n = \{1, \dots, n\}$ и пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Определим расстояние d' на $V_{n+1} = V_n \cup \{n+1\}$, положив

$$(7.1.1) \quad \begin{cases} d'(1, n+1) = \alpha, \\ d'(i, n+1) = \alpha + d(1, i) & \text{для } 2 \leq i \leq n, \\ d'(i, j) = d(i, j) & \text{для } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Расстояние d' называется *гэйт-расширением* для расстояния d и обозначается $\text{gat}_\alpha(d)$. Эта операция особенно полезна при $\alpha = 0$; в этом случае $\text{gat}_0(d)$ называют также *0-гэйт-расширением* (или просто *0-расширением*) для d . По построению, $\text{gat}_\alpha(d)$ удовлетворяет следующим равенствам треугольника:

$$d'(i, n+1) = d'(1, n+1) + d'(1, i)$$

для всех $i = 2, \dots, n$. Из этого немедленно следует, что любая $\mathbb{R}_+$ -реализация $\text{gat}_\alpha(d)$ имеет форму

$$\text{gat}_\alpha(d) = \sum_{\substack{S \subseteq V_n, \\ 1 \notin S}} \lambda_S \delta(S) + \alpha \delta(\{n+1\}),$$

где

$$d = \sum_{\substack{S \subseteq V_n, \\ 1 \notin S}} \lambda_S \delta(S).$$

Можно легко проверить следующий результат.

Предложение 7.1.2. Пусть d — расстояние на V_n и пусть $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (i) $\text{gat}_\alpha(d)$ является ℓ_1 -вложимым (соответственно, ℓ_1 -жестким) тогда и только тогда, когда $\alpha \geq 0$ и d является ℓ_1 -вложимым (соответственно, ℓ_1 -жестким).
- (ii) $\text{gat}_\alpha(d)$ вложимо в гиперкуб (соответственно, h -жестко) тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ и d вложимо в гиперкуб (соответственно, h -жестко).
- (iii) $\text{gat}_\alpha(d) \in \mathcal{L}_{n+1}$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $d \in \mathcal{L}_n$.
- (iv) $\text{gat}_\alpha(d)$ является гиперметрическим (соответственно, отрицательного типа) тогда и только тогда, когда $\alpha \geq 0$ и d является гиперметрическим (соответственно, отрицательного типа).

7.2. Операция антиподального расширения

Пусть d — расстояние на множестве $V_n = \{1, \dots, n\}$ и пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Определим расстояние d на множестве $V_{n+1} = V_n \cup \{n+1\}$, положив

$$(7.2.1) \quad \begin{cases} d'(1, n+1) = \alpha, \\ d'(i, n+1) = \alpha - d(1, i) & \text{для } 2 \leq i \leq n, \\ d'(i, j) = d(i, j) & \text{для } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Расстояние d' называется *антиподальным расширением* d и обозначается $\text{ant}_\alpha(d)$. (Сравните с определением гэйт-расширения $\text{gat}_\alpha(d)$ из (7.1.1).) Заметим, что $\text{ant}_\alpha(d)$ удовлетворяет равенствам треугольника:

$$(7.2.2) \quad d'(1, n+1) = d'(1, i) + d'(i, n+1)$$

для всех $i = 2, \dots, n$ (таким образом, новая точка « $n+1$ » является «антиподальной» точке «1»). Если мы применим операцию антиподального расширения n раз, начиная с расстояния d , мы получим расстояние на $2n$ точках, обозначаемое $\text{Ant}_\alpha(d)$ и называемое *полным антиподальным расширением* d . Таким образом, $\text{Ant}_\alpha(d)$ определено как

$$(7.2.3) \quad \begin{cases} \text{Ant}_\alpha(d)(i, n+i) = \alpha & \text{для } 1 \leq i \leq n, \\ \text{Ant}_\alpha(d)(i, n+j) = \alpha - d(i, j) & \text{для } 1 \leq i \neq j \leq n, \\ \text{Ant}_\alpha(d)(i, j) = d(i, j) & \text{для } 1 \leq i \neq j \leq n, \\ \text{Ant}_\alpha(d)(n+i, n+j) = d(i, j) & \text{для } 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases}$$

Две этих операции детально рассмотрены в Деза и Лоран [1992a].

Заметим, что если $d = \sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S \delta(S)$, где $\mathcal{S}$ есть семейство непустых собственных подмножеств V_n , то

$$(7.2.4) \quad \begin{aligned} \text{ant}_\alpha(d) = \sum_{S \in \mathcal{S} | 1 \notin S} \lambda_S \delta(S \cup \{n+1\}) + \sum_{S \in \mathcal{S} | 1 \in S} \lambda_S \delta(S) + \\ + \left(\alpha - \sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S \right) \delta(\{n+1\}). \end{aligned}$$

Обратно, каждое разложение $\text{ant}_\alpha(d)$ в неотрицательную комбинацию ненулевых разрезных полуметрик имеет форму (7.2.4), так как удовлетворяет равенствам треугольника (7.2.2) для $i = 2, \dots, n$. В частности, если $\text{ant}_\alpha(d)$ ℓ_1 -вложимо, то размер любой его $\mathbb{R}_+$ -реализации равен α .

Аналогично, любая $\mathbb{R}_+$ -реализация для $T = \text{Ant}_\alpha(d)$ имеет форму

$$(7.2.5) \quad \text{Ant}_\alpha(d) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S \delta(S \cup S^*) + \left(\alpha - \sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S \right) \delta(\{n+1, \dots, 2n\}),$$

где $S^* := \{n+i \mid i \in V_n, i \notin S\}$. Эти наблюдения позволяют сформулировать следующий результат.

Предложение 7.2.6. Пусть d — расстояние на V_n и $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (i) $\text{ant}_\alpha(d)$ (соответственно, $\text{Ant}_\alpha(d)$) ℓ_1 -вложимо тогда и только тогда, когда $\alpha \geq s_{\ell_1}(d)$ и d ℓ_1 -вложимо. Кроме того, $\text{ant}_\alpha(d)$ (соответственно, $\text{Ant}_\alpha(d)$) ℓ_1 -жестко тогда и только тогда, когда d ℓ_1 -жестко.
- (ii) $\text{ant}_\alpha(d)$ (соответственно, $\text{Ant}_\alpha(d)$) вложимо в гиперкуб тогда и только тогда, когда d вложимо в гиперкуб, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ и $\alpha \geq s_h(d)$. Кроме того, $\text{ant}_\alpha(d)$ (соответственно, $\text{Ant}_\alpha(d)$) h -жестко тогда и только тогда, когда d h -жестко.
- (iii) $\text{ant}_\alpha(d)$ (соответственно, $\text{Ant}_\alpha(d)$) принадлежит $\mathcal{L}_{n+1}$ тогда и только тогда, когда $d \in \mathcal{L}_n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}$. ■

Предложение 7.2.6 очень полезно; например, оно позволяет строить примеры полуметрик, которые являются ℓ_1 -вложимыми и принадлежат разрезной решетке, но не вложимы в гиперкуб. Действительно, пусть d — вложимое в гиперкуб расстояние и предположим, что мы можем найти такое целое α , что

$$s_{\ell_1}(d) \leq \alpha < s_h(d).$$

Тогда $\text{ant}_\alpha(d)$ является ℓ_1 -вложимым и принадлежит разрезной решетке, но не вложимо в гиперкуб.

Пример 7.2.7. Пусть $2\mathbb{1}_n$ обозначает расстояние на V_n , принимающее значение 2 на всех парах. Тогда, для $n \geq 5$, $s_h(2\mathbb{1}_n) = n$ и $s_{\ell_1}(2\mathbb{1}_n) < 4$ (см. пример 4.3.7 и раздел 7.4). Следовательно, для $n \geq 5$, метрика $\text{ant}_4(2\mathbb{1}_n)$ (принимающая значение 2 на всех парах, кроме значения 4 на одной из пар) ℓ_1 -вложима, принадлежит разрезной решетке, но

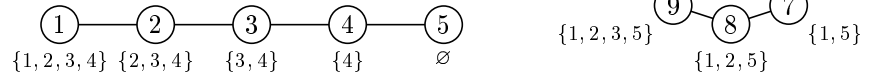


Рис. 7.2.8. Гиперкубические вложения пути P_5 и цикла C_{10} .

не является вложимой в гиперкуб. (Метрика $\text{Ant}_4(2\mathbb{1}_n)$ имеет те же свойства.) Кроме того, метрика $\text{ant}_4(2\mathbb{1}_n)$ ℓ_1 -жестка тогда и только тогда, когда $2\mathbb{1}_n$ ℓ_1 -жестка, что верно при $n = 3$. ■

Пример 7.2.9. Имеется много примеров графов, метрики которых можно построить как антиподальное расширение метрики другого графа. Например, пусть $K_{n+1} \setminus e$ обозначает полный граф на $n+1$ вершине с одним удаленным ребром. Тогда

$$d(K_{n+1} \setminus e) = \text{ant}_2(d(K_n)).$$

Этот пример будет детально исследован в разделе 7.4, вместе со случаем графа $K_{n \times 2}$. Метрика d_I графа реберного скелета икосаэдра (см., например, Броуэр, Коэн и Ноймайер [1989] для описания этого графа) может быть выражена как

$$d_I = \text{Ant}_3(d(\nabla C_5)),$$

где ∇C_5 есть граф, полученный из 5-цикла C_5 добавлением вершины, смежной со всеми вершинами C_5 . На самом деле, d_I является ℓ_1 -жесткой; см. Деца и Лоран [1994a]. И так,

$$d(H(n, 2)) = \text{Ant}_n(d(H(n-1, 2))) = \text{Ant}_n\left(2d\left(\frac{1}{2}H(n, 2)\right)\right),$$

где $\frac{1}{2}H(n, 2)$ есть граф полукуба. Пусть $P_n = (1, 2, \dots, n)$ и $C_n = (1, 2, \dots, n)$ обозначают путь и цикл на n вершинах. Тогда

$$d(C_{2n}) = \text{Ant}_n(d(P_n)) = \text{Ant}_n(2d(C_n)).$$

Легко проверить (см. пример 19.1.4), что

$$d(P_n) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} \delta(\{1, 2, \dots, i-1, i\}),$$

откуда, по (7.2.5), следует, что

$$\begin{aligned} d(C_{2n}) &= \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n-1} \delta(\{1, 2, \dots, i-1, i, n+i+1, n+i+2, \dots, 2n-1, 2n\}) + \\ &\quad + \delta(\{1, \dots, n\}). \end{aligned}$$

На рисунке 7.2.8 показаны путь P_5 и цикл C_{10} вместе с индексацией (с помощью множеств) их вершин, дающей ℓ_1 -вложение, рассмотренное выше. ■

7.3. Операция сферического расширения

Пусть d — расстояние на V_n и пусть $t \in \mathbb{R}_+$. Определим расстояние d' на $V_{n+1} = V_n \cup \{n+1\}$, положив

$$(7.3.1) \quad \begin{cases} d'(i, n+1) = t & \text{для } 1 \leq i \leq n, \\ d'(i, j) = d(i, j) & \text{для } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Расстояние d' называется *сферическим t -расширением d* и обозначается $\text{sph}_t(d)$. Эта операция рассмотрена в работе Деза и Гришухина [1994].

Предложение 7.3.2. Пусть d — расстояние на V_n и пусть $t \in \mathbb{R}_+$.

- (i) $\text{sph}_t(d)$ является полуметрикой тогда и только тогда, когда $2t \geq \max(d(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n)$ и d является полуметрикой.
- (ii) $\text{sph}_t(d) \in \mathcal{L}_{n+1}$ тогда и только тогда, когда $t \in \mathbb{Z}$ и $d(i, j)$ — четное число для всех $1 \leq i < j \leq n$.
- (iii) Если d является ℓ_1 -вложимым и $2t \geq s_{\ell_1}(d)$, то $\text{sph}_t(d)$ является ℓ_1 -вложимым.
- (iv) Если d вложимо в гиперкуб и $2t \geq s_h(d)$, то $2 \cdot \text{sph}_t(d)$ вложимо в гиперкуб.

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) очевидны. Для доказательства (iii) заметим, что $\text{sph}_t(d) = \frac{1}{2}(\text{ant}_{2t}(d) + \text{gat}_0(d))$. Следовательно, если d ℓ_1 -вложимо и $2t \geq s_{\ell_1}(d)$, то $\text{ant}_{2t}(d)$ ℓ_1 -вложимо по предложению 7.2.6 и $\text{gat}_0(d)$ ℓ_1 -вложимо по предложению 7.1.2. Отсюда следует, что $\text{sph}_t(d)$ ℓ_1 -вложимо. Доказательство для (iv) аналогично. ■

Для целого $m \geq 2$ рекурсивно определим расстояние $\text{sph}_t^m(d)$ как $\text{sph}_t(\text{sph}_t^{m-1}(d))$, полагая, что $\text{sph}_t^1(d) = \text{sph}_t(d)$.

Лемма 7.3.3. Пусть d — расстояние на V_n и пусть $t \in \mathbb{R}_+$. Если d ℓ_1 -вложимо и $2t \geq s_{\ell_1}(d)$, то $\text{sph}_t^m(d)$ ℓ_1 -вложимо для каждого целого $m \geq 1$. Кроме того,

$$2t - \frac{t}{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} \leq s_{\ell_1}(\text{sph}_t^m(d)) \leq 2t - \frac{2t - s_{\ell_1}(d)}{2^m}.$$

Доказательство. Так как $\text{sph}_t(d) = \frac{1}{2}(\text{ant}_{2t}(d) + \text{gat}_0(d))$, мы можем найти $\mathbb{R}_+$ -реализацию $\text{sph}_t(d)$ размера $\frac{1}{2}(2t + s_{\ell_1}(d))$, т. е.

$$s_{\ell_1}(\text{sph}_t(d)) \leq t + \frac{1}{2}s_{\ell_1}(d).$$

Следовательно, $s_{\ell_1}(\text{sph}_t(d)) \leq 2t$, откуда следует, что $\text{sph}_t^2(d)$ ℓ_1 -вложимо. Таким образом, $\text{sph}_t^m(d)$ ℓ_1 -вложимо для любого $m \geq 1$. Верхняя граница из леммы 7.3.3 легко получается по индукции. Для получения нижней границы заметим, что $\text{sph}_t^m(d)$ содержит в качестве подрасстояния эквидистантную метрику $t\mathbb{1}_m$ (принимаящую значение t на всех $\left(\frac{m}{2}\right)$ парах новых точек). Следовательно, $s_{\ell_1}(\text{sph}_t^m(d)) \geq s_{\ell_1}(t\mathbb{1}_m)$, где $s_{\ell_1}(t\mathbb{1}_m) = 2t - \frac{t}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ (см., например, раздел 7.4). $\blacksquare$

В частности, если d ℓ_1 -вложимо и $2t \geq s_{\ell_1}(d)$, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{\ell_1}(\text{sph}_t^m(d)) = 2t.$$

Фише [1992] определил ℓ_1 -радиус $r(d)$ ℓ_1 -вложимого расстояния d как наименьшее число $t > 0$, такое что $\text{sph}_t(d)$ ℓ_1 -вложимо. Тогда

$$\frac{1}{2} \max_{i,j} d_{ij} \leq r(d) \leq \frac{1}{2} s_{\ell_1}(d).$$

Для некоторых примеров метрик (например, ультраметрики, метрики графов P_n и так далее) в нижней границе имеет место равенство.

Мы отсылаем читателя к разделу 14.4 для изучения условий, при которых операция сферического расширения сохраняет другие метрические свойства, такие как гиперметричность или свойство отрицательного типа.

7.4. Пример: граф $K_{n \times 2}$

В этом разделе мы рассмотрим несколько примеров, в которых применяются, в частности, свойства операции антиподального расширения. Именно, мы покажем, как получить ℓ_1 -вложения для метрик графа $K_{n+1} \setminus e$ и графа $K_{n \times 2}$ в терминах ℓ_1 -вложений полного графа K_n .

Рассмотрим эквидистантную метрику $\mathbb{1}_n$, принимающую значение 1 для всех пар. Тогда $\mathbb{1}_n$ совпадает с метрикой полного графа K_n . Пусть

$$d_n := \text{ant}_2(\mathbb{1}_n)$$

обозначает расстояние на $V_{n+1} = V_n \cup \{n+1\}$, полученное применением антиподального расширения $\text{ant}_\alpha(\mathbb{1}_n)$ к $\mathbb{1}_n$ с параметром $\alpha = 2$. Таким

образом, d_n принимает значение 1 на всех парах, исключая значение 2 на паре $(1, n+1)$. Следовательно, d_n совпадает с метрикой графа $K_{n+1} \setminus e$, полученного из полного графа K_{n+1} на V_{n+1} удалением ребра $e := (1, n+1)$. Пусть

$$d'_n := \text{Ant}_2(\mathbb{1}_n)$$

обозначает расстояние на $V_{2n} = V_n \cup \{n+1, \dots, 2n\}$, полученное применением полного антиподального расширения $\text{Ant}_\alpha(\mathbb{1}_n)$ к $\mathbb{1}_n$ с параметром $\alpha = 2$ (напомним (7.2.3)). Тогда d'_n принимает значение 1 на всех парах, исключая значение 2 на n парах $(1, n+1), \dots, (n, 2n)$. Следовательно, d' совпадает с метрикой графа $K_{n \times 2}$.

Теперь мы рассмотрим, как построить ℓ_1 -вложения метрик d_n и d'_n . Чтобы применить предложение 7.2.6 и отношение (7.2.4), нам нужно найти все ℓ_1 -разложения $\mathbb{1}_n$, размер которых меньше или равен 2. Ясно, что расстояние $\mathbb{1}_n$ можно всегда разложить как

$$(7.4.1) \quad \mathbb{1}_n = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \delta(i)$$

с размером, равным $\frac{n}{2}$. Для $n = 3, 4$ верно $\frac{n}{2} \leq 2$. Следовательно, мы можем применить (7.2.4) и (7.2.5), получив равенства

$$\begin{aligned} d_3 &= \frac{1}{2}(\delta(\{1\}) + \delta(\{2, 4\}) + \delta(\{3, 4\}) + \delta(\{4\})), \\ d'_3 &= \frac{1}{2}(\delta(\{1, 5, 6\}) + \delta(\{2, 4, 6\}) + \delta(\{3, 4, 5\}) + \delta(\{4, 5, 6\})), \\ d_4 &= \frac{1}{2}(\delta(\{1\}) + \delta(\{2, 5\}) + \delta(\{3, 5\}) + \delta(\{4, 5\})), \\ d'_4 &= \frac{1}{2}(\delta(\{1, 6, 7, 8\}) + \delta(\{2, 5, 7, 8\}) + \delta(\{3, 5, 6, 8\}) + \delta(\{4, 5, 6, 7\})). \end{aligned}$$

Если $n \geq 5$, мы не можем получить ℓ_1 -вложения для d_n из (7.4.1) так как его размер > 2 . Пусть $\mathcal{E}_n$ обозначает семейство всех подмножеств $S \subseteq V_n$, таких что $|S| \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\}$ и $1 \notin S$. Положив

$$\alpha_n := \begin{pmatrix} n-2 \\ \frac{n}{2}-1 \end{pmatrix} \quad \text{для четного } n, \quad \alpha_n := 2 \begin{pmatrix} n-2 \\ \frac{n-3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{для нечетного } n,$$

легко проверить, что

$$(7.4.2) \quad \mathbb{1}_n = \frac{1}{\alpha_n} \sum_{S \in \mathcal{E}_n} \delta(S).$$

Так как $|\mathcal{E}_n| = \binom{n-1}{\frac{n}{2}}$ для четного n и $|\mathcal{E}_n| = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ для нечетного n , разложение из (7.4.2) имеет размер $\frac{|\mathcal{E}_n|}{\alpha_n}$, равный $\frac{2(n-1)}{n}$ для четного n и $\frac{2n}{n+1}$ для нечетного n . Заметим, что (7.4.2) дает ℓ_1 -вложение $\mathbb{1}_n$ минимального размера, т. е.

$$s_{\ell_1}(\mathbb{1}_n) = 2 - \frac{1}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} = \begin{cases} \frac{2(n-1)}{n}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \frac{2n}{n+1}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

(Напомним (4.3.6).) Применяя (7.2.4) и (7.2.5), получим

$$d_n = \frac{1}{\alpha_n} \sum_{S \in \mathcal{E}_n} \delta(S \cup \{n+1\}) + (2 - s_{\ell_1}(\mathbb{1}_n))\delta(\{n+1\}),$$

$$d'_n = \frac{1}{\alpha_n} \sum_{S \in \mathcal{E}_n} \delta(S \cup S^*) + (2 - s_{\ell_1}(\mathbb{1}_n))\delta(\{1, 2, \dots, n\}).$$

(Напомним, что $S^* := \{n+i \mid i \in V_n \text{ и } i \notin S\}$.) Это показывает, что d_n и d'_n ℓ_1 -вложимы. Кроме того, по предложению 7.2.6, d_n и d'_n ℓ_1 -жестки тогда и только тогда, когда $\mathbb{1}_n$ ℓ_1 -жестко, т. е. когда $n = 3$. (Мы отсылаем читателя к части 4 для изучения различных вложений $\mathbb{1}_n$ для $n \geq 4$.) Более того, $\alpha_n d_n$ и $\alpha_n d'_n$ вложимы в гиперкуб (так как $\alpha_n(2 - s_{\ell_1}(\mathbb{1}_n)) = 2\alpha_n - |\mathcal{E}_n| \in \mathbb{Z}$), причем в гиперкуб размерности $2\alpha_n$. Таким образом, мы доказали

Предложение 7.4.3. *Метрики графов $K_{n+1} \setminus e$ и $K_{n \times 2}$ ℓ_1 -вложимы; они ℓ_1 -жестки тогда и только тогда, когда $n = 3$. Они вложимы в гиперкуб размерности $2\alpha_n$ со шкалой α_n .* ■

Например, для $n = 5$ вышеприведенные разложения для d_5 и d'_5 имеют вид:

$$d_5 = \frac{1}{6} [\delta(\{2, 3, 6\}) + \delta(\{2, 4, 6\}) + \delta(\{2, 5, 6\}) + \delta(\{3, 4, 6\}) + \delta(\{3, 5, 6\})] +$$

$$+ \frac{1}{6} [\delta(\{4, 5, 6\}) + \delta(\{2, 3, 4, 6\}) + \delta(\{2, 4, 5, 6\}) + \delta(\{2, 3, 5, 6\})] +$$

$$+ \frac{1}{6} \delta(\{3, 4, 5, 6\}) + \frac{1}{3} \delta(\{6\}),$$

$$d'_5 = \frac{1}{6} [\delta(\{2, 3, 6, 9, 10\}) + \delta(\{2, 4, 6, 8, 10\}) +$$

$$+ \delta(\{2, 5, 6, 8, 9\}) + \delta(\{3, 4, 6, 7, 10\})] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6}[\delta(\{3, 5, 6, 7, 9\}) + \delta(\{4, 5, 6, 7, 8\}) + \\
& \quad + \delta(\{2, 3, 4, 6, 10\}) + \delta(\{2, 3, 5, 6, 9\})] + \\
& + \frac{1}{6}[\delta(\{2, 4, 5, 6, 8\}) + \delta(\{3, 4, 5, 6, 7\})] + \frac{1}{3}\delta(\{1, 2, 3, 4, 5\}).
\end{aligned}$$

Другое ℓ_1 -вложение для d_5 дается, например, следующей формулой:

$$d_5 = \frac{1}{4} \left(\delta(\{1\}) + \delta(\{6\}) + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \delta(\{1, i, j\}) \right).$$

Следовательно, минимальная шкала для d_5 равна 4. Действительно, минимальная шкала $\eta(d_n)$ для d_n очевидно является четным числом. Кроме того, $\eta(d_5) \neq 2$, так как $2d_5$ не вложимо в гиперкуб (потому что $2d_5 = \text{ant}_4(2\mathbb{1}_5)$ и $4 < s_h(2\mathbb{1}_5)$, так как $s_h(2\mathbb{1}_5) = 5$ по теореме 22.0.6). На самом деле, можно проверить (Деза и Гришухин [1994]), что $4d_5$ имеет три различных (с точностью до перестановки) $\mathbb{Z}_+$ -реализации. Кроме приведенной выше, это

$$\begin{aligned}
4d_5 &= \sum_{2 \leq i \leq 5} \delta(\{1, i\}) + \delta(\{i, 6\}), \quad \text{и} \\
4d_5 &= \delta(\{1\}) + \delta(\{1, j\}) + \sum_{i \in \{2, 3, 4, 5\} \setminus \{j\}} \delta(\{i, j, 6\}) + \delta(\{i, 6\}),
\end{aligned}$$

для всех $j \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Таким образом, мы знаем минимальную шкалу $\eta(d_n)$ для d_n при $n = 3, 4, 5$:

$$\eta(d_3) = \eta(d_4) = 2, \quad \eta(d_5) = 4.$$

(Это уже было замечено Блэйком и Джилхристом [1973].) Мы имеем также следующую (очень неточную) верхнюю границу: $\eta(d_n) \leq \alpha_n$, из предложения 7.4.3. Лучшая граница: $\eta(d_n) < n$ получается из следующего результата Шпекторова [1993].

Лемма 7.4.4. *Для целого $k \geq 2$ метрика графа $K_{2^k \times 2}$ изометрически вложима в гиперкуб размерности 2^k со шкалой 2^{k-1} . Следовательно, если $2^{k-1} < n \leq 2^k$, то $2^{k-1}d(K_{n \times 2})$ вложимо в гиперкуб. Таким образом, $\eta(d_n), \eta(d'_n) < n$.*

Доказательство. Рассмотрим векторное пространство $GF(2)^k$ над двуэлементным полем $GF(2) = \{0, 1\}$. Каждая гиперплоскость в $GF(2)^k$ состоит из 2^{k-1} точек, и симметрическая разность двух гиперплоскостей также содержит 2^{k-1} точек. Таким образом, мы получаем для

$d(K_{2^k \times 2})$ вложение в гиперкуб $\{0, 1\}^{2^k}$ со шкалой 2^{k-1} при индексировании вершин $2^k - 1$ гиперплоскостями, а также их дополнениями, полным множеством $GF(2)^k$ и $\emptyset$. ■

Для данного целого $t \in \mathbb{Z}_+$ заметим, что расстояние

$$2td_n = 2t \operatorname{ant}_2(\mathbb{1}_n) = \operatorname{ant}_{4t}(2t\mathbb{1}_n)$$

вложимо в гиперкуб тогда и только тогда, когда $4t \geq s_h(2t\mathbb{1}_n)$. Следовательно, минимальная шкала для d_n может быть выражена как

$$(7.4.5) \quad \eta(d_n) = 2 \min(t \in \mathbb{Z}_+ \mid 4t \geq s_h(2t\mathbb{1}_n)).$$

Таким образом, для определения минимальной шкалы $\eta(d_n)$ нам надо знать минимальный h -размер $s_h(2t\mathbb{1}_n)$ эквидистантной метрики $2t\mathbb{1}_n$ для $t \in \mathbb{Z}_+$. Этот вопрос детально рассмотрен в главе 23; см., в частности, раздел 23.3. Величина $s_h(2t\mathbb{1}_n)$ в общем случае неизвестна. Ее точное вычисление является трудной задачей. Действительно, для некоторого выбора параметров n и t , она зависит от существования специальных блок-схем, таких как проективные плоскости или схемы Адамара. Например, $s_h(2t\mathbb{1}_{t^2+t+1}) = t^2 + t + 1$ тогда и только тогда, когда существует проективная плоскость порядка t , и $s_h(2t\mathbb{1}_{4t}) = 4t - 1$ тогда и только тогда, когда существует матрица Адамара порядка $4t$ (см. предложение 23.3.2). Однако, определенные результаты в этой области получены. Здесь мы приводим некоторые из них, другие можно найти в части 4.

- (i) $s_h(2t\mathbb{1}_n) \geq n - 1$ с равенством тогда и только тогда, когда $n = 4t$ и существует матрица Адамара порядка $4t$.
 - (ii) $s_h(2t\mathbb{1}_n) = \left\lceil 4t - \frac{2t}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \right\rceil$, если $n \leq 4t \leq 80$.
- (Смотрите теорему 23.3.1 и следствие 23.3.6.) Отсюда следует

Лемма 7.4.6. *Справедливы неравенства $2 \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \leq \eta(d_n) < n$. Кроме того, $\eta(d_n) = 2 \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$, если $n \leq 80$; и $\eta(d_{4t}) = 2t$ тогда и только тогда, когда существует матрица Адамара порядка $4t$.* ■

7.5. Операции прямого и тензорного произведений

В этом разделе мы рассматриваем две операции: прямое произведение и тензорное произведение, которые сохраняют, соответственно, ℓ_1 -вложимость и $\{0, 1\}$ -ковариантности, или, что эквивалентно, сохраняет разрезной конус и корреляционный конус.

Определение 7.5.1.

- (i) Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) — два пространства расстояний. Их прямым произведением называется пространство расстояний $(X_1 \times X_2, d_1 \oplus d_2)$, где для $x_1, y_1 \in X_1$, $x_2, y_2 \in X_2$ выполняется равенство

$$d_1 \oplus d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2).$$

- (ii) Пусть $p_1: X_1 \times X_1 \mapsto \mathbb{R}$ и $p_2: X_2 \times X_2 \mapsto \mathbb{R}$ — две симметрические функции. Их тензорным произведением называется симметрическая функция

$$p_1 \otimes p_2: (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \mapsto \mathbb{R},$$

определенная для $x_1, y_1 \in X_1$, $x_2, y_2 \in X_2$ как

$$p_1 \otimes p_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = p_1(x_1, y_1)p_2(x_2, y_2).$$

Для метрик графов операция прямого произведения соответствует декартову произведению графов. Именно, если G и H — два связных графа, то прямое произведение их метрик совпадает с метрикой декартова произведения графов G и H .

Предложение 7.5.2. Пусть d_i — расстояние на множестве X_i для $i = 1, 2$.

- (i) $(X_1 \times X_2, d_1 \oplus d_2)$ является ℓ_1 -вложимым (соответственно, ℓ_1 -жестким, вложимым в гиперкуб, h -жестким) тогда и только тогда, когда (X_1, d_1) и (X_2, d_2) являются ℓ_1 -вложимыми (соответственно, ℓ_1 -жесткими, вложимыми в гиперкуб, h -жесткими).
- (ii) $(X_1 \times X_2, d_1 \oplus d_2)$ является гиперметрическим (соответственно, отрицательного типа) тогда и только тогда, когда (X_1, d_1) и (X_2, d_2) являются гиперметрическими (соответственно, отрицательного типа).

Доказательство. Доказательство (i) основано на следующих двух наблюдениях:

- Если $d_1 = \sum_{S \subseteq X_1 \setminus \{x_0\}} \alpha_S \delta(S)$ и $d_2 = \sum_{T \subseteq X_2 \setminus \{x_0\}} \beta_T \delta(T)$, то

$$d = \sum_{S \subseteq X_1 \setminus \{x_0\}} \alpha_S \delta(S) + \sum_{T \subseteq X_2 \setminus \{x_0\}} \beta_T \delta(T).$$

- Если $d = \sum_{A \in \mathcal{A}} \lambda_A \delta(A)$ с $\lambda_A > 0$ для $A \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ есть семейство непустых подмножеств множества $X_1 \cup X_2$, то $A \subseteq X_1$ или $A \subseteq X_2$ для каждого $A \in \mathcal{A}$. Это следует из того, что d удовлетворяет равенствам треугольника: $d(x_1, x_2) = d(x_1, x_0) + d(x_0, x_2)$ для всех $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Следовательно, $d_i = \sum_{A \in \mathcal{A} | A \subseteq X_i} \lambda_A \delta(A)$ для $i = 1, 2$.

Мы докажем (ii) в гиперметрическом случае (случай отрицательного типа аналогичен). Пространство (X_1, d_1) является подпространством $(X_1 \cup X_2, d)$ и, следовательно, будет гиперметрическим всегда, когда $(X_1 \cup X_2, d)$ будет гиперметрическим. Предположим теперь, что (X_1, d_1) и (X_2, d_2) являются гиперметрическими. Пусть $b \in Z^{X_1 \cup X_2}$ с $\sum_{x \in X_1 \cup X_2} b_x = 1$. Определим $a \in Z^{X_1}, c \in Z^{X_2}$, положив $a_x := b_x$ для $x \in X_1 \setminus \{x_0\}$, $a_{x_0} := \sum_{x \in X_2} b_x$, $c_x := b_x$ для $x \in X_2 \setminus \{x_0\}$ и $c_{x_0} := \sum_{x \in X_1} b_x$. Тогда

$$\sum_{x, y \in X_1 \cup X_2} b_x b_y d(x, y) = \sum_{x, y \in X_1} a_x a_y d_1(x, y) + \sum_{x, y \in X_2} c_x c_y d_2(x, y) \leq 0.$$

Это показывает, что $(X_1 \cup X_2, d)$ является гиперметрическим. ■

Предложение 7.5.3.

- (i) Если $p_1 \in \text{COR}(X_1)$ и $p_2 \in \text{COR}(X_2)$, то $p_1 \otimes p_2 \in \text{COR}(X_1 \times X_2)$.
- (ii) Если $p_1 \in \text{COR}(X)$ и $p_2 \in \text{COR}(X)$, то $p_1 \circ p_2 \in \text{COR}(X)$. (Здесь $p_1 \circ p_2$ есть покомпонентное произведение).

Доказательство. Доказательство (i) основано на следующем наблюдении:

$$p_1 = \sum_{S \subseteq X_1} \alpha_S \pi(S)$$

и

$$p_2 = \sum_{T \subseteq X_2} \beta_T \pi(T) \implies p_1 \otimes p_2 = \sum_{S \subseteq X_1, T \subseteq X_2} \alpha_S \beta_T \pi(S \times T).$$

Утверждение (ii) следует из того факта, что $\pi(S) \circ \pi(T) = \pi(S \cap T)$ для подмножеств S, T множества X . ■

7.6. Операция 1-суммы

Пусть d_1 — расстояние на X_1 , d_2 — расстояние на X_2 и $|X_1 \cap X_2| = 1$, $X_1 \cap X_2 = \{x_0\}$. Тогда 1-суммой расстояний d_1 и d_2 называется расстояние d на $X_1 \cup X_2$, определенное следующим образом

$$\begin{cases} d(x, y) = d_1(x, y), & \text{если } x, y \in X_1, \\ d(x, y) = d_2(x, y), & \text{если } x, y \in X_2, \\ d(x, y) = d_1(x, x_0) + d_2(x_0, y), & \text{если } x \in X_1, y \in X_2. \end{cases}$$

Предложение 7.6.1.

- (i) Пусть d есть 1-сумма d_1 и d_2 . Тогда d ℓ_1 -вложимо (соответственно ℓ_1 -ригидно, вложимо в гиперкуб, h -ригидно) тогда и только тогда, когда d_1 и d_2 ℓ_1 -вложимы (соответственно ℓ_1 -ригидны, вложимы в гиперкуб, h -ригидны).
- (ii) d является гиперметрикой (соответственно метрикой отрицательного типа) тогда и только тогда, когда d_1 и d_2 являются гиперметриками (соответственно метриками отрицательного типа).

Доказательство. Доказательство (i) основано на следующих двух наблюдениях:

- Если $d_1 = \sum_{S \subseteq X_1 \setminus \{x_0\}} \alpha_S \delta(S)$ и $d_2 = \sum_{T \subseteq X_2 \setminus \{x_0\}} \beta_T \delta(T)$, то

$$d = \sum_{S \subseteq X_1 \setminus \{x_0\}} \alpha_S \delta(S) + \sum_{T \subseteq X_2 \setminus \{x_0\}} \beta_T \delta(T).$$

- Если $d = \sum_{A \in \mathcal{A}} \lambda_A \delta(A)$ с $\lambda_A > 0$ для $A \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ есть множество непустых подмножеств множества $X_1 \cup X_2 \setminus \{x_0\}$, то $A \subseteq X_1$ или $A \subseteq X_2$, для каждого $A \in \mathcal{A}$. Это следует из того, что d удовлетворяет равенствам треугольника: $d(x_1, x_2) = d(x_1, x_0) + d(x_0, x_2)$ для всех $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Следовательно, $d_i = \sum_{A \in \mathcal{A} | A \subseteq X_i} \lambda_A \delta(A)$ для $i = 1, 2$.

Докажем (ii) в гиперметрическом случае (случай отрицательного типа аналогичен). Пространство (X_1, d_1) является подпространством пространства $(X_1 \cup X_2, d)$ и, следовательно, оно гиперметрично, если $(X_1 \cup X_2, d)$ гиперметрично. Пусть $b \in \mathbb{Z}^{X_1 \cup X_2}$ с $\sum_{x \in X_1 \cup X_2} b_x = 1$. Определим $a \in \mathbb{Z}^{X_1}$, $c \in \mathbb{Z}^{X_2}$, положив $a_x := b_x$ для $x \in X_1 \setminus \{x_0\}$, $a_{x_0} := \sum_{x \in X_2} b_x$, $c_x := b_x$ для $x \in X_2 \setminus \{x_0\}$ и $c_{x_0} := \sum_{x \in X_1} b_x$. Тогда

$$\sum_{x, y \in X_1 \cup X_2} b_x b_y d(x, y) = \sum_{x, y \in X_1} a_x a_y d_1(x, y) + \sum_{x, y \in X_2} c_x c_y d_2(x, y) \leq 0.$$

Это доказывает, что $(X_1 \cup X_2, d)$ гиперметрично. ■

Для метрик графов операция кликовой 1-суммы соответствует операции 1-суммы по клике для графов. Именно, если G_1 и G_2 — два связных графа, и если G обозначает их кликовую 1-сумму (полученную отождествлением вершины из G_1 и вершины из G_2 и обозначением ее через x_0), то метрика G совпадает с 1-суммой метрик G_1 и G_2 .

Глава 8.

L_1 -метрики решеток, полугрупп и нормированных пространств

В этой главе мы рассмотрим несколько классов пространств расстояний, для которых L_1 -вложимость может быть полностью характеризована только гиперметрическими неравенствами и неравенствами отрицательного типа. Эти пространства расстояний возникают из частично упорядоченных решеток, полугрупп и нормированных векторных пространств. Некоторые из упомянутых здесь результатов даны только со схемой доказательства или даже вовсе без доказательства, так как данные доказательства опираются на аналитические методы, рассмотрение которых выходит за рамки этой книги. Однако все результаты снабжены списком литературы, к которой интересующийся читатель может обратиться за дальнейшей информацией.

8.1. L_1 -метрики решеток

В этом разделе мы рассмотрим класс метрических пространств, возникающий из (частично упорядоченных) решеток¹⁾. Мы начнем с некоторых определений. *Частично упорядоченное множество* состоит из множества L , снабженного бинарным отношением $\preceq$, удовлетворяющим условиям: $x \preceq x$, из $x \preceq y$ и $y \preceq x$ следует, что $x = y$ и из $x \preceq y$ и $y \preceq z$ следует, что $x \preceq z$ для всех $x, y, z \in L$. *Пересечением* $x \wedge y$ (если оно существует) двух элементов x и y называется (единственный) элемент, удовлетворяющий условиям $x \wedge y \preceq x, y$ и $z \preceq x \wedge y$, если $z \preceq x, y$; аналогично, *объединением* $x \vee y$ (если оно существует) элементов x

¹⁾ Слово «решетка» используется здесь в контексте частично упорядоченных множеств. Другое понятие решетки, связанное с дискретными подгруппами $\mathbb{R}^n$, будет рассмотрено в части 2. Библиографию по частично упорядоченным решеткам можно найти в книге Биркгофа [1968].

и y называется (единственный) элемент, такой что $x, y \preceq x \vee y$ и $x \vee y \preceq z$, если $x, y \preceq z$. Тогда частично упорядоченное множество $(L, \preceq)$ называется *решеткой*, если для любых двух элементов $x, y \in L$ существуют пересечение $x \vee y$ и объединение $x \wedge y$.

Для данной решетки L функция $v: L \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию

$$(8.1.1) \quad v(x \vee y) + v(x \wedge y) = v(x) + v(y) \quad \text{для всех } x, y \in L,$$

называется *оценкой* на L . Оценка называется *изотонной*, если $v(x) \leq v(y)$ при $x \preceq y$ и *положительной*, если $v(x) < v(y)$ при $x \preceq y$, $x \neq y$. Положим

$$(8.1.2) \quad d_v(x, y) := v(x \vee y) - v(x \wedge y) \quad \text{для всех } x, y \in L.$$

Легко проверить, что (L, d_v) является полуметрическим пространством, если v — изотонная оценка на L и что (L, d_v) является метрическим пространством, если v — положительная оценка на L ; в последнем случае L называется *метрической решеткой* (см. Биркгоф [1968]). Ясно, что каждая метрическая решетка *модулярна*, т. е.

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$$

для всех x, y, z с $z \preceq x$. Решетка называется *дистрибутивной*, если

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

для всех x, y, z . Следующий результат Келли [1970a] дает характеристику L_1 -вложимых метрических решеток. Другая характеристика, в терминах условий отрицательного типа, будет дана в примере 8.2.6.

Теорема 8.1.3. Пусть L — решетка, v — положительная оценка на L и d_v — расстояние на L , определенное формулой (8.1.2). Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) L является дистрибутивной решеткой.
- (ii) (L, d_v) 5-гонально.
- (iii) (L, d_v) гиперметрически.
- (iv) (L, d_v) L_1 -вложимо.

Доказательство. Достаточно показать импликации (ii) $\implies$ (i) и (i) $\implies$ (iv).

(ii) $\implies$ (i) Используя определение оценки v и применяя пентагональное неравенство (6.1.9) к точкам $x_1 := x \vee y$, $x_2 := x \wedge y$, $x_3 := z$, $y_1 := x$, $y_2 := y$, мы получим неравенство:

$$\begin{aligned} 2(v(x \vee y \vee z) - v(x \wedge y \wedge z)) &\leq \\ &\leq v(x \vee y) + v(x \vee z) + v(y \vee z) - v(x \wedge y) - v(x \wedge z) - v(y \wedge z). \end{aligned}$$

Применяя теперь пентагональное неравенство к точкам $x_1 := x$, $x_2 := y$, $x_3 := z$, $y_1 := x \vee y$, $y_2 := x \wedge y$, мы получим обратное неравенство. Следовательно, в вышеприведенном неравенстве имеет место равенство. На самом деле, это условие эквивалентно дистрибутивности L (см. Биркгоф [1968]).

(i) $\implies$ (iv) Пусть L_0 — конечное подмножество L ; покажем, что (L_0, d_v) L_1 -вложимо. Пусть K — подрешетка L , порожденная L_0 . Предположим, что K имеет длину n . Тогда K изоморфно семейству $\mathcal{N}$ подмножеств множества X мощности $|X| = n$ с тем свойством, что $\mathcal{N}$ замкнуто относительно объединения и пересечения (см. Биркгоф [1968], стр. 84). С точностью до изоморфизма, мы получаем на $\mathcal{N}$ оценку, вновь обозначаемого v . Без ограничения общности можно предположить, что $v(\emptyset) = 0$. Тогда можно расширить v до оценки v^* на 2^X , удовлетворяющего условию $v^*(S) = \sum_{x \in S} v^*(\{x\})$ для $S \subseteq X$. Далее, если $x \mapsto S_x$ есть изоморфизм из K в $\mathcal{N}$, то мы имеем вложение $x \mapsto S_x$ из (L_0, d_v) в $(2^X, v^*)$, являющееся изометрическим. Действительно,

$$\begin{aligned} d_v(x, y) &= v(x \vee y) - v(x \wedge y) = \\ &= v(S_x \cup S_y) - v(S_x \cap S_y) = \\ &= v^*(S_x \cup S_y) - v^*(S_x \cap S_y) = v^*(S_x \triangle S_y). \end{aligned}$$

Это показывает, что каждое конечное подмножество (L, d_v) L_1 -вложимо. Тогда по теореме 3.2.1 мы получаем, что (L, d_v) L_1 -вложимо. $\blacksquare$

Пример 8.1.4. (Ассуад [1979]) Пусть $(N^*, \preceq)$ обозначает решетку, состоящую из множества N^* положительных целых чисел с отношением порядка $x \preceq y$, если x делит y . Тогда для $x, y \in N^*$ $x \wedge y$ есть наибольший общий делитель (x, y) чисел x и y , а $x \vee y$ есть их наименьшее общее кратное $[x, y]$. Легко проверить, что решетка $(N^*, \preceq)$ дистрибутивна. Следовательно, (N^*, d_v) L_1 -вложимо для каждой положительной оценки v на N^* . Например,

$$x \in N^* \mapsto v(x) := \log x$$

есть положительная оценка на N^* . Следовательно, метрика d_v , определенная как

$$d_v(x, y) = \log \left(\frac{[x, y]}{(x, y)} \right)$$

для всех целых $x, y \geq 1$, является L_1 -вложимой. $\blacksquare$

8.2. L_1 -метрики полугрупп

Рассмотрим теперь некоторые пространства расстояний, возникающие в контексте полугрупп. Напомним, что *коммутативной полугруппой* $(S, +)$ называется множество S , снабженное правилом композиции «+», которое коммутативно и ассоциативно. Предположим существование нейтрального элемента, обозначаемого через 0. Пусть $(S, +)$ коммутативная полугруппа и пусть $v: S \mapsto \mathbb{R}_+$ — отображение, при котором $v(0) = 0$. Мы определим симметрическую функцию¹⁾ D_v на S , положив

$$(8.2.1) \quad D_v(x, y) := 2v(x + y) - v(2x) - v(2y) \quad \text{для всех } x, y \in S.$$

Приведенная ниже теорема 8.2.5 дает некоторые условия на S и D_v , достаточные для того, чтобы пространство расстояний (S, D_v) было L_1 -вложимым. Она существенным образом использует результат Берга, Кристенсена и Ресселя [1976] относительно некоторого класса функций положительного типа на S . Более точно, для данного $v: S \mapsto \mathbb{R}_+$ пусть p_v обозначает симметрическую функцию на S^2 , определенную как

$$(8.2.2) \quad p_v(x, y) := v(x) + v(y) - v(x + y) \quad \text{для всех } x, y \in S.$$

Определим $\mathcal{N}$ как множество функций $v: S \mapsto \mathbb{R}_+$ с $v(0) = 0$, для которых p_v является функцией положительного типа на S (т. е. матрица $(p_v(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$ положительно полуопределена для всех $x_1, \dots, x_n \in S$, $n \geq 2$). Члены $\mathcal{N}$ полностью описаны в нижеприведенной теореме 8.2.3, что мы утверждаем без доказательства; этот результат был доказан Бергом, Кристенсеном и Ресселем [1976]. *Характером* на S называется отображение $\rho: S \mapsto [-1, 1]$, для которого $\rho(x + y) = \rho(x)\rho(y)$ для всех $x, y \in S$, и $\rho(0) = 1$. Обозначим через $\hat{1}$ единичный характер, принимающий значение 1 для каждого элемента $x \in S$, и пусть $\hat{S}$ обозначает множество характеров на S .

Теорема 8.2.3. Пусть $v \in \mathcal{N}$. Тогда существуют (i) функция $h: S \mapsto \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию $h(x + y) = h(x) + h(y)$ для всех $x, y \in S$, и (ii) неотрицательная мера Радона μ на $\hat{S} \setminus \{\hat{1}\}$, удовлетворяющая условию $\int_{\hat{S} \setminus \{\hat{1}\}} (1 - \rho(x)) \mu(d\rho) < \infty$ для всех $x \in S$, такие что

$$(8.2.4) \quad v(x) = h(x) + \int_{\hat{S} \setminus \{\hat{1}\}} (1 - \rho(x)) \mu(d\rho) \quad \text{для всех } x \in S. \quad \blacksquare$$

¹⁾ Начиная с этого момента D_v не обязательно будет расстоянием, так как может принимать отрицательные значения. Однако D_v будет неотрицательным, если мы, например, предположим, что D_v отрицательного типа.

Как было замечено в Ассуад [1979, 1980b], это позволяет нам получить для пространства расстояний (S, D_v) условия L_1 -вложимости.

Теорема 8.2.5. Пусть $(S, +)$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0 , пусть $v: S \mapsto \mathbb{R}_+$ — такое отображение, что $v(0) = 0$, и пусть D_v определено по (8.2.1). Предположим, что имеет место одно из утверждений (i) или (ii).

- (i) $(S, +)$ является группой.
- (ii) Для каждого $x \in S$ существует целое $n \geq 1$, такое что $2nx = x$. Тогда пространство (S, D_v) является L_1 -вложимым тогда и только тогда, когда (S, D_v) является пространством отрицательного типа.

Доказательство. Предположим, что (S, D_v) является пространством отрицательного типа. Пусть $p_v: S^2 \mapsto \mathbb{R}$ обозначает симметрическую функцию, полученную применением ковариантного преобразования ξ (с отмеченной точкой 0) к D_v . Тогда

$$p_v(x, y) = \frac{1}{2}(D_v(x, 0) + D_v(y, 0) - D_v(x, y)) = v(x) + v(y) - v(x + y)$$

для $x, y \in S$. Другими словами, p_v совпадает с функцией, определенной в (8.2.2). По предположению, (S, D_v) является пространством отрицательного типа или, что эквивалентно (по лемме 8.1.14), p_v является функцией положительного типа. Следовательно, функция v принадлежит множеству $\mathcal{N}$. Применяя теорему 8.2.3, мы можем предположить, что v имеет форму (8.2.4). В случае (i) $(S, +)$ является группой, следовательно, любой характер на S принимает только значения ± 1 . Положив

$$A_x := \{\rho \in \hat{S} \mid \rho(x) = -1\} \quad \text{для } x \in S,$$

мы получим, что $p_v(x, y) = 4\mu(A_x \cap A_y)$ для всех $x, y \in S$. В случае (ii) каждый характер на S принимает только значения $0, 1$. Положив

$$A_x := \{\rho \in \hat{S} \mid \rho(x) = 0\} \quad \text{для } x \in S,$$

мы получим, что $p_v(x, y) = \mu(A_x \cap A_y)$ для всех $x, y \in S$. Следовательно, p_v есть $\{0, 1\}$ -ковариантность в каждом из случаев (i), (ii). Это доказывает (по лемме 5.3.2), что (S, D_v) L_1 -вложимо. ■

Пример 8.2.6. Пусть $(L, \preceq)$ — решетка и пусть S — подмножество L , которое замкнуто относительно операции объединения $\vee$ на L и содержит наименьший элемент 0 из L . Тогда $(S, \vee)$ является коммутативной полугруппой, удовлетворяющей теореме 8.2.5 (ii). Следовательно, для данного отображения $v: S \mapsto \mathbb{R}_+$, такого что $v(0) = 0$,

(S, D_v) является L_1 -вложимым $\iff$

$\iff (S, D_v)$ является пространством отрицательного типа,

где

$$D_v(x, y) = 2v(x \vee y) - v(x) - v(y) \quad \text{для } x, y \in S.$$

В следствии 8.2.7 мы формулируем результат, полученный для специального случая, когда v есть оценка на L . ■

Следствие 8.2.7. Пусть L — решетка, пусть $v: S \mapsto \mathbb{R}_+$ — оценки на L (т. е. v удовлетворяет (8.1.1)) и пусть d_v определено по (8.1.2). Тогда

(L, d_v) является L_1 -вложимым $\iff$

$\iff (L, d_v)$ является пространством отрицательного типа.

Доказательство. Заметим, что, так как v удовлетворяет (8.1.1), два расстояния d_v и D_v совпадают, если d_v определено по (8.1.2), а D_v по (8.2.1). Следовательно, результат получается при применении теоремы 8.2.5 к полугруппе $(L, \vee)$ (условие (ii) имеет место, так как $x \vee x = x$ для всех $x \in L$). ■

Другим примером применения теоремы 8.2.5 служит полугруппа, получающаяся как семейство множеств, замкнутое относительно взятия симметрической разности.

Следствие 8.2.8. Пусть $\mathcal{A}$ — семейство подмножеств множества Ω , замкнутое относительно взятия симметрической разности (т. е. $A \triangle B \in \mathcal{A}$ для всех $A, B \in \mathcal{A}$). Пусть $v: \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}_+$ — такое отображение, что $v(\emptyset) = 0$, и пусть $d_{v, \triangle}$ — расстояние на $\mathcal{A}$, определенное как

$$(8.2.9) \quad d_{v, \triangle}(A, B) := v(A \triangle B) \quad \text{для всех } A, B \in \mathcal{A}.$$

Тогда

$(\mathcal{A}, d_{v, \triangle})$ является L_1 -вложимым $\iff$

$\iff (\mathcal{A}, d_{v, \triangle})$ является пространством отрицательного типа.

Доказательство. Заметим, что $d_{v, \triangle} = \frac{1}{2}D_v$, и применим теорему 8.2.5 к коммутативной группе $(\mathcal{A}, \triangle)$. ■

Пространства расстояний вида $(\mathcal{A}, d_{v, \triangle})$ особенно интересны. На самом деле, они очень близки к полуметрическим пространствам меры (определенным в разделе 3.2), которые играют центральную роль в теории L_1 -метрик. В следующей главе мы применим следствие 8.2.8 для нахождения метрических преобразований, сохраняющих L_1 -вложимость; см. теорему 9.0.3 и ее доказательство.

8.3. L_1 -метрики нормированных пространств

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. Рассмотрим ассоциированное метрическое пространство $(E, d_{\|\cdot\|})$, где $d_{\|\cdot\|}$ есть метрика нормы, определенная как

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|$$

для всех $x, y \in E$. В этом разделе мы без доказательств упомянем несколько результатов, характеризующих нормы на $E = \mathbb{R}^m$, для которых метрическое пространство $(\mathbb{R}^m, d_{\|\cdot\|})$ является L_1 -вложимым.

Сначала мы вспомним некоторые определения. Если $\|\cdot\|$ — норма на $\mathbb{R}^m$, ее *единичным шаром* B называется множество, определенное как

$$B := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq 1\},$$

и B^0 обозначает поляр B .

Многогранник называется *зонотопом*, если он является векторной суммой нескольких линейных сегментов. (Следовательно, параллелоэдры, которые были упомянуты в теореме 6.3.7, являются специальным случаем зонотопов). *Зонотомом* называется выпуклое тело, которое можно аппроксимировать зонотопами, используя метрику Бласске–Хаусдорфа. Как показывают нижеприведенные результаты, зонотопы и зонотомы являются центральными объектами выпуклой геометрии и имеют отношение ко многим другим областям, в частности, к L_1 -метрике. Для детального знакомства с зонотомами мы отсылаем читателя к Болкеру [1969] и Шнайдеру и Вейлу [1983].

Теперь мы представим несколько эквивалентных характеристик¹⁾ для L_1 -вложимых нормированных метрических пространств $(\mathbb{R}^m, d_{\|\cdot\|})$.

Теорема 8.3.1. Пусть $\|\cdot\|$ — норма на $\mathbb{R}^m$ и пусть B — ее единичный шар. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $d_{\|\cdot\|}$ — метрика отрицательного типа.
- (ii) $d_{\|\cdot\|}$ — гиперметрика.
- (iii) $(\mathbb{R}^m, d_{\|\cdot\|})$ L_1 -вложимо.
- (iv) Поляр шара B является зонотомом. ■

¹⁾ В общем случае, Бретаньоль, Дакуна-Кастель и Кривин [1966] показали, что для $1 \leq p \leq 2$ метрика нормы $d_{\|\cdot\|}$ является L_p -вложимой если и только если $(d_{\|\cdot\|})^p$ является метрикой отрицательного типа.

Литературу по эквивалентности (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iv) из теоремы 8.3.1 можно найти в Шнайдер и Вейль [1983], а эквивалентность (iii) $\iff$ (iv) доказана в Болкер [1969]. L_1 -вложимость нормированных метрических пространств можно характеризовать гораздо более простыми неравенствами, когда единичный шар нормированного пространства является многогранником; мы отсылаем читателя к Ассуаду [1980а, 1984] и Витценхаузену [1978], где доказан следующий результат.

Теорема 8.3.2. Пусть $\|\cdot\|$ — норма на $\mathbb{R}^m$, единичный шар которой является многогранником. Следующие утверждения эквивалентны.

(i) $\|\cdot\|$ удовлетворяет неравенству Главки:

$$\|x\| + \|y\| + \|z\| + \|x + y + z\| \geq \|x + y\| + \|x + z\| + \|y + z\|$$

для всех $x, y, z \in \mathbb{R}^m$.

(ii) $\|\cdot\|$ удовлетворяет 7-гональному неравенству:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \|x_i - x_j\| + \sum_{1 \leq h < k \leq 3} \|y_h - y_k\| \leq \sum_{1 \leq i \leq 4, 1 \leq k \leq 3} \|x_i - y_k\|$$

для всех $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^m$.

(iii) $(\mathbb{R}^m, d_{\|\cdot\|})$ L_1 -вложимо.

(iv) Поляр шара B является зоногранником. ■

На самом деле, импликация (ii) $\implies$ (i) теоремы 8.3.2 остается верной для любых норм. Именно, если произвольная норма на $\mathbb{R}^m$ удовлетворяет 7-гональному неравенству, то она удовлетворяет также неравенству Главки (Ассуад [1984]).

Вышеназванные результаты могут быть частично расширены до более общей концепции проективных метрик. Непрерывная метрика d на $\mathbb{R}^m$ называется *проективной метрикой*, если

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

для всех коллинеарных точек x, y, z , лежащих в таком порядке на общей прямой. Очевидно, каждая метрика нормы является проективной. Конус проективных метрик является объектом, рассмотренным в четвертой проблеме Гильберта (см. Александер [1988], Амбарцумян [1982]; см. также Сабо [1986] для знакомства с последними результатами в этой области). Александер [1988] дал следующую характеристику для L_1 -вложимых проективных метрик.

Теорема 8.3.3. Пусть d — проективная метрика на $\mathbb{R}^m$. Следующие утверждения эквивалентны.

(i) $(\mathbb{R}^m, d)$ L_1 -вложимо.

(ii) d — гиперметрика.

(iii) Существует положительная мера Бореля μ на множестве гиперплоскостей в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющая условию

$$\begin{cases} \mu([x]) = 0 & \text{для всех } x \in \mathbb{R}^m, \\ 0 < \mu([x, y]) < \infty & \text{для всех } x \neq y \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

и такая, что d можно задать следующей формулой (называемой формулой Крофтона):

$$2d(x, y) = \mu([x, y]) \quad \text{для } x, y \in \mathbb{R}^m,$$

где $[x, y]$ обозначает множество гиперплоскостей, содержащих отрезок $[x, y]$. ■

В размерности $m = 2$ теорема 8.3.3 (iii) всегда имеет место; т. е., каждая проективная метрика на $\mathbb{R}^2$ L_1 -вложима (Александр [1978]). С другой стороны, метрика нормы d_{ℓ_∞} , получаемая из нормы $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ в $\mathbb{R}^3$, не является L_1 -вложимой, так как не является гиперметрической. Действительно, точки $x_1 = (1, 1, 0)$, $x_2 = (1, -1, 0)$, $x_3 = (-1, 1, 0)$, $y_1 = (0, 0, 0)$, и $y_2 = (0, 0, 1)$ не удовлетворяют пентагональному неравенству (6.1.9) (Келли [1970a]).

Глава 9.

Метрические преобразования L_1 -пространств

Пусть (X, d) — пространство расстояний и пусть $F: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ — такая функция, что $F(0) = 0$. Определим пространство расстояний $(X, F(d))$, положив

$$(9.0.1) \quad F(d)_{ij} = F(d_{ij}) \quad \text{для всех } i, j \in X.$$

Следуя Блюменталю [1953], пространство $(X, F(d))$ называют *метрическим преобразованием* пространства (X, d) . Основной вопрос состоит в том, чтобы найти нетривиальную функцию F , сохраняющую некоторые свойства, например, метричность, L_1 - или L_2 -вложимость первоначального пространства расстояний.

Метрические преобразования L_2 -пространств интенсивно изучались в литературе, в частности, Шёнбергом [1937, 1938a], фон Нейманом и Шёнбергом [1941] (см. также Уэллс и Уильямс [1975], где рассмотрен общий случай L_p -пространств). Одним из результатов Шёнберга, наиболее близким к нашим исследованиям, является характеристика непрерывных функций F , для которых метрическое преобразование $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ является L_2 -вложимым; он сформулирован в теореме 9.1.4.

Вопросы того же типа исследовались для положительно полуопределенных матриц. Именно, можно спросить, каковы функции F , для которых матрица $(F(a_{ij}))$ является положительно полуопределенной, если (a_{ij}) является положительно полуопределенной. Результаты этого типа были получены в книге Хорн и Джонсон [1991] (раздел 6.3). Например, показательная функция $F(t) = \exp(t)$ и степенная функция $F(t) = t^k$ ($k \in \mathbb{N}$) сохраняют положительную полуопределенность. Другими словами, для любой матрицы (a_{ij}) ,

$$(a_{ij}) \succeq 0 \implies (\exp(a_{ij})) \succeq 0, \quad (a_{ij}^k) \succeq 0.$$

В этом разделе мы представляем несколько результатов о метрических преобразованиях ℓ_1 -пространств. Начнем с нескольких условий, достаточных для того, чтобы функция F сохраняла полуметрические пространства.

Лемма 9.0.2. Пусть $F: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ — монотонно неубывающая вогнутая функция, такая что $F(0) = 0$. Если (X, d) является полуметрическим пространством, то $(X, F(d))$ также является полуметрическим пространством.

Доказательство. Достаточно показать, что если a, b, c неотрицательные числа, такие что $a \leq b + c$, то $F(a) \leq F(b) + F(c)$. Мы имеем $F(a) \leq F(b + c)$, так как F неубывающая функция. Проверим теперь, что $F(b + c) \leq F(b) + F(c)$. Действительно, $F(b) \geq \frac{b}{b+c} F(b+c)$ и $F(c) \geq \frac{c}{b+c} F(b+c)$, так как F вогнута и $F(0) = 0$. Результат получается теперь суммированием этих двух отношений. ■

Мы заинтересованы в нахождении некоторых функций F , сохраняющих L_1 -вложимость. Для этого удобно ввести класс $\mathcal{F}$, состоящий из функций $F: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, таких что $F(0) = 0$ и F сохраняет условие отрицательного типа; т. е. F удовлетворяет условию:

(X, d) является пространством отрицательного типа $\implies$

$\implies (X, F(d))$ является пространством отрицательного типа

для любого пространства расстояний (X, d) . Используя следствие 8.2.8, мы можем доказать следующий результат из Ассуад [1979, 1980b]:

Теорема 9.0.3. Пусть (X, d) — пространство расстояний и пусть F — функция из семейства $\mathcal{F}$. Тогда

$$(X, d) \text{ } L_1\text{-вложимо} \implies (X, F(d)) \text{ } L_1\text{-вложимо}.$$

Доказательство. Пусть (X, d) — L_1 -вложимое пространство расстояний. Тогда, по предложению 4.2.1, (X, d) является изометрическим подпространством измеримого полуметрического пространства $(\mathcal{A}_\mu, d_\mu)$ для некоторого пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Это означает, что имеется отображение

$$x \in X \mapsto A_x \in \mathcal{A}_\mu,$$

такое, что $d(x, y) = \mu(A_x \triangle A_y)$ для всех $x, y \in X$. Пусть $v: \mathcal{A}_\mu \mapsto \mathbb{R}_+$ определено как

$$v(A) := F(\mu(A)) \quad \text{для } A \in \mathcal{A}_\mu.$$

Применим следствие 8.2.8 к паре $(\mathcal{A}_\mu, v)$. Пусть $d_{v, \triangle}$ определено по (8.2.9); тогда

$$d_{v, \triangle}(A, B) = F(\mu(A \triangle B)) \quad \text{для } A, B \in \mathcal{A}_\mu.$$

Таким образом пространство расстояний $(A_\mu, d_{v,\Delta})$ является метрическим преобразованием (A_μ, d_μ) с помощью F и $(X, F(d))$ является изометрическим подпространством $(A_\mu, d_{v,\Delta})$.

Так как (A_μ, d_μ) есть пространство отрицательного типа (потому что оно L_1 -вложимо) и так как $F \in \mathcal{F}$, мы получаем, что $(A_\mu, d_{v,\Delta})$ является пространством отрицательного типа. Следовательно, по следствию 8.2.8, $(A_\mu, d_{v,\Delta})$ является L_1 -вложимым, и, значит, его изометрическое подпространство $(X, F(d))$ также является L_1 -вложимым. ■

Таким образом, крайне важно определить, какие функции принадлежат $\mathcal{F}$. Такие функции были полностью характеризованы Шёнбергом [1938a]; мы упомянем этот результат в теореме 9.1.4. Например, функции $F(t) = \frac{t}{1+t}$, $\log(1+t)$, $1 - \exp(-\lambda t)$ (для $\lambda > 0$) (*преобразование Шенберга*), t^α (для $0 < \alpha \leq 1$) (*степенное преобразование*) принадлежат $\mathcal{F}$. Преобразование Шенберга играет центральную роль в описании семейства $\mathcal{F}$.

Мы детально рассмотрим преобразование Шенберга в разделе 9.1. Мы покажем, что оно сохраняет свойство быть отрицательного типа и, следовательно, L_1 -вложимость. Кроме того, мы опишем все функции, сохраняющие свойство отрицательного типа и, как следствие, приведем несколько примеров функций, сохраняющих L_1 -вложимость. В разделе 9.2 мы рассмотрим преобразование биогранника, которое дает еще один путь изменения расстояний с сохранением свойства L_1 -вложимости. В разделе 9.3 мы рассмотрим следующий вопрос, связанный со степенным преобразованием: для данного произвольного полуметрического пространства (X, d) определить наибольшее α , для которого степенное преобразование (X, d^α) сохраняет некоторые метрические свойства, такие как L_1 - или L_2 -вложимость, гиперметрическое свойство и так далее.

9.1. Преобразование Шенберга

Здесь мы рассмотрим *преобразование Шенберга*:

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t) \quad \text{для } t \in \mathbb{R}_+,$$

где λ является положительной постоянной. Все представленные здесь результаты существенным образом опираются на труды Шёнберга.

В первую очередь мы покажем, что преобразование Шёнберга сохраняет свойство быть отрицательного типа; этот факт был доказан в работе Шёнберга [1938b].

Теорема 9.1.1. Пусть (X, d) — пространство расстояний. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) (X, d) — пространство отрицательного типа.
- (ii) Симметрическая функция $p: X \times X \mapsto \mathbb{R}$, определенная как

$$p(x, y) = \exp(-\lambda d(x, y)) \quad \text{для } x, y \in X,$$

является функцией положительного типа для всех $\lambda > 0$.

- (iii) $(X, 1 - \exp(-\lambda d))$ является пространством отрицательного типа для всех $\lambda > 0$.

Доказательство. Заметим, что все свойства из теоремы 9.1.1 конечного типа, т. е. они имеют место тогда и только тогда, когда они имеют место для каждого конечного подмножества множества X . Следовательно, мы можем предположить, что X конечно, например, $X = \{1, \dots, n\}$.

(i) $\implies$ (ii) Так как (X, d) — пространство отрицательного типа, то, по теореме 6.2.2, $(X, \sqrt{d})$ является ℓ_2 -вложимым, т. е. существуют $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$), такие что $d_{jk} = (\|x^{(j)} - x^{(k)}\|_2)^2$ для всех $j, k \in X$. Пусть $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Покажем, что

$$\sum_{1 \leq j, k \leq n} b_j b_k \exp(-\lambda (\|x^{(j)} - x^{(k)}\|_2)^2) \geq 0.$$

Для этого используем следующее классическое тождество:

$$\exp(-x^2) = 2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i x u) \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) du.$$

(Здесь i обозначает мнимую единицу.) Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j, k \in X} b_j b_k \exp(-\lambda (\|x^{(j)} - x^{(k)}\|_2)^2) &= \sum_{j, k \in X} b_j b_k \prod_{h=1}^m \exp(-\lambda (x_h^{(j)} - x_h^{(k)})^2) = \\ &= \sum_{i, j \in X} b_j b_k 2^{-m} \pi^{-\frac{m}{2}} \prod_{h=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i \sqrt{\lambda} (x_h^{(j)} - x_h^{(k)}) u_h) \exp\left(-\frac{u_h^2}{4}\right) du_h = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,k \in X} b_j b_k 2^{-m} \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\sqrt{\lambda}(x^{(j)} - x^{(k)})^T u) \times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{h=1}^m u_h^2\right) du_1 \dots du_m = \\
&= 2^{-m} \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j \in X} b_j \exp(i\sqrt{\lambda} x^{(j)T} u) \right|^2 \times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{4} \left(\sum_{h=1}^m u_h^2\right)\right) du_1 \dots du_m
\end{aligned}$$

является неотрицательной.

(ii) $\implies$ (iii) Пусть

$$d'_{ij} := \exp(-\lambda d_{ii}) + \exp(-\lambda d_{jj}) - 2 \exp(-\lambda d_{ij}) = 2(1 - \exp(-\lambda d_{ij}))$$

для $i, j \in X$. Таким образом, d' получается из $p = \exp(-\lambda d)$ применением отображения, обратного ковариантному отображению (определенному в (5.2.5)). Используя лемму 6.1.14, мы получим, что (X, d') является пространством отрицательного типа, т. е. что $(X, 1 - \exp(-\lambda d))$ является пространством отрицательного типа.

(iii) $\implies$ (i) Пусть $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 0$. Тогда,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j (1 - \exp(-\lambda d_{ij})) \leq 0,$$

так как $1 - \exp(-\lambda d)$ отрицательного типа. Используя разложение в ряд для показательной функции, мы получим, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j (1 - \exp(-\lambda d_{ij})) = \\
&= \lambda \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_{ij} - \frac{\lambda}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_{ij}^2 + \frac{\lambda^2}{3!} \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_{ij}^3 - \dots \right) \leq 0
\end{aligned}$$

для всех $\lambda > 0$. При делении на λ и взятии предела при $\lambda \rightarrow 0$ мы получим, что $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_{ij} \leq 0$. Это показывает, что (X, d) есть пространство отрицательного типа. $\blacksquare$

Замечание 9.1.2. Эквивалентность (i) $\iff$ (ii) из теоремы 9.1.1 является классическим результатом линейной алгебры (см., например, теоремы 6.3.6 и 6.3.13 в Хорн и Джонсон [1991]). Доказательство импликации (i) $\implies$ (ii), приведенное выше, является оригинальным

доказательством Шенберга. Другое доказательство можно получить, используя только тот факт, что

$$(a_{ij}) \succeq 0 \implies (\exp(a_{ij})) \succeq 0 \quad \text{для любой матрицы } (a_{ij}).$$

Это делается следующим образом. Предположим, что пространство расстояний (X, d) есть пространство отрицательного типа и возьмем $x_0, \dots, x_n \in X$. Пусть $a_{ij} := d(x_0, x_i) + d(x_0, x_j) - d(x_i, x_j)$ для $i, j = 1, \dots, n$. Тогда матрица $A := (a_{ij})$ является положительно полуопределенной (так как состоит из образов d при ковариантном отображении, фиксированном на позиции x_0 , с точностью до множителя 2). Следовательно, матрица $B := (\exp(a_{ij}))$ является положительно полуопределенной. Пусть D обозначает диагональную матрицу с i -м диагональным элементом $\exp(-d(x_0, x_i))$ для $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда матрица DBD является положительно полуопределенной и ее ij -й элемент равен $\exp(-d(x_i, x_j))$ для всех $i, j = 0, 1, \dots, n$. Следовательно, матрица $\exp(-d(x_i, x_j))_{i,j=0}^n$ является положительно полуопределенной для всех $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$ и $n \geq 1$, что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Следствие 9.1.3. Пусть (X, d) — пространство расстояний. Тогда (X, d) L_1 -вложимо $\iff (X, 1 - \exp(-\lambda d))$ L_1 -вложимо для всех $\lambda > 0$.

Доказательство. Импликация «только тогда» следует из теорем 9.0.3 и 9.1.1. Доказательство для обратной импликации аналогично доказательству теоремы 9.1.1 (iii) $\implies$ (i), если заменить неравенство отрицательного типа на любое допустимое для разрезного конуса $\text{CUT}(Y)$ неравенство, где Y есть конечное подмножество X . $\blacksquare$

Заметим, что теорема 9.1.1 остается верной, если мы предположим только, что (ii) и (iii) имеют место для множества положительных λ с предельной точкой 0. То же самое замечание применимо и к следствию 9.1.3.

По теореме 9.1.1 мы знаем, что функция $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ (для $\lambda > 0$) принадлежит $\mathcal{F}$. Шёнберг¹⁾ [1938a] описал все функции из $\mathcal{F}$

¹⁾ Шёнберг охарактеризовал метрические преобразования, сохраняющие L_2 -вложимость. Очевидно, что G сохраняет L_2 -вложимость тогда и только тогда, когда F сохраняет свойство быть отрицательного типа, где F и G связаны соотношением $F(t) = (G(\sqrt{t}))^2$ для $t \geq 0$. Дальнейшие результаты, связанные с метрическими преобразованиями в свете вложимости в различные L_2 - и L_p -пространства, были представлены, например, в Шёнберг [1937, 1938a, 1938b], фон Нейман и Шёнберг [1941]. Смотрите также обзор Уэллс и Уильямс [1975].

(в предположении, что все их производные существуют). Именно, имеет место

Теорема 9.1.4. Пусть $F: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ — такая функция, что $F(0) = 0$ и ее n -я производная $F^{(n)}$ существует на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ для каждого $n \geq 1$. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $F \in \mathcal{F}$ (т. е. F сохраняет свойство быть отрицательного типа).
- (ii) F имеет форму:

$$(9.1.5) \quad F(t) = \int_0^\infty \frac{1 - \exp(-tu)}{u} d\gamma(u) \quad \text{для } t \geq 0,$$

где γ — положительная мера на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию

$$\int_1^\infty \frac{d\gamma(u)}{u} < \infty.$$

- (iii) $(-1)^{n-1} F^{(n)}(t) \geq 0$ для всех $t > 0$ и $n \geq 1$. ■

Пример 9.1.6. Мы упомянем здесь несколько примеров функций из семейства $\mathcal{F}$.

- (i) легко проверить, что каждая функция формы (9.1.5) принадлежит $\mathcal{F}$. Например, степенное преобразование: $F(t) = t^\alpha$ принадлежит $\mathcal{F}$ для $0 < \alpha \leq 1$. Это следует из интегральной формулы:

$$t^\alpha = e_\alpha^{-1} \int_0^\infty (1 - \exp(-\lambda^2 t)) \lambda^{-1-2\alpha} d\lambda \quad \text{для } t \geq 0,$$

где

$$e_\alpha := \int_0^\infty (1 - \exp(-u^2)) u^{-1-2\alpha} du$$

(что можно проверить, положив $u = \lambda\sqrt{t}$ в первом интеграле). С другой стороны, это следует из того факта, что $(-1)^{n-1} F^{(n)} \geq 0$ для всех $n \geq 0$.

- (ii) Каждая из функций $F(t) = t^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), $F(t) = \frac{t}{1+t}$, $F(t) = \log(1+t)$ принадлежит $\mathcal{F}$. Следовательно, все они сохраняют L_1 -вложимость. ■

Мы закончим результатом Келли [1972] о метрических преобразованиях одномерного ℓ_1 -пространства.

Предложение 9.1.7. Пусть $F: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ монотонно неубывающая вогнутая функция, такая что $F(0) = 0$. Тогда метрическое преобразование пространства расстояний $L_1^1 = (R, d_{\ell_1})$ с помощью F является гиперметрическим. ■

9.2. Биотопическое преобразование

Рассмотрим здесь другое преобразование, сохраняющее L_1 -вложимость. Оно не принадлежит к категории метрических преобразований, определенных в (9.0.1).

Пусть d — расстояние на множестве X , и пусть s — некоторая точка из X . Определим новое расстояние $d^{(s)}$ на X , положив

$$d^{(s)}(i, j) := \frac{d(i, j)}{d(i, s) + d(j, s) + d(i, j)}$$

для всех $i, j \in X$. В частности, если $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ есть измеримое пространство и если (X, d) — полуметрическое измеримое пространство $(\mathcal{A}_\mu, d_\mu)$, то преобразование $d_\mu^{(\varnothing)}$ принимает вид

$$d_\mu^{(\varnothing)}(A, B) = \frac{\mu(A \triangle B)}{\mu(A) + \mu(B) + \mu(A \triangle B)} = \frac{\mu(A \triangle B)}{2\mu(A \cup B)}$$

для $A, B \in \mathcal{A}_\mu$. Расстояние

$$(A, B) \in \mathcal{A}_\mu \times \mathcal{A}_\mu \mapsto \frac{\mu(A \triangle B)}{\mu(A \cup B)}$$

называется *расстоянием Штайнхауса*. Расстояние

$$(A, B) \mapsto \frac{|A \triangle B|}{|A \cup B|},$$

получаемое в специальном случае, когда μ есть мощность, также известно под названием *биотопическое расстояние*. Эта терминология исходит из того факта, что данное расстояние используется в некоторых биологических проблемах для изучения биотопов¹⁾ (смотри Марчевский и Штейнхаус [1958]). Следствием следующего предложения 9.2.1 является то, что расстояния Штайнхауса и биотопическое расстояние являются L_1 -вложимыми; (i) дано в Марчевский и Штейнхаус [1958] и (ii) в Ассуад [1980b].

Предложение 9.2.1.

- (i) Если d — полуметрика на X , то $d^{(s)}$ — также полуметрика на X .
- (ii) Если (X, d) L_1 -вложимо, то $(X, d^{(s)})$ также L_1 -вложимо.

Доказательство. (i) следует из (ii) и того факта, что пространство расстояний на не более чем 4 точках L_1 -вложимо тогда и только тогда, когда оно является полуметрическим пространством (см. замечание 6.3.5(i)).

¹⁾ Определение биотопа см. в словаре иностранных слов. — Прим. ред.

(ii) По лемме 4.2.5 мы можем предположить, что (X, d) есть изометрическое подпространство некоторого полуметрического измеримого пространства $(\mathcal{A}_\mu, d_\mu)$, т. е. $d(i, j) = \mu(A_i \triangle A_j)$, где $A_i \in \mathcal{A}_\mu$ для всех $i, j \in X$, и без ограничения общности мы можем предположить, что $A_s = \emptyset$. Следовательно, как уже было замечено,

$$d^{(s)}(i, j) = \frac{\mu(A_i \triangle A_j)}{2\mu(A_i \cup A_j)}$$

для всех $i, j \in X$. По лемме 5.3.2, доказательство L_1 -вложимости $(X, d^{(s)})$ совпадает с доказательством $\{0, 1\}$ -ковариантности $p := \xi_s(d^{(s)})$. Из (5.2.4) p определено как

$$p(i, j) = \frac{1}{2}(d^{(s)}(i, s) + d^{(s)}(j, s) - d^{(s)}(i, j))$$

для $i, j \in X \setminus \{s\}$. Следовательно,

$$p(i, j) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{\mu(A_i \cap A_j)}{\mu(A_i \cup A_j)}$$

для $i, j \in X \setminus \{s\}$. Таким образом, достаточно показать, что симметрическая функция

$$q: (i, j) \in (X \setminus \{s\})^2 \mapsto \frac{\mu(A_i \cap A_j)}{\mu(A_i \cup A_j)}$$

является $\{0, 1\}$ -ковариантностью. Для этого мы используем тождество

$$\frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A \cup B)} = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(\Omega)} \left(\sum_{i \geq 0} \left(\frac{\mu(\bar{A} \cap \bar{B})}{\mu(\Omega)} \right)^i \right)$$

(которое следует из тождества $\sum_{i \geq 0} (1 - u)^i = \frac{1}{u}$ для всех $0 < u \leq 1$).

Следовательно, q является $\{0, 1\}$ -ковариантностью, т. е. принадлежит корреляционному конусу $COR(X \setminus \{s\})$. Это следует из того, что $\{0, 1\}$ -ковариантности сохраняются при взятии сумм, произведений и пределов (для операции произведения напомним предложение 7.5.3). ■

9.3. Степенное преобразование

Вернемся к изучению метрических преобразований и, более точно, к *степенному преобразованию*:

$$F(t) = t^\alpha \quad \text{для } t \geq 0,$$

где $0 < \alpha \leq 1$. Поставим следующий вопрос: чему равен наибольший показатель $\alpha \in [0, 1]$, для которого метрическое преобразование (X, d^α) произвольного полуметрического пространства (X, d) можно было бы вложить в некоторое данное пространство, например, ℓ_1 или ℓ_2 ? Так как α лежит в интервале $[0, 1]$, мы по крайней мере уверены, что (X, d^α) является полуметрическим пространством (по лемме 9.0.2).

Например, (X, d^α) является ℓ_2 -вложимым для каждого $\alpha \leq 1$, если $|X| = 3$ (напомним замечание 6.2.12). Блюменталь [1953] показал, что (X, d^α) ℓ_2 -вложимо для каждого $\alpha \leq \frac{1}{2}$, если $|X| = 4$; кроме того, $\frac{1}{2}$ —наибольший такой показатель. Деза и Маехара [1990] рассмотрели общий случай полуметрического пространства на $n \geq 3$ точках. Они получили некоторые ограничения на α (зависящие от n), при которых (X, d^α) имеет некоторые метрические свойства, такие как гиперметричность, ℓ_1 - или ℓ_2 -вложимость для любого полуметрического пространства (X, d) с $|X| = n$. Функция:

$$\gamma(s) := \log_2 \left(1 + \frac{1}{s} \right) \quad \text{для } s > 0$$

полезна для формулировки дальнейших результатов. Деза и Маехара [1990] доказали следующую теорему.

Теорема 9.3.1. Пусть (X, d) — полуметрическое пространство с $|X| = n$. Тогда (X, d^α) — гиперметрическое пространство для каждого $0 < \alpha \leq \gamma(n-1)$.

Следствие 9.3.2. Пусть (X, d) — полуметрическое пространство с $|X| = n$. Тогда (X, d^α) ℓ_2 -вложимо для каждого $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\gamma(n-1)$.

Доказательство следствия 9.3.2. Если $\alpha \leq \frac{1}{2}\gamma(n-1)$, то, по теореме 9.3.1, $(X, d^{2\alpha})$ является гиперметрическим и, следовательно, отрицательного типа. Следовательно, (X, d^α) ℓ_2 -вложимо. ■

Для доказательства теоремы 9.3.1 нам нужны несколько вспомогательных лемм.

Лемма 9.3.3. Пусть $0 < \alpha \leq \gamma(s)$, где $s \geq 1$, и пусть (X, d) — полуметрическое пространство. Тогда

$$d(x, y) \leq d(y, z) \implies d(x, z)^\alpha \leq \frac{1}{s} d(x, y)^\alpha + d(y, z)^\alpha.$$

Доказательство. Так как $d(x, z)^\alpha \leq (d(x, y) + d(y, z))^\alpha$, достаточно показать, что $(d(x, y) + d(y, z))^\alpha \leq \frac{1}{s}d(x, y)^\alpha + d(y, z)^\alpha$ или, что эквивалентно, что

$$\left(1 + \frac{d(y, z)}{d(x, y)}\right)^\alpha \leq \frac{1}{s} + \left(\frac{d(y, z)}{d(x, y)}\right)^\alpha.$$

Пусть $f(t) := \frac{1}{s} + t^\alpha - (1+t)^\alpha$ для $t \geq 1$. Остается проверить, что $f(t) \geq 0$ для $t \geq 1$. Действительно, $f(t) \geq f(1)$ (как монотонно неубывающая функция) и $f(1) = \frac{1}{s} + 1 - 2^\alpha \geq 0$, так как $\alpha \leq \gamma(s)$. ■

Следующие леммы посвящены доказательству того, что пространство (X, d^α) является гиперметрическим, т. е. что (X, d^α) удовлетворяет $(2m+1)$ -гональному неравенству:

$$(9.3.4) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq m} d(x_i, x_j)^\alpha + \sum_{1 \leq i < j \leq m+1} d(y_i, y_j)^\alpha \leq \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m+1} d(x_i, y_j)^\alpha$$

для каждой последовательности:

$$(9.3.5) \quad x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{m+1} \in X$$

(возможно, с повторениями) и каждого $m \geq 1$. Для простоты обозначений заменим $d(x, y)^\alpha$ символом xy для всех $x, y \in X$. Можно предположить (после соответствующего переупорядочивания индексов), что последовательность (9.3.5) удовлетворяет условию:

$$(9.3.6) \quad x_k y_k \leq x_i y_j \quad \text{для всех } i, j \geq k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Тогда, используя лемму 9.3.3, мы получим, что для $0 < \alpha \leq \gamma(s)$ и $k \leq m$, $i < k < j$,

$$(9.3.7) \quad \begin{aligned} x_i x_k &\leq \frac{1}{s} x_k y_k + x_k y_i, & x_j x_k &\leq \frac{1}{s} x_k y_k + x_j y_k, \\ y_i y_k &\leq \frac{1}{s} x_k y_k + x_i y_k, & y_j y_k &\leq \frac{1}{s} x_k y_k + x_k y_j. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $i, k \leq m$,

$$(9.3.8) \quad x_i x_k + y_i y_k \leq \frac{2}{s} x_k y_k + x_k y_i + x_i y_k.$$

Лемма 9.3.9. Пусть $0 < \alpha \leq \gamma(m)$ и пусть (X, d) — полуметрическое пространство. Тогда (X, d^α) является $(2m+1)$ -гональным. Кроме того, для $\alpha > \gamma(m)$ существует полуметрическое пространство (X, d) с $|X| = 2m+2$ (соответственно, $|X| = 2m+1$), для которого (X, d^α) не $(2m+2)$ -гонально (соответственно, не $(2m+1)$ -гонально).

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек из (9.3.5) и предположим, что она удовлетворяет (9.3.6). Для данного $k \leq m$, суммируя (9.3.8) (при $s := m$) по всем $i = 1, \dots, m, i \neq k$, получим:

$$\sum_{i=1}^m (x_i x_k + y_i y_k) \leq -\frac{2}{m} x_k y_k + \sum_{i=1}^m (x_k y_i + x_i y_k).$$

Суммируя теперь по всем $k = 1, \dots, m$, получим:

$$\sum_{i,k=1}^m (x_i x_k + y_i y_k) \leq -\frac{2}{m} \sum_{k=1}^m x_k y_k + \sum_{i,k=1}^m x_i y_k.$$

Деля на 2 и добавляя неравенство:

$$\sum_{k=1}^m y_k y_{m+1} \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k y_k + \sum_{k=1}^m x_k y_{m+1}$$

(которое следует из леммы 9.3.3), мы получим неравенство (9.3.4).

Предположим теперь, что $\alpha > \gamma(m)$. Рассмотрим в качестве пространства расстояний (X, d) графические метрические пространства полных двудольных графов $K_{m+1, m+1}$ и $K_{m+1, m}$. Тогда d^α не $(2m+2)$ -гонально в обоих случаях. (Это непосредственно проверяется выбором x_i из одного класса вершин, а y_i из другого.) ■

Лемма 9.3.10. Пусть $0 < \alpha \leq s$ и пусть (X, d) — полуметрическое пространство, такое что (X, d^α) $(2m-1)$ -гонально. Рассмотрим последовательность из (9.3.5) с максимальным числом повторений, большим или равным $\frac{2m}{s+1}$ (т. е. по меньшей мере один член последовательности повторяется по меньшей мере $\frac{2m}{s+1}$ раз). Тогда (X, d^α) удовлетворяет соответствующему $(2m+1)$ -гональному неравенству (9.3.4).

Доказательство. Пусть r обозначает максимальное число повторений в последовательности (9.3.5). По предположению, $r \geq \frac{2m}{s+1}$. Мы можем предположить, что имеет место (9.3.6). Если некоторое x_i совпадает с некоторым y_j , например, $x_m = y_{m+1}$, то $(2m+1)$ -гональное неравенство следует из того, что (X, d^α) $(2m-1)$ -гонально (и, следовательно, удовлетворяет неравенству, ассоциированному с последовательностью $x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_m$). Следовательно, мы можем предположить, что множества $\{x_1, \dots, x_m\}$ и $\{y_1, \dots, y_{m+1}\}$ не пересекаются. Пусть k обозначает наименьший индекс i , такой что

одно из x_i или y_i повторяется в последовательности (9.3.5) r раз. Предположим, что это выполняется при x_k (случай с y_k аналогичен). По предположению, (X, d^α) удовлетворяет $(2m-1)$ -гональному неравенству, ассоциированному с последовательностью (9.3.5) с пропущенными x_k и y_k ; т. е.

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m, i, j \neq k} x_i x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq m+1, i, j \neq k} y_i y_j \leq \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m+1, i, j \neq k} x_i y_j.$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$(a) \quad \sum_{i \in I \cup J} x_i x_k + \sum_{1 \leq i \leq m+1, i \neq k} y_i y_k \leq \sum_{1 \leq i \leq m+1, i \neq k} x_k y_i + \sum_{1 \leq i \leq m} x_i y_k,$$

где $I := \{i \mid 1 \leq i < k, x_i \neq x_k\}$ и $J := \{i \mid k < i \leq m, x_i \neq x_k\}$. Заметим, что $|I| + |J| + r = m$ и $I = \{1, \dots, k-1\}$ по выбору k . Преобразуем левую сторону неравенства (a). Используя (9.3.7), мы получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I \cup J} x_i x_k + \sum_{i \neq k} y_i y_k &\leq \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{s} x_k y_k + x_k y_i \right) + \sum_{i \in J} \left(\frac{1}{s} x_k y_k + x_i y_k \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{s} x_k y_k + x_i y_k \right) + \sum_{i=k+1}^m \left(\frac{1}{s} x_k y_k + x_k y_i \right) = \\ &= \frac{1}{s} x_k y_k (|I| + |J| + m) + \sum_{1 \leq i \leq m+1, i \neq k} x_k y_i + \sum_{i=1}^m x_i y_k - r x_k y_k. \end{aligned}$$

Но $\frac{1}{s}(|I| + |J| + m) - r = \frac{2m-r}{s} - r \leq 0$, потому что $r \geq \frac{2m}{s+1}$.

Следовательно, (a) имеет место, что завершает доказательство. $\blacksquare$

Доказательство теоремы 9.3.1. Пусть $0 < \alpha \leq \gamma(n-1)$. Покажем, что d^α $(2m+1)$ -гонально для всех $m \geq 1$, индукцией по m . Если $m = 1$, это очевидно, так как d^α является полуметрикой. Предположим, что $m \geq 2$ и что d^α $(2m-1)$ -гонально. Ясно, что последовательность из $2m+1$ точки множества X должна содержать элемент, повторяющийся по меньшей мере $\frac{2m+1}{n}$ раз (так как $|X| = n$). Применяя лемму 9.3.10 (с $s := n-1$), мы получаем, что d^α $(2m+1)$ -гонально. $\blacksquare$

Следствие 9.3.11. Пусть (X, d) — полуметрическое пространство с $|X| = 5$ или 6 . Тогда (X, d^α) ℓ_1 -вложимо для всех $0 < \alpha \leq \gamma(2)$. Кроме того, $\gamma(2)$ — наибольшая такая величина для α ; т. е. для $\alpha > \gamma(2)$ имеются пространства расстояний на 5 или 6 точках, для которых d^α не ℓ_1 -вложимо.

Доказательство. В случае $|X| = 5$ результат следует из того факта, что расстояние на 5 точках ℓ_1 -вложимо тогда и только тогда, когда оно 5-гонально (напомним замечание 6.3.5 (i)). Рассмотрим теперь случай $|X| = 6$. Если $\alpha \leq \gamma(2)$, то d^α 5-гонально по лемме 9.3.9 и, следовательно, 7-гонально по лемме 9.3.10. (Мы использовали тот факт, что расстояние на 6 точках ℓ_1 -вложимо тогда и только тогда, когда оно 7-гонально.) ■

Для $n \geq 3$ рассмотрим параметры $g(n), h(n), c_1(n)$ и $c_2(n)$, определенные следующим образом: $g(n)$ обозначает максимальное $\alpha \in [0, 1]$, для которого (X, d^α) n -гонально для любого полуметрического пространства (X, d) с $|X| = n$. Аналогично, $h(n)$ (соответственно, $c_1(n), c_2(n)$) обозначает максимальное α , для которого (X, d^α) является гиперметрическим (соответственно, ℓ_1 -вложимым, ℓ_2 -вложимым) для любого полуметрического пространства (X, d) с $|X| = n$. Очевидно,

$$c_2(n) \leq c_1(n) \leq h(n) \leq g(n) \quad \text{и} \quad c_2(n) \geq \frac{1}{2}h(n).$$

В теореме 9.3.1 мы показали, что

$$h(n) \geq \gamma(n-1), \quad \text{откуда} \quad c_2(n) \geq \frac{1}{2}\gamma(n-1).$$

Используя лемму 9.3.9 (вместе с леммой 6.1.10 в случае четного n), легко найти точное значение параметра $g(n)$.

Лемма 9.3.12. $g(2m) = \gamma(m-1)$ для $m \geq 2$, и $g(2m+1) = \gamma(m)$ для $m \geq 1$. ■

Отсюда следует, что $h(5) = h(6) = \gamma(2)$. Точное значение параметра $c_1(n)$ известно при $n \leq 6$, по следствию 9.3.11. С другой стороны, мы имеем: $c_2(5) \geq \frac{1}{2}h(5) = \frac{1}{2}\gamma(2)$, но точное значение $c_2(5)$ неизвестно. Однако, величина $c_2(n)$ известна в случае $n = 6$.

Лемма 9.3.13. $c_2(6) = \frac{1}{2}\gamma(2)$.

Доказательство. Во-первых, $c_2(6) \geq \frac{1}{2}h(6) = \frac{1}{2}\gamma(2)$. Равенство получается при рассмотрении метрики d графа $K_{3,3}$. Действительно, если $\alpha > \frac{1}{2}\gamma(2)$, то $d^{2\alpha}$ не 6-гонально и, следовательно, не отрицательного типа. Тогда d^α не ℓ_2 -вложимо. ■

В таблице 9.3.14 мы суммировали информацию, известную о параметрах $g(n), h(n), c_1(n), c_2(n)$ для малых значений n , $n \leq 6$. Заметим, что $\gamma(2) = 0,5849\dots$, $\frac{\gamma(2)}{2} = 0,2924\dots$

n	3	4	5	6
$c_2(n)$	1	1/2	?	$\gamma(2)/2$
$c_1(n)$	1	1	$\gamma(2)$	$\gamma(2)$
$h(n)$	1	1	$\gamma(2)$	$\gamma(2)$
$g(n)$	1	1	$\gamma(2)$	$\gamma(2)$

Табл. 9.3.14.

В заключение упомянем следующие верхние оценки из Деза и Маехара [1990] для $c_2(n)$, полученные при рассмотрении полного двудольного графа $K_{m,n}$ для соответствующих m, n .

$$c_2(2m) \leq \frac{1}{2}\gamma(m-1), \quad c_2(2m+1) \leq \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{2m(m+1)}{2m+1} - 1\right).$$

Деза и Маехара [1990] предположили, что в этих неравенствах имеет место равенство. Это предположение подтверждается для $c_2(n)$ при $n = 4, 6$. (Более полную информацию о метрических преобразованиях графов можно найти в статье Маехара [1986].)

Глава 10.

Липшицевы вложения

Пусть (X, d) — конечное полуметрическое пространство на $n := |X|$ точках. В общем случае, (X, d) может быть *изометрически* не вложимо в некоторое ℓ_1 -пространство. Однако (X, d) всегда допускает вложение в некоторое ℓ_1 -пространство, если расстояния сохраняются с точностью до некоторого множителя, величина которого имеет порядок $\log n$. Этот результат получен Бургеном [1985]. Мы представляем этот результат вместе с интересным приложением для аппроксимации многопродуктовых потоков, полученным Линьялом, Лондоном и Рабиновичем [1994]. Мы также рассмотрим обобщение условия отрицательного типа для липшицевых ℓ_2 -вложений.

10.1. Вложения с искажениями

Определение 10.1.1. Пусть (X, d) и (X', d') — два пространства расстояний, и пусть $C \geq 1$. Отображение $\varphi: X \mapsto X'$ называется липшицевым вложением (X, d) в (X', d') с искажением C , если

$$\frac{1}{C}d(x, y) \leq d'(\varphi(x), \varphi(y)) \leq d(x, y)$$

имеет место для всех $x, y \in X$.

Следовательно, липшицево вложение с искажением $C = 1$ является изометрическим вложением. Бурген [1985] показал, что каждое полуметрическое пространство на n точках допускает липшицево вложение в ℓ_1 с искажением¹⁾ $O(\log(n))$.

¹⁾ Липшицево вложение, описанное в теореме 10.1.2, имеет искажение $c_0 \log_2 n$, где $c_0 < 92$. Гарг [1995b] получил аналогичный результат с лучшей константой в искажении. Именно, пусть $H(n) := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ и, для $x \in X$, пусть u'_x есть вектор, индексированный всеми собственными подмножествами A множества X с компонентами $u'_x := \frac{d(x, A)}{H(n)|A| \binom{n}{|A|}}$. Тогда $\|u'_x - u'_y\|_1 \leq d(x, y) \leq 2H(n)\|u'_x - u'_y\|_1$ для всех $x, y \in X$.

Теорема 10.1.2. Пусть (X, d) — конечное полуметрическое пространство с $|X| = n$. Тогда существуют векторы $u_x \in \mathbb{R}^N$ ($x \in X$), такие что:

$$\|u_x - u_y\|_1 \leq d(x, y) \leq c_0 \log_2(n) \|u_x - u_y\|_1$$

для всех $x, y \in X$. Здесь $N = \sum_{p=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \binom{n}{2^p} (< 2^n)$ и $C_0 > 0$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Для каждого целого s ($1 \leq s \leq n$) пусть $\mathcal{P}_s$ обозначает семейство подмножеств $A \subseteq X$ с $|A| = s$. Пусть $\mathcal{P} := \bigcup_{p=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \mathcal{P}_{2^p}$; таким образом $|\mathcal{P}| = N$. Для каждого $x \in X$ определим вектор $u_x \in \mathbb{R}^N$, индексированный множествами $A \in \mathcal{P}$ и определенный как

$$u_x(A) := \frac{1}{\lfloor \log_2 n \rfloor \binom{n}{|A|}} d(x, A), \quad \text{для всех } A \in \mathcal{P}.$$

Напомним, что $d(x, A) := \min_{y \in A} d(x, y)$. Покажем, что векторы u_x ($x \in X$) удовлетворяют условиям теоремы 10.1.2. Сначала проверим, что

$$d(x, y) \geq \|u_x - u_y\|_1 \quad \text{для всех } x, y \in X.$$

Действительно, используя тот факт, что $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, мы получим

$$\begin{aligned} \|u_x - u_y\|_1 &= \sum_{A \in \mathcal{P}} |u_x(A) - u_y(A)| = \frac{1}{\lfloor \log_2 n \rfloor} \sum_{A \in \mathcal{P}} \frac{|d(x, A) - d(y, A)|}{\binom{n}{|A|}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\lfloor \log_2 n \rfloor} \sum_{A \in \mathcal{P}} \frac{d(x, y)}{\binom{n}{|A|}} \leq d(x, y). \end{aligned}$$

Пусть $x, y \in X$ фиксированы. Покажем теперь, что

$$(10.1.3) \quad d(x, y) \leq c_0 \lfloor \log_2 n \rfloor \|u_x - u_y\|_1$$

для некоторой константы c_0 . Для $z_0 \in X$ и $\rho > 0$ пусть $B(z_0, \rho) := \{z \in X \mid d(z_0, z) < \rho\}$ обозначает открытый шар с центром z_0 и радиусом ρ . Определим последовательность радиусов ρ_t следующим образом: $\rho_0 = 0$ и для $t \geq 1$ пусть ρ_t обозначает наименьший скаляр ρ , для которого $|B(x, \rho)| \geq 2^t$ и $|B(y, \rho)| \geq 2^t$. Будем рассматривать ρ_t для тех t , пока $\rho_t < \frac{1}{2}d(x, y)$. Пусть t^* обозначает наибольший такой индекс. Пусть $\rho_{t^*+1} := \frac{1}{2}d(x, y)$. Заметим, что для $t = 1, 2, \dots, t^*, t^* + 1$ шары $B(x, \rho_t)$ и $B(y, \rho_t)$ не пересекаются.

Пусть $t \in \{1, \dots, t^* + 1\}$, и пусть ρ такое, что $\rho_{t-1} < \rho < \rho_t$. Заметим, что

$$|d(x, A) - d(y, A)| \geq \rho - \rho_{t-1}$$

имеет место для любого подмножества $A \subseteq X$, такого что $A \cap B(x, \rho) = \emptyset$ и $A \cap B(y, \rho_{t-1}) \neq \emptyset$. Следовательно, для любого целого s ($1 \leq s \leq n$),

$$\begin{aligned} (10.1.4) \quad & \frac{1}{|\mathcal{P}_s|} \sum_{A \in \mathcal{P}_s} |d(x, A) - d(y, A)| \geq \\ & \geq (\rho - \rho_{t-1}) \frac{|\{A \in \mathcal{P}_s | A \cap B(x, \rho) = \emptyset, A \cap B(y, \rho_{t-1}) \neq \emptyset\}|}{|\mathcal{P}_s|} = \\ & = (\rho - \rho_{t-1}) \mu_t, \end{aligned}$$

если обозначить

$$\mu_t := \frac{|\{A \in \mathcal{P}_s | A \cap B(x, \rho) = \emptyset, A \cap B(y, \rho_{t-1}) \neq \emptyset\}|}{|\mathcal{P}_s|}.$$

Ключевым аргументом является теперь то, что если мы выберем s таким образом, чтобы $s \approx \frac{n}{10 \cdot 2^t}$, то величина μ_t будет ограничена снизу абсолютной постоянной μ_0 (не зависящей от t , x или y). Более точно, возьмем $s = s_t = 2^p$, где p — наименьшее целое, такое что $\frac{n}{10 \cdot 2^t} \leq 2^p$, т. е. $p = \left\lceil \log_2 \left(\frac{n}{10 \cdot 2^t} \right) \right\rceil$. Предположим, что отношение $\mu_t \geq \mu_0$ имеет место для всех t , для некоторой константы μ_0 . Покажем, как в этом случае завершить доказательство (10.1.3).

Так как величины s_t , соответствующие $t = 1, \dots, t^* + 1$, различны, то, применяя (10.1.4) с $s = s_t$, мы получим

$$\frac{1}{|\mathcal{P}_{s_t}|} \sum_{A \in \mathcal{P}_{s_t}} |d(x, A) - d(y, A)| \geq (\rho - \rho_{t-1}) \mu_0.$$

При $\rho \rightarrow \rho_t$ то же самое соотношение верно и для $\rho = \rho_t$, т. е.

$$\frac{1}{|\mathcal{P}_{s_t}|} \sum_{A \in \mathcal{P}_{s_t}} |d(x, A) - d(y, A)| \geq (\rho_t - \rho_{t-1}) \mu_0.$$

Суммируя полученное соотношение по всем $t = 1, \dots, t^* + 1$, мы получим

$$[\log_2 n] \|u_x - u_y\|_1 \geq \sum_{1 \leq t \leq t^* + 1} (\rho_t - \rho_{t-1}) \mu_0 = \rho_{t^* + 1} \mu_0 = \frac{\mu_0}{2} d(x, y).$$

Это показывает, что (10.1.3) имеет место с $c_0 := \frac{2}{\mu_0}$. (Заметим, что $c_0 < 91.26$.)

Вернемся к вычислению величины μ_t . Напомним, что $s = s_t = 2^p$, где $p = \left\lceil \log_2 \left(\frac{n}{10 \cdot 2^t} \right) \right\rceil$; следовательно, $\frac{n}{10 \cdot 2^t} \leq s \leq \frac{2n}{10 \cdot 2^t}$. Так как $\rho_{t-1} < \rho < \rho_t$, мы имеем $|B(x, \rho)| < 2^t$ или $|B(y, \rho)| < 2^t$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $|B(x, \rho)| < 2^t$. Пусть $\beta_x := |B(x, \rho)|$ и $\beta_y := |B(y, \rho_{t-1})|$; тогда $\beta_x < 2^t$ и $\beta_y \geq 2^{t-1}$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} \mu_t &= \frac{\binom{n-\beta_x}{s} - \binom{n-\beta_x-\beta_y}{s}}{\binom{n}{s}} = \prod_{i=0}^{\beta_x-1} \left(1 - \frac{s}{n-i} \right) - \prod_{i=0}^{\beta_x+\beta_y-1} \left(1 - \frac{s}{n-i} \right) = \\ &= \prod_{i=0}^{\beta_x-1} \left(1 - \frac{s}{n-i} \right) \left(1 - \prod_{i=\beta_x}^{\beta_x+\beta_y-1} \left(1 - \frac{s}{n-i} \right) \right). \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\prod_{i=0}^{\beta_x-1} \left(1 - \frac{s}{n-i} \right) \geq e^{-\frac{8}{10}} \quad \text{и} \quad \prod_{i=\beta_x}^{\beta_x+\beta_y-1} \left(1 - \frac{s}{n-i} \right) \leq e^{-\frac{1}{20}},$$

откуда $\mu_t \geq e^{-\frac{8}{10}} (1 - e^{-\frac{1}{10}}) := \mu_0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{\beta_x-1} \left(1 - \frac{s}{n-i} \right) &\geq \left(1 - \frac{s}{n-2^t+1} \right)^{\beta_x} = \\ &= \exp \left(\beta_x \log \left(1 - \frac{s}{n-2^t+1} \right) \right) \geq \exp \left(-\beta_x \frac{2s}{n-2^t+1} \right) \end{aligned}$$

(мы использовали то, что $\log(1-u) \geq -2u$ для $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$). Теперь

последняя величина больше или равна $\exp \left(-\frac{8}{10} \right)$, так как $s < \frac{2n}{10 \cdot 2^t}$,

$\beta_x < 2^t$, и $\frac{n}{n-2^t+1} \leq 2$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \prod_{i=\beta_x}^{\beta_x+\beta_y-1} \left(1 - \frac{s}{n-i} \right) &\leq \left(1 - \frac{s}{n-\beta_x} \right)^{\beta_y} = \\ &= \exp \left(\beta_y \log \left(1 - \frac{s}{n-\beta_x} \right) \right) \leq \exp \left(-\beta_y \frac{s}{n-\beta_x} \right) \end{aligned}$$

(мы использовали то, что $\log(1-u) \leq -u$ для $0 \leq u \leq 1$). Последняя

величина меньше или равна $\exp \left(-\frac{1}{20} \right)$, так как $\beta_y \geq 2^{t-1}$, $s \geq \frac{n}{10 \cdot 2^t}$ и

$$\frac{n}{n-\beta_x} \geq 1. \quad \blacksquare$$

Как замечено в Линьял, Лондон и Рабинович [1994], теорема 10.1.2 легко переносится на случай ℓ_p -пространств для $p \geq 1$.

Теорема 10.1.5. Пусть $1 \leq p < \infty$. Пусть (X, d) — полуметрическое пространство с $|X| = n$. Существуют векторы $v_x \in \mathbb{R}^N$ ($x \in X$), такие что

$$\|v_x - v_y\|_p \leq d(x, y) \leq c_0 \log_2 \|v_x - v_y\|_p$$

для всех $x, y \in X$. Здесь $N = \sum_{p=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \binom{n}{2^p} (< 2^n)$, и $c_0 > 0$ — постоянная.

Доказательство. Векторы v_x могут быть построены с помощью небольшой модификации векторов u_x из теоремы 10.1.2. Напомним, что

$$u_x(A) = \lambda_A d(x, A),$$

где $\lambda_A := \frac{1}{\lfloor \log_2 n \rfloor \binom{n}{|A|}}$ для $A \in \mathcal{P}$. Определим $v_x \in \mathbb{R}^N$, положив

$$v_x := (\lambda_A)^{\frac{1}{p}} d(x, A) \quad \text{для } A \in \mathcal{P}.$$

Заметим, что $\sum_{A \in \mathcal{P}} \lambda_A = 1$. Из этого следует, что $\|v_x - v_y\|_p \leq d(x, y)$. Выпуклость функции $x \mapsto x^p$ ($x \geq 0$) позволяет записать, что

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \lambda_A |d(x, A) - d(y, A)| \leq \left(\sum_{A \in \mathcal{P}} \lambda_A |d(x, A) - d(y, A)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда следует, что $\|u_x - u_y\|_1 \leq \|v_x - v_y\|_p$. Таким образом, $d(x, y) \leq c_0 \log_2 n \|v_x - v_y\|_p$. ■

Мы только что видели, что для каждого $p \geq 1$ каждая полуметрика на n точках может быть вложима с искажением $O(\log n)$ в l_p^N , где $N < 2^n$. На самом деле, Линьял, Лондон и Рабинович [1994] показали, что вышеприведенные доказательства можно изменить таким образом, чтобы получить вложение в $l_p^{O((\log n)^2)}$ с искажением $O(\log n)$. Следовательно, вложения имеют место в пространство размерности $O((\log n)^2)$ вместо пространства размерности $N = \sum_p \binom{n}{2^p}$ (экспоненциальным образом зависящей от n), из теорем 10.1.2 и 10.1.5. Для этого вместо векторов u_x, v_x ($x \in X$) (построенных в этих теоремах), которые индексированны всеми подмножествами $A \subseteq X$, размер которых есть степень двойки, можно рассмотреть их проекции на $O((\log n)^2)$ -мерное подпространство. Именно, для каждой мощности $s \leq |X| = n$, являющейся степенью 2, можно случайным образом выбрать $O(\log n)$ подмножеств $A \subseteq X$ мощности s ; тогда индексирование векторов u_x, v_x можно вести только по этим $O((\log n)^2)$ подмножествам X . Кроме

того, если $1 \leq p \leq 2$, то каждая полуметрика на n точках может быть вложена в $l_p^{O(\log n)}$ с искажением $O(\log n)$; это показано в Линьял, Лондон и Рабинович [1994] при использовании ранних результатов Джонсона и Линденштрауса [1984] и Бургена [1985]. Такие вложения могут быть построены вероятностным полиномиальным алгоритмом. Для полуметрики d на n точках пусть $C(d)$ обозначает наименьшее искажение, с которым d можно вложить в некоторое ℓ_2 -пространство. Ниже мы увидим (см. предложение 10.2.1 и дальнейшие замечания), что для каждого $\varepsilon > 0$ можно в полиномиальное время найти вложение d в l_2^n с искажением $C(d) + \varepsilon$.

Следующий результат является вариантом теоремы 10.1.2, доказанным Линьялом, Лондоном и Рабиновичем [1994], который мы позднее используем в этом разделе для аппроксимации многопродуктовых потоков.

Теорема 10.1.6. *Пусть (X, d) — конечное полуметрическое пространство и пусть $Y \subseteq X$ с $k := |Y|$. Существуют векторы $w_x \in \mathbb{R}^K$ ($x \in X$), удовлетворяющие условиям*

$$\begin{aligned} \|w_x - w_y\|_1 &\leq d(x, y) \quad \text{для всех } x, y \in X, \\ d(x, y) &\leq c_0 \log_2(k) \|w_x - w_y\|_1 \quad \text{для всех } x, y \in Y. \end{aligned}$$

Здесь $K = \sum_{p=1}^{\lceil \log_2 k \rceil} \binom{k}{2^p} (< 2^k)$ и $c_0 > 0$ — некоторая константа.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 10.1.2, но теперь мы построим липшицево ℓ_1 -вложение, используя только подмножества множества Y . Именно, определим $w_x \in \mathbb{R}^K$, положив

$$w_x(A) := \frac{1}{\lceil \log_2 k \rceil \binom{k}{|A|}} d(x, A) \quad \text{для } A \subseteq Y, |A| = 2^p, p \leq \log_2 k.$$

Тогда $\|w_x - w_y\|_1 \leq d(x, y)$ имеет место для всех $x, y \in X$. Кроме того, по доказательству теоремы 10.1.2, отношение: $d(x, y) \leq c_0 \log_2 k \|w_x - w_y\|_1$ имеет место для всех $x, y \in Y$. ■

На самом деле, для нахождения хороших аппроксимаций многопродуктовых потоков в полиномиальное время нам нужно следующее усиление теоремы 10.1.6, доказательство которого можно найти в Линьял, Лондон и Рабинович [1994].

Теорема 10.1.7. *Пусть (X, d) — конечное полуметрическое пространство и пусть $Y \subseteq X$ с $k := |Y|$. Существуют векторы*

$w_x \in \mathbb{R}^{O(n^2)}$ ($x \in X$), удовлетворяющие условиям

$$\|w_x - w_y\|_1 \leq d(x, y) \quad \text{для всех } x, y \in X,$$

$$d(x, y) \leq c_0 \log_2(k) \|w_x - w_y\|_1 \quad \text{для всех } x, y \in Y$$

(где $c_0 > 0$ — постоянная). Кроме того, векторы w_x ($x \in X$) можно найти в полиномиальное время. $\blacksquare$

10.2. Условия отрицательного типа для липшицевых вложений

Вспомним (теорема 6.2.2), что изометрическая ℓ_2 -вложимость может быть характеризована в терминах неравенств отрицательного типа. На самом деле, как было замечено в Линьял, Лондон и Рабинович [1994], эта характеристика может быть расширена до липшицевых ℓ_2 -вложений.

Предложение 10.2.1. Пусть $C \geq 1$ и пусть (X, d) — конечное полуметрическое пространство с $X = \{0, 1, \dots, n\}$. Следующие утверждения эквивалентны.

(i) $(X, \sqrt{d})$ имеет ℓ_2 -вложение с искажением C , т. е. существуют $u_i \in \mathbb{R}^N$ ($i \in X$) такие, что

$$(10.2.2) \quad \frac{1}{C^2} d_{ij} \leq (\|u_i - u_j\|_2)^2 \leq d_{ij} \quad \text{для } i, j \in X.$$

(ii) Существует положительно полуопределенная $n \times n$ матрица $A = (a_{ij})$, удовлетворяющая условию:

$$(10.2.3) \quad \begin{cases} \frac{1}{C^2} d_{ij} \leq a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij} \leq d_{ij} & \text{для } 1 \leq i \neq j \leq n, \\ \frac{1}{C^2} d_{0i} \leq a_{ii} \leq d_{0i} & \text{для } 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

(iii) Для каждой положительно полуопределенной матрицы $B = (b_{ij})_{i,j \in X}$, такой что $Be = 0$ (e обозначает вектор, состоящий из одних единиц), d удовлетворяет неравенству

$$(10.2.4) \quad \frac{1}{C^2} \sum_{i,j \in X | b_{ij} > 0} b_{ij} d_{ij} + \sum_{i,j \in X | b_{ij} < 0} b_{ij} d_{ij} \leq 0.$$

Перед доказательством сделаем несколько наблюдений. Во-первых, заметим, что при $b_{ij} = b_i b_j$ и $C = 1$ неравенство (10.2.4) есть ни что иное, как обычное условие отрицательного типа. Следовательно,

(10.2.4) является обобщением условия отрицательного типа для липшицевых вложений. Предложение 10.2.1 имеет несколько алгоритмических следствий. В частности, в полиномиальное время (с произвольной точностью) можно вычислить наименьшее искажение C^* , с которым $(X, \sqrt{d})$ можно вложить в ℓ_2 -пространство. Действительно, $C^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}$, где

$$\lambda^* = \max_{\substack{\lambda d_{ij} \leq a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij} \leq d_{ij} \quad (1 \leq i \neq j \leq n), \\ \lambda d_{0i} \leq a_{ii} \leq d_{0i} \quad (i=1, \dots, n), \\ A \succeq 0, \quad \lambda \geq 0}} \lambda$$

Эта задача оптимизации может быть решена при использовании, например, алгоритма эллипсоида (см. Грётшель, Ловас и Скрайвер [1988]). Из результатов, упомянутых ранее, следует, что $C^* = O(\log n)$.

Доказательство предложения 10.2.1. Положим $V_n = X \setminus \{0\} = \{1, \dots, n\}$.

(i) $\implies$ (ii). Без ограничения общности мы можем предположить, что $u_0 = 0$. Положим $a_{ij} := u_i^T u_j$ для всех $i, j \in V_n$. Тогда матрица (a_{ij}) удовлетворяет (ii).

(ii) $\implies$ (i). Так как A положительно полуопределена, она является матрицей Грама некоторых векторов $u_1, \dots, u_n$. Тогда векторы $u_0 := 0, u_1, \dots, u_n$ удовлетворяют (10.2.2).

(ii) $\implies$ (iii). Пусть A — матрица, удовлетворяющая (ii). Построим расстояние D на X , положив $D_{0i} := a_{ii}$ для $i \in V_n$ и $D_{ij} := a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij}$ для $i \neq j \in V_n$. Тогда D — расстояние отрицательного типа, так как A положительно полуопределена. Следовательно, для данного $b \in \mathbb{Z}^X$ с $\sum_{i \in X} b_i = 0$ мы имеем: $\sum_{i,j \in X} b_i b_j D_{ij} \leq 0$. По предположению (ii), $b_i b_j D_{ij} \geq \frac{1}{C^2} b_i b_j d_{ij}$, если $b_i b_j > 0$, и $b_i b_j D_{ij} \geq b_i b_j d_{ij}$, если $b_i b_j < 0$. Это показывает, что (10.2.4) имеет место для $b_{0j} = b_{ij}^1$.

(iii) $\implies$ (ii). Предположим, что имеет место (iii). Предположим, что (ii) не выполняется. Тогда два конуса PSD_n (конус положительно полуопределенных $n \times n$ матриц) и $K := \{A = (a_{ij}) \mid A \text{ удовлетворяет (10.2.3)}\}$ не пересекаются. Следовательно, существует гиперплоскость, разделяющая PSD_n и K . Другим словами, существует симметрическая матрица Z и скаляр α , такие что $\langle Z, A \rangle > \alpha$ для всех $A \in \text{PSD}_n$ и $\langle A, Z \rangle \leq \alpha$ для всех $A \in K$, где

$$\langle Z, A \rangle := \sum_{1 \leq i, j \leq n} z_{ij} a_{ij}.$$

¹⁾ Так как положительно полуопределенная матрица представима в виде $B = \sum_k B^k$, где $B_{ij}^k = b_i^k b_j^k$, то, складывая (10.2.4) для $b_{0j} = b_i^k b_j^k$ по всем k , получим это выражение для любых B . — *Прим. ред.*

Следовательно, $\alpha < 0$, откуда следует, что Z положительно полуопределена. Кроме того, так как неравенство $\langle Z, a \rangle \leq \alpha$ допустимо для конуса K , оно может быть выражено как неотрицательная линейная комбинация неравенств, определяющих K . Следовательно, существуют две симметрические матрицы (λ_{ij}) и (μ_{ij}) с неотрицательными элементами, такие что

$$\langle Z, A \rangle = \sum_{i \neq j \in V_n} (\lambda_{ij} - \mu_{ij})(a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij}) + \sum_{i \in V_n} (\lambda_{ii} - \mu_{ii})a_{ii}$$

для всех A , и

$$(10.2.6) \quad \sum_{i \neq j \in V_n} \left(\lambda_{ij} d_{ij} - \mu_{ij} \frac{d_{ij}}{C^2} \right) + \sum_{i \in V_n} \left(\lambda_{ii} d_{0i} - \mu_{ii} \frac{d_{0i}}{C^2} \right) \leq \alpha.$$

Определим симметрическую матрицу B , индексированную множеством X , положив

$$b_{00} := \sum_{j \in V_n} (\lambda_{jj} - \mu_{jj}), \quad b_{ii} := \sum_{j \in V_n} (\lambda_{ij} - \mu_{ij}) \quad \text{для } i \in V_n, \\ b_{0i} := -\lambda_{ii} + \mu_{ii} \quad \text{для } i \in V_n, \quad b_{ij} := -\lambda_{ij} + \mu_{ij} \quad \text{для } i \neq j \in V_n.$$

По построению, $Be = 0$ и B положительно полуопределена (так как $\sum_{i,j \in V_n} b_{ij} a_{ij} = \langle Z, A \rangle \geq 0$ для всех $A \in \text{PSD}_n$). Заметим теперь, что, так как $C \geq 1$, то

$$\min \left(b_{ij}, \frac{b_{ij}}{C^2} \right) \geq \frac{\mu_{ij}}{C^2} - \lambda_{ij} \quad (i \neq j \in V_n), \quad \min \left(b_{0i}, \frac{b_{0i}}{C^2} \right) \geq \frac{\mu_{ii}}{C^2} - \lambda_{ii} \quad (i \in V_n).$$

Эти соотношения вместе с (10.2.6) дают:

$$\sum_{i,j \in X | b_{ij} > 0} b_{ij} \frac{d_{ij}}{C^2} + \sum_{i,j \in X | b_{ij} < 0} b_{ij} d_{ij} \geq -\alpha > 0,$$

что противоречит (10.2.4). ■

10.3. Приложение к аппроксимации многопродуктовых потоков

Здесь мы представляем приложение приведенных выше результатов о липшицевых ℓ_1 -вложениях с искажением к аппроксимации многопродуктовых потоков.

Начнем с повторения некоторых определений. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и пусть $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$ есть k различных пар вершин

из V , называемых *парами* полюсами (или продуктовыми *парами*, или *терминалами*). Для каждого ребра $e \in E$ имеется число $C_e \in \mathbb{R}_+$, называемое *пропускной способностью* ребра e , и для каждой пары полюсов (s_h, t_h) имеется число $D_h \geq 0$, называемое ее *требованием*. Для $h = 1, \dots, k$ пусть $\mathcal{P}_h$ обозначает множество путей, связывающих полюса s_h и t_h в G ; положим

$$\mathcal{P} := \bigcup_{1 \leq h \leq k} \mathcal{P}_h.$$

Многопродуктовым потоком называется функция $f: \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}_+$. Многопродуктовый поток f называется *допустимым* для задачи (G, C, D) , если он удовлетворяет следующим ограничениям, определяемым пропускной способностью и требованиями:

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathcal{P} | e \in P} f_P &\leq C_e \quad \text{для всех } e \in E, \\ \sum_{P \in \mathcal{P}_h} f_P &\geq D_h \quad \text{для } h = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Классической задачей в теории сетей является нахождение допустимого многопродуктового потока (возможно, удовлетворяющего некоторым дополнительным ограничениям). Мы рассмотрим здесь следующий вариант задачи, известный как *задача о допустимости потока*:

Найти наибольший скаляр λ^ , для которого существует допустимый многопродуктовый поток для задачи $(G, C, \lambda^* D)$.*

Таким образом, в этой задаче требуется найти наибольшую из возможных долю λD_h требования для каждой пары полюсов (s_h, t_h) , при ограничениях на пропускную способность.

Назовем максимальное из таких λ^* *тах-поток*. тах-поток можно найти при решении следующей задачи линейного программирования:

$$(10.3.1) \quad \lambda^* = \max_{\substack{\sum_{P \in \mathcal{P} | e \in P} f_P \leq C_e \quad (e \in E) \\ \sum_{P \in \mathcal{P}_h} f_P \geq \lambda D_h \quad (h = 1, \dots, k) \\ f_P \geq 0 \quad (P \in \mathcal{P})}} \lambda.$$

Верхняя граница для тах-потока λ^* может быть легко сформулирована в терминах разрезов. Напомним, что для данного подмножества $S \subseteq V$ разрез $\delta_G(S)$ в G , определенный S , состоит из ребер $e \in E$, имеющих один конец в S , а другой в $V \setminus S$. Тогда, величина

$$\text{cap}(S) := \sum_{e \in \delta_G(S)} C_e$$

обозначает пропускную способность разреза $\delta_G(S)$. Более того, пусть

$$\text{dem}(S) := \sum_{h \in H_s} D_h$$

обозначает его требование, где H_s состоит из индексов h , для которых пара полюсов (s_h, t_h) разделена разбиением $(S, V \setminus S)$ (т. е. $s_h \in S$ и $t_h \in V \setminus S$, или наоборот).

Лемма 10.3.2. *Мы имеем: $\lambda^* \leq \min_{S \subseteq V} \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)}$.*

Доказательство. Используем определение λ^* из (10.3.1). Пусть S — подмножество множества V . Тогда

$$\begin{aligned} \text{cap}(S) &= \sum_{e \in \delta_G(S)} C_e \geq \sum_{e \in \delta_G(S)} \sum_{P \in \mathcal{P} | e \in P} f_P = \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{e \in \delta_G(S) \cap P} f_P = \\ &= \sum_{P \in \mathcal{P}} |\delta_G(S) \cap P| f_P = \sum_{1 \leq h \leq k} \sum_{P \in \mathcal{P}_h} |\delta_G(S) \cap P| f_P \geq \\ &\geq \sum_{h \in H_s} \sum_{P \in \mathcal{P}_h} f_P \geq \sum_{h \in H_s} \lambda^* D_h = \lambda^* \text{dem}(S). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Величину $\min_{S \subseteq V} \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)}$ назовем *min-разрезом*. Неравенство из леммы 10.3.2 говорит о том, что

$$\text{мах-поток} \leq \text{min-разрез}.$$

В общем случае неравенство строгое. Однако в некоторых специальных случаях мы получаем равенство. В частности, мы будем иметь равенство для случаев $k = 1, 2$ одной или двух пар полюсов. В случае $k = 1$ это следует из хорошо известной теоремы Форда и Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе (Форд и Фалкерсон [1966]). В случае $k = 2$ это теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе для двух потоков, доказанная Ху [1963]. Эти два результата можно получить также, используя некоторые свойства ℓ_1 -вложений; см. следствие 10.3.7 ниже.

Для произвольного числа k пар полюсов мах-поток в общем случае меньше, чем min-разрез. Однако, разница между мах-потоком и min-разрезом не может быть слишком большой. Первый результат в этом направлении был получен Лейтоном и Рао [1988], которые доказали, что отношение

$$\rho := \frac{\min_{S \subseteq V} \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)}}{\lambda^*}$$

есть $O(\log n)$ в случае, когда все требования равны единице и каждая пара вершин является парой полюсов, т. е. $k = \binom{n}{2}$. Несколько улучшений этого результата было получено позднее, в частности, Клейном, Агравалем, Рави и Рао [1990], Плоткиным и Тардошем [1993], Гаргом, Вазирами и Яннакакисом [1993]. Лучший результат принадлежит Линьялу, Лондону и Рабиновичу [1994], которые доказали, что $\rho = O(\log k)$ для произвольных требований и пропускных способностей и произвольного числа k пар полюсов; см. теорему 10.3.3¹⁾ ниже. Этот результат основан на использовании теорем 10.1.2, 10.1.6 и 10.1.7.

Теорема 10.3.3. *Справедливо неравенство: $\min_{S \subseteq V} \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)} \leq (c_0 \log k) \lambda^*$, где $c_0 > 0$ — некоторая постоянная. Кроме того, подмножество S , для которого $\frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)} \leq (c_0 \log k) \lambda^*$, может быть найдено в полиномиальное время.*

Доказательство. Напомним, что λ^* — величина оптимума задачи линейного программирования (10.3.1). Применяя теорему двойственности линейного программирования, получаем:

$$(10.3.4) \quad \lambda^* = \min_{\substack{\sum_{e \in P} z_e \geq y_h \quad (P \in \mathcal{P}_h, \quad h=1, \dots, k) \\ \sum_{1 \leq h \leq k} D_h y_h \geq 1 \\ y_h \geq 0 \quad (h=1, \dots, k) \\ z_e \geq 0 \quad (e \in E)}} \sum_{e \in E} C_e z_e$$

Пусть (y, z) — оптимальное решение задачи (10.3.4). Мы можем предположить, что $z_e \leq \sum_{f \in P} z_f$ для каждого ребра $e = ij$ из G и каждого пути P из i в j в G . (Если нет, заменим z через z' , где для ребра $e = ij$ из G $z'_e := \min(z_e, \sum_{f \in P} z_f)$ для пути P из i в j в G .) Пусть d_z обозначает метрику кратчайшего пути взвешенного графа (G, z) (где для $i, j \in V$ расстояние $d_z(i, j)$ определено как наименьшая из величин $\sum_{e \in P} z_e$, взятых по всем путям P из i в j в G). Тогда

$$\lambda^* = \sum_{e \in E} C_e z_e \geq \frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} d_z(i, j)}{\sum_{h=1}^k D_h d_z(s_h, t_h)},$$

так как $\sum_{h=1}^k D_h d_z(s_h, t_h) \geq \sum_{h=1}^k D_h y_h \geq 1$. С другой стороны, для данной полуметрики d на V , положим $z_e := \frac{d(i, j)}{\sum_{h=1}^k D_h d(s_h, t_h)}$ для ребра

¹⁾ Случайная версия теоремы 10.3.3 была рассмотрена в более раннем варианте работы Линьяла, Лондона и Рабиновича [1994]. Эта версия была независимо получена Ауманом и Рабани [1997]. Гарг [1995a] также получил теорему 10.3.3, переформулировав случайную версию Линьяла, Лондона и Рабиновича [1994].

$e = ij$ из G и $y_h := \frac{d(s_h, t_h)}{\sum_{h=1}^k D_h d(s_h, t_h)}$ для $h = 1, \dots, k$. Тогда пара (y, z) является допустимой для задачи (10.3.4), откуда следует, что

$$\frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} d(i, j)}{\sum_{h=1}^k D_h d(s_h, t_h)} = \sum_{e \in E} C_e z_e \geq \lambda^*.$$

Таким образом, λ^* можно записать как

$$(10.3.5) \quad \lambda^* = \min_{d \text{ полуметрика на } V} \frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} d(i, j)}{\sum_{h=1}^k D_h d(s_h, t_h)}.$$

Пусть d — полуметрика на V . Если d является разрезной полуметрикой, то

$$\frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} d(i, j)}{\sum_{h=1}^k D_h d(s_h, t_h)} = \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)}.$$

В более общем случае, если d изометрически ℓ_1 -вложимо, то $d = \sum_S \lambda_S \delta(S)$ для некоторых $\lambda_S \geq 0$, откуда

$$\frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} d(i, j)}{\sum_{h=1}^k D_h d(s_h, t_h)} = \frac{\sum_S \lambda_S \text{cap}(S)}{\sum_S \lambda_S \text{dem}(S)} \geq \min_S \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)}.$$

В общем случае d не изометрически ℓ_1 -вложимо. Однако, по теореме 10.1.6, существует константа c_0 и векторы $w_i \in R^K$ ($i \in V$), такие что

$$(10.3.6) \quad \begin{cases} \|w_i - w_j\|_1 \leq d(i, j) & \text{для всех } i, j \in V, \\ d(s_h, t_h) \leq (c_0 \log k) \|w_{s_h} - w_{t_h}\|_1 & \text{для всех } h = 1, \dots, k. \end{cases}$$

(Мы применяем теорему 10.1.6 с $X = V$ и $Y = \{s_h, t_h \mid h = 1, \dots, k\}$.) Следовательно,

$$\frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} d(i, j)}{\sum_{h=1}^k D_h d(s_h, t_h)} \geq \frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} \|w_i - w_j\|_1}{(c_0 \log k) \sum_{h=1}^K D_h \|w_{s_h} - w_{t_h}\|_1} \geq \frac{1}{(c_0 \log k)} \min_S \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)}.$$

(используя приведенный выше аргумент). Это показывает, что $\lambda^* \geq \frac{1}{c_0 \log k} \min_S \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)}$.

Подмножество S , для которого $\frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)} \leq (c_0 \log k) \lambda^*$, может быть построено следующим образом. С учетом (10.3.5), максимальный поток

λ^* может быть найден при решении задачи линейного программирования:

$$\lambda^* = \min_{\substack{\sum_{h=1}^k D_h d(s_h, t_h) = 1 \\ d \text{ полуметрика на } V}} \sum_{ij \in E} C_{ij} d(i, j),$$

которая очевидным образом может быть решена в полиномиальное время. Пусть d — оптимальное решение. По теореме 10.1.7, мы можем найти векторы $w_i = (w_i(r))_{r=1}^K \in \mathbb{R}^K$ ($i \in V$), удовлетворяющие (10.3.6), с $K = O(n^2)$. Определим координатный индекс $r \in K$, для которого величина

$$\frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} |w_i(r) - w_j(r)|}{\sum_{h=1}^k D_h |w_{s_h}(r) - w_{t_h}(r)|}$$

минимальна. Полуметрика $d^{(r)}$ на V , определенная как

$$d^{(r)}(i, j) := |w_i(r) - w_j(r)| \quad \text{для } i, j \in V,$$

ℓ_1 -вложима по построению. Следовательно, $d^{(r)} = \sum_{A \in \mathcal{A}} \lambda_A \delta(A)$, где $\lambda_A > 0$ для $A \in \mathcal{A}$. Такое разложение может быть легко найдено; напомним, например, предложение 4.2.2 и его доказательство. Тогда множество $A_0 \in \mathcal{A}$, реализующее $\min_{A \in \mathcal{A}} \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)}$, удовлетворяет неравенст-

ву: $\frac{\text{cap}(A_0)}{\text{dem}(A_0)} \leq (c_0 \log k) \lambda^*$. Действительно, мы имеем:

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} d(i, j)}{\sum_{h=1}^k D_h d(s_h, t_h)} \geq \frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} \|w_i - w_j\|_1}{(c_0 \log k) \sum_{h=1}^K D_h \|w_{s_h} - w_{t_h}\|_1} \geq \\ &\geq \frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} |w_i(r) - w_j(r)|}{(c_0 \log k) \sum_{h=1}^k D_h |w_{s_h}(r) - w_{t_h}(r)|} = \frac{\sum_{A \in \mathcal{A}} \lambda_A \text{cap}(A)}{(c_0 \log k) \sum_{A \in \mathcal{A}} \lambda_A \text{dem}(A)} \geq \\ &\geq \frac{1}{(c_0 \log k)} \frac{\text{cap}(A_0)}{\text{dem}(A_0)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Следствие 10.3.7. Для случая $k \leq 2$ пар полюсов тах-поток равен min-разрезу, т. е.

$$\lambda^* = \min_{S \subseteq V} \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)}.$$

Доказательство. Мы используем доказательство теоремы 10.3.3. Пусть d — полуметрика на V , являющаяся оптимальным решением для задачи (10.3.5). Предположим, что $k = 1$. Определим полуметрику d' на V , положив

$$d'(i, j) := |d(i, s_1) - d(j, s_1)| \quad \text{для } i, j \in V.$$

Тогда $d(i, j) \geq d'(i, j)$ для всех $i, j \in V$ и $d'(s_1, t_1) = d(s_1, t_1)$. Следовательно,

$$\lambda^* = \frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} d(i, j)}{\sum_{h=1}^k D_h d(s_h, t_h)} \geq \frac{\sum_{ij \in E} C_{ij} d'(i, j)}{\sum_{h=1}^k D_h d'(s_h, t_h)}.$$

Так как d' изометрически ℓ_1 -вложимо (по построению), последняя величина больше или равна $\min_S \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)}$. Это показывает, что $\lambda^* = \min_S \frac{\text{cap}(S)}{\text{dem}(S)}$. Предположим теперь, что $k = 2$. Определим полуметрику d' на V , положив

$$d'(i, j) := \max(|d(i, s_1) - d(j, s_1)|, |d(i, s_2) - d(j, s_2)|) \quad \text{для } i, j \in V.$$

Тогда d' изометрически l_∞^2 -вложимо (по построению), $d'(i, j) \leq d(i, j)$ для всех $i, j \in V$, и $d'(s_h, t_h) = d(s_h, t_h)$ для $h = 1, 2$. Теперь мы можем завершить доказательство как в предыдущем случае, так как полуметрика d' вновь ℓ_1 -вложима (так как l_∞^2 есть изометрическое подпространство l_1^2 по соотношению (3.1.6)). ■

Глава 11.

Вопросы размерности для ℓ_1 -вложений

Для данного пространства расстояний (X, d) , которое является ℓ_1 -вложимым, естественно поставить вопрос о нахождении наименьшей размерности m ℓ_1 -пространства $l_1^m = (R^m, d_{\ell_1})$, в которое (X, d) может быть вложено. Следующим вопросом является нахождение критерия существования конечного множества точек для l_1^m -вложимости, аналогичного результату Менгера для евклидова пространства, т. е. нахождение порядка конгруенции для l_1^m . В этой главе мы рассматриваем несколько результатов, относящихся к данным вопросам. К сожалению, в этой области известно очень мало. Например, порядок конгруенции для l_1^m известен только при $m \leq 2$ и не известно даже, имеет ли l_1^m конечный порядок конгруенции при $m \geq 3$. Более точно, пространство расстояний (X, d) l_1^1 -вложимо (соответственно, l_1^2 -вложимо) тогда и только тогда, когда то же имеет место для каждого подпространства (X, d) на 4 (соответственно, на 6) точках. Следовательно, можно в полиномиальное время проверить, является ли расстояние l_1^m -вложимым для $m \leq 2$. С другой стороны, сложность проверки l_1^m -вложимости неизвестна для $m \geq 3$. Эти результаты рассмотрены в разделе 11.1. Основным средством доказательства является понятие «вполне разложимого расстояния», исследованное Бандельтом и Дрессом [1992]; Раздел 11.1.2 содержит факты о полной разложимости, необходимые для наших исследований. В разделе 11.2 мы рассматриваем некоторые границы для минимальной ℓ_p -размерности произвольного ℓ_p -вложимого пространства расстояний на n точках.

11.1. ℓ_1 -вложения фиксированной размерности

Начнем с некоторых наблюдений, касающихся структуры l_1^m -вложимых расстояний, где $m \geq 1$ — целое число. Пусть (V_n, d) — ℓ_1 -вложимое пространство расстояний. Тогда d допускает разложение

$$(11.1.1) \quad d = \sum_{\delta(S) \in \mathcal{C}} \lambda_S \delta(S),$$

где $\lambda_S > 0$ для всех $\delta(S) \in \mathcal{C}$, и $\mathcal{C}$ есть семейство разрезных полуметрик на V_n . Когда d l_1^m -вложимо, оно имеет также разложение со специальной структурой. Для дальнейшей работы нам необходимо ввести несколько определений.

Для данного семейства $\mathcal{C}$ разрезных полуметрик на V_n пусть

$$(11.1.2) \quad \tilde{\mathcal{C}} := \{S, \bar{S} := V_n \setminus S \mid \delta(S) \in \mathcal{C}\};$$

элементы $\tilde{\mathcal{C}}$ называются *носителями* разрезных полуметрик из $\mathcal{C}$. Семейство $\mathcal{C}$ называется *гнездовым*, если элементы из $\tilde{\mathcal{C}}$ можно упорядочить в виде $S_1, \dots, S_m, \bar{S}_1, \dots, \bar{S}_m$, таким образом что $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_m$ (и, значит, $\bar{S}_m \subset \dots \subset \bar{S}_2 \subset \bar{S}_1$). Для данного целого $m \geq 1$ $\mathcal{C}$ называется *m -гнездовым*, если $\mathcal{C}$ можно разбить на m гнездовых подсемейств. (Следовательно, 1-гнездность обозначает гнездность.)

Мы имеем следующую (простую) характеристику l_1^m -вложимости; этот факт уже содержался в предложении 4.2.2, но мы повторим его здесь для ясности изложения.

Лемма 11.1.3. Пусть (V_n, d) — пространство расстояний. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) (V_n, d) может быть вложено в l_1^m .
- (ii) d допускает разложение (11.1.1), где $\mathcal{C}$ является m -гнездовым.
- (iii) (V_n, d) может быть изометрически вложено в Декартово произведение m взвешенных путей.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $m = 1$.

(i) $\implies$ (ii), (iii) Предположим, что d l_1^1 -вложимо. Тогда существуют скаляры $u_1, \dots, u_n$, такие что $d_{ij} = |u_i - u_j|$ для всех $i, j \in V_n$. С точностью до переупорядочивания элементов из V_n , мы можем предположить, что $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$. Тогда

$$d = \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) \delta(\{1, \dots, i\}).$$

Следовательно, (ii) имеет место, так как семейство $\{\delta(\{1, \dots, i\}) \mid i = 1, \dots, n-1\}$ очевидным образом гнездовое. Рассмотрим путь $P = (1, \dots, n)$ с весом $w_{i,i+1} := u_{i+1} - u_i$ на ребре $(i, i+1)$ ($i = 1, \dots, n-1$). Тогда метрика кратчайшего пути взвешенного пути P совпадает с d , откуда следует (iii).

(iii) $\implies$ (ii). Пусть $P = (1, \dots, n)$ — путь с неотрицательным весом w_i на ребре $(i, i+1)$ для $i = 1, \dots, n-1$. Тогда его метрика кратчайшего пути $d_{P,w}$ может быть представлена в виде $\sum_{i=1}^{n-1} w_i \delta(\{1, \dots, i\})$.

(ii) $\implies$ (i). Предположим, что $d = \sum_{i=1}^p \alpha_i \delta(S_i)$, где $\alpha_i > 0$ для всех i и $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_p$. Определим $u_1, \dots, u_n \in R$, положив

$$\begin{aligned} u_i &:= 0 \quad \text{для } i \in S_1, \\ u_i &:= \sum_{h=1}^k \alpha_h \quad \text{для } i \in S_{k+1} \setminus S_k, k = 1, \dots, m-1, \\ u_i &:= \sum_{h=1}^p \alpha_h \quad \text{для } i \in V_n \setminus S_p. \end{aligned}$$

Тогда легко проверить, что $d_{ij} = u_j - u_i$ для всех $i, j \in V_n$, что показывает l_1^1 -вложимость d .

Результат для $m \geq 2$ теперь легко следует по аддитивности, так как d l_1^m -вложимо тогда и только тогда, когда d можно разложить в сумму $d = d_1 + \dots + d_m$, где все d_i l_1^1 -вложимы. $\blacksquare$

Пока неясно, как использовать этот результат для получения полиномиального алгоритма, позволяющего определять l_1^m -вложимые расстояния. Трудность состоит в том, что расстояния из разрезного конуса CUT_n имеют много разложений типа (11.1.1) (на самом деле, бесконечно много, если расстояние не является ℓ_1 -жестким). Однако, как будет показано в разделе 11.1.3, в случаях $m = 1, 2$ достаточно проверить одно специальное разложение (соответствующее «полному разложению» d). В частности, вложимость в пространство l_1^m для $m \in \{1, 2\}$ можно проверить в полиномиальное время. Кроме того, можно определить и порядок конгруенции для l_1^2 .

Для доказательства этих результатов необходимо ввести понятие полной разложимости. Поэтому следующий раздел будет организован следующим образом. В разделе 11.1.1 мы суммируем то, что известно о порядке конгруенции пространства l_1^m , а также некоторые результаты о ℓ_1 -размерности нескольких специальных пространств расстояний. Тогда, после введения в разделе 11.1.2 определений и фактов о вполне разложимых расстояниях, которые необходимы для наших исследо-

ваний, мы рассмотрим в разделе 11.1.3 доказательства результатов, касающихся вложимости в ℓ_1 -пространство размерности $m \leq 2$.

11.1.1. Порядок конгруенции ℓ_1 -пространства

Пусть $f_p(m)$ обозначает порядок конгруенции для l_p^m ; т. е. $f_p(m)$ есть наименьшее целое число такое, что произвольное пространство расстояний (X, d) l_p^m -вложимо тогда и только тогда, когда каждое подпространство пространства (X, d) на $f_p(m)$ точках l_p^m -вложимо. По договоренности, мы считаем $f_p(m) = \infty$, если $f_p(m)$ не существует. Напомним, что по теореме 3.2.2 мы можем сосредоточить наше внимание только на конечных пространствах расстояний (X, d) .

Изучение параметра $f_p(m)$ мотивировано результатом Менгера для случая $p = 2$, представленного в теореме 6.2.13. Именно, Менгер [1928] показал, что пространство расстояний (X, d) изометрически вложимо в евклидово пространство $(\mathbb{R}^m, d_{\ell_2})$ тогда и только тогда, когда каждое подпространство пространства (X, d) на $m + 3$ точках изометрически вложимо в $(\mathbb{R}^m, d_{\ell_2})$. Другими словами,

$$f_2(m) = m + 3 \quad \text{для каждого } m \geq 1.$$

Следовательно, естественным является вопрос о нахождении аналога теоремы Менгера для случая произвольных ℓ_p -метрик и, в частности, для случая $p = 1$. Этот вопрос достаточно труден. Известны только следующие отдельные результаты.

Так как пространства $(\mathbb{R}, d_{\ell_p})$ и $(\mathbb{R}, d_{\ell_2})$ идентичны, из теоремы Менгера мы получаем, что $f_p(1) = 4$ для всех p . (Смотрите также теорему 11.1.21 для прямого доказательства того факта, что $f_p(1) = 4$.) Малиц и Малиц [1992] показали, что

$$6 \leq f_1(2) \leq 11 \quad \text{и} \quad f_1(m) \leq 2m + 1 \quad \text{для всех } m \geq 1.$$

Эти результаты были улучшены Бандельтом и Чепоем [1996], которые показали, что

$$f_1(2) = 6,$$

и Бандельтом, Чепоем и Лоран [1998], показавшими, что

$$f_1(m) \geq m^2 \quad \text{для нечетного } m \geq 3,$$

и

$$f_1(m) \geq m^2 - 1 \quad \text{для четного } m \geq 4.$$

Равенство: $f_1(2) = 6$ будет доказано в теореме 11.1.24, а неравенства: $f_1(m) \geq m^2$ для нечетного m , $f_1(m) \geq m^2 - 1$ для четного m , рассмотрены в нижеприведенном следствии 11.1.6. Малиц и Малиц [1992] предположили, что $f_1(m)$ конечно для всех m .

Данные результаты показывают, что при $m = 1$ или 2 можно проверить в полиномиальное время, вложимо ли данное конечное пространство расстояний (X, d) в $(\mathbb{R}^m, d_{\ell_1})$. (Случай $m = 1$ очень прост, так как сужения d_{ℓ_1} и d_{ℓ_2} на $\mathbb{R}$ совпадают.) Было бы очень интересно показать, что $f_1(m)$ конечно для всех m . Действительно, это доказало бы существование полиномиального алгоритма проверки вложимости конечного пространства расстояний в пространство $(\mathbb{R}^m, d_{\ell_1})$ для любого данного m . Сложность проблемы вложимости в $(\mathbb{R}^m, d_{\ell_1})$ для некоторого фиксированного $m \geq 3$ неизвестна. Напомним, что, с другой стороны, проверка ℓ_1 -вложимости конечного пространства расстояний (т. е. вложимости в некоторое пространство $(\mathbb{R}^m, d_{\ell_1})$ при произвольном m) является NP-сложной (см. раздел 4.4).

Мы завершим этот раздел несколькими замечаниями о ℓ_1 -размерности некоторых конкретных пространств расстояний. Напомним, что $m_{\ell_1}(X, d)$ обозначает наименьшее m , такое что (X, d) можно вложить в l_1^m . Этот параметр можно легко выразить в случае ℓ_1 -жестких метрик. Действительно, если (X, d) — ℓ_1 -жесткое пространство расстояний, то оно имеет единственное разложение типа (11.1.1) и, следовательно, $m_{\ell_1}(X, d)$ равно наименьшему числу гнездовых семейств, необходимых для покрытия множества $\mathcal{C}$ разрезных полуметрик, входящих в это разложение. Например, вложимые в гиперкуб графы имеют метрики кратчайших путей, являющиеся ℓ_1 -жесткими. В частности, деревья вложимы в гиперкуб и, следовательно, ℓ_1 -жестки. (Смотрите предложение 19.1.2.) Мы рассмотрим подробно именно деревья, так как они играют в нашем изложении существенную роль; подтверждение приведенных ниже фактов можно найти в разделе 19.1.

Пусть $T = (V, E)$ — некоторое дерево. Каждое ребро $e \in E$ определяет разбиение множества вершин V на два множества S_e и $V \setminus \{S_e\}$. Тогда метрика кратчайшего пути T может быть разложена как

$$d_T = \sum_{e \in E} \delta(S_e),$$

и это ее единственная $\mathbb{R}_+$ -реализация. В более общем случае, если $w \in R_+^E$ есть веса, которыми снабжены ребра T , то метрика кратчайшего пути $D_{T,w}$ взвешенного дерева может быть разложена

единственным образом как

$$d_{T,w} = \sum_{e \in E} w_e \delta(S_e).$$

Легко можно определить ℓ_1 -размерность дерева в терминах числа его листьев¹⁾. Следующий результат был сформулирован уже в Хадлок и Хоффман [1978].

Предложение 11.1.4. *Для дерева T следующие утверждения эквивалентны.*

- (i) *Метрика кратчайшего пути T может быть вложена в l_1^m .*
- (ii) *T может быть покрыто m путями.*
- (iii) *T имеет не более $2m$ листьев.*

Следовательно, если дерево имеет p листьев, то ℓ_1 -размерность его метрики пути равна $\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$.

Доказательство. Пусть $T = (V, E)$ — дерево и, используя выше-приведенные обозначения, пусть $\mathcal{C}_T := \{\delta(S_e) \mid e \in E\}$ обозначает семейство разрезов, входящих в разложение d_T . Тогда (i) можно сформулировать эквивалентным образом в виде: (iv) семейство $\mathcal{C}_T$ является m -гнездовым.

Покажем эквивалентность (ii) $\iff$ (iv). Импликации (i) $\implies$ (iii), (iv) очевидны. Для доказательства (iv) $\implies$ (iii) предположим, что T имеет по меньшей мере $2m + 1$ листов. Тогда имеется по крайней мере $2m + 1$ минимальных множеств из $\tilde{\mathcal{C}}$ (так как каждый лист v дает минимальное множество $\{v\}$). Следовательно, $\mathcal{C}$ не может быть покрыто m гнездовыми семействами.

Импликация (iii) $\implies$ (ii) может быть доказана индукцией по $m \geq 1$. Мы оставляем детали доказательства читателю. ■

Для получения нижней границы на порядок конгруенции $f_1(m)$ нам нужен следующий результат о ℓ_1 -размерности прямого произведения пространств расстояний.

Лемма 11.1.5. *Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) — два пространства расстояний и пусть $(X, d) := (X_1 \times X_2, d_1 \oplus d_2)$ — их прямое произведение. Тогда*

$$m_{\ell_1}(X, d) = m_{\ell_1}(X_1, d_1) + m_{\ell_1}(X_2, d_2).$$

¹⁾ Вершина v дерева T называется *листом*, если ее степень равна 1.

Доказательство. Неравенство $m_{\ell_1}(X, d) \leq m_{\ell_1}(X_1, d_1) + m_{\ell_1}(X_2, d_2)$ следует из аддитивности ℓ_1 -расстояния. Обратно, предположим, что (X, d) вложимо в l_1^m . Тогда d можно разложить в виде $d = \sum_{\delta(S) \in \mathcal{C}} \lambda_S \delta(S)$, где $\mathcal{C}$ есть семейство разрезных полуметрик на X , которое является m -гнездовым. Из доказательства предложения 7.5.2, мы знаем, что каждая разрезная полуметрика в $\mathcal{C}$ имеет вид $\delta(A \times X_2)$ или $\delta(X_1 \times B)$ для некоторых $A \subset X_1$, $B \subset X_2$. Пусть $d = \sum_{A \in \mathcal{A}} \lambda_A \delta(A \times X_2) + \sum_{B \in \mathcal{B}} \lambda_B \delta(X_1 \times B)$. Тогда $d_1 = \sum_{A \in \mathcal{A}} \lambda_A \delta(A)$ и $d_2 = \sum_{B \in \mathcal{B}} \lambda_B \delta(B)$. Заметим, что никакие две разрезные полуметрики $\delta(A \times X_2)$ и $\delta(X_1 \times B)$ не попадут в одно гнездовое семейство. Следовательно, m гнездовых семейств, разбивающих $\mathcal{C}$, дают разбиение разрезных полуметрик $\delta(A)$ ($A \in \mathcal{A}$) в p гнездовых семейств и разбиение полуметрик разрезов $\delta(B)$ ($B \in \mathcal{B}$) в q гнездовых семейств, где $p + q = m$. Следовательно, $p \geq m_{\ell_1}(X_1, d_1)$ и $q \geq m_{\ell_1}(X_2, d_2)$, откуда следует неравенство

$$m_{\ell_1}(X, d) \geq m_{\ell_1}(X_1, d_1) + m_{\ell_1}(X_2, d_2). \quad \blacksquare$$

Следствие 11.1.6. $f_1(m) \geq m^2$ для нечетного m ; $f_1(m) \geq m^2 - 1$ для четного m .

Доказательство. Мы начнем с одного наблюдения. Пусть (X, d) обозначает графическое метрическое пространство графа $G := K_{1,s} \times K_{1,t}$ (декартова произведения двух полных двудольных графов $K_{1,s}$ и $K_{1,t}$), где $s, t \geq 3$. Его ℓ_1 -размерность равна $m_{\ell_1}(X, d) = \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ (применяя предложение 11.1.4 и лемму 11.1.5, так как $K_{1,s}$ и $K_{1,t}$ являются деревьями с s и t листьями, соответственно). Пусть G имеет множество вершин $X := V_1 \times V_2$, где $V_1 := \{u_0, u_1, \dots, u_s\}$ и $V_2 := \{v_0, v_1, \dots, v_t\}$ (u_0, v_0 обозначают, соответственно, «центры» звезд $K_{1,s}$ и $K_{1,t}$). Тогда d можно разложить в виде

$$d = \sum_{i=1}^s \delta(S_i) + \sum_{j=1}^t \delta(T_j),$$

положив $S_i := \{u_i\} \times V_2$ ($i = 1, \dots, s$) и $T_j = V_1 \times \{v_j\}$ ($j = 1, \dots, t$). Ясно, что никакие две разрезные полуметрики $\delta(S_i)$, $\delta(T_j)$ не формируют гнездовой пары, в то время как любые две разрезные полуметрики $\delta(S_i)$, $\delta(S_j)$ (или $\delta(T_i)$, $\delta(T_j)$) образуют гнездовую пару. Это снова показывает, что $M_{\ell_1}(X, d) = \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$. С другой стороны, если мы удалим элемент $x := (u_{i_0}, v_{j_0})$ из X (где $i_0 \in \{1, \dots, s\}$ и $j_0 \in \{1, \dots, t\}$ соответствуют листьям двух деревьев), то две разрезные полуметрики $\delta(S_{i_0} \setminus \{x\})$ и

$\delta(T_{j_0} \setminus \{x\})$ становятся гнездовой парой. Следовательно, полуметрики $\delta(S_i \setminus \{x\})$, $\delta(T_j \setminus \{x\})$ можно разбить на $\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil - 1$ гнездовых подсемейств, откуда следует, что

$$(a) \quad m_{\ell_1}(X \setminus \{x\}, d) \leq \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil - 1$$

для такого x .

Теперь мы можем перейти к доказательству. Сначала покажем, что $f_1(m) \geq m^2$ для нечетного m . Для этого достаточно построить пространство расстояний (Y, d) , такое что $|Y| \geq m^2$, $m_{\ell_1}(Y, d) \geq m+1$ и $m_{\ell_1}(Y \setminus \{y\}, d) \leq m$ для всех $y \in Y$. Именно, пусть (X, d) — графическое метрическое пространство графа $K_{1,m} \times K_{1,m}$ с $m_{\ell_1}(X, d) = m+1$. Пусть $Y \subset X$ — минимальное подмножество X , такое что $m_{\ell_1}(Y, d) = m+1$; тогда $m_{\ell_1}(Y \setminus \{y\}, d) \leq m$ для всех $y \in Y$. Это пространство расстояний (Y, d) искомое, так как в свете вышеприведенного отношения (a), $|Y| \geq m^2$. Неравенство $f_1(m) \geq m^2 - 1$ для четного m получается таким же образом. Именно, рассмотрим теперь в качестве (X, d) графическое метрическое пространство графа $K_{1,m-1} \times K_{1,m+1}$ с $m_{\ell_1}(X, d) = m+1$, и в качестве (Y, d) — подпространство (X, d) , такое что $m_{\ell_1}(Y, d) = m+1$, $m_{\ell_1}(Y \setminus \{y\}, d) \leq m$ для всех $y \in Y$. ■

В заключение напомним, что точное значение для ℓ_1 -размерности эквидистантных метрик неизвестно. Ее вычисление сводится к определению максимального числа равноотстоящих точек (в ℓ_1 -метрике), которые могут быть размещены в m -мерном пространстве для данного m . Этот максимум равен по меньшей мере $2m$, так как координатные вектора $\pm e_i$ ($i = 1, \dots, m$) очевидным образом образуют эквидистантное множество из $2m$ точек. Является ли этот результат лучшим? Таким образом, мы получаем следующую проблему.

Проблема 11.1.7. *Показать, что в m -мерном ℓ_1 -пространстве (R^m, d_{ℓ_1}) имеется не более $2m$ равноотстоящих точек.*

Бандельт, Чепой и Лоран [1998] решили проблему 11.1.7 для размерности $m \leq 3$, но проблема остается открытой для $m \geq 4$. Другими словами, $m_{\ell_1}(\mathbb{I}_m) \leq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ с равенством при $m \leq 8$, но неизвестно, имеет ли место равенство для $m \geq 9$.

11.1.2. Каноническое разложение расстояний

ℓ_1 -вложимое расстояние d на множестве V_n может быть разложено в неотрицательную сумму разрезных полуметрик. В общем

случае, такое разложение *не* является единственным. Бандельт и Дресс [1992] построили теорию, позволяющую раскладывать d однозначным образом. Им удалось достичь этого, требуя некоторых очень специальных свойств от разрезов, входящих в разложение d . Заметим, что данная теория применима к произвольному расстоянию; для этого в разложении допустим остаточный «расщепленно-простой» член. Мы рассматриваем здесь основные идеи и результаты из Бандельт и Дресс [1992], необходимые для наших исследований. Мы не приводим доказательств, так как они заняли бы слишком много места.

Пусть d — расстояние на V_n . Для двух данных подмножеств $A, B \subseteq V_n$ положим

$$\alpha_d(A, B) := \frac{1}{2} \min_{a, a' \in A, b, b' \in B} \max(0, d(a, b) + d(a', b') - d(a, a') - d(b, b'), d(a, b') + d(a', b) - d(a, a') - d(b, b')).$$

(Здесь элементы a, a' (или b, b') могут совпадать.) Когда $B = V_n \setminus A$, мы полагаем также

$$\alpha_d(A) := \alpha_d(A, V_n \setminus A).$$

Величина $\alpha_d(A)$ называется *индексом изоляции* разрезной полуметрики $\delta(A)$ (для расстояния d). Тогда $\delta(A)$ называется *d -расщеплением*, если $\alpha_d(A) > 0$. Ясно, что если $\delta(A)$ является d -расщеплением, то оба множества A и $V_n \setminus A$ являются d -выпуклыми. (Напомним определение 4.2.7.) Расстояние d называется *расщепленно-простым*, если оно не имеет d -расщеплений. В общем случае мы будем обозначать через Σ_d множество всех d -расщеплений d . Проиллюстрируем эти определения на нескольких примерах.

Пример 11.1.8.

- (i) Пусть $d = \delta(A)$ — разрезная полуметрика. Тогда d имеет только одно d -расщепление, именно, само d с индексом изоляции 1.
- (ii) Пусть d — полуметрика на 4 точках. Тогда d ℓ_1 -вложимо. Кроме того, легко проверить, что $d = \sum_{\delta(S) \in \Sigma_d} \alpha_d(S) \delta(S)$.
- (iii) Пусть $d := d_{T,w}$ — метрика кратчайшего пути взвешенного дерева $T = (V, E)$ с неотрицательными реберными весами w . Напомним, что d можно разложить в виде $d = \sum_{e \in E} w_e \delta(S_e)$, где $S_e, V \setminus S_e$ обозначают две компоненты графа $T \setminus e$. Ясно, что каждая разрезная полуметрика $\delta(S_e)$ является d -расщеплением с индексом изоляции w_e , и разрезные полуметрики $\delta(S_e)$ ($e \in E$) образуют все d -расщепления.

(iv) Пусть d — метрика кратчайшего пути полного двудольного графа $K_{2,3}$. Тогда d является расщепленно-простой (так как, для каждого множества A , либо A , либо его дополнение не являются d -выпуклыми). На самом деле, $d(K_{2,3})$ является единственной (с точностью до множителя) расщепленно-простой полуметрикой на 5 точках (лемма 1 в Бандельт и Дресс [1992]). Имеются примеры расщепленно-простых расстояний, которые ℓ_1 -вложимы. Например, это случай метрики кратчайшего пути 3-мерного гиперкуба $H(3, 2)$, или метрики на 5 точках

$$d := \frac{1}{2}(\delta(\{1, 4\}) + \delta(\{1, 5\}) + \delta(\{2, 4\}) + \delta(\{2, 5\}))$$

(принимая значение 2 на парах (1, 2) и (4, 5) и значение 1 на всех остальных парах). ■

Бандельт и Дресс [1992] (теорема 2) показали, что каждое расстояние d на V_n можно разложить в виде

$$(11.1.9) \quad d = d_0 + \sum_{\delta(S) \in \Sigma_d} \alpha_d(S) \delta(S),$$

где d_0 является расщепленно-простым расстоянием на V_n (т. е. не имеет d_0 -расщеплений), и сумма взята по множеству d -расщеплений; d_0 называется *расщепленно-простым вычетом* d . Кроме того, d_0 является полуметрикой, если d является полуметрикой. Разложение (11.1.9) очевидным образом единственно. Оно может быть найдено за время $O(n^6)$.

Множество d -расщеплений имеет некоторое специфическое свойство. Для его формулировки нам необходимо еще одно определение. Назовем семейство $\mathcal{C}$ разрезных полуметрик на V_n *слабо согласованным*, если не существует четырех точек $x_1, x_2, x_3, x_4 \in V_n$ и трех разрезных полуметрик $\delta(A_1), \delta(A_2), \delta(A_3) \in \mathcal{C}$, сужение которых на множество $X := \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ даст три различные разрезные полуметрики при разбиении X на две части. Другими словами, семейство $\mathcal{C}$ слабо согласовано тогда и только тогда, когда для всех $A, B, C \in \tilde{\mathcal{C}}$, $A \cap B \cap C \neq \emptyset \implies A \subseteq B \cup C$, или $B \subseteq A \cup C$, или $C \subseteq A \cup B$ (напомним определение $\tilde{\mathcal{C}}$ из (11.1.2)). Можно проверить, что множество d -расщеплений расстояния d слабо согласовано. Обратно, мы имеем (из теоремы 3 в Бандельт и Дресс [1992]):

Факт 11.1.10. Пусть $\mathcal{C}$ — слабо согласованное семейство разрезных полуметрик на V_n , и пусть $\lambda_S > 0$ — данные скаляры для $\delta(S) \in \mathcal{C}$. Тогда $\mathcal{C}$ является множеством d -расщеплений расстояния $d := \sum_{\delta(S) \in \mathcal{C}} \lambda_S \delta(S)$, и $\alpha_d(S) = \lambda_S$ для всех $\delta(S) \in \mathcal{C}$. ■

Как следствие, каждое слабо согласованное множество разрезных полуметрик на V_n линейно независимо и, значит, имеет мощность $\leq \binom{n}{2}$. На самом деле, для расстояния d , имеющего ненулевой расщепленно-простой вычет d_0 в (11.1.9), множество $\Sigma_d \cup \{d_0\}$ линейно независимо.

Расстояние d на V_n называется *вполне разложимым*, если имеет место равенство $d = \sum_{\delta(S) \in \Sigma_d} \alpha_d(S) \delta(S)$. Это означает, что в разложении (11.1.9) нет расщепленно-простого вычета, т. е. $d_0 = 0$. Тогда d ℓ_1 -вложимо. Как было упомянуто в примере 11.1.8 (ii), каждая полуметрика на 4 точках вполне разложима. В общем случае, вполне разложимые расстояния характеризуются следующим критерием 5 точек (теорема 6 в Бандельт и Дресс [1992]):

Факт 11.1.11. *Расстояние d на V_n вполне разложимо тогда и только тогда, когда для всех $a, b, c, d, x \in V_n$,*

$$\alpha_d(\{a, b\}, \{c, d\}) = \alpha_d(\{a, b, x\}, \{c, d\}) + \alpha_d(\{a, b\}, \{c, d, x\}). \quad \blacksquare$$

Легко проверить, что полная разложимость проверяется за время $O(n^5)$.

Наконец, введем для расстояний понятие минора. Пусть d — расстояние на V_n , пусть d_0 — его расщепленно-простой вычет и пусть Σ_d — его множество d -расщеплений. Для данного подмножества $X \subseteq V_n$ расстояние d' на X называется *минором d* , если d' имеет форму

$$(11.1.12) \quad d' = \lambda_0 d'_0 + \sum_{\delta(S) \in \mathcal{C}} \lambda_S \delta(S \cap X),$$

где $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_d$, $\lambda_S > 0$ для всех $\delta(S) \in \mathcal{C}$, $\lambda_0 \geq 0$, и d'_0 обозначает сужение d_0 на X . Тогда d' -расщепления являются ненулевыми разрезными полуметриками $\delta(S \cap X)$ для $\delta(S) \in \mathcal{C}$. (Здесь $\delta(S \cap X)$ означает разрезную полуметрику на X , определенную разбиением X на $S \cap X$ и $\bar{S} \cap X$.) Другими словами, минор d' расстояния d получается применением следующих двух операций: взятия неотрицательной комбинации d -расщеплений и вычета d , и/или взятия сужения на подмножество X основного множества расстояния d . Полная разложимость очевидным образом сохраняется при взятии миноров; в Бандельт и Дресс [1992] доказан следующий результат:

Факт 11.1.13. *Расстояние d вполне разложимо тогда и только тогда, когда оно не имеет в качестве минора графическую метрику полного двудольного графа $K_{2,3}$.* $\blacksquare$

Примеры вполне разложимых расстояний включают в себя метрики кратчайшего пути весовых деревьев и их изометрических подпространств, известных как древесные метрики. Другими словами, пространство расстояний (X, d) называется *древесной метрикой*, если существует дерево $T = (V, E)$ с реберными весами $w \in \mathbb{R}_+^E$ и отображение $f: X \mapsto V$, такое что $d(x, y) = d_{T, w}(f(x), f(y))$ для $x, y \in X$.

Назовем две разрезных полуметрики $\delta(A)$ и $\delta(B)$ *перекрещивающимися*, если четыре множества $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ непусты, и *неперекрещивающимися* в противном случае. Таким образом, $\delta(A)$ и $\delta(B)$ являются неперекрещивающимися, если два из множеств $A, \bar{A}, B, \bar{B}$ сравнимы (по включению). Тогда древесные метрики допускают следующую характеристику¹⁾:

Факт 11.1.14. *Расстояние d является древесной метрикой тогда и только тогда, когда d вполне разложимо и любые два d -расщепления не перекрещиваются.* ■

Из этого следует:

Факт 11.1.15. *Пусть d_1 и d_2 — две древесные метрики. Тогда сумма $d := d_1 + d_2$ вполне разложима с множеством d -расщеплений $\Sigma_d = \Sigma_{d_1} \cup \Sigma_{d_2}$.* ■

Важный класс вполне разложимых полуметрик получается из полуметрик, которые можно вложить в пространство l_1^m размерности $m \leq 2$. Действительно, полуметрика, вложимая в l_1^1 , является древесной метрикой (по лемме 11.1.3). Следовательно, расстояние, вложимое в l_1^2 , является суммой двух древесных метрик и вполне разложимо. Как мы увидим в следующем подразделе, этот факт будет играть центральную роль в определении l_1^2 -вложимых метрик.

11.1.3. Расстояния, вложимые в ℓ_1 -плоскость

Здесь мы возвращаемся к вопросу определения порядка конгруенции $f_1(m)$ для l_1^m , m -мерного ℓ_1 -пространства. Известно, что $f_1(1) = 4$ (по теореме 6.2.13; см. также теорему 11.1.21). Но неизвестно даже, выполняется ли условие $f_1(m) < \infty$ для $m \geq 3$. Бандельт и Че-

¹⁾ Это результат принадлежит Бунеману [1971] или, независимо, Эдмондсу и Джайлсу [1977], которые показали, как представлять неперекрещивающиеся семейства разрезных полуметрик с помощью деревьев.

пой [1996] вычислили точное значение для $f_1(2)$; именно, они показали, что $f_1(2) = 6$ (см. теорему 11.1.24 ниже).

Главными результатами, представленными здесь, являются теоремы 11.1.21 и 11.1.24, которые дают несколько эквивалентных характеристик для l_1^1 - и l_1^2 -вложимости конечных пространств расстояний; в частности, в терминах запрещенных минимальных конфигураций. В доказательствах мы следуем изложению Бандельта и Чепоя [1996].

Необходимым средством для доказательства этих результатов является теория вполне разложимых пространств расстояний, рассмотренная в предыдущем подразделе. В частности, мы будем пользоваться свойствами вполне разложимых пространств расстояний, упомянутых выше в фактах 11.1.10–11.1.15.

Начнем с некоторых простых, но важных наблюдений. Как было замечено в лемме 11.1.3, расстояние d может быть вложено в m -мерное ℓ_1 -пространство тогда и только тогда, когда d имеет разложение $d = \sum_{\delta(S) \in \mathcal{C}} \lambda_S \delta(S)$ (где $\lambda_S > 0$ для всех S), где $\mathcal{C}$ может быть разбито на m гнездовых подсемейств. В случае $m = 1, 2$ достаточно, на самом деле, проверить это свойство для набора d -расщеплений.

Лемма 11.1.16. *Расстояние d на V_n l_1^1 -вложимо тогда и только тогда, когда d вполне разложимо и его множество Σ_d d -расщеплений гнездовое. Тогда d является метрикой кратчайшего пути некоторого взвешенного пути.*

Доказательство. Это следует из леммы 11.1.3 и того факта, что гнездовое семейство разрезных полуметрик разрезов является слабо согласованным. ■

Лемма 11.1.17. *Расстояние d на V_n l_1^2 -вложимо тогда и только тогда, когда d вполне разложимо и его множество Σ_d d -расщеплений может быть разбито на два гнездовых семейства. Тогда d изометрически вложимо в декартово произведение двух взвешенных путей.*

Доказательство. Результат следует из факта 1.1.15 и леммы 11.1.16. ■

Лемма 11.1.18. *Для $m \in \{1, 2\}$ если d l_1^m -вложимо, то это верно и для каждого минора d .*

Доказательство. Предположим, что d l_1^1 - или l_1^2 -вложимо и пусть d' есть минор d , скажем, вида (11.1.12). Тогда d вполне разложимо, т. е. его расщепленно-простой вычет равен нулю. Следовательно, d' также вполне разложимо. Результат следует теперь из лемм 11.1.16 и 11.1.17. ■

В теореме 1.11.21 мы собрали несколько эквивалентных характеристик для l_1^1 -вложимости. Одна из них сформулирована в терминах некоторых расстояний, запрещенных в качестве миноров; это метрики кратчайших путей графов $K_{2,3}$, K_3 и C_4 . На рисунке 11.1.19 показаны вложения в ℓ_1 -плоскость двух последних расстояний.

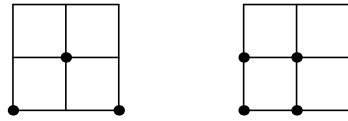


Рис. 11.1.19. Вложение K_3 и C_4 в ℓ_1 -плоскость (с точностью до множителя).

Начнем с характеристики гнездовых семейств.

Лемма 11.1.20. *Семейство $\mathcal{C}$ разрезных полуметрик является гнездовым тогда и только тогда, когда каждое подсемейство $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ мощности $|\mathcal{C}_0| \leq 3$ является гнездовым.*

Доказательство. Покажем «тогда» индукцией по мощности $\mathcal{C}$. Предположим, что $|\mathcal{C}| \geq 4$ и что каждое собственное подмножество $\mathcal{C}$ гнездовое; покажем, что $\mathcal{C}$ также гнездовое. Пусть $\delta(S) \in \mathcal{C}$; тогда элементы из $\mathcal{C} \setminus \{\delta(S)\}$ можно упорядочить в виде

$$\delta(A_1), \dots, \delta(A_m)$$

таким образом, что $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m$. Если $S \subset A_1$ или $\bar{S} \subset A_1$, то $\mathcal{C}$ является гнездовым. Если $S, \bar{S} \not\subset A_i$ для каждого $i = 1, \dots, m$, то $A_m \subset S$ (или $A_m \subset \bar{S}$) (так как три разрезные полуметрики $\delta(A_{m-1})$, $\delta(A_m)$, $\delta(S)$ образуют гнездовое семейство) и $\mathcal{C}$ опять является гнездовым. В противном случае, пусть i такой индекс, что $S, \bar{S} \not\subset A_i$ и $S \subset A_{i+1}$. Так как $\delta(A_i)$, $\delta(A_{i+1})$ и $\delta(S)$ образуют гнездовое семейство, мы получаем, что $A_i \subset S \subset A_{i+1}$. Это показывает, что $\mathcal{C}$ является гнездовым. ■

Теорема 11.1.21. *Пусть d — расстояние на V_n . Следующие утверждения эквивалентны.*

- (i) (V_n, d) l_1^1 -вложимо.
- (ii) d вполне разложимо и его множество Σ_d d -расщеплений гнездово.
- (iii) (X, d) l_1^1 -вложимо для каждого подмножества $X \subseteq V_n$, такого что $|X| \leq 4$.
- (iv) d не имеет в качестве минора метрик кратчайшие пути графов $K_{2,3}$, K_3 и C_4 .

Доказательство. Эквивалентность (i) $\iff$ (ii) имеет место по лемме 11.1.16. Импликация (i) $\implies$ (iii) очевидна, и импликация (i) $\implies$ (iv) следует из леммы 11.1.18 и того факта, что метрики графов $K_{2,3}$, K_3 и $H(2, 2)$ не l_1^1 -вложимы.

Покажем теперь импликации (iv) $\implies$ (ii) и (iii) $\implies$ (ii). Для этого предположим, что d не удовлетворяет (ii); покажем, что тогда не имеют места ни (iii), ни (iv). Если d не вполне разложимо, то d имеет в качестве минора $d(K_{2,3})$ (по факту 11.1.15), и Σ_d не слабо согласовано. Следовательно, существуют три d -расщепления $\delta(A)$, $\delta(B)$, $\delta(C)$, такие что $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, $A \not\subset B \cup C$, $B \not\subset A \cup C$ и $C \not\subset A \cup B$. Пусть $x_1 \in A \cap B \cap C$, $x_2 \in A \setminus B \cup C$, $x_3 \in B \setminus A \cup C$, и пусть $X := \{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда (X, d) не l_1^1 -вложимо, так как имеет расстояние $\delta(A \cap X) + \delta(B \cap X) + \delta(C \cap X) = 2d(K_3)$ в качестве минора.

Теперь мы можем предположить, что d вполне разложимо и что Σ_d не гнездовое. Если найдутся два перекрещивающихся d -расщепления $\delta(A)$ и $\delta(B)$, то мы можем выбрать четыре элемента $x_1 \in A \cap B$, $x_2 \in A \cap \overline{B}$, $x_3 \in \overline{A} \cap B$ и $x_4 \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Положив $X := \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, мы получим, что расстояние $\delta(A \cap X) + \delta(B \cap X)$ является минором d , совпадающим с метрикой графа $H(2, 2)$; следовательно, (X, d) не l_1^1 -вложимо. Предположим теперь, что любые d -расщепления не перекрещиваются. По лемме 11.1.20, мы можем найти три d -расщепления $\delta(A)$, $\delta(B)$ и $\delta(C)$, не образующие гнездового семейства. Без ограничения общности можно предположить, что $A \subset B$ (так как $\delta(A)$ и $\delta(B)$ не перекрещиваются). Так как $\delta(C)$ не перекрещивается с $\delta(A)$, мы имеем, что $A \subset C$ (или $A \subset \overline{C}$) (так как $\overline{C} \not\subset A$, иначе $\delta(A)$, $\delta(B)$, $\delta(C)$ будут образовывать гнездовое семейство). Пусть $x_1 \in A$, $x_2 \in B \setminus C$ и $x_3 \in C \setminus B$, и пусть $X := \{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда метрика $\frac{1}{2}(\delta(A \cap X) + \delta(B \cap X) + \delta(C \cap X))$ на X совпадает с метрикой графа K_3 и является минором d , т. е. (X, d) не l_1^1 -вложимо. $\blacksquare$

Теперь мы переходим к характеристизации l_1^2 -вложимости. Мы начнем с рассмотрения аналога леммы 11.1.20 для 2-гнездовых семейств разрезных полуметрик. Результат¹⁾ предложения 11.1.22 будет играть

¹⁾ Предложение 11.1.22 является аналогом леммы 11.1.20 для 2-гнездовых семейств разрезных полуметрик; это было доказано в Скрайвер [1995]. Мы предпочитаем этот комбинаторный результат соответствующему результату, данному в теореме В из Бандельт и Чепой [1996], в частности, потому, что он независим, в то время как результат Бандельта и Чепоя [1996] нуждается в понятии медианных графов. Мы благодарим Алекса Скрайвера за доказательство предложения 11.1.22.

центральную роль в доказательстве теоремы 11.1.24, которая содержит несколько характеристик l_1^2 -вложимых расстояний.

Предложение 11.1.22. Пусть $\mathcal{C}$ — семейство разрезных полуметрик. Тогда $\mathcal{C}$ можно разбить на два гнездовых семейства тогда и только тогда, когда если то же имеет место для каждого подмножества $\mathcal{C}_0$ множества $\mathcal{C}$ мощности $|\mathcal{C}_0| \leq 5$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ — семейство разрезных полуметрик. Элемент $\delta(S) \in \mathcal{C}$ называется *экстремальным* в $\mathcal{C}$, если одно из множеств S или $\bar{S}$ минимально в $\tilde{\mathcal{C}}$ (т. е., если S минимально или максимально в $\tilde{\mathcal{C}}$). Следовательно, $\delta(A)$ не экстремальный элемент, если $B \subset A \subset C$ для некоторых $B, C \in \tilde{\mathcal{C}}$. Тогда мы говорим, что $\delta(A)$ *отделяет* $\delta(B)$ от $\delta(C)$.

Покажем «тогда»-часть предложения индукцией по мощности $\mathcal{C}$. Мы предположим, что $|\mathcal{C}| \geq 6$ и что каждое собственное подмножество $\mathcal{C}$ 2-гнездовое. Предположим, что $\mathcal{C}$ не является 2-гнездовым. Сначала мы покажем:

(a) В $\mathcal{C}$ имеется не более четырех экстремальных элементов.

Для этого предположим, что $\mathcal{C}$ имеет пять экстремальных элементов. По предположению, они могут быть разбиты на два гнездовых множества. Следовательно, по крайней мере три из них образуют гнездовое семейство, что противоречит условию экстремальности. Далее, мы покажем:

(b) Для каждого экстремального элемента $\delta(S) \in \mathcal{C}$ семейство $\mathcal{C} \setminus \{\delta(S)\}$ не имеет новых экстремальных элементов.

Действительно, предположим, что $\delta(S)$ — экстремальный элемент из $\mathcal{C}$, и что $\delta(T)$ — экстремальный элемент в $\mathcal{C} \setminus \{\delta(S)\}$, но не в $\mathcal{C}$. Рассмотрим разбиение $\mathcal{C} \setminus \{\delta(S)\}$ на два гнездовых семейства. Тогда $\delta(S)$ можно добавить к гнездовому семейству, содержащему $\delta(T)$, так, что новое семейство останется гнездовым. Следовательно, $\mathcal{C}$ является 2-гнездовым, в противоречие с нашим предположением. Это доказывает (b). Отсюда следует:

(c) Для каждого неэкстремального элемента $\delta(A) \in \mathcal{C}$ существуют четыре экстремальных элемента, такие что $\delta(A)$ разделяет два из них с двумя другими.

Это следует из того факта, что A содержит по крайней мере два минимальных множества и содержится в по крайней мере двух максимальных множествах из $\tilde{\mathcal{C}}$. Действительно, если S есть минимальное множество из $\tilde{\mathcal{C}}$, содержащееся в A , то существует минимальное множество T в $\tilde{\mathcal{C}} \setminus \{S, \bar{S}\}$, которое также содержится в A . Тогда T также

является минимальным в $\tilde{\mathcal{C}}$, так как $\delta(T)$ — экстремальный элемент в $\mathcal{C}$ по (b). Это доказывает (c).

Следовательно, в $\mathcal{C}$ имеется точно четыре экстремальных элемента (по (a) и (c)). Предположим, это $\delta(S_i)$ для $i = 1, 2, 3, 4$, где S_1, S_2, S_3, S_4 минимальны в $\tilde{\mathcal{C}}$. По (c), каждая неэкстремальная разрезная полуметрика $\delta(A)$ разделяет два из них с двумя другими. Имеется три возможности для такого разделения. Сначала мы покажем, что все три возможности одновременно появиться не могут. Для этого заметим, что если $\delta(A)$ и $\delta(B)$ разделяют экстремальные разрезные полуметрики двумя различными способами, то они перекрещиваются. (Действительно, пусть $\delta(A)$ разделяет $\delta(S_1), \delta(S_2)$ с $\delta(S_3), \delta(S_4)$ и $\delta(B)$ разделяет $\delta(S_1), \delta(S_3)$ с $\delta(S_2), \delta(S_4)$. Можно предположить, что $S_1, S_2 \subset A \subset \overline{S_3}, \overline{S_4}$, $S_1, S_3 \subset B \subset \overline{S_2}, \overline{S_4}$. Из этого следует, что $A \not\subset B, \overline{B}$ и $B, \overline{B} \not\subset A$, т. е. $\delta(A)$ и $\delta(B)$ перекрещиваются.) Далее, не существует трех попарно перекрещивающихся элементов из $\mathcal{C}$, так как они образовывали бы семейство, не являющееся 2-гнездовым. Следовательно, для разделения экстремальных разрезных полуметрик может возникнуть не более двух возможностей. Мы будем различать два случая.

Случай 1. Каждая неэкстремальная разрезная полуметрика $\delta(A)$ разделяет экстремальные тем же самым образом; например, разделяет $\delta(S_1), \delta(S_2)$ с $\delta(S_3), \delta(S_4)$. Рассмотрим разбиение неэкстремальных разрезных полуметрик на два гнездовых семейства: $\{\delta(A_1), \dots, \delta(A_m)\}$ и $\{\delta(B_1), \dots, \delta(B_p)\}$, где $A_1 \subset \dots \subset A_m$ и $B_1 \subset \dots \subset B_p$. Мы всегда можем добавить $\delta(S_i)$ к любому из этих двух гнездовых семейств так, что свойство «быть гнездовым» сохранится. Действительно, пусть, например, $A_m \subset \overline{S_3}, \overline{S_4}$; тогда $S_1, S_2 \subset A_1$. Или $B_p \subset \overline{S_3}, \overline{S_4}$ и $S_1, S_2 \subset B_1$; тогда $S_2 \subset B_1 \subset \dots \subset B_p \subset \overline{S_4}$ и $S_1 \subset A_1 \subset \dots \subset A_m \subset \overline{S_3}$. Или $B_p \subset \overline{S_1}, \overline{S_2}$ и $S_3, S_4 \subset B_1$; тогда мы можем добавить $\overline{S_2}, S_4$ к цепочке $B_1 \subset \dots \subset B_p$ и $S_1, \overline{S_3}$ к цепочке $A_1 \subset \dots \subset A_m$.

Случай 2. Каждая неэкстремальная разрезная полуметрика разделяет либо $\delta(S_1), \delta(S_2)$ с $\delta(S_3), \delta(S_4)$, либо $\delta(S_1), \delta(S_3)$ с $\delta(S_2), \delta(S_4)$. Пусть $\delta(A)$ удовлетворяет первой возможности, а $\delta(B)$ — второй. Тогда $\delta(A)$ и $\delta(B)$ перекрещиваются. Вновь рассмотрим разбиение неэкстремальных разрезных полуметрик на два гнездовых семейства $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$. Предположим, что $\delta(A) \in \mathcal{C}_1$ и $\delta(B) \in \mathcal{C}_2$. Тогда все элементы из $\mathcal{C}_1$ (соответственно, из $\mathcal{C}_2$) разделяют те же самые пары экстремальных разрезных полуметрик, что и $\delta(A)$ (соответственно, $\delta(B)$). Из этого следует, что оба семейства $\mathcal{C}_1 \cup \{\delta(S_2), \delta(S_3)\}$ и $\mathcal{C}_2 \cup \{\delta(S_1), \delta(S_4)\}$

являются гнездовыми. Следовательно, C является 2-гнездовым. Это завершает доказательство. $\blacksquare$

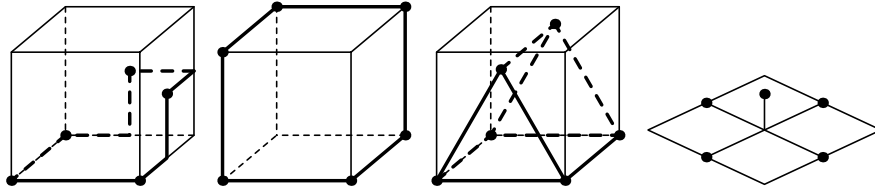


Рис. 11.1.23. Вложение C_5 , C_6 , $K_2 \times K_3$, K_5 в 3-мерное ℓ_1 -пространств.

Следующие расстояния не являются l_1^2 -вложимыми: метрики графов $K_{2,3}$, K_5 , C_5 , C_6 (контуры на 5 и 6 вершинах), $K_2 \times K_3$ (декартово произведение K_2 и K_3) (см. рисунок 11.1.23), а также четыре расстояния d_1 , d_2 , d_3 и d_4 , изображенные на рисунках 11.1.25–11.1.28. (Мы изобразили для каждого из этих расстояний его вложение в 3-мерное пространство.) (Можно проверить, что для каждого из этих расстояний его множество d -расщеплений не может быть разбито на два гнездовых семейства.) Эти девять расстояний являются единственными минимальными контрпримерами l_1^2 -вложимости; этот результат является содержанием нижеприведенной теоремы 11.1.24, которая доказана в Бандельт и Чепой [1996].

Теорема 11.1.24. Пусть d — расстояние на V_n . Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) (V_n, d) l_1^2 -вложимо.
- (ii) d вполне разложимо и его множество Σ_d d -расщеплений может быть разбито на два гнездовых подсемейства.
- (iii) (X, d) l_1^2 -вложимо для каждого подмножества $X \subseteq V_n$ с $|X| \leq 6$.
- (iv) d не имеет в качестве минора метрики графов $K_{2,3}$, C_5 , C_6 , K_5 , $K_2 \times K_3$, и метрики d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , показанные на рисунках 11.1.25–11.1.28.

Доказательство. Ясно, что (i) $\iff$ (ii) (по лемме 11.1.7), и (i) $\implies$ (iii), (iv). Ниже мы покажем импликации (iii) $\implies$ (ii) и (iv) $\implies$ (ii). Начнем с двух частных наблюдений, касающихся произвольного расстояния d . Сначала мы покажем, что

- (a) если существуют три попарно перекрещивающихся d -расщепления, то метрика графа C_6 является минором d .

Действительно, предположим, что $\delta(A), \delta(B), \delta(C) \in \Sigma_d$ попарно перекрещиваются. Без ограничения общности можно предположить, что

$A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Так как Σ_d слабо согласовано, то мы получаем, что либо $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \emptyset$, либо $\overline{A} \cap B \cap \overline{C} = \emptyset$, либо $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C = \emptyset$. Мы можем, например, предположить, что $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \emptyset$. Тогда $A \cap \overline{B} \cap C \neq \emptyset$ (так как $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$), $A \cap B \cap \overline{C} \neq \emptyset$, и $\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \neq \emptyset$. Вновь используя слабую согласованность Σ_d , мы получим, что $\overline{A} \cap B \cap C = \emptyset$ и, следовательно, что $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \neq \emptyset$, $\overline{A} \cap B \cap C \neq \emptyset$. Выбрав по одному элементу из каждого из этих шести множеств: $x_1 \in A \cap B \cap C$, $x_2 \in A \cap \overline{B} \cap C$, $x_3 \in A \cap B \cap \overline{C}$, $x_4 \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $x_5 \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ и $x_6 \in \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, положим $X := \{x_1, \dots, x_6\}$. Тогда расстояние $\delta(A \cap X) + \delta(B \cap X) + \delta(C \cap X)$ является минором d , совпадающим с метрикой 6-цикла $C_6 = (x_1, x_3, x_6, x_4, x_5, x_2)$. Следовательно, имеет место (а). Далее мы покажем, что

- если существует четыре d -расщепления $\delta(A_i)$ ($i = 0, 1, 2, 3$), такие что $\delta(A_0)$ и $\delta(A_i)$ перекрещиваются для $i = 1, 2, 3$ и A_1 ,
 (b) A_2, A_3 являются единственными минимальными множествами в $\{A_i, \overline{A}_i \mid i = 1, 2, 3\}$, то метрика C_6 или метрика $K_2 \times K_3$ является минором d .

Действительно, предположим, что такие d -расщепления существуют. Тогда, $\delta(A_1)$, $\delta(A_2)$ и $\delta(A_3)$ попарно неперекрещиваются (иначе мы попадаем в условия пункта (а)). Следовательно, $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset$ (по минимальности A_1, A_2, A_3). Пусть $x_i \in A_0 \cap A_i$ и $y_i \in \overline{A}_0 \cap A_i$ для $i = 1, 2, 3$ (такие точки существуют по предположению), и пусть $X := \{x_i, y_i \mid i = 1, 2, 3\}$. Тогда расстояние $\delta(A_0 \cap X) + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^3 \delta(A_i \cap X))$ является минором, совпадающим с метрикой $K_2 \times K_3$. Это доказывает (b).

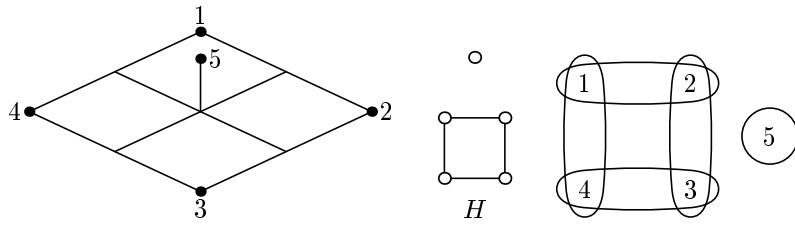
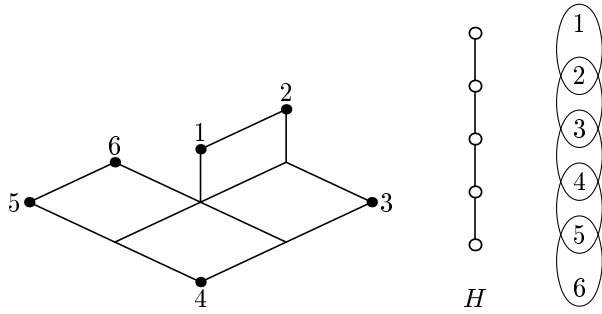
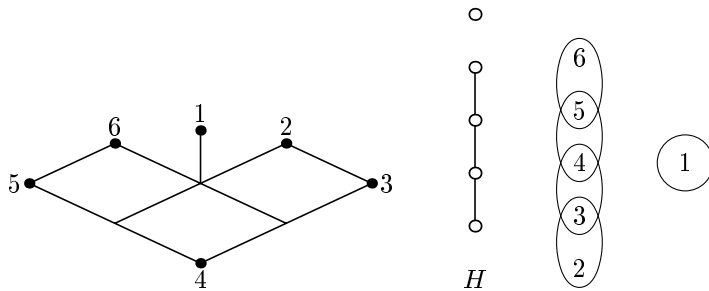
Теперь мы перейдем к доказательству теоремы. Предположим, что d не удовлетворяет (ii) и покажем, что в этом случае ни (iii), ни (iv) не имеют места. Если d не вполне разложимо, то утверждение доказано. Действительно, d имеет $d(K_{2,3})$ в качестве минора, что противоречит и (iii), и (iv). Предположим теперь, что d вполне разложимо и что Σ_d не 2-гнездовое. По предложению 11.1.22, существует подмножество $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_d$, такое что $|\mathcal{C}| \leq 5$, и $\mathcal{C}$ не 2-гнездовое. Выберем такое $\mathcal{C}$ с минимальной мощностью. Рассмотрим три случая.

Случай 1. $|\mathcal{C}| = 3$. Тогда каждые два члена из $\mathcal{C}$ перекрещиваются. По (а) мы получаем, что $d(C_6)$ является минором d ; следовательно, (iii) и (iv) не имеют места.

Случай 2. $|\mathcal{C}| = 4$. Предположим, что каждый элемент из $\mathcal{C}$ не перекрещивается по меньшей мере с одним элементом из $\mathcal{C}$. Пусть G

обозначает граф на $\mathcal{C}$, в котором два элемента из $\mathcal{C}$ соединены ребром, если они не перекрещиваются. Тогда G не содержит паросочетаний размера 2 (иначе $\mathcal{C}$ было бы 2-гнездовым). Кроме того, дополнение G не содержит треугольников (по минимальности $\mathcal{C}$). Из этого следует, что $\mathcal{C}$ состоит из треугольников. Следовательно, $\mathcal{C} = \{\delta(A_i) \mid i = 0, 1, 2, 3\}$, где $\delta(A_0)$ перекрещивается с $\delta(A_i)$ ($i = 1, 2, 3$), и $\delta(A_i)$ ($i = 1, 2, 3$) попарно не перекрещиваются. Мы требуем, чтобы множество $\mathcal{A} := \{A_i, \bar{A}_i \mid i = 1, 2, 3\}$ имело по крайней мере три минимальных элемента. (Для этого предположим, что A_1 и A_2 являются единственными минимальными элементами $\mathcal{A}$. Тогда $A_1 \subset \bar{A}_2$, $A_2 \subset \bar{A}_1$ и, например, $A_1 \subset A_3$, $A_2 \subset \bar{A}_3$. Отсюда следует, что $A_1 \subset A_3 \subset \bar{A}_2$. Следовательно, $\mathcal{C}$ можно покрыть двумя гнездовыми семействами, что приводит к противоречию.) Таким образом, мы можем предположить, что A_1, A_2 и A_3 являются единственными минимальными элементами $\mathcal{A}$. Применяя (b), мы получим, что $d(K_2 \times K_3)$ является минором d , и, следовательно, (iii) и (iv) не имеют места.

Случай 3. $|\mathcal{C}| = 5$. Пусть H обозначает теперь граф на $\mathcal{C}$, где два элемента соединены ребром, если они перекрещиваются. Мы требуем, чтобы максимальная степень вершины в H не превосходила 2. Предположим сначала, что в H имеется вершина степени 4; например, пусть $\delta(A_5) \in \mathcal{C}$ перекрещивается с 4 другими элементами $\delta(A_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) из $\mathcal{C}$. $\delta(A_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) являются попарно неперекрещивающимися и для каждого $i = 1, 2, 3, 4$ множество $\mathcal{C} \setminus \{\delta(A_i)\}$ является 2-гнездовым (по минимальности $\mathcal{C}$). Из этого следует, что семейство $\mathcal{C} \setminus \{\delta(A_5), \delta(A_i)\}$ является гнездовым для каждого $i = 1, 2, 3, 4$. По лемме 11.1.20 отсюда следует, что $\mathcal{C} \setminus \{\delta(A_5)\}$ является гнездовым. Следовательно, $\mathcal{C}$ можно покрыть двумя гнездовыми семействами, что приводит к противоречию. Предположим теперь, что H имеет вершину степени 3. Например, пусть $\delta(A_5)$ перекрещивается с $\delta(A_i)$ ($i = 1, 2, 3$) и не перекрещивается с $\delta(A_4)$. Семейство $\mathcal{C} \setminus \{\delta(A_4)\}$ можно покрыть двумя гнездовыми семействами. Следовательно, семейство $\{\delta(A_1), \delta(A_2), \delta(A_3)\}$ является гнездовым и, следовательно, $\mathcal{C}$ можно покрыть двумя гнездовыми семействами, что дает противоречие. Таким образом, мы показали, что максимальная степень вершины в H не превосходит 2. Следовательно, H является либо циклом на 4 или 5 вершинах, либо несвязным объединением путей. Для каждого $\delta(A_i)$ степени меньше или равной 1 в H , мы можем выбрать точку из A_i , не принадлежащую другому A_j . Кроме того, мы можем выбрать точку в каждом непустом пересечении $A_j \cap A_k$, где по меньшей мере один из элементов $\delta(A_j)$ и $\delta(A_k)$ имеет степень 2 в H . Таким

Рис. 11.1.25. $H = C_4$, расстояние d_1 .Рис. 11.1.26. $H = P_5$, расстояние d_2 .Рис. 11.1.27. H есть несвязное объединение P_1 и P_4 , расстояние d_3 .

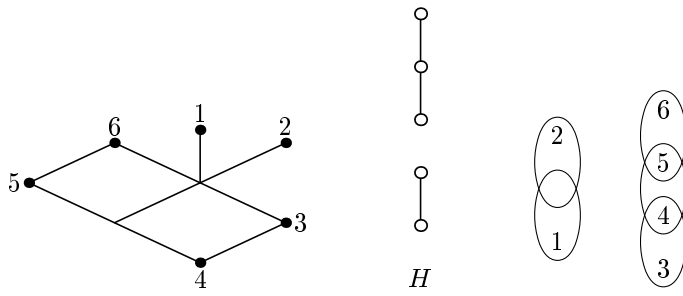


Рис. 11.1.28. H есть несвязное объединение P_2 и P_3 , расстояние d_4 .

образом, мы можем выбрать множество X , состоящее из пяти или шести точек, такое что семейство $\{A_i \cap X, \overline{A_i} \cap X \mid i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ имеет по крайней мере пять минимальных членов. Следовательно, семейство $\{\delta(A_i \cap X) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ не может быть покрыто двумя гнездовыми семействами и, значит, (X, d) не ℓ_1^2 -вложимо. Ниже мы приводим список возможных конфигураций графа H с соответствующим расстоянием $d_H := \sum_{i=1}^5 \delta(B_i)$ на X , где $B_i = A_i \cap X$. В каждом случае мы находим одно из запрещенных расстояний в качестве минора.

- (i) Если $H = C_5$, то $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{2, 3\}$, $B_3 = \{3, 4\}$, $B_4 = \{4, 5\}$ и $B_5 = \{5, 1\}$. Следовательно d_H (с точностью до множителя 2) — метрика кратчайшего пути в C_5 .
- (ii) Если H является несвязным объединением двух путей P_1 и P_2 , то $B_i = \{i\}$ для $i = 1, \dots, 5$. Следовательно, d_H (с точностью до множителя 2) — метрика полного графа K_5 .

Оставшиеся случаи рассмотрены на рисунках 11.1.25–11.1.28. (Мы показываем как вложение расстояния в 3-мерную сеть, так и множества B_i .)

Наконец, упомянем без доказательства результат Бандельта и Чепоя [1996], касающийся характеристики пространств расстояний, которые можно вложить в $(\mathbb{Z}^2, d_{\ell_1})$, прямолинейную 2-мерную сеть (или дискретную плоскость). Интересно, что этот результат очень прост по своей формулировке в сравнении с результатом для ℓ_1 -плоскости из теоремы 11.1.24. Именно,

Теорема 11.1.29. Пусть (X, d) — пространство расстояний с целочисленным d (и произвольным X). Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) (X, d) является изометрическим подпространством $(\mathbb{Z}^2, d_{\ell_1})$.

- (ii) Каждое подпространство (Y, d) пространства (X, d) с $|Y| \leq 6$ может быть вложено в $(\mathbb{Z}^2, d_{\ell_1})$.
- (iii) (X, d) удовлетворяет следующему условию четности¹⁾: $d(x, y) + d(x, z) + d(y, z) \in 2\mathbb{Z}$ для всех $x, y, z \in X$, и каждое подпространство (Y, d) пространства (X, d) с $|Y| \leq 6$ вложено в ℓ_1 -плоскость $(\mathbb{R}^2, d_{\ell_1})$.
- (iv) каждое конечное подпространство (X, d) удовлетворяет условию четности, вполне разложимо и семейство его d -расщеплений является 2-гнездовым. ■

В частности, пространство расстояний (X, d) вложено в сеть $(\mathbb{Z}^2, d_{\ell_1})$ тогда и только тогда, когда оно вложено в плоскость $(\mathbb{R}^2, d_{\ell_1})$ и удовлетворяет условию четности.

Малиц и Малиц [1992] показали, что за время $O(n^3)$ можно проверить, является ли пространство расстояний на n точках вложимым в ℓ_1 -плоскость, и построить такое вложение, если оно существует. Следовательно, вложимость в 2-мерную сеть можно проверить за то же самое время сложности. Кроме того, Бандельт и Чепой [1996] показали, как из вложения в плоскость $\mathbb{R}^2$ (если оно существует) построить вложение в сеть $\mathbb{Z}^2$ за время $O(n \log n)$.

11.2. Минимальная ℓ_p -размерность

Здесь мы рассмотрим проблему нахождения минимальной ℓ_p -размерности $m_{\ell_p}(n)$ произвольного ℓ_p -вложимого пространства на n точках. Напомним определение $m_{\ell_p}(n)$ из соотношения (3.1.2). Именно, $m_{\ell_p}(n)$ есть наименьшее целое m , такое что любое ℓ_p -вложимое пространство на n точках может быть вложено в l_p^m . Основные результаты могут быть получены следующим образом.

Как уже было замечено в соотношениях (3.1.3) и (6.2.6),

$$m_{\ell_\infty}(n) \leq n - 1 \quad \text{и} \quad m_{\ell_1}(n) = n - 1$$

но, для произвольного p , сразу не следует, что $m_{\ell_p}(n)$ конечно. Вольф [1967] показал, что

$$m_{\ell_\infty}(n) \leq n - 2$$

¹⁾ Условие четности является, очевидно, необходимым условием для вложимости в гиперкуб или ℓ_1 -сеть $\mathbb{Z}^m$ (для некоторого $m \geq 1$); см. отношение 24.1.1.

и Холштинский [1978] показал, что

$$m_{\ell_\infty}(n) \geq \left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor \quad \text{для } n \geq 4.$$

Болл [1990] доказал существование константы c , такой что

$$m_{\ell_\infty}(n) \geq n - cn^{\frac{3}{4}}.$$

Витсенхаузен получил оценку

$$m_{\ell_1}(n) \leq \binom{n}{2}.$$

Фише [1988] и Болл [1990] (независимо) расширили результат до любого $p \geq 1$ (см. предложение 11.2.3 ниже). Другими словами, каждое ℓ_p -вложимое расстояние на n точках можно вложить в l_p^m , где $m = \binom{n}{2}$. Как замечено в Фише [1994], граница может быть немного улучшена до

$$m_{\ell_1}(n) \leq \binom{n}{2} - 1.$$

Болл [1990] предложил следующую нижнюю границу для минимальной ℓ_p -размерности:

$$m_{\ell_p}(n) \geq \binom{n-1}{2} \quad \text{для } 1 < p < 2, \quad n \geq 3 \text{ и}$$

$$m_{\ell_1}(n) \geq \binom{n-2}{2} \quad \text{для } n \geq 4.$$

(Смотрите предложение 11.2.4 ниже.) На самом деле,

$$m_{\ell_1}(4) = m_{\ell_\infty}(4) = 2, \quad m_{\ell_1}(5) = 3 \quad \text{и} \quad m_{\ell_1}(6) = 6$$

(см. Болл [1990] и Фише [1994]). Болл [1990] сделал следующее предположение относительно минимальной ℓ_1 -размерности.

Гипотеза 11.2.1. $m_{\ell_p}(n) = \binom{n-2}{2}$ для всех $n \geq 5$.

Верхняя граница: $m_{\ell_p}(n) \leq \binom{n}{2}$ основана на теореме Каратеодори, примененной к разрезному конусу (если $p = 1$) или к конусу $\text{NOR}_n(p)$ (для $p \geq 1$). Напомним определение $\text{NOR}_n(p)$. Для данного целого $p \geq 1$ $\text{NOR}_n(p)$ состоит из расстояний d на V_n , для которых $d^{\frac{1}{p}}$ является ℓ_p -вложимым, т. е. для которых существует n векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$), таких что

$$d_{ij} = (\|v_i - v_j\|_p)^p$$

для всех $1 \leq i < j \leq n$. В случае $p = 1$ конус $\text{NOR}_n(1)$ совпадает с разрезным конусом CUT_n (по предложению 4.2.2). Элемент $d \in \text{NOR}_n(p)$

называется линейным, если $d^{\frac{1}{p}}$ l_p^1 -вложимо, т. е. если существуют $x_1, \dots, x_n \in R$, такие что $d_{ij} = |x_i - x_j|^p$ для всех $1 \leq i < j \leq n$. Например, каждая разрезная полуметрика принадлежит $\text{NOR}_n(p)$ и является линейной, т. е.

$$\text{CUT}_n \subseteq \text{NOR}_n(p).$$

Мы собрали в следующем результате несколько (простых для проверки) свойств множества $\text{NOR}_n(p)$.

Лемма 11.2.2.

- (i) $\text{NOR}_n(p)$ является конусом.
- (ii) Пусть $d \in \text{NOR}_n(p)$. Тогда $d^{\frac{1}{p}}$ является l_1^m -вложимым тогда и только тогда, когда d есть сумма m линейных членов $\text{NOR}_n(p)$. В частности, если d лежит на экстремальном луче $\text{NOR}_n(p)$, то d является линейным. ■

Предложение 11.2.3. $m_{\ell_1}(n) \leq \binom{n}{2} - 1$ и $m_{\ell_p}(n) \leq \binom{n}{2}$ для всех $p \geq 1$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $p = 1$. Покажем, что каждая полуметрика $d \in \text{CUT}_n$ может быть записана в виде неотрицательной комбинации $\binom{n}{2} - 1$ линейных членов CUT_n . Это следует из теоремы Каратеодори, если d лежит на границе CUT_n . Предположим теперь, что d лежит внутри CUT_n . Пусть $\alpha > 0$ такое, что $d - \alpha \delta(1)$ лежит на границе CUT_n . Тогда $d - \alpha \delta(1)$ можно записать в виде неотрицательной комбинации $\binom{n}{2} - 1$ разрезных полуметрик. Отсюда следует, что d можно записать в виде неотрицательной комбинации линейных полуметрик (так как $\delta(1)$ вместе с каждой другой разрезной полуметрикой образует гнездовое семейство). Рассмотрим теперь случай $p \geq 1$. Пусть H обозначает гиперплоскость в $\mathbb{R}^{E_n}$, которая определяется равенством $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} = 1$. Положим

$$L := \{d \in \text{NOR}_n(p) \mid d \in H \text{ и } d \text{ линейно}\}.$$

Можно показать, что L является компактным множеством, и что $\text{NOR}_n(p) \cap H$ есть $(\binom{n}{2} - 1)$ -мерное выпуклое множество, совпадающее с выпуклой оболочкой L . Следовательно, из теоремы Каратеодори следует, что каждый член $\text{NOR}_n(p)$ можно записать в виде суммы $\binom{n}{2}$ линейных членов $\text{NOR}_n(p)$. Отсюда мы получаем необходимый результат. ■

Предложение 11.2.4.

- (i) $m_{\ell_1}(n) \geq \binom{n-2}{2}$ для $n \geq 4$.
- (ii) $m_{\ell_p}(n) \geq \binom{n-1}{2}$ для $1 < p < 2$ и $n \geq 3$.

Доказательство. (i) Пусть $m := \binom{n-2}{2}$. Мы рассмотрим полуметрику d на V_n , которая вложима в l_1^m , но не в l_1^k , если $k < m$. Положим $d := \sum_{2 \leq r < s \leq n-1} \delta(\{1, r, s\})$; следовательно,

$$\begin{cases} d_{1n} = \binom{n-2}{2}, \\ d_{1i} = \binom{n-3}{2} & \text{для } 2 \leq i \leq n-1, \\ d_{ij} = 2(n-4) & \text{для } 2 \leq i < j \leq n-1, \\ d_{in} = n-3 & \text{для } 2 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

По построению, d изометрически вложима в l_1^m . Покажем, что d не может быть вложима в l_1^k при $k < m$. Для этого рассмотрим неравенство отрицательного типа (6.1.1) с $b := (-2, 1, \dots, 1, -(n-4))$, т. е. неравенство

$$(11.2.5) \quad 2(n-4)x_{1n} - 2 \sum_{2 \leq i \leq n-1} x_{1i} - (n-4) \sum_{2 \leq i \leq n-1} x_{in} + \sum_{2 \leq i < j \leq n-1} x_{ij} \leq 0.$$

Пусть F обозначает грань конуса $\text{NOR}_n(1)$ (равного CUT_n), которая определяется неравенством (11.2.5). Ясно, что разрезные полуметрики $\delta(\{1, r, s\})$ ($2 \leq r < s \leq n-1$) являются единственными полуметриками, лежащими на F . Кроме того, они линейно независимы. Следовательно, F является симплицальной гранью $\text{NOR}_n(1)$. Следовательно, d является ℓ_1 -жесткой; т. е. $d := \sum_{2 \leq r < s \leq n-1} \delta(\{1, r, s\})$ — ее единственная $\mathbb{R}_+$ -реализация. Никакие две разрезные полуметрики $\delta(\{1, r, s\})$ и $\delta(\{1, r', s'\})$ не образуют гнездовую пару. Следовательно, семейство $\{\delta(\{1, r, s\}) \mid 2 \leq r < s \leq n-1\}$ не может быть покрыто меньше, чем m гнездовыми подсемействами. Это показывает, что d не l_1^k -вложимо при $k < m$.

(ii) Мы только наметим схему доказательства, которое аналогично доказательству (i). Положим $m := \binom{n-1}{2}$. Рассмотрим векторы $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, определенные как

$$(v_i)_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{если } r = i, \\ -1, & \text{если } s = i, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для $1 \leq r < s \leq n$. Определим расстояние d на V_n , положив $d_{ij} := \|v_i - v_j\|_p$ для $1 \leq i < j \leq n$. Таким образом, d вложимо в l_1^m по построению. Можно показать, что d не вложимо в l_1^k при $k < m$, используя, как и в случае (i), специальное неравенство, допустимое для конуса $\text{NOR}_n(p)$, и выполняющееся как равенство для d^p . Именно, нужно использовать неравенство

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\|u_i - u_j\|_p)^p - (n + 2^{p-1} - 2)(\|u_i\|_p)^p \leq 0,$$

которое имеет место для каждого множества векторов $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^h$ ($h \geq 1$), если $1 \leq p \leq 2$ (Болл [1987]). ■

Замечание 11.2.6. Линьял, Лондон и Рабинович [1994] определили *метрическую размерность* $\dim(G)$ связного графа G как наименьшее целое m , для которого существует норма $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^m$, такая что графическое пространство (V, d_G) графа G может быть изометрически вложено в пространство $(\mathbb{R}^m, d_{\|\cdot\|})$. Определение очевидным образом переносится на произвольное полуметрическое пространство. Следовательно, вместо того, чтобы рассматривать только вложения в фиксированное банахово ℓ_p -пространство, Линьял, Лондон и Рабинович [1994] рассматривают вложения в произвольное нормированное пространство.

Интересно, что это понятие метрической размерности связано с ℓ_∞ -вложениями следующим образом. Пусть (V_n, d) — полуметрическое пространство. Тогда его метрическая размерность равна минимальному рангу системы векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^k$ ($k \geq 1$), дающих ℓ_∞ -вложение (V_n, d) , т. е. таких, что $d_{ij} = \|v_i - v_j\|_\infty$ для всех $1 \leq i < j \leq n$.

Метрическая размерность некоторых графов была вычислена в Линьял, Лондон и Рабинович [1994]. В частности, $\dim(K_n) = \lceil \log_2(n) \rceil$, $\dim(T) = O(\log_2(n))$ для дерева T на n вершинах (обе реализуются при ℓ_∞ -вложении), $\dim(C_{2n}) = n$ для цикла на $2n$ вершинах (реализуется при ℓ_1 -вложении), $\dim(K_{n \times 2}) \geq n - 1$. Было показано также, что, если метрическая размерность графа G на n вершинах равна d , то каждая вершина имеет степень $\leq 3^d - 1$, G имеет диаметр $\geq \frac{1}{2}(n^{\frac{1}{d}} - 1)$ и существует подмножество S на $O(dn^{1-\frac{1}{d}})$ вершинах, удаление которого превращает граф G в несвязный граф, такой что каждая связная компонента $G \setminus S$ имеет не более чем $\left(1 - \frac{1}{d} + o(1)\right)n$ вершин.

Дьюдни [1980] рассмотрел вопрос изометрического вложения графов в ℓ_p -пространство (F^m, d_{ℓ_p}) , где F — некоторое поле. Он показал, в частности, что каждый связный граф G на n вершинах можно изометрически вложить в пространство $(\{0, 1, 2\}^{n-2}, d_{\ell_\infty})$. Кроме того, вычисление наименьшего m такого, что G изометрически вложим в $(\{0, 1, 2\}^m, d_{\ell_\infty})$, является NP-трудной проблемой. ■

Примеры приложений L_1 -метрик

L_1 -метрики широко используются в различных областях, например, для анализа информационных структур, для распознавания компьютерных рисунков, или для сравнения случайных величин в вероятностях. Мы даем здесь некоторую (поверхностную) информацию о некоторых областях применения L_1 -метрик. Важность L_1 -метрик иллюстрируется, в частности, большим количеством названий, под которыми они известны. Например, метрики Манхэттена, метрики такси, или 4-метрики являются различными названиями одного и того же понятия, именно, ℓ_1 -расстояния на плоскости; дополнительная терминология дана в разделе 12.3.

12.1. L_1 -метрики в теории вероятностей

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — вероятностное пространство и пусть $X: \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — случайная величина, принадлежащая $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$; таким образом, $\int_{\Omega} |X(\omega)| \mu(d\omega) < \infty$. Пусть F_X обозначает функцию распределения для X , т. е. $F_X(x) = \mu(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\})$ для $x \in \mathbb{R}$; ее производная F'_X , если она существует, называется плотностью распределения для X . В монографии Рачева [1991] рассмотрено много метрик случайных величин; среди них следующие, основанные на L_1 -метриках:

- Обычная L_1 -метрика на множестве случайных величин:

$$L_1(X, Y) = E(|X - Y|) = \int_{\Omega} |X(\omega) - Y(\omega)| \mu(d\omega).$$

- Метрика Монжа–Кантаровича–Вассерштейна (т. е. L_1 -метрика на множестве функций распределения):

$$k(X, Y) = \int_{\mathbb{R}} |F_X(x) - F_Y(x)| dx$$

- Вполне оценочная метрика (total valuation metric) нормы (т. е. L_1 -метрика на множестве плотностей распределения, когда они существуют):

$$\sigma(X, Y) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |F'_X(x) - F'_Y(x)| dx.$$

- Инженерная метрика (т. е. L_1 -метрика на множестве ожидаемых значений):

$$\text{EN}(X, Y) = |E(X) - E(Y)|.$$

- Индикаторная метрика:

$$i(X, Y) = E(1_{X \neq Y}) = \mu(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}).$$

Заметим, что L_p -аналоги ($1 \leq p \leq \infty$) приведенных выше метрик, особенно первых двух, также используются в теории вероятностей.

Известно несколько результатов, устанавливающих связи между вышеприведенными метриками. Одним из основных результатов является теорема Монжа–Канторовича о перемещении масс, которая показывает, что вторая метрика $k(X, Y)$ может рассматриваться как минимум первой метрики $L_1(X, Y)$ по всем совместным распределениям X и Y с заданными маргинальными распределениями. Связь между $L_1(X, Y)$ и инженерной метрикой $\text{EN}(X, Y)$ дана в Рачев [1991] как решение проблемы моментов. Аналогично, связь между вполне оценочной метрикой $\sigma(X, Y)$ и индикаторной метрикой $i(X, Y)$ дана в теореме Добрушина о существовании и единственности гиббсовских полей в статистической физике. Смотрите Рачев [1991] для детального ознакомления с вышеназванными темами.

Мы упомянем другой пример использования L_1 -метрик в теории вероятностей, именно, при изучении гауссовых случайных полей. За подробностями мы отсылаем читателя к статьям Нода [1987, 1989]. Пусть $B = (B(x) \mid x \in M)$ есть центрированная гауссовская система с пространством параметров M , $0 \in M$. Дисперсия приращения обозначена как

$$d(x, y) := E((b(x) - B(y))^2) \quad \text{для } x, y \in M.$$

Если (M, d) является ℓ_1 -вложимым метрическим пространством, гауссовская система называется броуновским движением Леви с пространством параметров (M, d) . Случай $M = \mathbb{R}^n$ и $d(x, y) = \|x - y\|_2$ дает обычное броуновское движение с n -мерным параметром. По лемме 4.2.5, (M, d) является L_1 -вложимым тогда и только тогда, когда существует пространство с неотрицательной мерой (H, ν) и отображение

$x \mapsto A_x \subseteq H$ с $\nu(A_x) < \infty$ для $x \in M$, такое что $d(x, y) = \nu(A_x \triangle A_y)$ для $x, y \in M$. Следовательно, гауссовская система допускает представление, называемое представлением типа Ченцова

$$B(x) = \int_{A_x} W(dh) \quad \text{для } x \in M$$

в терминах гауссовской случайной меры, основанной на измеримом пространстве (H, ν) с $d(x, y) = \nu(A_x \triangle A_y)$, тогда и только тогда, когда d ℓ_1 -вложимо.

Это представление типа Ченцова можно сравнить с формулой Крофтона для проективных метрик из теоремы 8.3.3. Они естественным образом появляются вместе в Амбарцумян [1982] (см. части А.8–А.9 приложения А).

12.2. L_1 -метрики в анализе статистической информации

Структурой данных называется пара (I, d) , где I есть конечное множество, называемое *популяцией*, а $d: I \times I \mapsto \mathbb{R}_+$ есть симметрическое отображение с $d_{ii} = 0$ для $i \in I$, называемое *индексом различия*. Типичной проблемой в анализе статистической информации является выбор «хорошего представления» структуры данных; обычно «хорошим» считается представление, позволяющее представить структуру данных графическим изображением. Каждый вид визуального представления соответствует, на самом деле, специальному выбору индекса различия как расстояния, и проблема превращается в классическую проблему изометрического вложения для специальных классов метрик.

Например, в иерархической классификации случай, когда d есть ультраметрика, соответствует возможности получения представления структуры данных при так называемой иерархии индексов (см. Джонсон [1967]). Естественным обобщением является случай, когда d есть метрика кратчайшего пути взвешенного дерева, т. е. когда d удовлетворяет условию четырех точек (см. раздел 20.4); тогда структура данных называется *аддитивным деревом*. Структуры данных (I, d) , для которых d ℓ_2 -вложимо, рассматриваются в фактор-анализе и многомерном шкалировании. Эти два случая вместе с кластерным анализом являются тремя основными методами изучения структур данных. Случай, когда d

ℓ_1 -вложимо, является естественным расширением ультраметрического и ℓ_2 -случаев, и на него стали обращать большое внимание в последние годы.

ℓ_p -аппроксимация состоит в минимизации оператора оценки $\|e\|_p$, где e — вектор или случайная величина (представляющая ошибку, отклонение и так далее). В анализе статистических данных используются следующие критерии:

- ℓ_2 -норма, в методе наименьших квадратов; или ее квадрат,
- ℓ_∞ -норма, в минимаксном методе,
- ℓ_1 -норма, в методе наименьшей абсолютной величины (LAV).

На самом деле, ℓ_1 -критерий очень широко используется в последние годы.

Важность роли, играемой ℓ_1 -метриками в анализе статистических данных, можно понять, например, из томов Доджа [1987b, 1992] и ван Куцема [1994], сообщений конференций по анализу статистических данных. Мы отсылаем читателя, в частности, к статьям Кричли и Фише [1994], Доджа [1987a], Фише [1987a, 1987b, 1992, 1994], Ле Кальве [1987], Вайда [1987] в этих томах.

12.3. ℓ_1 -метрики в компьютерном зрении и распознавание образов

ℓ_p -метрики используются также в новой области, называемой распознаванием образов, или зрением роботов, или цифровой топологией; см., например, Розенфельд и Как [1976], Хорн [1986].

Компьютерный рисунок представляет собой подмножество $\mathbb{Z}^n$ (или шкалирования $\frac{1}{m}\mathbb{Z}^n$ множества $\mathbb{Z}^n$), которое называется *цифровым n -D-пространством* (или *n -D m -квантованным пространством*). Обычно рисунки представлены в цифровой плоскости $\mathbb{Z}^2$ или в цифровом 3-D-пространстве $\mathbb{Z}^3$. Точки $\mathbb{Z}^n$ называются пикселями.

Для данного рисунка в $\mathbb{Z}^n$, т. е. для данного подмножества A множества $\mathbb{Z}^n$, можно определить его объем $\text{vol}(A)$ как $\text{vol}(A) := |A|$, т. е. как число пикселей, содержащихся в A . Тогда расстояние

$$d(A, B) := \text{vol}(A \triangle B)$$

используется в цифровой топологии для вычисления расстояния между

рисунками. Это цифровой аналог метрики симметрической разности, используемой в выпуклой геометрии, где расстояние между выпуклыми телами A и B в $\mathbb{R}^n$ определяется как n -мерный объем их симметрической разности.

Вышеупомянутая метрика и другие метрики на $\mathbb{Z}^n$ используются для изучения аналогов таких классических геометрических понятий, как объем, периметр, сложность очертаний и так далее, в случае компьютерных рисунков. Применяемыми чаще всего метриками на $\mathbb{Z}^n$ являются ℓ_1 - и ℓ_∞ -метрики, а также ℓ_2 -метрика после ее округления ближайшим сверху (или снизу) целым числом.

ℓ_1 -метрика, рассматриваемая на $\mathbb{Z}^n$, называется также *метрикой кубической сетки*, а ℓ_∞ -метрика называется *метрикой решетки* (или *метрикой Чебышева*, или *однородной метрикой*). Более специфические названия используются в случае $n = 2$. Тогда ℓ_1 -метрика известна также как *метрика городских кварталов* (или *метрика Манхэттена*, или *метрика такси*, или *прямолинейная метрика*), или как *4-метрика*, так как каждая точка из $\mathbb{Z}^2$ имеет в ℓ_1 -метрике точно четырех ближайших соседей в $\mathbb{Z}^2$. Читатель может обратиться к Краузе [1986] для детального знакомства с метриками такси. Аналогично, ℓ_∞ -метрика на $\mathbb{Z}^2$ называется *метрикой шахматной доски*, или *8-метрикой*, так как каждая точка из $\mathbb{Z}^2$ имеет в ℓ_∞ точно восемь ближайших соседей. Действительно, заметим, что единичная сфера $S_{\ell_1}^1$ (с центром в начале координат) для ℓ_1 -нормы в $\mathbb{R}^2$ содержит точно 4 целых точки, в то время как единичная сфера $S_{\ell_\infty}^1$ для ℓ_∞ -нормы содержит восемь целых точек.

Заметим также, что ℓ_1 -метрика на $\mathbb{Z}^n$ может рассматриваться как метрика кратчайшего пути (бесконечного) графа с множеством вершин $\mathbb{Z}^n$. Именно, рассмотрим граф на $\mathbb{Z}^n$, в котором две точки решетки связаны ребром, если ℓ_1 -расстояние между ними равно 1; этот граф есть ни что иное, как обычная кубическая сетка. Тогда расстояние кратчайшего пути между двумя точками решетки в сети равно ℓ_1 -расстоянию между ними. Аналогично, ℓ_∞ -метрика на $\mathbb{Z}^n$ совпадает с метрикой кратчайшего пути графа на $\mathbb{Z}^n$, ребра которого определены с помощью ℓ_∞ -расстояния. Для $n = 2$ ребра соответствуют движениям короля по шахматной доске; кроме того, $(\mathbb{Z}^2, d_{\ell_\infty})$ есть изометрическое подпространство $\left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2, d_{\ell_1}\right)$, определяемое вложением, данным в соотношении (3.1.6).

Имеется несколько других полезных метрик на $\mathbb{Z}^2$, получаемых комбинированием ℓ_1 - и ℓ_∞ -метрик. Следующие два примера, октогональное

и гексогональные расстояния, являются метриками кратчайшего пути; следовательно, для их определения достаточно описать пары точек решетки, расстояние между которыми равно 1, т. е. описать их единичные шары.

Октогональное расстояние d_{oct} . Для каждой точки $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ее единичная сфера S_{oct}^1 , с центром в точке (x, y) , определена как

$$S_{oct}^1(x, y) = S_{\ell_1}^3(x, y) \cap S_{\ell_\infty}^2(x, y),$$

где $S_{\ell_1}^3(x, y)$ обозначает ℓ_1 -сферу радиуса 3, а $S_{\ell_\infty}^2(x, y)$ обозначает ℓ_∞ -сферу радиуса 2, с центрами в точке (x, y) . Следовательно, $S_{oct}^1(x, y)$ содержит точно 8 целых точек; заметим, что движение из (x, y) к ее восьми соседям на расстоянии 1 соответствует движениям коня по шахматной доске. На рисунке 12.3.1 показаны сферы $S_{\ell_1}^3$, $S_{\ell_\infty}^2$ и S_{oct}^1 .

Гексагональное расстояние или 6-метрика d_{hex} . Единичная сфера этой метрики $S_{hex}^1(x, y)$ с центром $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ определена как

$$S_{hex}^1(x, y) = S_{\ell_1}^1(x, y) \cup \{(x-1, y-1), (x-1, y+1)\} \quad \text{для четного } x,$$

$$S_{hex}^1(x, y) = S_{\ell_1}^1(x, y) \cup \{(x+1, y-1), (x+1, y+1)\} \quad \text{для нечетного } x.$$

Единичная сфера $S_{hex}^1(x, y)$ содержит точно 6 целых точек. На рисунке 12.3.2 показаны единичные сферы $S_{hex}^1(0, 0)$ и $S_{hex}^1(-1, 3)$. (На самом деле, пространство расстояний $(\mathbb{Z}^2, d_{hex})$ вложимо со шкалой 2 в гексагональную сетку A_2 (состоящую из векторов в $\mathbb{Z}^3$, сумма которых равна 0); подробности см. в Лучак и Розенфельд [1976].)

Рассматривались и некоторые другие модификации ℓ_1 -метрик на плоскости; см., например, Де Берг [1991] и литературу в этой работе.

На практике вместо полного пространства $\mathbb{Z}^n$ рассматривается подмножество $(\mathbb{Z}_k)^n := \{0, 1, \dots, k-1\}^n$. Заметим, что $(\mathbb{Z}_2)^n$ есть ни что иное, как множество вершин n -мерного гиперкуба, и $((\mathbb{Z}_2)^n, d_{\ell_1})$ есть n -мерное гиперкубическое метрическое пространство. Заметим также, что $(\mathbb{Z}_3)^2$ есть единичный шар (с центром в точке $(1, 1)$) пространства $(\mathbb{Z}^n, d_{\ell_\infty})$. $(\mathbb{Z}_4)^n$ известно как *доска тик-так-ту* (или *n-кубик Рубика*), а $(\mathbb{Z}_k)^2$, $(\mathbb{Z}_k)^3$ называются, соответственно, *k-грилем* и *k-каркасом*.

Другими расстояниями, используемыми на $(\mathbb{Z}_k)^n$, в частности, в теории кодирования, являются расстояние Хэмминга d_H и *расстояние Ли* d_{Lee} , определяемое как

$$d_{Lee}(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} \min(|x_i - y_i|, k - |x_i - y_i|) \quad \text{для всех } x, y \in (\mathbb{Z}_k)^n.$$

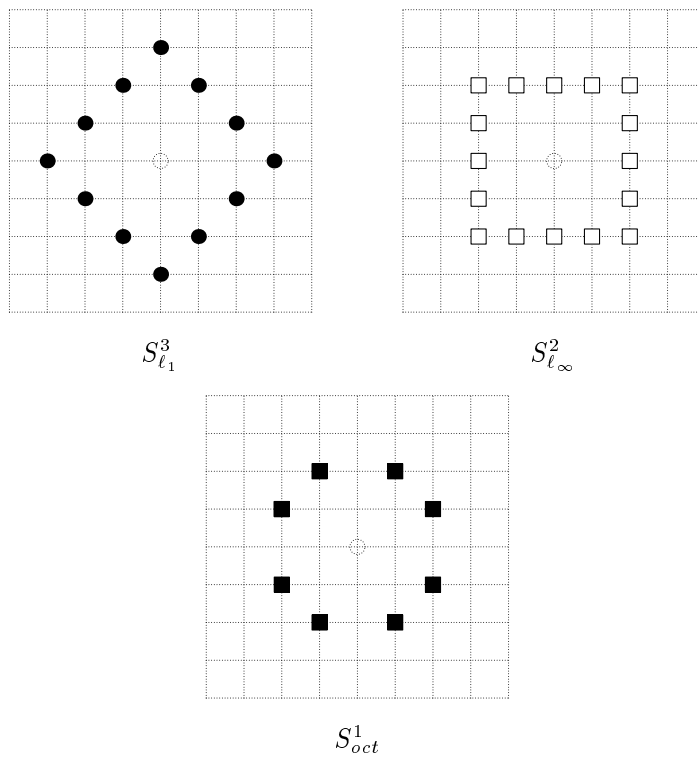


Рис. 12.3.1

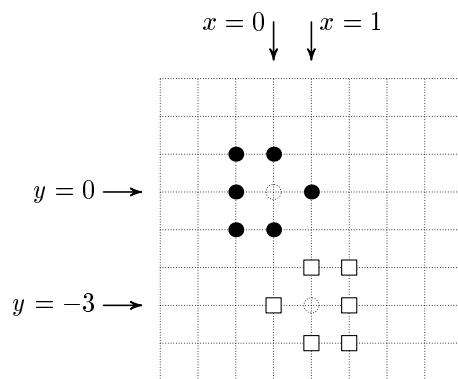


Рис. 12.3.2

Метрическое пространство $(\mathbb{Z}_k, d_{Lee})$ может быть рассмотрено как дискретный аналог эллиптического метрического пространства (которое состоит из множества всех прямых в $\mathbb{R}^2$, проходящих через начало координат, причем расстояние между двумя прямыми равно углу между ними).

ℓ_1 -расстояние и расстояние Хэмминга совпадают при сужении на $(\mathbb{Z}_2)^n$, т. е. пространства $((\mathbb{Z}_2)^n, d_{\ell_1})$ и $((\mathbb{Z}_2)^n, d_H)$ идентичны. Итак, $(\mathbb{Z}_K, d_{\ell_1})$ совпадает с графическим метрическим пространством пути P_k на k вершинах, $(\mathbb{Z}_k, d_H)$ совпадает с графическим пространством полного графа K_k на k вершинах, а $(\mathbb{Z}_k, d_{Lee})$ совпадает с графическим пространством цикла C_k на k вершинах. Следовательно, пространства $((\mathbb{Z}_k)^n, d_{\ell_1})$, $((\mathbb{Z}_k)^n, d_H)$ и $((\mathbb{Z}_k)^n, d_{Lee})$ совпадают с графическим пространством декартова произведения G^n , где G есть P_k , K_k и C_k , соответственно. Можно легко проверить следующие утверждения.

- (i) P_k изометрически вложим в $(k-1)$ -мерный гиперкуб (см. пример 7.2.9), т. е. $(\mathbb{Z}_k, d_{\ell_1})$ есть изометрическое подпространство $((\mathbb{Z}_2)^{k-1}, d_{\ell_1})$ (нужно просто сопоставить каждому $x \in \mathbb{Z}_k$ двоичную последовательность $1 \dots 10 \dots 0$ длины $k-1$, первые x символов которой равны 1). Следовательно, $((\mathbb{Z}_k)^n, d_{\ell_1})$ является изометрическим подпространством $((\mathbb{Z}_2)^{n(k-1)}, d_{\ell_1})$.
- (ii) Пространство $((\mathbb{Z}_k)^n, d_H)$ является изометрическим подпространством $\left((\mathbb{Z}_2)^{kn}, \frac{1}{2}d_{\ell_1}\right)$ (сопоставить каждому $x \in \mathbb{Z}_k$ двоичную последовательность длины k , все символы которой равны 0 кроме $(x+1)$ -го символа, равного 1).
- (iii) Четный цикл C_{2k} изометрически вложим в k -мерный гиперкуб (см. пример 7.2.9). Следовательно, $((\mathbb{Z}_{2k})^n, d_{Lee})$ является изометрическим подпространством пространства $((\mathbb{Z}_2)^{nk}, d_{\ell_1})$. И $((\mathbb{Z}_{2k+1})^n, d_{Lee})$ является изометрическим подпространством пространства $\left((\mathbb{Z}_2)^{(2k+1)n}, \frac{1}{2}d_{\ell_1}\right)$ (так как нечетный цикл C_{2k+1} изометрически вложим в $(2k+1)$ -мерный полукуб).

Более полную информацию о ℓ_1 -вложениях графов P_k , C_k и K_k можно найти в частях III и IV.

Часть II.

Гиперметрические пространства с точки зрения геометрии чисел

Введение

Часть II построена на исследовании идеи гиперметричности. Это естественное усиление понятия полуметрики, с многочисленными приложениями и взаимосвязями с другими областями. В число основных тем, связанных с гиперметриками, входят ℓ_1 и ℓ_2 метрики в анализе, разрезной конус и разрезной многогранник в комбинаторной оптимизации, сильно регулярные графы и, на чем мы особенно сконцентрируем внимание, квадратичные формы, многогранники Делоне и дыры в решетках.

Понятие гиперметрики по-новому освещает и вносит ясность в некоторые хорошо изученные вопросы. В частности, это относится к равноугольным семействам прямых, графам с минимальным собственным значением матрицы смежности равным -2 , метрическим свойствам регулярных графов. Например, параметр, характеризующий три уровня, из которых состоит известный список Буссмекера, Цветковича и Зайделя [1976] из 187 графов с минимальным собственным значением -2 , приобретает прозрачный смысл — он возникает из радиуса многогранника Делоне, ассоциированного с метриками на графах каждого уровня.

Связь между гиперметриками и ℓ_1 -, ℓ_2 -метриками обсуждается в разделе 6.3. Гиперметрические неравенства, выполненные для разрезных конусов и многогранников, обсуждаются в V. В этой, второй части, мы акцентируем внимание на связях между гиперметриками и геометрией чисел или, более точно, с многогранниками Делоне и дырами в решетках.

Важнейшими объектами здесь являются гиперметрические неравенства и гиперметрические пространства; они уже были введены в разделе 6.3, но мы напомним еще раз основные определения. Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ — целочисленный вектор с $\sum_{i=1}^n b_i = 1$. Тогда неравенство

$$(a) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} \leq 0$$

называется *гиперметрическим неравенством*. При $b_i = b_j = 1 = -b_k$, $b_h = 0$ для $h \neq i, j, k$ (i, j, k — различны), неравенство (a) превращается

в неравенство треугольника:

$$x_{ij} - x_{ik} - x_{jk} \leq 0.$$

Пространство расстояний (X, d) называется *гиперметрическим*, если d удовлетворяет всем гиперметрическим неравенствам. Так как гиперметрические неравенства включают в себя неравенства треугольника, то каждое гиперметрическое пространство расстояний является полуметрическим. *Конус гиперметрик* HYP_n есть конус в R^{E_n} , определенный неравенствами (а) для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 1$.

При $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 0$ неравенство (а) называется *неравенством отрицательного типа*. *Конус отрицательного типа* NEG_n есть конус в R^{E_n} , определенный неравенствами (а) для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 0$, а пространство расстояний (X, d) называется *пространством отрицательного типа*, если d удовлетворяет всем неравенствам отрицательного типа.

Многие важные полуметрики являются гиперметриками. В частности, все ℓ_1 -полуметрики суть гиперметрики. Точнее, для заданного расстояния d мы имеем следующую цепочку импликаций (см. теорему 6.3.1):

$ \begin{aligned} & d \text{ изометрично } \ell_2\text{-вложимо} \\ & \implies d \text{ изометрично } \ell_1\text{-вложимо} \\ & \implies d \text{ — гиперметрика} \\ & \implies \sqrt{d} \text{ изометрично } \ell_2\text{-вложимо} \end{aligned} $

Более того, если d — гиперметрика, то $\sqrt{d}$ допускает ℓ_2 -вложение в сферу, и, как будет видно ниже, эта сфера отвечает дыре в некоторой решетке. Последнее свойство из нашей цепочки импликаций хорошо изучено. А именно, $\sqrt{d}$ изометрично ℓ_2 -вложимо тогда и только тогда, когда d — отрицательного типа, или, что эквивалентно, тогда и только тогда, когда образ $\xi(d)$ расстояния d под действием ковариантного отображения ξ есть неотрицательно определенная матрица. Таким образом, наш основной объект, конус гиперметрик, оказывается тесно связанным с неотрицательным конусом. (Подробности см. в разделе 13.1.)

В дальнейшем мы постоянно будем использовать квадрат евклидовой метрики, а именно расстояние $d^{(2)}$ определенное как

$$d^{(2)}(x, y) := (\|x - y\|_2)^2 = (x - y)^T(x - y)$$

при всех $x, y \in R^n$. Для удобства также будем обозначать $x^T x =$

$= (\|x\|_2)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i)^2$ через x^2 при $x \in \mathbb{R}^n$. В этой части мы будем использовать исключительно ℓ_2 -норму $\|\cdot\|_2$. Поэтому для простоты мы иногда будем опускать нижний индекс и писать просто $\|x\|$ вместо $\|x\|_2$.

В действительности, как мы сейчас кратко объясним, изучение гиперметрических пространств расстояний приводит к изучению дыр в решетках. Пусть L — решетка. Будем раздувать маленькую сферу S внутри L , пока она не будет зажата между точками решетки. Тогда точки решетки не будут лежать внутри открытого шара с границей S , а на S точек решетки будет достаточно много, так что их выпуклая оболочка образует многогранник P полной размерности. Сфера S называется пустой в L , ее центр называется дырой, а многогранник P — многогранником Делоне. Таким образом, вершины P — это точки решетки лежащие на поверхности пустой сферы S . Пусть $V(P)$ — множество вершин P . Тогда пространство расстояний $(V(P), d^{(2)})$ (наделенное квадратом евклидовой метрики) называется пространством расстояний многогранника Делоне. Это основные пространства в нашей работе.

Пустые сферы в решетках интенсивно изучались в литературе с точки зрения их центров (т. е. дыр решетки L). Гиперметричность дает новый подход к изучению пустых сфер, а именно с точки зрения изучения точек решетки лежащих на границе, т. е. с точки зрения пространств расстояний многогранников Делоне. Действительно, многогранники Делоне имеют то замечательное свойство (обнаруженное Ассуадом [1984]), что их пространства расстояний являются гиперметричными, и, обратно, любое гиперметрическое пространство может быть реализовано как подпространство пространства расстояний многогранника Делоне (см. теорему 14.1.3). Каждому гиперметрическому пространству (X, d) соответствует (по сути, единственный) многогранник Делоне размерности не превосходящей $|X| - 1$.

Отсюда возникает соответствие между элементами конуса гиперметрик НУР_n и многогранниками Делоне размерности $k \leq n - 1$.

Интересным приложением этого соответствия является доказательство полиэдральности конуса гиперметрик (см. теорему 14.2.1).

Эти два объекта — конус гиперметрик и многогранники Делоне изучались сами по себе. Например, конус гиперметрик НУР_n возникает в связи с ℓ_1 -метриками (напомним лемму 6.1.7); он образует линейную релаксацию разрезного конуса, и в следствии этого его структура граней интенсивно исследовалась; результаты в этом направлении приведены в главе 28. С другой стороны, многогранники Делоне наиболее

изучены в литературе с классической точки зрения геометрии чисел: дыры, L -разбиения пространства, двойственные разбиениям на многогранники Вороного и т. д. Здесь же предпринят подход к изучению метрической структуры множества вершин. Более того, пользуясь преимуществами взаимосвязи с гиперметриками мы можем перенести и использовать некоторые понятия, относящиеся к гиперметрическому конусу, на многогранники Делоне и обратно.

Например, для гиперметрических пространств определено естественное понятие ранга, а именно размерность наименьшей грани конуса гиперметрик, содержащей данную гиперметрику. Мы определяем соответствующее понятие ранга для многогранников Делоне. В частности, это определение проливает новый свет на классическое понятие, изученное Вороным — многогранники переделивания, соответствующие фасетам конуса гиперметрик. Другой предельный случай для ранга, а именно ранг равный 1 для крайних лучей конуса гиперметрик, соответствует классу экстремальных многогранников Делоне. Многогранник Делоне P является экстремальным тогда и только тогда, когда все аффинные преобразования T , для которых $T(P)$ по-прежнему многогранник Делоне, являются гомотетиями (см. следствие 15.2.4). Некоторые примеры экстремальных многогранников Делоне приведенные в главе 16 возникают, в частности, из решеток корней или из сечений решеток Лича Λ_{24} и Барнса–Уолла Λ_{16} .

Исторически многогранники Делоне и соответствующие L -разбиения пространства были введены Г. Ф. Вороным в начале этого века. Так называемый метод пустых сфер был разработан позднее Б. Н. Делоне¹), который показал, что этот метод приводит к тому же разбиению пространства, что и L -разбиение Вороного. Эта область активно исследовалась в основном русской школой, особенно Б. Н. Делоне, Е. П. Барановским, С. С. Рышковым, а также Р. М. Эрдалом из Канады. В размерностях 2 и 3 L -разбиения используются в вычислительной геометрии²) под именем триангуляций Делоне; в действительности там изучаются также и нерешеточные триангуляции. Многогранники Делоне используются также при изучении решеточных покрытий (см. Конвей и Слоэн [1990], Роджерс [1968]); например, *радиус покрытия* решетки L есть максимальный радиус пустой сферы в L , т. е. радиус глубокой дыры в L . Многогранники Делоне и Вороного связаны

¹) Мы ссылаемся на предисловие к книге под редакцией Новикова и др. [1991] для подробного исторического обзора работ Б. Н. Делоне.

²) Смотрите, например, главу 13 в Эдельсбруннер [1987] или обзор Фортуна [1995].

следующим образом: вершины многогранника Вороного в точке u решетки являются центрами многогранников Делоне, для которых точка u является вершиной. Более того, два разбиения пространства с помощью многогранников Делоне и многогранников Вороного являются комбинаторно двойственными.

Среди многих работ по данной тематикой наиболее уместным будет сослаться на фундаментальный *Deuxième mémoire* Вороного [1908, 1909], обзор Рышкова и Барановского [1979], работы Эрдала и Рышкова [1987], и сборник Конвея и Слоэна [1990] с обзорами по темам решеток и их приложений. В этой книге мы в основном опираемся на работы Ассуада [1984], Деза, Гришухина и Лоран [1992, 1993], Деза и Гришухина [1993]. Другие необходимые ссылки будут даваться в тексте. Ранний вариант изложенного в части II появился в обзоре Деза, Гришухина и Лоран [1995].

Дадим краткое описание основных результатов представленных в части II. Глава 13 содержит основные понятия, связанные с пространствами расстояний, решетками и многогранниками Делоне. В разделе 13.3 мы даем сжатое доказательство результата Вороного о конечности числа различных (с точностью до аффинной эквивалентности) многогранников Делоне фиксированной размерности.

В главе 14 исследуется связь между гиперметрическими пространствами и многогранниками Делоне. В разделе 14.1 описана эта связь и приведены первые результаты, демонстрирующие как многогранник P_d наследует некоторые свойства гиперметрического пространства (X, d) , в частности, касающиеся подпространств (см. следствие 14.1.9) и ℓ_1 -вложимости (см. предложение 14.1.10). В разделе 14.2 показано, что конус гиперметрик полиэдрален. Приведено несколько доказательств, одно из них основано на указанной выше связи и результате Вороного о конечности числа многогранников Делоне фиксированной размерности.

В разделе 14.3 приводится описание всех многогранников Делоне возникающих в решетках корней, см., в частности, рисунок 14.3.1, где перечислены многогранники Делоне в неприводимых решетках корней вместе с графами их 1-остовов и радиусами. Если P — многогранник Делоне в решетке корней, то его ребра суть пары вершин на расстоянии $\sqrt{2}$, т. е. его 1-остов определяется метрической структурой пространства расстояний многогранника Делоне (см. предложение 14.3.3). В качестве приложения мы даем описание тех связных сильно четных пространств расстояний, которые являются гиперметрическими или ℓ_1 -вложимыми (см. теоремы 14.3.6 и 14.3.7).

В разделе 14.4 собрано несколько результатов, относящихся к радиусам сфер, описанных около многогранников Делоне. В частности, мы рассматриваем операцию сферического t -расширения пространства расстояний (X, d) , которая состоит в добавлении к множеству X новой точки на расстоянии t от всех точек X .

Понятие ранга для многогранников Делоне подробно исследуется в главе 15. Если (X, d) — гиперметрическое пространство с $|X| = n$, то $d \in \text{HYP}_n$, и ранг (X, d) определяется как размерность наименьшей (по вложению) грани HYP_n , содержащей d . Если P — многогранник Делоне, то пространство расстояний многогранника Делоне $(V(P), d^{(2)})$ гиперметрично и ранг P определяется как ранг $(V(P), d^{(2)})$. В этом случае P называется экстремальным, если его ранг равен 1. В разделе 15.1 мы рассматриваем некоторые свойства данного понятия ранга, в частности его инвариантность (см. теорему 15.1.8) и аддитивность (см. предложение 15.1.10). В разделе 5.2 мы указываем как грани конуса гиперметрик связаны с многогранниками Делоне; см., например, рисунок 15.2.9. В частности, гиперметрики, являющиеся внутренними точками одной и той же грани конуса гиперметрик, соответствуют аффинно эквивалентным многогранникам Делоне (см. следствие 15.2.2), геометрическая интерпретация ранга многогранника Делоне приведена в теореме 15.2.5, а многогранники Делоне, ассоциированные с фасетами конуса гиперметрик, описаны в предложении 15.2.7.

В разделе 5.3 мы даем некоторые оценки числа вершин базисного многогранника Делоне, т. е. такого, что множество его вершин содержит базис решетки, порожденной его вершинами (см. предложение 15.3.1).

Глава 16 посвящена изучению экстремальных многогранников Делоне, которые соответствуют крайним лучам конуса гиперметрик. Экстремальные многогранники Делоне в решетках корней описываются теоремой 16.0.1: это отрезок α_1 , многогранник Шлефли 2_{21} и многогранник Госсета 3_{21} . В разделе 16.1 мы получаем оценки числа вершин базисного многогранника Делоне, которые оказываются тесно связанными с известными оценками мощности равноугольного семейства прямых. Мы также приводим общую конструкцию равноугольного семейства прямых в целых решетках (см. предложение 16.1.9). В разделах 6.2, 16.3 и 16.4 мы приводим примеры экстремальных многогранников Делоне, возникающих из сечений решетки корней E_8 , решеток Лича A_{24} и Барнса–Уолла A_{16} . Раздел 16.5 содержит результаты о построении совершенных решеток из экстремальных многогранников Делоне.

Применения аппарата гиперметрик к теории графов содержатся в главе 17. На данном графе G можно определить два расстояния: метрику кратчайшего пути d_G и усеченное расстояние d_G^* (с расстоянием 1 по ребру и расстоянием 2 в противном случае). Граф G называется гиперметричным, если метрика кратчайшего пути — гиперметрика. Описания как гиперметричных, так и ℓ_1 -вложимых графов даются теоремой 17.1.1; см. также теоремы 17.1.8 и 17.1.9, содержащие уточненный результат для класса надстроенных графов.

Связные регулярные графы с гиперметричным усеченным расстоянием рассмотрены в разделе 17.2; см. предложение 17.2.1, дающее несколько эквивалентных описаний. Одно из них состоит в том, что минимальное собственное значение матрицы смежности не меньше -2 . Графы с минимальным собственным значением равным -2 хорошо изучены. Все они (кроме реберных и $K_{n \times 2}$) содержатся в известном списке Буссмекера, Цветковича и Зайделя [1976] из 187 графов. Этот список разбит на три уровня, каждый из которых задается параметром непосредственно связанным с радиусом многогранников Делоне, ассоциированных с графами данного уровня.

И в разделе 17.3 мы рассматриваем экстремальные гиперметричные графы, т. е. графы, чья метрика кратчайшего пути лежит на крайнем луче конуса гиперметрик. В действительности, все они изометричны подграфам графов Госсета и Шлефли. Их описание содержится в предложении 17.3.4.

Глава 13.

Введение в теорию решеток

В этой главе собраны определения и предварительные результаты, относящиеся к решеткам и многогранникам Делоне. Один из результатов Вороного о конечности числа различных типов многогранников Делоне фиксированной размерности будет занимать центральное место в дальнейшем. В разделе 13.3 мы даем доказательство этого факта.

13.1. Пространства расстояний

Пространства расстояний были введены в главе 3. Приведем некоторые вспомогательные определения, необходимые нам в этой главе. Пусть (X, d) — пространство расстояний. Обозначим через $d_{\min}$ минимальное неотрицательное значение, принимаемое d . Пространство расстояний (X, d) называется *связным*, если граф с набором вершин X и ребрами, соответствующими парам (i, j) с $d(i, j) = d_{\min}$, связан. Пространство расстояний (X, d) называется *сильно четным*, если $d(i, j) \in 2\mathbb{Z}$ для всех $i, j \in X$ и $d_{\min} = 2$.

Представлением пространства расстояний (X, d) называется отображение

$$i \in X \mapsto v_i \in \mathbb{R}^n$$

(где $n \geq 1$) такое, что

$$(13.1.1) \quad d(i, j) = (v_i - v_j)^2 \quad \text{при } i, j \in X.$$

Другими словами, это изометричное вложение (X, d) в пространство $(\mathbb{R}^n, d^{(2)})$ с расстоянием $d^{(2)}$ — квадратом евклидовой метрики. Следовательно, (X, d) имеет представление тогда и только тогда, когда $(X, \sqrt{d})$ изометрично ℓ_2 -вложимо. Ясно, что параллельный перенос, примененный к представлению пространства расстояний (X, d) вновь дает представление (X, d) , так что мы можем всегда считать, что данный элемент $i_0 \in X$ представлен нулевым вектором. Представление $(v_i \mid i \in X)$ называется *сферическим*, если все v_i лежат на некоторой

сфере. Следующий результат сводит воедино свойство иметь сферическое представление и условия гиперметричности и отрицательности типа. Два частных утверждения, до некоторой степени обратные импликациям (ii) $\implies$ (iv) и (i) $\implies$ (ii) предложения 13.1.2, будут доказаны в предложениях 14.4.1 и 14.4.4 соответственно.

Предложение 13.1.2. Пусть (X, d) — пространство расстояний.

Рассмотрим утверждения:

- (i) (X, d) — гиперметрично.
- (ii) (X, d) имеет сферическое представление.
- (iii) (X, d) имеет представление.
- (iv) (X, d) — отрицательного типа.

Тогда выполнены импликации: (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) $\iff$ (iv).

Доказательство. (i) $\implies$ (ii) будет доказано в предложении 14.1.2, (iii) $\iff$ (iv) следует из теоремы 6.2.2, а (ii) $\implies$ (iii) — тривиально. ■

Напомним, что в разделе 2.4 через PSD_n был обозначен неотрицательно определенный конус, состоящий из векторов $p = (p_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$, для которых симметрическая матрица $(p_{ij})_{i,j=1}^n$ (полагая $p_{ij} = p_{ji}$) неотрицательно определена. Как было замечено в лемме 2.4.2, неотрицательно определенные матрицы могут быть описаны в терминах матриц Грама.

Ковариантное отображение, введенное в разделе 5.2, будет играть теперь основную роль, так что напомним его определение¹⁾. Ковариантное отображение есть отображение $\xi: \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}} \mapsto \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$, определенное для $p = \xi(d)$ ($d = (d_{ij})_{0 \leq i < j \leq n}$, $p = (p_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$) следующими условиями:

$$(13.1.3) \quad \begin{cases} p_{ii} = d_{0i} & \text{при } 1 \leq i \leq n; \\ p_{ij} = \frac{1}{2}(d_{0i} + d_{0j} - d_{ij}) & \text{при } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Легко убедиться, что

$$(13.1.4) \quad d \in \text{HYP}_{n+1} \iff \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i b_j p_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_{ii} \geq 0 \quad \text{при всех } b \in \mathbb{Z}^n,$$

$$(13.1.5) \quad d \in \text{NEG}_{n+1} \iff \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i b_j p_{ij} \geq 0 \quad \text{при всех } b \in \mathbb{Z}^n,$$

Здесь мы считаем p_{ij} симметрической матрицей, полагая $p_{ij} = p_{ji}$ при

¹⁾ Сейчас нам кажется более удобным обозначить отмеченную точку через 0, а не через $n+1$, как это было сделано ранее.

всех i, j . Таким образом,

$$(13.1.6) \quad \xi(\text{NEG}_{n+1}) = \text{PSD}_n,$$

$$(13.1.7) \quad \text{HYP}_{n+1} \subseteq \text{NEG}_{n+1}, \quad \text{т. е.} \quad \xi(\text{HYP}_{n+1}) \subseteq \text{PSD}_n.$$

(Эти факты уже упоминались в следствии 6.1.4 и в (6.1.15).) Напомним (см. (5.2.3) и (6.1.4)), что

$$\xi(\text{CUT}_{n+1}) = \text{COR}_n \quad \text{и} \quad \text{CUT}_{n+1} \subseteq \text{HYP}_{n+1}.$$

Конус корреляций COR_n порожден векторами $(x_i x_j)_{1 \leq i \leq j \leq n}$ (при $x \in \{0, 1\}^n$), поэтому его поляр $(\text{COR}_n)^\circ$ состоит из неположительных на бинарных переменных квадратичных форм. Хорошо известный (простой) факт состоит в том, что $(\text{PSD}_n)^\circ$ (поляр PSD_n) состоит из неотрицательно определенных квадратичных форм, т. е.,

$$(\text{PSD}_n)^\circ = -\text{PSD}_n.$$

Отсюда мы получаем следующую цепочку вложений:

$$(13.1.8) \quad \begin{aligned} \text{COR}_n &\subseteq \xi(\text{HYP}_{n+1}) \subseteq \text{PSD}_n, \\ (\text{COR}_n)^\circ &\supseteq (\xi(\text{HYP}_{n+1}))^\circ \supseteq -\text{PSD}_n. \end{aligned}$$

Это показывает, что наш главный объект, конус гиперметрик (точнее, образ его поляр относительно ковариантного отображения), является подконусом конуса неположительных на бинарных переменных квадратичных форм и содержит конус $-\text{PSD}_n$ неположительно определенных на целых (или действительных) числах квадратичных форм.

Мы будем часто обращаться в этой главе к метрическим пространствам следующих графов:

- полный граф K_n , простой цикл C_n , путь P_n (с n вершинами),
- $K_{n \times 2}$ граф (т. е. K_{2n} с удаленным совершенным паросочетанием),
- граф гиперкуба $H(n, 2)$ (т. е. граф, чьи вершины суть векторы $x \in \{0, 1\}^n$, две вершины x и y смежны, если $d_{\ell_1}(x, y) = 1$),
- граф полукуба $\frac{1}{2}H(n, 2)$ (т. е. граф, чьи вершины суть векторы $x \in \{0, 1\}^n$ с четной суммой $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i$, а две вершины x и y смежны, если $d_{\ell_1}(x, y) = 2$).

13.2. Решетки и многогранники Делоне

Ниже мы приводим некоторые определения, связанные с решетками и многогранниками Делоне. Более подробные сведения можно найти, например, в работах: Касселс [1965], Конвей и Слоэн [1990], Лагариас [1995].

13.2.1. Решетки

Подмножество L пространства $\mathbb{R}^k$ называется *решеткой* (или *точечной решеткой*), если L есть дискретная подгруппа $\mathbb{R}^k$. Тогда существует такое число $\beta > 0$, что шар радиуса β с центром в любой точке решетки не содержит других точек решетки. Подмножество $V := \{v_1, \dots, v_m\}$ решетки L называется *порождающим* (соответственно, *базисом*) для L , если для любого $v \in L$ найдутся некоторые (соответственно, однозначно определенные) целые $b_1, \dots, b_m$ такие, что

$$v = \sum_{1 \leq i \leq m} b_i v_i.$$

У каждой решетки есть базис; все базисы имеют одну и ту же мощность, которая называется *размерностью* L . Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^k$ — решетка размерности k . Для данного базиса B решетки L обозначим через M_B матрицу размера $k \times k$, чьи строки суть элементы B . Если B_1 и B_2 — два базиса L , то

$$M_{B_1} = A M_{B_2},$$

где A — целочисленная матрица с определителем $\det(A) = \pm 1$ (такие матрицы называются *унимодулярными*). Следовательно, величина $|\det(B)|$ не зависит от выбора базиса в L и называется *элементарным объемом решетки L* (обозначается через $\det(L)$).

Для данного конечного подмножества $V \subseteq \mathbb{R}^k$ его целочисленная оболочка $\mathbb{Z}(V)$ является, очевидно, решеткой в тех случаях, когда все векторы из V рациональны.

Для данного вектора $a \in \mathbb{R}^k$ параллельный перенос

$$L' := L + a = \{v + a \mid v \in L\}$$

решетки L называется *аффинной решеткой*. $V' := \{v_0, \dots, v_m\}$, подмножество L' , называется *аффинно порождающим* (соответственно, *аффинным базисом*) для L' , если для любого $v \in L'$ найдутся некоторые (соответственно, однозначно определенные) целые $b_0, \dots, b_m$ такие, что

$$\sum_{0 \leq i \leq m} b_i = 1 \quad \text{и} \quad v = \sum_{0 \leq i \leq m} b_i v_i.$$

Ясно, что V' является аффинно порождающим (соответственно, аффинным базисом) для L' тогда и только тогда, когда множество $V := \{v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$ является (линейным) порождающим (соответственно, базисом) для решетки L .

Для простоты будем обозначать словом «решетка» как обычную (т. е. содержащую нулевой вектор), так и аффинную (т. е. полученную параллельным переносом) решетки. Часто мы также не будем уточнять, рассматриваем ли мы линейные или аффинные порождающие семейства (базисы).

Пусть L — решетка. Величина

$$t := \min((u - v)^2 \mid u, v \in L, u \neq v)$$

называется *минимальной нормой* L . Выражение минимальная «норма» является классическим в теории решеток, хотя на самом деле обозначает квадрат евклидовой нормы. В частности, если $0 \in L$, то

$$t = \min(u^2 \mid u \in L, u \neq 0).$$

Минимальными векторами L в этом случае называются векторы $v \in L$ такие, что $v^2 = t$. Множество минимальных векторов обозначается через $L_{\min}$, а многогранник $\text{Conv}(L_{\min})$ называется *контактным многогранником* L . Заметим, что величина $\frac{\sqrt{t}}{2}$ совпадает с радиусом упаковки L .

Пусть L — решетка. Тогда L называется *целой*, если $u^T v \in \mathbb{Z}$ при всех $u, v \in L$. L называется *четной решеткой*, если L целая и $u^2 \in 2\mathbb{Z}$ при всех $u \in L$. L называется *решеткой корней*, если L — целая и L порождается множеством векторов v с $v^2 = 2$; векторы $v \in L$ с $v^2 = 2$ называются *корнями* L . Отметим, что в решетке корней L верно

(13.2.1)

$$u^T v \in \{0, -1, 1\} \quad \text{для всех корней } u, v \text{ решетки } L \text{ таких, что } u \neq \pm v.$$

(Это следует из того, что $(u - v)^2 = 4 - 2u^T v > 0$ и $(u + v)^2 = 4 + 2u^T v > 0$.) Решетка L^* , *двойственная* к $L \subseteq \mathbb{R}^k$, определяется как

$$L^* := \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^T u \in \mathbb{Z}, \text{ при всех } u \in L\}.$$

Если L целая, то верно вложение $L \subseteq L^*$. L называется *самодвойственной*, если $L = L^*$. L называется *унимодулярной*, если $\det(L) = \pm 1$. Таким образом, целая унимодулярная решетка самодвойственна. Например, решетка корней E_8 и решетка Лича Λ_{24} (определенная ниже) четные и унимодулярные и, следовательно, самодвойственные. Для каждой k -мерной решетки $L \subseteq \mathbb{R}^k$

$$(L^*)^* = L.$$

Пусть L_1 и L_2 — две ортогональные друг другу решетки, т. е. такие, что $u_1^T u_2 = 0$ при всех $u_1 \in L_1$, $u_2 \in L_2$. Определим их *прямую сумму*

как

$$L_1 \oplus L_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}.$$

L называется *неприводимой*, если из $L = L_1 \oplus L_2$ следует, что либо $L_1 = \{0\}$, либо $L_2 = \{0\}$, и *приводимой* в противном случае. Хорошо известный результат Витта дает классификацию всех неприводимых решеток корней; см. раздел 14.3.

13.2.2. Многогранники Делоне

Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^k$ — k -мерная решетка, а $S = S(c, r)$ — сфера в $\mathbb{R}^k$ с радиусом r и центром c . S называется *пустой сферой* в L , если выполнены следующие два условия:

- (i) $(v - c)^2 \geq r^2$ при всех $v \in L$ и
- (ii) множество $S \cap L$ имеет аффинный ранг $k + 1$.

В этом случае центр сферы S называется *дырой*¹⁾. Многогранник P , являющийся выпуклой оболочкой $S \cap L$, называется *многогранником Делоне*, или *L -многогранником*. Эти определения иллюстрируются рис. 13.2.2.

Таким образом, k -мерный многогранник P в $\mathbb{R}^k$ со множеством вершин $V(P)$ является многогранником Делоне, если выполнены следующие условия:

- (i) Множество

$$L(P) := \mathbb{Z}_{af}(V(P)) = \left\{ \sum_{v \in V(P)} b_v v \mid b \in \mathbb{Z}^{V(P)}, \sum_{v \in V(P)} b_v = 1 \right\}$$

является решеткой;

- (ii) P вписан в сферу $S = S(c, r)$, т. е. $(v - c)^2 = r^2$ при всех $v \in V(P)$;
- (iii) $(v - c)^2 \geq r^2$ при всех $v \in L(P)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $v \in V(P)$.

Другое эквивалентное определение предоставляет предложение 14.1.4. Для данного многогранника Делоне P , пространство расстояний $(V(P), d^{(2)})$ называется *пространством расстояний многогранника Делоне*.

¹⁾ Термин «пустая сфера» употребляется в основном в русской литературе, а «дыра» (hole) — в английской.

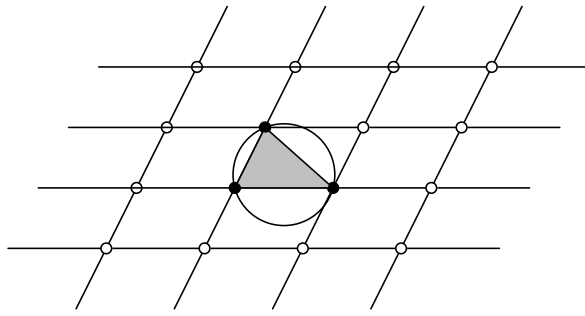


Рис. 13.2.2. Пустая сфера в решетке и ее многогранник Делоне.

Пусть P — многогранник Делоне, а L — такая решетка, что $V(P) \subseteq L$. Тогда мы будем говорить, что P порождает L , если $V(P)$ порождает L , т. е. $L = L(P)$. Известны примеры решеток которые не порождаются ни одним своим многогранником Делоне, именно таковы решетка корней E_8 , решетка Лича Λ_{24} и вообще любая четная унимодулярная решетка (см. лемму 13.2.6). Однако, когда мы говорим, что P — *многогранник Делоне в L* , мы всегда подразумеваем, что P порождает L , т. е. $L = L(P)$.

Подмножество $B \subseteq V(P)$ называется *базисным*, если оно является аффинным базисом решетки $L(P)$. В действительности не известно ни одного примера небазисного многогранника Делоне. Выделим эту открытую проблему отдельно, чтобы сослаться на нее в дальнейшем.

Проблема 13.2.3. *Все ли многогранники Делоне являются базисными?*

Ответ положителен для многогранников Делоне малого коранга (см. предложение 15.2.12) и для конкретных примеров приведенных ниже в части II. Дальнейшие сведения об этой задаче мы приведем в разделе 27.4.3 для многогранников Делоне, возникающих в связи с бинарными матроидами. Свойство базисности оказывается крайне полезным в некоторых случаях, например, при формулировке верхней оценки числа вершин экстремальных многогранников Делоне (см. раздел 15.3) или изучении совершенных решеток (см. раздел 16.5).

Например, n -мерный куб $\gamma_n = [0, 1]^n$ является многогранником Делоне в решетке $\mathbb{Z}^n$. Другим примером служит основной предмет нашего исследования — разрезный многогранник $\text{CUT}_n^\square$, который является многогранником Делоне в решетке $\mathcal{L}_n$ (см. пример 13.2.5 ниже).

Отметим, что как γ_n , так и $\text{CUT}_n^\square$ являются базисными, γ_n центрально симметричен, а $\text{CUT}_n^\square$ — асимметричен (определения см. в лемме 13.2.7).

Будем говорить, что два многогранника Делоне имеют один *тип*, если они аффинно эквивалентны, т. е. $P' = T(P)$ для некоторой аффинной биекции T .

Для данной точки решетки $v \in L$ множество всех многогранников Делоне, имеющих v своей вершиной, называется *звездой* решетки L в точке v . Ясно, что звезды в различных точках решетки равны с точностью до параллельного переноса. Решетка L называется решеткой *общего положения* (или просто *общей*), если все многогранники Делоне, образующие звезду, являются симплексами (которые, вообще говоря, не получаются друг из друга параллельными переносами или ортогональными преобразованиями). В противном случае решетка L называется *специальной*.

Две k -мерные решетки L, L' называются *z -эквивалентными*, если существует такая аффинная биекция T , что $L' = T(L)$, причем T переводит звезду L в звезду L' ; в этом случае также говорят, что решетки L и L' одного *типа*. Например, в размерности 2 есть два различных типа решеток: треугольная решетка (которая является общей) и квадратная (которая является специальной). Эта ситуация иллюстрируется рис. 13.2.4.

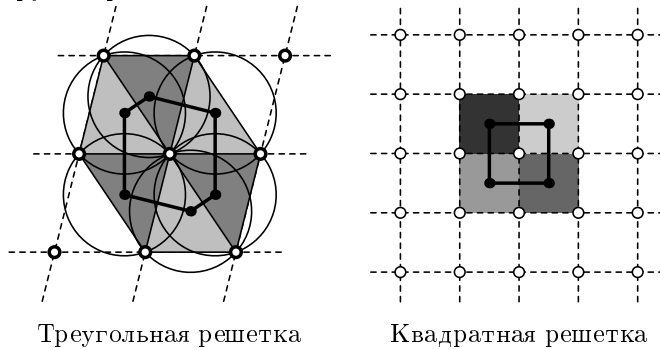


Рис. 13.2.4. Звезды многогранников Делоне

(Многогранники Делоне изображены серым цветом, а многогранник Вороного выделен жирной линией)

Пример 13.2.5. Многогранники Делоне в разрезной решетке. Обозначим через $\mathcal{L}_n$ разрезную решетку, являющуюся подрешеткой $\mathbb{Z}^{(n)}_2$, порожденной всеми разрезными метриками на n точках. Можно легко

убедиться, что $\text{CUT}_n^\square$ является (асимметричным) многогранником Делоне в решетке $\mathcal{L}_n$. Другие примеры многогранников Делоне в разрезной решетке $\mathcal{L}_n$ описаны Деза и Гришухиным [1995b]. В частности, используя результат Барановского [1992], они описали все симметричные многогранники Делоне в $\mathcal{L}_n$. Более того, они подробно исследуют многогранники Делоне в $\mathcal{L}_n$ при малых n .

Если $n = 2$, то $\mathcal{L}_2 = \mathbb{Z}$ и $\text{CUT}_2^\square = \gamma_1$. В случае $n = 3$, $\mathcal{L}_3 = D_3 (\simeq A_3)$ является единственной 3-мерной решеткой корней (гранецентрированная кубическая решетка — см. раздел 14.3), а $\text{CUT}_3^\square = \alpha_3$ есть правильный тетраэдр. В случае $n = 4$, $\mathcal{L}_4 = \sqrt{2}D_6^+ = \Lambda_6\{3\}$, где D_6^+ есть объединение решетки корней D_6 со своим сдвигом, а $\Lambda_6\{3\}$ является целой расслоенной решеткой с минимальной нормой 3 (см. главу 3, стр. 119 и главу 6, стр. 179 в Броуэр, Коэн и Ноймайер [1989]). Более того, Деза и Гришухин [1995b] дали подробное описание звезды многогранника Делоне в $\mathcal{L}_4$; она состоит из 588 различных многогранников Делоне, которые принадлежат 4 типам: разрезный многогранник $\text{CUT}_4^\square$, симплекс α_6 , ортаэдр β_6 и «скрученный» ортаэдр.

Теперь мы напомним как связаны многогранники Делоне и Вороного. Если L — решетка в $\mathbb{R}^k$ и $u_0 \in L$, то *многогранник Вороного* в u_0 есть множество $P_v(u_0)$, состоящее из тех точек $x \in \mathbb{R}^k$, которые отстоят от u_0 не дальше, чем от остальных точек решетки. То есть:

$$P_v(u_0) := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x - u_0\| \leq \|x - u\| \text{ при всех } u \in L\}.$$

Вершины многогранника Вороного $P_v(u_0)$ в точности являются центрами многогранников Делоне в L , для которых u_0 является вершиной, т. е. образующих звезду L в u_0 (см. рисунок 13.2.4).

Многогранники Вороного $P_v(u)$ ($u \in L$) образуют нормальное (грань к грани) разбиение пространства $\mathbb{R}^k$; это разбиение иногда называют *разбиением Вороного–Делоне*. Другое нормальное разбиение образовано элементарными клетками $\{u + \sum_{i=1}^k b_i v_i \mid 0 \leq b_i \leq 1 \text{ при } 1 \leq i \leq k\}$ при $u \in L$, где $(v_1, \dots, v_k)$ — базис L . Отсюда многогранники Вороного и элементарные клетки имеют один и тот же объем, равный $\det(L)$. Другое нормальное разбиение пространства, называемое *L-разбиением*, образовано многогранниками Делоне в L . Однако, в этом разбиении могут встречаться различные типы многогранников Делоне, в частности, если решетка L специальна, то некоторые из них не являются симплексами. Другой пример: если L — общая решетка

размерности 2, то нормальное разбиение $\mathbb{R}^2$ многогранниками Делоне в L является триангуляцией Делоне плоскости.

Для данной k -мерной решетки L два нормальных разбиения пространства на многогранники Вороного и Делоне в L являются комбинаторно двойственными. А именно, существует взаимно-однозначное соответствие $F \mapsto F^*$ между гранями F одного разбиения и гранями F^* другого такое, что:

- (i) F и F^* — ортогональны;
- (ii) если F имеет размерность h , то F^* имеет размерность $k - h$;
- (iii) если $F_1 \subseteq F_2$, то $F_2^* \subseteq F_1^*$.

13.2.3. Основные сведения о многогранниках Делоне

Мы приводим здесь несколько основных свойств, относящихся к симметричности, числу вершин и объему многогранников Делоне. Начнем с замечания Эрдала [1992] о порождающих многогранниках Делоне в четных решетках.

Лемма 13.2.6. *Пусть P — порождающий многогранник Делоне в четной решетке L . Тогда центр сферы, описанной около P , принадлежит двойственной решетке L^* . Следовательно, четная унимодулярная решетка не содержит порождающих многогранников Делоне.*

Доказательство. Мы можем считать, что начало координат является вершиной P . Обозначим через s центр сферы S , описанной около P . Так как L порождается $V(P)$, то для доказательства того, что $s \in L^*$ достаточно убедиться, что $s^T v \in \mathbb{Z}$ при всех $v \in V(P)$. Для $v \in V(P)$ верно $(s - v)^2 = s^2$, т. е. $2s^T v = v^2$, откуда следует, что $s^T v \in \mathbb{Z}$, так как v^2 — четно. Если L — четная унимодулярная, то необходимо $s \in L^* = L$, однако сфера S — пустая в L . Противоречие. ■

Пусть S — сфера с центром s . Для точки $x \in S$ назовем точку $x^* := 2s - x$ диаметрально противоположной ей точкой на сфере S . Очевидно, что верна следующая

Лемма 13.2.7. *Для многогранника Делоне P всегда выполнено ровно одно из двух следующих утверждений:*

- (i) $v^* \in V(P)$ при всех $v \in V(P)$.
- (ii) $v^* \notin V(P)$ при всех $v \in V(P)$. ■

В случае (i) многогранник P называется *центрально-симметричным*¹⁾, а в случае (ii) многогранник P называется *асимметричным*.

Предложение 13.2.8. *Каждый многогранник Делоне в $\mathbb{R}^k$ имеет не более 2^k вершин.*

Доказательство. Без потери общности мы можем считать, что начало координат является вершиной P . Пусть $\{v_1, \dots, v_k\}$ — базис решетки $L = L(P)$. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на L . Для $u, v \in L$ будем считать, что $u \sim v$, если $u + v \in 2L$. Ясно, что каждая вершина P « $\sim$ »-эквивалентна одному элементу вида $\sum_{i \in I} v_i$ при $I \subseteq \{1, \dots, k\}$. С другой стороны, никакие две вершины P не « $\sim$ »-эквивалентны. Действительно, если $u \sim v$ при $u, v \in P$, то $\frac{u+v}{2} \in L$, что невозможно так, как сфера, описанная около P , пуста в L . Следовательно у многогранника P не более 2^k вершин. $\blacksquare$

Пусть u, v, w — вершины многогранника Делоне P . Можно проверить, что

$$(13.2.9) \quad (u - w)^2 \leq (u - v)^2 + (v - w)^2.$$

Это неравенство треугольника, доказывающее, что пространство расстояний многогранника Делоне $(V(P), d^{(2)})$ является полуметрическим. В действительности, в предложении 14.1.2 мы убедимся, что все пространства расстояний многогранников Делоне являются гиперметрическими, что намного более сильное условие. Неравенство (13.2.9) означает, что точки u, v, w образуют треугольник без тупых углов. Задача определения максимального числа точек в $\mathbb{R}^k$, таких, что никакие три не образуют тупоугольного треугольника, была впервые поставлена Эрдшем [1948, 1957], который предположил, что это число равно 2^k . Эта гипотеза была доказана Данцером и Грюнбаумом [1962]. Таким образом уже одного неравенства (13.2.9) достаточно для доказательства верхней оценки 2^k на число вершин многогранника Делоне в $\mathbb{R}^k$.

Следующая верхняя оценка объема многогранника Делоне была получена Ловасом [1994].

Предложение 13.2.10. *Пусть P — многогранник Делоне объема $\text{vol}(P)$ в решетке L . Тогда $\text{vol}(P) \leq \det(L)$.*

¹⁾ Это определение совпадает с данным ранее для центрально-симметричных множеств с точностью до переноса центра сферы, описанной около P , в начало координат.

Доказательство. Оценка $\text{vol}(P) \leq \det(L)$ следует из того, что многогранники вида $P + u$ ($u \in L$) образуют упаковку, т. е. не имеют общих внутренних точек. ■

13.2.4. Построение многогранников Делоне

Ясно, что каждая грань многогранника Делоне снова является многогранником Делоне (в пространстве — аффинной оболочке данной грани). Мы приводим здесь несколько менее тривиальных способов построения многогранников Делоне, а именно выбор подходящего сечения сферы минимальных векторов решетки, прямое произведение, пирамидальное и бипирамидальное расширения. Затем мы даем полную классификацию многогранников Делоне в размерностях $k \leq 4$.

Построение с помощью сечения сферы минимальных векторов решетки. Пусть L — решетка в $\mathbb{R}^k$, содержащая точку 0 , $L_{\min}$ — множество минимальных векторов L . Для неколлинеарных векторов $a, b \in \mathbb{R}^k$ и ненулевых скаляров α, β определим

$$V_a := \{v \in L_{\min} \mid v^T a = \alpha\} \quad \text{и} \quad V_b := \{v \in L_{\min} \mid v^T b = \beta\}.$$

Легко убедиться, что верно следующее утверждение:

Лемма 13.2.11. *Если множества V_a и $V_a \cap V_b$ не пусты, то многогранники $\text{Conv}(V_a)$ и $\text{Conv}(V_a \cap V_b)$ являются многогранниками Делоне.* ■

Эта конструкция взята из работы Деза, Гришухина и Лоран [1992] и будет не раз использоваться нами в разделах 16.2, 16.3, 16.4.

Прямое произведение. Пусть L_i — решетка в $\mathbb{R}^{k_i}$, P_i — многогранник Делоне в L_i с центром в начале координат и радиусом описанной сферы r_i ($i = 1, 2$). Тогда

$$L := L_1 \times L_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in L_1, v_2 \in L_2\}$$

является решеткой в $\mathbb{R}^k$ ($k = k_1 + k_2$) и

$$P := P_1 \times P_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in P_1, v_2 \in P_2\}$$

является многогранником Делоне в L , чья описанная сфера имеет центр в начале координат и радиус $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. Таким образом, прямое произведение многогранников Делоне снова является многогранником Делоне. Прямое произведение P и отрезка α_1 называется *призмой с основанием P* .

Назовем многогранник Делоне P *приводимым*, если он является прямым произведением двух других нетривиальных (т. е. не сводящихся к точке) многогранников Делоне и *неприводимым* в противном случае. Отметим, что неприводимые многогранники Делоне возникают в неприводимых решетках.

Пирамида и бипирамида. Пусть P — многогранник, v — точка, не принадлежащая аффинной оболочке P . Тогда

$$\text{Pyg}_v(P) := \text{Conv}(P \cup \{v\})$$

называется *пирамидой с основанием P и вершиной v* . При некоторых условиях пирамида над многогранником Делоне снова является многогранником Делоне.

А именно, пусть P — многогранник Делоне радиуса¹⁾ r , а вершина v расположена на расстоянии $\sqrt{t}$ от всех вершин P , причем $t > 2r^2$. В этом случае пирамида $\text{Pyg}_v(P)$ является многогранником Делоне радиуса $R = \frac{t}{2\sqrt{t} - r^2}$ (см. предложение 14.4.6).

Более того, если P центрально-симметричен и $t = 2r^2$, то *бипирамида*

$$\text{Bipyg}_v(P) := \text{Conv}(P \cup \{v, v^*\})$$

(где через v^* обозначена точка, диаметрально противоположная точке v на сфере, описанной около $\text{Pyg}_v(P)$) является многогранником Делоне радиуса r (см. предложение 14.4.6).

Послойная конструкция. Следующая *послойная конструкция* приведена в работе Рышкова и Эрдала [1989]. На самом деле, это не просто конструкция, а скорее метод представления данного k -мерного многогранника Делоне в решетке L в виде выпуклой оболочки его сечений $(k-1)$ -мерными слоями, составляющими L .

Пусть L — k -мерная решетка с базисом $(v_1, \dots, v_k)$. Тогда $L_0 := \mathbb{Z}(v_1, \dots, v_{k-1})$ — $(k-1)$ -мерная подрешетка в L и $L = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} (L_0 + av_k)$. Слои $L_0 + av_k$ суть аффинные сдвиги L_0 , лежащие в параллельных гиперплоскостях.

Пусть P — k -мерный многогранник Делоне, L — решетка, порожденная $V(P)$, S — сфера, описанная около P . Рассмотрим F — фасету P и гиперплоскость H , натянутую на нее. Тогда $L_0 := L \cap H$ — $(k-1)$ -мерная подрешетка в L , а L состоит из слоев вида $L_0 + av$ ($a \in \mathbb{Z}$) для некоторого $v \in L - L_0$. Таким образом, $P = \text{Conv}(\bigcup_{a \in \mathbb{Z}} (S \cap (L_0 + av)))$, где $S \cap L_0$ — множество вершин F , а $S \cap L_0 + av$ (при $a \in \mathbb{Z}$) либо пусто, либо является множеством вершин грани некоторого многогранника Делоне в L_0 . Мы получаем следующий результат:

¹⁾ Здесь и далее под «радиусом многогранника Делоне» имеется ввиду радиус описанной около данного многогранника сферы. — *Прим. перев.*

Предложение 13.2.12. Для каждого k -мерного многогранника Делоне P существуют $(k - 1)$ -мерная решетка L_0 , целое число $p \geq 1$ и набор $F_0, F_1, \dots, F_p$ многогранников, являющихся гранями многогранников Делоне в L_0 ($\dim(F_0) = k - 1$, но $F_1, \dots, F_p$ могут быть и пустыми множествами), такие, что $P = \text{Conv}(\bigcup_{0 \leq a \leq p} (F_a + av))$, где v — вектор, не принадлежащий пространству, натянутому на L_0 . ■

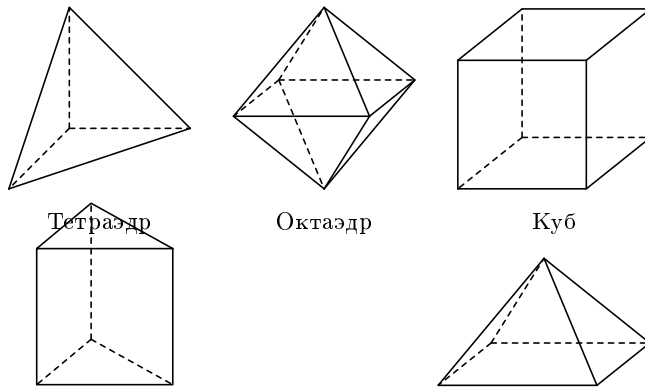
Например, пирамидальная конструкция может рассматриваться как частный случай послойной при $p = 1$ с фасетой лежащей на слое L_0 и единственной точкой на слое $L_0 + v$.

Обозначим через $p(k)$ наименьшее число p многогранников $F_1, \dots, F_p$ из предложения 13.2.12, необходимых для построения любого k -мерного многогранника Делоне.

Рассмотрим некоторую решетку L и многогранник Делоне P в ней. Если этот многогранник является симплексом, то его объем равен целочисленному кратному числа $\frac{\det(L)}{k!}$ (проверяется по индукции). Коэффициент пропорциональности (целое число) называется *относительным объемом* симплекса P . Максимум из относительных объемов всех симплексов, являющихся многогранниками Делоне, взятый по всем k -мерным решеткам обозначим через $p_0(k)$.

В работе Рышкова и Эрдала [1989] показано, что $p(k) = p_0(k)$. В частности, $p(2) = p(3) = p(4) = 1$, $p(5) = 2$ и $\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \leq p(k) \leq k!$.

Существует многогранник Делоне размерности 6, а именно многогранник Шлефли 2_{21} , для которого целое p (из предложения 13.2.12) удовлетворяет условию $p > 1$. В действительности, для 2_{21} число p равно 2, т. е. необходимо три слоя для получения 2_{21} из его 5-мерных сечений. Мы упомянем два способа представления 2_{21} с помощью послойной конструкции. В первом случае L_0 есть решетка корней D_5 , а слои $L_0, L_0 + v, L_0 + 2v$ содержат соответственно $F_0 = \beta_5$, $F_1 = h\gamma_5$ (пятимерный полукуб) и F_2 — изолированную точку. Во втором случае L_0 есть решетка корней A_5 , а слои содержат $F_0 = \alpha_5$, $F_1 = J(6, 2)$ и $F_2 = \alpha_5$ соответственно. Мы отсылаем к работе Коксетера [1973] за описанием всех граней 2_{21} .



Призма (с треугольным основанием) Пирамида (с квадратным основанием)

Рис. 13.2.13. Пять типов многогранников Делоне в размерности 3

Многогранники Делоне в размерностях $k \leq 4$. Примерами многогранников Делоне в любой размерности $k \leq 1$ могут служить: симплекс α_k , ортаэдр β_k и гиперкуб γ_k . Действительно, $\alpha_k = \text{Руг}(\alpha_{k-1})$, $\beta_k = \text{Вируг}(\beta_{k-1})$ и $\gamma_k = \gamma_{k-1} \times \gamma_1$ при всех $k \geq 2$, а $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$ очевидно представляет собой многогранник Делоне. Напомним, что любой k -мерный остроугольный симплекс является многогранником Делоне, аффинно эквивалентным α_k ; аналогично любой k -мерный прямоугольный параллелепипед является многогранником Делоне, аффинно эквивалентным γ_k .

В действительности в размерностях $k \leq 4$ известны все типы многогранников Делоне. Они были классифицированы Эрдалом и Рышковым [1987]. Подытожим их описание.

- (i) В размерности 1 есть только один тип многогранников Делоне, а именно отрезок $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$.
- (ii) В размерности 2 есть ровно два типа многогранников Делоне, а именно остроугольный треугольник α_2 и прямоугольник $\beta_2 = \gamma_2$ (см. рисунок 13.2.13).
- (iii) В размерности 3 есть ровно пять типов многогранников Делоне. Это тетраэдр α_3 , октаэдр β_3 , куб γ_3 , призма с треугольным основанием (т. е. $\alpha_2 \times \alpha_1$) и пирамида с квадратным основанием (т. е. $\text{Руг}(\gamma_2)$) (см. рисунок 13.2.4).
- (iv) В размерности 4 есть ровно девятнадцать типов многогранников Делоне. Они представлены в таблицах V и VII в статье Эрдал, Рышков [1987]. Тринадцать из них могут быть получены из многогранников Делоне в размерностях 1, 2, 3 с помощью прямого

произведения, пирамидальной и бипирамидальных конструкций, как мы и покажем ниже.

– С помощью пирамидальной конструкции можно получить пирамиды с основанием α_3 (что дает α_4), с основаниями β_3, γ_3 (что дает γ_4); с основаниями в виде треугольной призмы или пирамиды с квадратным основанием.

– С помощью бипирамидальной конструкции можно получить бипирамиды с основаниями β_3 (что дает β_4) и γ_3 .

– С помощью прямого произведения 3-мерного многогранника Делоне на отрезок α_1 можно получить призмы с основаниями $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ (последнее дает γ_4), с основаниями в виде треугольной призмы или пирамиды с квадратным основанием.

– С помощью прямого произведения двух 2-мерных многогранников Делоне мы получаем $\alpha_2 \times \alpha_2$ (случаи $\alpha_2 \times \gamma_2$ и $\gamma_2 \times \gamma_2$ уже были упомянуты). Добавим сюда многогранник переделывания $P_{2,2}^0$ (ассоциированный с пентагональной фасетой; см. 15.2), что дает еще один 4-мерный многогранник Делоне — это многогранник A из таблицы VI Эрдала и Рышкова [1987]. Оставшиеся пять типов многогранников Делоне в таблице VI Эрдала и Рышкова [1987] находятся под номерами 4, 5, 6, 9 и 13¹).

Число комбинаторных типов многогранников Вороного тоже известно при малых ($k \leq 4$) размерностях. Для $k = 2$ это число равно 2 (типы реализуются прямоугольниками и шестиугольниками — см. рис. 13.2.4), для $k = 3$ это число равно 5, для $k = 4$ — равно 52. Предполагается, что для $k = 5$ их число составит 75000 (см. Вальдшмидт, Мусса, Лак и Ициксон [1992], стр. 479).

13.2.5. Дополнительные замечания

Решетки и неотрицательно определенные матрицы. Пусть $p \in \text{PSD}_n$ и $(p_{ij})_{i,j=1}^n$ — соответствующая неотрицательно определенная матрица (полагая $p_{ij} = p_{ji}$). По лемме 2.4.2 найдется n векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^k$ ($1 \leq k \leq n$) таких, что $p_{ij} = v_i^T v_j$ при всех $i, j = 1, \dots, n$, где k есть ранг системы $(v_1, \dots, v_n)$ и матрицы $(p_{ij})_{i,j=1}^n$. Поэтому $k = n$, если p положительно определена (т. е. p является внутренней

¹) Е. В. Власов [1996] нашел все 13 типов симметричных 5-мерных многогранников Делоне. Затем, П. Г. Кононенко нашел все 139 типов 5-мерных многогранников Делоне. — *Прим. ред.*

точкой PSD_n), и $k < n$ в противном случае. Положим $L := \mathbb{Z}(v_1, \dots, v_n)$. В некоторых случаях L является решеткой. В частности это верно, когда p положительно определена.

Одной решетке в $\mathbb{R}^n$ соответствует несколько положительно определенных матриц $p \in \text{PSD}_n$. Действительно, под действием группы $GL(n, \mathbb{Z})$ целочисленных унимодулярных преобразований на p получаются различные базисы одной и той же решетки L . Вороным [1908,1909] был доказан следующий результат (мы следуем изложению в Эрдал, Рышков [1987,1988]):

Действие $GL(n, \mathbb{Z})$ индуцирует разбиение конуса PSD_n на непересекающиеся относительно открытые выпуклые подконусы размерностей $1, 2, \dots, \binom{n+1}{2}$, которые называются *областями L -типа* и обладают следующими свойствами:

- (i) В каждом подконусе аффинная структура L -разбиений соответствующих ему решеток одна и та же, т. е. решетки, соответствующие точкам данного подконуса z -эквивалентны.
- (ii) Подконусы размерности $\binom{n+1}{2}$ отвечают общим решеткам, т. е. имеют симплициальное L -разбиение. Данные области L -типа полиэдральны.
- (iii) Подконусы размерности менее $\binom{n+1}{2}$ суть относительно открытые грани двух или более областей L -типа. Если такой конус касается границы некоторой области L -типа, он необходимо является гранью этой области. Решетка, соответствующая квадратичной форме на этой грани, является специальной, т. е. среди ее многогранников Делоне встречаются не симплексы.

Вороной [1908,1909] показал, что число различных (с точностью до z -эквивалентности) k -мерных решеток для любой фиксированной размерности k конечно. Следовательно, многие области L -типа соответствуют z -эквивалентным решеткам.

Многогранники Делоне и пустые эллипсоиды. Как мы увидим в разделе 14.1, изучение гиперметрических пространств расстояний на n точках сводится к изучению многогранников Делоне в размерностях $k \leq n-1$. В свою очередь, это тесно связано с изучением пустых эллипсоидов. Действительно, пустые эллипсоиды, возникающие как множества нулей квадратичных функций неотрицательных в целых точках, есть ни что иное, как аффинные образы пустых сфер.

Есть ряд работ Эрдала [1974, 1987, 1992] и Эрдала, Рышкова [1987] в которых исследуется множество целочисленных решений уравнений вида:

$$(13.2.14) \quad f(x) := a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = 0,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, а f удовлетворяет условию:

$$(13.2.15) \quad f(x) \geq 0 \quad \text{при всех } x \in \mathbb{Z}^n.$$

Множество целочисленных решений уравнения $f(x) = 0$ называется *конфигурацией корней* формы f и обозначается через R_f . Из условия (13.2.15) следует, что матрица $A_f := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ неотрицательно определена, а в области $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}$ не содержится целых точек. Положим

$$E_f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}.$$

Допустим сначала, что A_f — положительно определена. Тогда множество E_f является эллипсоидом, внутри которого нет целых точек, такой эллипсоид E_f называется *пустым* в $\mathbb{Z}^n$. Значит конфигурация корней R_f совпадает со множеством целых точек лежащих на E_f , и, таким образом, является конечным множеством. На самом деле конфигурация корней R_f аффинно эквивалентна множеству V вершин многогранника Делоне размерности $\dim(V) = \dim(R_f) \leq n$. Более того, все конфигурации корней, состоящие из конечного числа точек могут быть получены таким образом (см. Эрдал [1992]).

Допустим теперь, что A_f имеет ненулевое ядро¹⁾ V . Эрдал [1992] показал, что V имеет базис из целочисленных векторов. Тогда множество E_f содержит бесконечно много направлений, так как $f(x+v) = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in V$. Пусть W — дополнительное подпространство к V в $\mathbb{R}^n$. Тогда $E_f = V + E'$, где $E' := E_f \cap W$ есть эллипсоид в W . Таким образом, E_f можно рассматривать как «цилиндр» с образующей V и эллипсоидом в сечении; мы будем называть E_f *вырожденным эллипсоидом с осью V* . В этом случае конфигурация корней R_f состоит из бесконечного числа точек. На самом деле любая бесконечная конфигурация корней может быть получена из конечной с помощью простой конструкции. По существу, любая бесконечная конфигурация корней имеет вид $R + \Gamma$, где R — конфигурация корней, состоящая из конечного числа точек, а Γ — подрешетка в $\mathbb{Z}^n$ (см. теорему 2.1 в Эрдал [1992]).

Таким образом, изучение конфигураций корней сводится к изучению многогранников Делоне в размерностях $k \leq n$.

В заключение рассмотрим конус:

$$Q^+(\mathbb{Z}^n) := \left\{ a = (a_0, a_1, \dots, a_n, a_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq n) \mid \right.$$

¹⁾ *Ядро* матрицы A есть множество $\text{Кег } A$, состоящие из всех векторов x таких, что $Ax = 0$.

$$a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \geq 0 \text{ при всех } x \in \mathbb{Z}^n \},$$

т. е. каждый элемент $a \in Q^+(\mathbb{Z}^n)$ соответствует функции f_a , удовлетворяющей (13.2.15). Эрдал [1992] показал, что все $a \in Q^+(\mathbb{Z}^n)$, лежащие на крайних лучах $Q^+(\mathbb{Z}^n)$, удовлетворяют одному из следующих условий:

- (i) f_a является константой (т. е. $a_1 = \dots = a_n = a_{ij} = 0$);
- (ii) $f_a = (\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_i + \eta)^2$, где $(\alpha_i, \dots, \alpha_n)$ не пропорционален никакому вектору с целочисленными координатами;
- (iii) f_a совершенна, что в терминологии Эрдала [1992] означает, что размерность множества $\{b \in Q^+(\mathbb{Z}^n) \mid R_{f_a} \subseteq R_{f_b}\}$ равна 1.

Ясно, что конус гиперметрик HYP_{n+1} является (посредством ковариантного отображения) сечением конуса $Q^+(\mathbb{Z}^n)$. А именно,

$$\zeta(\text{HYP}_{n+1}) = \{a \in Q^+(\mathbb{Z}^n) \mid a_0 = 0 \text{ и } a_i = -a_{ii} \text{ при } i = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что понятие конфигурации корней соответствует понятию аннулятора из разделов 14.2 и 15.1. Более того, есть следующее соответствие между совершенными элементами $Q^+(\mathbb{Z}^n)$ и крайними лучами: $d \in \text{HYP}_{n+1}$ принадлежит крайнему лучу HYP_{n+1} тогда и только тогда, когда $\zeta(d)$ является совершенным элементом $Q^+(\mathbb{Z}^n)$.

13.3. Множество различных типов многогранников Делоне конечно

Напомним, что две решетки L, L' называются z -эквивалентными, если существует такая аффинная биекция T , что $L' = T(L)$, причем T переводит звезду L в звезду L' . (Отметим, что любая k -мерная решетка *аффинно эквивалентна* $\mathbb{Z}^k$!) Вороной [1908, 1909] доказал, что число различных (с точностью до z -эквивалентности) k -мерных решеток конечно. Отсюда, очевидно, следует, что число различных (с точностью до аффинной эквивалентности) k -мерных многогранников Делоне конечно. Иными словами, множество различных типов многогранников Делоне конечно. (Напомним, что два многогранника Делоне имеют один тип, если они аффинно эквивалентны.)

Так как доказательство Вороного очень затруднено для понимания, мы приведем непосредственное доказательство конечности числа типов многогранников Делоне в $\mathbb{R}^k$; оно взято из работы Деза, Гришухина и Лоран [1993].

Пусть γ — тип многогранника Делоне размерности k . Подмножество $B \subseteq \mathbb{R}^k$ называется *представительным базисом* γ , если существует многогранник Делоне P типа γ и решетка $L \subseteq \mathbb{R}^k$, содержащая множество $V(P)$ вершин многогранника P , для которой B является базисом. (Заметим, что решетка L может быть больше, чем решетка $L(P)$, порожденная вершинами P .)

Допустим, что P имеет N вершин и обозначим через Q_P матрицу размера $N \times k$, строками которой являются векторы $v \in V(P)$. Через M_P обозначим $k \times k$ матрицу, строками которой являются векторы из B . Тогда найдется такая целочисленная $N \times k$ матрица Y_γ , что

$$(13.3.1) \quad Q_P = Y_\gamma M_B.$$

Если P' — другой многогранник Делоне типа γ , т. е. $P' = T(P)$ для некоторого аффинного преобразования T , то выполнено следующее соотношение:

$$Q_{T(P)} = Y_\gamma M_{T(B)}$$

Таким образом, матрица Y_γ характеризует тип γ (лишь только выбран представительный базис B). Следующее утверждение показывает, что для каждого типа γ можно выбрать представительный базис B так, что матрица Y_γ будет иметь очень специальный вид, откуда будет следовать конечное число вариантов для Y_γ .

Предложение 13.3.2. Пусть γ — тип многогранников Делоне размерности k . Можно выбрать представительный базис B так, что матрица Y_γ будет удовлетворять следующим условиям:

- (i) В матрице Y_γ найдется такая нижнетреугольная $k \times k$ подматрица $D = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$, что $0 \leq a_{ij} \leq a_{ii}$ при всех $1 \leq j < i \leq k$.
- (ii) $p = |\det(D)|$ является максимумом модулей всех миноров k -го порядка матрицы Y_γ .
- (iii) $p \leq k!$.

Для доказательства нам потребуется следующий классический результат Касселса [1965] из теории решеток.

Предложение 13.3.3. Пусть L, L' — две k -мерные решетки в $\mathbb{R}^k$, причем $L' \subseteq L$. Для любого базиса $\{a_1, \dots, a_k\}$ решетки L' найдется такой базис $\{b_1, \dots, b_k\}$ решетки L , что

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \dots + \alpha_{ii}b_i,$$

при $i = 1, \dots, k$, где $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ — целые, удовлетворяющие

$$0 \leq \alpha_{ij} < \alpha_{ii}$$

при всех $1 \leq j < i \leq k$. ■

Доказательство предложения 13.3.2. Пусть P — многогранник Делоне типа γ с N вершинами, а L — решетка в $\mathbb{R}^k$, содержащая множество $V(P)$ вершин многогранника P . Пусть V_0 — k -элементное подмножество $V(P)$ и Q_0 — $k \times k$ подматрица Q_P , строками которой являются элементы V_0 . Выберем V_0 так, чтобы определитель $|\det(Q_0)|$ был наибольшим из возможных. Мы можем считать, что Q_0 состоит из первых k строк матрицы Q_P . Решетка $L' := \mathbb{Z}(V_0)$ есть подрешетка L , для которой V_0 является базисом. Применяя предложение 13.3.3 мы получаем существование такого базиса B решетки L , что

$$Q_0 = DM_B,$$

где D — целочисленная нижнетреугольная матрица, удовлетворяющая условию (ii) предложения 13.3.3. Выберем B в качестве представительного базиса типа γ . Тогда, так как $Q_P = (Q_P M_B^{-1})M_B$, учитывая соотношение (13.3.1), получаем, что $Q_P M_B^{-1}$ совпадает с целочисленной матрицей Y_γ . Заметим, что матрица $Q_P M_B^{-1}$ является $N \times k$ матрицей, причем ее первые k строк образуют матрицу D с определителем

$$p = |\det(D)| = \frac{|\det(Q_0)|}{|\det(M_B)|} = \frac{|\det(Q_0)|}{\det(L)}.$$

Отсюда, в соответствии с выбором Q_0 , абсолютное значение любого минора k -го порядка матрицы $Y_\gamma = Q_P M_B^{-1}$ не превосходит p . Таким образом матрица Y_γ удовлетворяет условиям (i) и (ii) предложения 13.3.2.

В завершение, проверим условие (iii). Обозначим через Δ симплекс с вершинами — элементами V_0 (т. е. строками Q_0). Тогда Δ содержится в P и, следовательно, $\text{vol}(\Delta) \leq \text{vol}(P)$. Однако

$$\text{vol}(\Delta) = \frac{|\det(Q_0)|}{k!} = \frac{p \det(L)}{k!} \quad \text{и} \quad \text{vol}(P) \leq \det(L)$$

по предложению 13.2.10. Отсюда следует, что $p \leq k!$. ■

Сейчас мы уже можем доказать, что число типов многогранников Делоне в $\mathbb{R}^k$ конечно.

Теорема 13.3.4. *Множество типов многогранников Делоне в пространстве $\mathbb{R}^k$ конечно.*

Доказательство. Каждый тип многогранников Делоне в $\mathbb{R}^k$ задается целочисленной $N \times k$ матрицей Y_γ , удовлетворяющей условиям (i)–(iii) предложения 13.3.2. Таким образом достаточно доказать, что существует лишь конечное число таких матриц. Для этого мы покажем,

что для данного p существует лишь конечное число матриц, удовлетворяющих условиям (i)–(ii) предложения 13.3.2.

Пусть Y — целочисленная $N \times k$ матрица, удовлетворяющая условиям (i), (ii) предложения 13.3.2. Пусть D — верхняя $k \times k$ подматрица матрицы Y . Тогда верхняя $k \times k$ подматрица матрицы YD^{-1} является единичной. Обозначим через r_{ih} ненулевой элемент YD^{-1} при $k+1 \leq i \leq N$ и $1 \leq h \leq k$. Пусть C — матрица, полученная из D заменой h -й строки на i -ю строку матрицы Y . В соответствии с условием (ii) предложения 13.3.2 $|\det(C)| \leq p$. С другой стороны, $|\det(CD^{-1})| = |r_{ih}|$, откуда

$$|r_{ih}| = \frac{\det(C)}{p} \in \left\{ 0, \frac{1}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}, 1 \right\}.$$

Так как YD^{-1} — $N \times k$ матрица с $N \leq 2^k$ (из предложения 13.3.8), то при фиксированных p и k существует только конечное число таких матриц YD^{-1} . В то же время D — целочисленная $k \times k$ матрица с $p = \alpha_{11} \dots \alpha_{kk}$, удовлетворяющая условию (i) предложения 13.3.2. Следовательно, существует только конечное число таких матриц D , а значит и конечное число вариантов для Y . ■

Глава 14.

Гиперметрические пространства и многогранники Делоне

В этой главе мы устанавливаем фундаментальное соответствие между гиперметрическими пространствами и многогранниками Делоне. Это позволяет нам сопоставить гиперметрическому пространству расстояний (X, d) ассоциированный с ним многогранник Делоне P_d ; причем ℓ_1 -вложимому пространству (X, d) соответствует многогранник Делоне, вложимый в параллелепипед. С помощью этого соответствия можно доказать полиэдральность конуса гиперметрик; несколько доказательств этого факта приведено в разделе 14.2. Воспользовавшись указанным соответствием (и классификацией неприводимых решеток корней) можно также дать описание графов, на которых метрика кратчайшего пути задает структуру гиперметрического или ℓ_1 -вложимого пространства. Такие графы могут быть получены из декартова произведения графов $K_{n \times 2}$, графов полукубов и исключительного графа из 56 вершин (граф Госсета) выбором подграфа с индуцированной метрикой (см. раздел 14.3). В разделе 14.4 собрано несколько результатов о сферических представлениях пространств расстояний и радиусах многогранников Делоне.

14.1. Связь между гиперметрическими пространствами и многогранниками Делоне

В этом разделе мы устанавливаем фундаментальное соответствие между гиперметрическими пространствами расстояний и многогранниками Делоне. Это соответствие было обнаружено

Ассуадом [1982, 1984] и сформулировано нами в теореме 14.1.3. Доказательство этой теоремы основано на следующих двух предложениях.

Предложение 14.1.1. Пусть векторы $c, v_0 := 0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^k$ удовлетворяют условиям:

- (i) $\|v_i - c\| = \|c\|$ при $1 \leq i \leq n$,
- (ii) $\|\sum_{1 \leq i \leq n} b_i v_i - c\| \geq \|c\|$ при всех $b \in \mathbb{Z}^n$.

Тогда множество $L := \mathbb{Z}(v_1, \dots, v_n)$ является решеткой.

Доказательство. Для $b \in \mathbb{Z}^n$ положим $v(b) := \sum_{1 \leq i \leq n} b_i v_i$. Тогда $v(b) \pm v_i \in L$. Учитывая (ii) получаем

$$(v_i \pm v(b) - c)^2 \geq c^2, \quad \text{т. е., } (v_i - c)^2 + (v(b))^2 \pm 2(v_i - c)^T v(b) \geq c^2,$$

что, в сочетании с (i), влечет

$$(a) \quad (v(b))^2 \geq 2|(v_i - c)^T v(b)| \quad \text{при } 1 \leq i \leq n.$$

Рассмотрим единичные векторы

$$e_i := \frac{v_i - c}{\|c\|} \quad \text{при } i = 0, 1, \dots, n, \quad \text{и} \quad e(b) := \frac{v(b)}{\|v(b)\|}.$$

Положим

$$\beta := \min \{ \max(e_i^T u \mid 1 \leq i \leq n) \mid u \in \mathbb{R}^k, \|u\| = 1 \}.$$

Мы покажем, что $\beta > 0$. Тогда из (a) будет следовать, что $\|v(b)\| \geq 2\beta\|c\|$ для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $v(b) \neq 0$. Другими словами, открытый шар с центром в начале координат и радиусом $2\beta\|c\|$ не содержит других точек решетки, кроме начала координат. Это доказывает, что L является решеткой. Предположим, что $\beta = 0$. Тогда мы можем найти последовательность $(u_p)_{p \geq 1}$ единичных векторов из $\mathbb{R}^k$ таких, что $|e_i^T u_p| \leq \frac{1}{p}$ при $1 \leq i \leq n$, $p \geq 1$. Исходя из компактности единичной сферы мы можем (переходя, если потребуется, к подпоследовательности) считать, что последовательность $(u_p)_{p \geq 1}$ сходится к пределу u при p стремящемся к бесконечности. Отсюда $\|u\| = 1$. В то же время $e_i^T u = 0$ при $i = 1, \dots, n$, что означает, что $u = 0$, так как векторы $v_1, \dots, v_n$ порождают $\mathbb{R}^k$. Полученное противоречие доказывает, что $\beta > 0$. ■

Предложение 14.1.2. Пусть (X, d) — пространство расстояний, $X = \{0, 1, \dots, n\}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) (X, d) — гиперметрическое пространство.

(ii) (X, d) имеет представление $i \in X \rightarrow v_i \in \mathbb{R}^k$ (где $k \leq n$) на сфере S , пустой во множестве

$$L_{af}(X, d) := \left\{ \sum_{i \in X} b_i v_i \mid b \in \mathbb{Z}^X \text{ и } \sum_{i \in X} b_i = 1 \right\}.$$

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) Так как (X, d) — отрицательного типа, то из предложения 13.1.2 следует, что (X, d) имеет представление $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^k$ при некотором k , $1 \leq k \leq n$. Более того, система $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ имеет ранг k , и мы не теряя общности можем считать, что $v_0 = 0$. Покажем сначала, что векторы $v_0, v_1, \dots, v_n$ лежат на сфере, т. е., что существует $c \in \mathbb{R}^k$ такое, что

$$(a) \quad 2c^T v_i = v_i^2 \text{ при } 1 \leq i \leq n.$$

Если $k = n$, то векторы $v_1, \dots, v_n$ линейно независимы, и следовательно система (a) имеет единственное решение c . Пусть $k \leq n - 1$. Обозначим через M матрицу размера $n \times k$, где строками являются векторы $v_1, \dots, v_n$; через U — подпространство $\mathbb{R}^k$, порожденное столбцами M . Положим $f := (v_1^2, \dots, v_n^2)^T$. Система (a) имеет решение тогда и только тогда, когда $f \in U$, или, что то же самое, когда $f^T g = 0$ для всех $g \in U^\perp$ ($U^\perp$ — ортогональное дополнение к U в $\mathbb{R}^k$). Пусть $g \in U^\perp$, а $b \in \mathbb{Z}$ таково, что $|g_i - b_i| < 1$ при $i = 1, \dots, n$. Положим $\delta := g - b$, так что δ принадлежит единичному кубу. Обозначим $p := \xi(d)$. Тогда $p_{ij} = v_i^T v_j$ при $1 \leq i < j \leq n$. Используя соотношение (13.1.4) получаем, что

$$(b) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i b_j p_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_{ii} \geq 0, \text{ т. е.,} \\ \left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_i v_i \right)^2 - \sum_{1 \leq i \leq n} b_i v_i^2 \geq 0.$$

Следовательно,

$$f^T b = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i v_i^2 \leq \left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_i v_i \right)^2 = (b^T M)^2 = (g^T M - \delta^T M)^2 = (\delta^T M)^2$$

при $g \in U^\perp$. Таким образом $f^T b \leq (\delta^T M)^2$, откуда $f^T g \leq f^T \delta + (\delta^T M)^2$. Значит $f^T g = 0$, т. к. в противном случае левая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно большой, в то время, как правая часть ограничена. Заметим, что решение c системы (a) единственно, так как полный ранг $(v_1, \dots, v_n)$ равен k .

Из (а) и (b) заключаем, что

$$\left(\sum_{i \in X} b_i v_i - c \right)^2 \geq c^2$$

при всех $b \in \mathbb{Z}^X$ с $\sum_{i \in X} b_i = 1$. Это доказывает, что сфера S с центром в c и радиусом $\|c\|$ пуста в $L_{af}(X, d)$.

(ii) $\implies$ (i) Пусть $b \in \mathbb{Z}^X$ и $\sum_{i \in X} b_i = 1$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{i, j \in X} b_i b_j d(b_i, b_j) &= \sum_{i, j \in X} b_i b_j (v_i - v_j)^2 = \\ &= \sum_{i, j \in X} b_i b_j (v_i - c + c - v_j)^2 = \sum_{i, j \in X} b_i b_j (2r^2 - 2(v_i - c)^T (v_j - c)) = \\ &= 2r^2 - 2 \left(\sum_{i \in X} b_i (v_i - c) \right)^2 = 2(r^2 - \left(\sum_{i \in X} b_i v_i - c \right)^2) \leq 0 \end{aligned}$$

так как сфера S пуста в $L_{af}(X, d)$. Это доказывает, что (X, d) — гиперметрическое пространство. $\blacksquare$

Следствием предложений 14.1.1 и 14.1.2 является следующая теорема, которая довершает доказанные утверждения о взаимосвязи между гиперметрическими пространствами и многогранниками Делоне.

Теорема 14.1.3. Пусть (X, d) — гиперметрическое пространство, $|X| = n + 1$. Тогда для некоторого $1 \leq k \leq n$ существует k -мерный многогранник Делоне P_d в $\mathbb{R}^k$ и отображение

$$f_d: i \in X \mapsto v_i \in V(P_d),$$

которое является порождающим, т. е. множество $\{v_i \mid i \in X\}$ порождает множество $V(P_d)$ вершин P_d , причем

$$d(i, j) = (v_i - v_j)^2 \quad \text{при } i, j \in X.$$

Более того, пара (P_d, f_d) определена однозначно с точностью до параллельных переносов и ортогональных преобразований. $\blacksquare$

Назовем многогранник P_d многогранником Делоне, ассоциированным с гиперметрическим пространством (X, d) ; решетку

$$\mathbb{Z}_{af}(V(P_d)) = \left\{ \sum_{v \in V(P_d)} b_v v \mid b \in \mathbb{Z}^{V(P_d)} \text{ и } \sum_{v \in V(P_d)} b_v = 1 \right\}$$

обозначим через L_d , а сферу, описанную вокруг многогранника P_d , — через S_d .

В качестве другого применения предложений 14.1.1 и 14.1.2 получаем следующее описание многогранников Делоне.

Предложение 14.1.4. Пусть P — многогранник размерности k в $\mathbb{R}^k$. Тогда P является многогранником Делоне в том, и только том случае, когда выполняются следующие утверждения.

- (i) Пространство расстояний $(V(P), d^{(2)})$ является гиперметрическим.
- (ii) Если Q — многогранник размерности k в $\mathbb{R}^k$ такой, что
 - (iia) $V(P) \subseteq V(Q)$,
 - (iib) $\mathbb{Z}_{af}(V(P)) = \mathbb{Z}_{af}(V(Q))$, и
 - (iic) пространство расстояний $(V(Q), d^{(2)})$ является гиперметрическим,
 то P и Q совпадают. ■

Например, возьмем в качестве Q квадрат (т. е. 2-мерный куб), а в качестве P — треугольник, вершинами которого являются какие-то три из вершин Q . Тогда P удовлетворяет (i), но не (ii). Действительно, треугольник P не является многогранником Делоне, т.к. он прямоугольный. Напомним, что треугольник является многогранником Делоне тогда и только тогда, когда все его углы острые. С другой стороны, в $\mathbb{R}^k$ существуют пары (P, Q) многогранников Делоне одинаковой размерности, которые удовлетворяют (iia), (iic), но не (iib). Такой пример приведен в разделе 16.4 для решетки Барнса-Уолла (рассмотрите пару (Q, P) из этого примера).

Заметим, что мы можем ограничиться случаем, когда гиперметрические расстояния между двумя различными точками отличны от нуля, т. е. иметь дело с метриками. Действительно, если (X, d) — гиперметрическое пространство с $d(i_0, j_0) = 0$ для некоторых двух различных точек $i_0, j_0 \in X$, то обозначим через $(X' := X \setminus \{j_0\}, d)$ подпространство в $X \setminus \{j_0\}$. Тогда (X, d) и (X', d) имеют один и тот же многогранник Делоне P (достаточно представить j_0 той же вершиной P , что и i_0).

Мы бы хотели отметить следующий факт, который нам неоднократно потребуется в дальнейшем.

Предложение 14.1.5. Пусть (X, d) — гиперметрическое пространство с представлением $(v_i \mid i \in X)$ во множестве вершин ассоциированного многогранника Делоне P_d . Для данного $b \in \mathbb{Z}^X$ при $\sum_{i \in X} b_i = 1$

имеем

$$\sum_{i,j \in X} b_i b_j d(b_i, b_j) = 0 \iff \sum_{i \in X} b_i v_i \text{ является вершиной } P_d.$$

Доказательство. Предложение следует из равенства

$$\sum_{i,j \in X} b_i b_j d(b_i, b_j) = 2 \left(r^2 - \left(\sum_{i \in X} b_i v_i - c \right)^2 \right),$$

полученного в доказательстве импликации (ii) $\implies$ (i) предложения 14.1.2, где $r^2 = c^2$. ■

Пример 14.1.6. Для подмножества $S \subseteq X$ рассмотрим бинарную метрику $\delta(S)$. Очевидно она является гиперметрикой. Ассоциированным многогранником Делоне является отрезок $\alpha_1 = [0, 1]$, а соответствующее представление гиперметрического пространства $(X, \delta(S))$ имеет вид

$$i \in S \mapsto v_i := 1, \quad i \in X \setminus S \mapsto v_i := 0. \quad \blacksquare$$

Пример 14.1.7. Пусть (X, d) — гиперметрическое пространство. Тогда d принадлежит внутренности конуса гиперметрик $\text{НУР}(X)$ в том и только том случае, когда ассоциированный многогранник Делоне данного пространства является симплексом $\alpha_{|X|-1}$ размерности $|X| - 1$ (т. к. по предложению 14.1.5 d не удовлетворяет нетривиальным гипергеометрическим неравенствам тогда и только тогда, когда $|V(P_d)| = \dim(P_d) + 1$). ■

Завершим этот раздел двумя дополнительными свойствами соответствия между гиперметрическими пространствами и многогранниками Делоне. Первое наблюдение состоит в том, что для подпространства (Y, d) гиперметрического пространства (X, d) его ассоциированный многогранник Делоне вложен в ассоциированный многогранник Делоне пространства (X, d) .

Лемма 14.1.8. Пусть P — многогранник Делоне, $V(P)$ — множество его вершин, $X \subseteq V(P)$. Обозначим через P_X многогранник Делоне, ассоциированный с гиперметрическим пространством $(X, d^{(2)})$. Тогда $V(P_X) \subseteq V(P)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X — порождающее подмножество $V(P)$.

Доказательство. Пусть L_X — подрешетка L , порожденная X , а A_X — аффинное пространство, порожденное X . Пусть S — описанная вокруг P сфера, так что S является пустой сферой в L . Сфера

$S_X = S \cap A_X$ пуста в L_X . Следовательно $P_X = \text{Conv}(S_X \cap L_X)$ является многогранником Делоне, а это и есть многогранник Делоне, ассоциированный с гиперметрическим пространством $(X, d^{(2)})$. Таким образом $V(P_X) = S_X \cap L_X$ действительно содержится в $V(P) = S \cap L$. Легко заметить, что $V(P_X) = V(P)$ тогда и только тогда, когда X порождает решетку L . ■

В частности, каждая грань многогранника Делоне является многогранником Делоне. Например, каждая двумерная грань многогранника Делоне является либо прямоугольником, либо остроугольным треугольником.

Следствие 14.1.9. Пусть (X, d) — гиперметрическое пространство, а (Y, d) — подпространство (X, d) , т. е., $Y \subseteq X$. Пусть P_X и P_Y — многогранники Делоне ассоциированные с (X, d) и (Y, d) соответственно. Тогда $V(P_Y) \subseteq V(P_X)$. ■

Некоторые свойства гиперметрического пространства (X, d) наследуются его ассоциированным многогранником Делоне. Именно так обстоит дело с вложимостью в гиперкуб и ℓ_1 -вложимостью, что и сформулировано ниже в предложении 14.1.10; (i) доказано в Ассуад [1982], а (ii) — в Деза и Гришухин [1993]. Другим примером является понятие ранга и экстремальности, что будет показано в разделе 15.1

Предложение 14.1.10. Пусть (X, d) — гиперметрическое пространство, P_d — его ассоциированный многогранник Делоне, а $V(P_d)$ — множество вершин P_d . Тогда

- (i) (X, d) является изометрически ℓ_1 -вложимым тогда и только тогда, когда P_d может быть вложен в параллелепипед, т. е., когда $(V(P_d), d^{(2)})$ является изометрически ℓ_1 -вложимым.
- (ii) Более того, если d принимает только рациональные значения, то (X, d) является изометрически ℓ_1 -вложимым тогда и только тогда, когда P_d может быть вложен в гиперкуб со стороной λ при некотором $\lambda > 0$; наименьшее из таких λ является минимальной шкалой пространств (X, d) и $(V(P_d), d^{(2)})$.

Доказательство. (i) Множество вершин параллелепипеда с индуцированным $d^{(2)}$ -расстоянием очевидно является ℓ_1 -вложимым. Обратно, допустим, что (X, d) является ℓ_1 -вложимым. Тогда

$$d = \sum_{1 \leq h \leq m} \lambda_h \delta(S_h),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ и $S_1, \dots, S_m \subset X$. Положим $e'_h := \sqrt{\lambda_h} e_h$, где e_h есть h -й единичный вектор из $\mathbb{R}^m$, $1 \leq h \leq m$. Обозначим через L решетку в $\mathbb{R}^m$, порожденную $(e'_1, \dots, e'_m)$. Легко убедиться, что сфера S с центром $c := \frac{1}{2} \sum_{1 \leq h \leq m} e'_h$ и радиусом $\|c\|$ пуста в L . Для $i = 1, \dots, n$ положим

$$I_i := \{h \in \{1, \dots, m\} \mid i \in S_h\}.$$

Таким образом $h \in I_i$ тогда и только тогда, когда $i \in S_h$. Следовательно,

$$d(i, j) = \sum_{1 \leq h \leq m, |S_h \cap \{i, j\}|=1} \lambda_h = \sum_{1 \leq h \leq m, h \in I_i \Delta I_j} \lambda_h.$$

Отсюда следует, что отображение

$$i \in X \mapsto v_i = \sum_{h \in I_i} e'_h \in \mathbb{R}^m$$

является представлением (X, d) . Действительно,

$$d^{(2)}(v_i, v_j) = \left(\sum_{h \in I_i \Delta I_j} e'_h \right)^2 = \sum_{h \in I_i \Delta I_j} \lambda_h = d(i, j).$$

Этим доказано, что многогранник Делоне P_d , ассоциированный с (X, d) , вложим в параллелепипед, натянутый на векторы e'_h , $1 \leq h \leq m$. Утверждение (ii) доказывается так же. ■

14.2. Полиэдральность конуса гиперметрик

Конус гиперметрик НУР_{n+1} определяется с помощью бесконечного числа неравенств. Возникает естественный вопрос, нельзя ли ограничиться конечным набором этих неравенств для задания НУР_{n+1} , или, другими словами, является ли конус НУР_{n+1} полиэдральным. Следующая теорема Деза, Гришухина и Лоран [1993] дает положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 14.2.1. *Конус гиперметрик НУР_{n+1} полиэдрален при всех $n \geq 2$.*

Мы приводим три доказательства этого факта. В каждом из них вместо самого конуса гиперметрик НУР_{n+1} рассматривается его образ

$\xi(\text{HYP}_{n+1})$ под действием ковариантного отображения ξ . Доказательство полиэдральности конуса $\xi(\text{HYP}_{n+1})$ проводится тремя способами: показав, что этот конус имеет конечное число граней; что он может быть представлен в виде объединения конечного числа полиэдральных конусов; что он совпадает с бóльшим конусом, определенным с помощью конечного подсемейства неравенств из исходного определения. Напомним (см. (13.1.4)), что $\xi(\text{HYP}_{n+1})$ определяется с помощью неравенств

$$(14.2.2) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i b_j p_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_{ii} \geq 0$$

при всех $b \in \mathbb{Z}^n$.

Первое доказательство было проведено Деза, Гришухиным и Лоран [1993]. Оно основано на существующем соответствии между гранями конуса гиперметрик и типами многогранников Делоне. В этом случае существенно используется результат об ограниченности числа типа многогранников Делоне данной размерности.

Второе доказательство основано на разбиении конуса $\xi(\text{HYP}_{n+1})$ на конечное число областей L -типа. Здесь используются два результата Вороного; один относится к ограниченности числа типа решеток данной размерности, другой касается свойств разбиения конуса PSD_n на области L -типа (в частности, утверждения о том, что каждая область L -типа является полиэдральным конусом).

Третье доказательство было проведено Ловасом [1983]. Оно состоит в непосредственном доказательстве того, что среди всех неравенств (14.2.2) определения $\xi(\text{HYP}_{n+1})$ только конечное число является существенно необходимыми; а именно, показано, что неравенств (14.2.2), где b ограничено с помощью n , уже достаточно для задания $\xi(\text{HYP}_{n+1})$. Для каждого $p \in \xi(\text{HYP}_{n+1})$ множество

$$E_p := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j p_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq n} x_i p_{ii} = 0 \right\}$$

является эллипсоидом (возможно вырожденным¹⁾), внутри которого нет целых точек. Ключевое место доказательства состоит в утверждении, что если p лежит на границе $\xi(\text{HYP}_{n+1})$, то E_p содержит «короткий» целочисленный вектор b (отличный от нуля и координатных ортов), что означает, что все компоненты b ограничены константой, зависящей от n , например $\max_{1 \leq i \leq n} |b_i| \leq n!$. Лучшая верхняя граница, чем $n!$, приведена в предложении 14.2.4.

¹⁾ Смотрите (13.2.5). — *Прим. перев.*

Первое доказательство. Пусть $d \in \text{НУР}_{n+1}$, а $p = \xi(d)$. *Аннулятор* $\text{Ann}(p)$ точки p определяется как

$$\text{Ann}(p) = \left\{ b \in \mathbb{Z}^n \mid b \neq 0, e_1, \dots, e_n \text{ и } \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i b_j p_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_{ii} = 0 \right\},$$

где через $e_1, \dots, e_n$ обозначены координатные орты в $\mathbb{R}^n$. Пусть $F(p)$ — наименьшая грань $\xi(\text{НУР}_{n+1})$, содержащая p , т. е.

$$F(p) = \xi(\text{НУР}_{n+1}) \cap \bigcap_{b \in \text{Ann}(p)} H_b,$$

где через H_b обозначена гиперплоскость в $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$, определенная уравнением

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} b_i b_j p_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq n} b_i p_{ii} = 0.$$

Ясно, что доказательство полиэдральности $\xi(\text{НУР}_{n+1})$ сводится к доказательству того, что он имеет только конечное число различных граней, или, равносильно, что существует только конечное число различных аннуляторов вида $\text{Ann}(p)$ при $p \in \xi(\text{НУР}_{n+1})$.

Обозначим через P_d многогранник Делоне, ассоциированный с d , а через L_d — ассоциированную решетку. Пусть $i \in X \mapsto v_i \in V(P_d)$ — представление (X, d) на описанной около P_d сфере S_d с центром в c . Можно считать, что $v_0 = 0$; тогда $L_d = \mathbb{Z}(v_1, \dots, v_n)$. При $v \in L_d$ положим

$$\mathbb{Z}(v) := \left\{ b \in \mathbb{Z}^n \mid v = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i v_i \right\}.$$

Тогда из предложения 14.1.5 следует, что

$$(a) \quad \text{Ann}(p) \cup \{0, e_1, \dots, e_n\} = \bigcup_{v \in V(P_d)} \mathbb{Z}(v).$$

Допустим, что многогранник P_d имеет тип γ . Пусть B — представительный базис типа γ , а Y_γ — целочисленная матрица, определяющая тип γ в соответствии с предложением 13.3.2. Тогда

$$Q_{P_d} = Y_\gamma M_B,$$

где через Q_{P_d} обозначена матрица, строками которой являются векторы $v \in V(P_d)$, а через M_B обозначена матрица, строками которой являются векторы из B . Обозначим через Q матрицу размера $n \times k$, строками которой являются векторы v_i при $1 \leq i \leq n$. Таким образом, Q может

иметь равные строки, и каждая строка Q является строкой Q_{P_d} . В этом случае найдется такая целочисленная матрица Y , что

$$Q = YM_B.$$

Если обозначить через y_v ($v \in V(P_d)$) строки Y_γ , то строки Y будут иметь вид y_{v_i} (при $1 \leq i \leq n$). Заметим, что

$$v = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i v_i \iff y_v = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i y_{v_i}.$$

Таким образом, для всех $v \in V(P_d)$

$$\mathbb{Z}(v) = \left\{ b \in \mathbb{Z}^n \mid y_v = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i y_{v_i} \right\}.$$

Итак, при $v \in V(P_d)$, $\mathbb{Z}(v)$ зависит только от $(y_v, y_{v_1}, \dots, y_{v_n})$. Воспользовавшись (a), мы заключаем, что $\text{Ann}(p)$ однозначно определяется матрицей Y_γ и набором $(y_v, y_{v_1}, \dots, y_{v_n})$ некоторых ее строк. Другими словами, для каждого $d \in \text{HYP}_{n+1}$ аннулятор $\text{Ann}(\xi(d))$ однозначно определяется парой (γ, θ) , где γ — тип многогранника Делоне в $\mathbb{R}^k$ при $k \leq n$, а θ — отображение множества $\{1, \dots, n\}$ во множество строк матрицы Y_γ . Так как по предложению 13.2.8 Y_γ имеет $|V(P_d)| \leq 2^k$ строк, то число таких отображений θ конечно. Более того, конечно также число типов многогранников Делоне в данной размерности (по теореме 13.3.4). Поэтому число различных аннуляторов $\text{Ann}(\xi(d))$ (при $d \in \text{HYP}_{n+1}$) конечно. Тем самым доказана полиэдральность конуса гиперметрик. ■

Второе доказательство. Воспользуемся результатами раздела 13.2.5 о разбиении конуса PSD_n на области L -типа. Напомним, что из соотношения (13.1.7) следует, что $\xi(\text{HYP}_{n+1})$ является подконусом конуса PSD_n . Точнее, верно следующее. Пусть система $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^k$ имеет ранг k ($1 \leq k \leq n$). Положим $L := \mathbb{Z}(v_1, \dots, v_n)$, и зададим $p \in \text{PSD}_n$ полагая $p_{ij} = v_i^T v_j$ при $1 \leq i, j \leq n$. В соответствии с результатами раздела 14.1 имеем:

- $p \in \xi(\text{HYP}_{n+1})$ тогда и только тогда, когда L является
- (b) решеткой и $v_1, \dots, v_n$ являются вершинами одного и того же многогранника Делоне из звезды точки начала координат в L .

Более того, если $p \in \xi(\text{HYP}_{n+1})$, то вся область L -типа, содержащая p , целиком содержится в $\xi(\text{HYP}_{n+1})$. Значит $\xi(\text{HYP}_{n+1})$ есть объединение областей L -типа. На самом деле это *конечное* объединение. Действительно, $\xi(\text{HYP}_{n+1})$ содержит только конечное число таких областей

L -типа, что их ассоциированные решетки попарно z -эквивалентны (это следует из (b) и того, что в данной решетке L есть только конечное число способов выбрать n векторов $v_1, \dots, v_n$, являющихся вершинами одного и того же многогранника Делоне из звезды L). Причем число различных (с точностью до z -эквивалентности) решеток фиксированной размерности конечно. Следовательно $\xi(\text{НУР}_{n+1})$ представляет собой объединение конечного числа областей L -типа. Однако области L -типа обладают замечательным свойством — они являются полиэдральными конусами. Значит $\xi(\text{НУР}_{n+1})$ — полиэдральный конус. ■

Третье доказательство. При $p \in \xi(\text{НУР}_{n+1})$ положим

$$E_p := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j p_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq n} x_i p_{ii} = 0 \right\}.$$

Обозначим через V_p ядро матрицы $(p_{ij})_{i,j=1}^n$. Если p состоит из рациональных чисел, то V_p допускает базис из целочисленных векторов и, таким образом, $x + v \in E_p$ для всех $x \in E_p$, $v \in V_p$. Следовательно, если матрица (p_{ij}) имеет ненулевое ядро, то E_p является вырожденным эллипсоидом с осью V_p . Как и в первом доказательстве, положим

$$\text{Ann}(p) := E_p \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0, e_1, \dots, e_n\}),$$

где $e_1, \dots, e_n$ — координатные орты. По определению $\xi(\text{НУР}_{n+1})$, внутри области, ограниченной эллипсоидом E_p нет целочисленных точек. Причем отметим, что векторы $0, e_1, \dots, e_n$ лежат на E_p . Ключевая идея доказательства состоит в том, что для каждой рациональной матрицы p , принадлежащей границе $\xi(\text{НУР}_{n+1})$, найдется «короткий» вектор b из $\text{Ann}(p)$, что здесь означает выполнение неравенства $\max_{1 \leq i \leq n} |b_i| \leq n!$.

Если мы сможем проверить этот факт, то тем самым $\xi(\text{НУР}_{n+1})$ будет совпадать с конусом, определяемым неравенствами (14.2.2) для всех b таких, что $\max_{1 \leq i \leq n} |b_i| \leq n!$. (Действительно, последний конус содержит $\xi(\text{НУР}_{n+1})$, а его граница содержит границу $\xi(\text{НУР}_{n+1})$, откуда следует, что они совпадают). Пусть p состоит из рациональных чисел и принадлежит границе $\xi(\text{НУР}_{n+1})$, а $k' := \dim(V_p)$. Покажем, что

(с) существует $b \in \text{Ann}(p)$ такой, что $\max_{1 \leq i \leq n} |b_i| \leq (n - k')!$.

Допустим сначала, что $k' = 0$, т. е. матрица p_{ij} положительно определена. Тогда E_p — невырожденный эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ и, так как p принадлежит границе $\xi(\text{НУР}_{n+1})$, $\text{Ann}(p) \neq \emptyset$. Пусть $b \in \text{Ann}(p) \neq \emptyset$, и допустим, например, что $|b_1|, \dots, |b_{n-1}| \leq |b_n|$. Обозначим через

Δ n -мерный симплекс, натянутый на $n + 1$ векторов $0, e_1, \dots, e_{n-1}, b$, лежащих на E_p , а через $\text{vol}(\Delta)$ — его объем. Тогда

$$\text{vol}(\Delta) = \frac{b_n}{n!} \quad \text{и} \quad \text{vol}(\Delta) \leq 1;$$

последнее неравенство выполнено в силу того, что внутри эллипсоида E_p нет целых точек, т. е.

$$\text{vol}(\Delta) \leq \text{vol}(\text{Conv}(\mathbb{Z}^n \cap E_p)) \leq 1,$$

что, в свою очередь, является аналогом неравенства $\text{vol}(P) \leq \det(L)$ из предложения 13.2.10 (где P — многогранник Делоне в решетке L). Следовательно, $|b_n| \leq n!$, т. е. (с) выполнено.

Теперь допустим, что $\dim(V_p) = k' \geq 1$. Тогда E_p является вырожденным эллипсоидом с осью V_p . Покажем, что V_p содержит целочисленный вектор, у которого все компоненты не превосходят $(n - k')!$. Для этого обозначим через $a^1, \dots, a^{k'}$ некоторые k' линейно независимых векторов из $V_p \cap \mathbb{Z}^n$; через M_i ($i = 1, \dots, n$) — $k' \times k'$ матрицу, строками которой являются векторы $(a_1^h, \dots, a_{k'-1}^h, a_i^h)$ при $h = 1, \dots, k'$; через D_i — определитель M_i . Тогда $D_1 = \dots = D_{k'-1} = 0$, и мы можем без потери общности считать, что $D_{k'} \neq 0$. Можно также считать, что $|D_{k'+1}|, \dots, |D_n| \leq |D_{k'}|$. Положим

$$b := (D_1, \dots, D_n)^T.$$

При $h \in \{1, \dots, k'\}$ обозначим через M'_h $(k' - 1) \times (k' - 1)$ матрицу, строками которой являются векторы $(a_1^r, \dots, a_{k'-1}^r)$ ($r \in \{1, \dots, k'\} \setminus \{h\}$), и положим $\gamma_h := (-1)^{h+k'} \det(M'_h)$. Разлагая определитель D_i по последнему столбцу, получаем равенство $D_i = \sum_{1 \leq h \leq k'} \gamma_h a_i^h$, т. е.

$$b = \sum_{1 \leq h \leq k'} \gamma_h a^h.$$

Из последнего равенства следует, что $b \in V_p$. Пусть g обозначает наибольший общий делитель чисел $D_1, \dots, D_n$. Тогда $\frac{1}{g}b$ есть целочисленный вектор, принадлежащий V_p . Покажем, что вектор $\frac{1}{g}b$ удовлетворяет условию (с), т. е. проверим условие $\frac{|D_{k'}|}{g} \leq (n - k')!$.

Положим $W := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \dots = x_{k'} = 0\}$. Тогда $\mathbb{R}^n = V_p + W$. Обозначим через π проекцию на W вдоль V_p в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, если $x = y + z$ есть единственное разложение вектора $x \in \mathbb{R}^n$ на составляющие $y \in V_p$, $z \in W$, то $\pi(x) = z$. В этом случае $L := \pi(\mathbb{Z}^n)$

есть решетка в $\mathbb{R}^{n-k'}$, содержащая $\mathbb{Z}^{n-k'}$ в качестве подрешетки. Более того, $\pi(E_p)$ есть невырожденный эллипсоид в $\mathbb{R}^{n-k'}$. Этот эллипсоид является пустым в L , т. е. ни одна точка решетки L не лежит внутри $\pi(E_p)$. Обозначим через Δ $(n - k')$ -мерный симплекс, натянутый на $n - k' + 1$ векторов $0, e_{k'+1}, \dots, e_n$, принадлежащих $\pi(E_p) \cap L$. Тогда $\text{vol}(\Delta) = \frac{1}{(n - k')!}$ и $\text{vol}(\Delta) \leq \det(L)$, так как эллипсоид $\pi(E_p)$ пуст в L . Отсюда

$$\frac{1}{\det(L)} \leq (n - k')!.$$

Рассмотрим фактор-множество $L/\mathbb{Z}^{n-k'}$. Его мощность равна индексу $\mathbb{Z}^{n-k'}$ в L , т. е. $\frac{1}{\det(L)}$. Следовательно

$$|L/\mathbb{Z}^{n-k'}| = \frac{1}{\det(L)} \leq (n - k')!.$$

С другой стороны, как будет показано ниже, $|L/\mathbb{Z}^{n-k'}| \geq \frac{|D_n|}{g}$, откуда и следует, что вектор $\frac{1}{g}b$ «короткий». Докажем, что

$$|L/\mathbb{Z}^{n-k'}| \geq \frac{|D_n|}{g}.$$

Для этого рассмотрим векторы $(0_{k'-1}, \alpha, 0_{n-k'})$, у которых все компоненты, кроме k' -й равны нулю, а компонента k' равна α — целому числу такому, что $0 \leq \alpha < \frac{|D_{k'}|}{g}$. Покажем, что проекции этих $\frac{|D_{k'}|}{g}$ векторов принадлежат разным классам фактор-множества $L/\mathbb{Z}^{n-k'}$. Допустим, от противного, что α, α' — два целых числа (удовлетворяющих условию $0 \leq \alpha < \alpha' < \frac{|D_{k'}|}{g}$), таких, что два вектора¹⁾ $(0_{k'-1}, \alpha, 0_{n-k'})$ и $(0_{k'-1}, \alpha', 0_{n-k'})$ принадлежат одному и тому же классу. Тогда найдутся $z \in \mathbb{Z}^{n-k'}$ и скаляры $\beta_1, \dots, \beta_{k'} \in \mathbb{R}$ такие, что

$$(0_{k'-1}, \alpha' - \alpha, 0_{n-k'}) = \sum_{1 \leq h \leq k'} \beta_h a^h + (0_{k'}, z), \text{ т. е. } \begin{cases} \sum_{1 \leq h \leq k'} \beta_h a_i^h = 0 & \text{при } i = 1, \dots, k' - 1; \\ \sum_{1 \leq h \leq k'} \beta_h a_{k'}^h = \alpha_0 = \alpha' - \alpha, \\ \sum_{1 \leq h \leq k'} \beta_h a_i^h = -z_i & \text{при } i = k' + 1, \dots, n. \end{cases}$$

¹⁾ В действительности, проекции этих векторов. — *Прим. перев.*

Из первых k' уравнений этой системы следует, что $\beta_h = \frac{\gamma_h \alpha_0}{D_{k'}}$ при $h = 1, \dots, k'$. Из последних $n - k'$ уравнений и того, что $\sum_{1 \leq h \leq k'} \gamma_h a_i^h = b_i = D_i$, заключаем, что $\alpha_0 D_i = -z_i D_{k'}$, т. е.

$$\alpha_0 \frac{D_i}{g} = -z_i \frac{D_{k'}}{g}$$

при всех $i = k' + 1, \dots, n$. Так как целые числа $\frac{D_{k'+1}}{g}, \dots, \frac{D_n}{g}$ взаимно просты, то α_0 должно делиться на $\frac{D_{k'}}{g}$, что невозможно, так как $0 < \alpha_0 < \frac{|D_{k'}|}{g}$.

Замечание 14.2.3. Уточним связь между понятиями, использованными в первом доказательстве (пустая сфера S_d , решетка L_d , и т. д.) и в третьем доказательстве (эллипсоид E_p , и проч.). Мы будем использовать обозначения из обоих доказательств. Пусть $d \in \text{HYP}_{n+1}$ и $p := \xi(d)$ имеет ранг k , причем $p_{ij} = v_i^T v_j$, где $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^k$. Векторы $v_1, \dots, v_n$ лежат на сфере S_d , пустой в решетке $L_d = \mathbb{Z}(v_1, \dots, v_n)$, а $P_d = \text{Conv}(S_d \cap L_d)$ — многогранник Делоне, ассоциированный с d . Обозначим через V_d ядро (p_{ij}) , имеющее размерность $k' = n - k$, а через W — ортогональное дополнение к нему в $\mathbb{R}^n$, введенное в третьем доказательстве. Ясно, что

$$b \in \text{Ann}(p) \iff \sum_{1 \leq i \leq n} b_i v_i \in V(P_d),$$

$$b \in V_p \iff \sum_{1 \leq i \leq n} b_i v_i = 0.$$

Определим линейный оператор $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ по формуле

$$\varphi(b) = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i v_i, \quad \text{при } b \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом ядром φ является пространство V_p , следовательно φ задает взаимно-однозначное отображение между W и $\mathbb{R}^k$. В частности эллипсоиду $\pi(E_d)$ при этом отображении взаимно-однозначно соответствует сфера S_d . Также φ отображает решетку Z^n на решетку L_d . ■

Из доказательства Ловаса (третье из приведенных нами) немедленно следует, что неравенств (14.2.2) с векторами $b \in \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющими условию

$$\max_{1 \leq i \leq n} |b_i| \leq n!$$

достаточно для задания конуса $\xi(\text{НУР}_{n+1})$.

Авис и Гришухин [1993] показали, что уже неравенств (14.2.2) с векторами $b \in \mathbb{Z}^n$ удовлетворяющими более сильному условию

$$\max_{1 \leq i \leq n} |b_i| \leq (n-1)!$$

уже достаточно для задания конуса $\xi(\text{НУР}_{n+1})$. (В действительности, они приводят оценку $\frac{2^{n-2}(n-1)!}{n+1}$, но эта граница может быть улучшена до $(n-1)!$ с помощью верхней оценки объема многогранника Делоне из предложения 13.2.10.) Точнее, в их работе показано, что если неравенство (14.2.2) определяет фасету конуса $\xi(\text{НУР}_{n+1})$, то $\max_{1 \leq i \leq n} |b_i| \leq (n-1)!$. Их доказательство использует то, что фасеты конуса гиперметрик соответствуют очень специальному классу многогранников Делоне, а именно классу многогранников переделывания (описанному в разделе 15.2).

Следующая более точная оценка получена Ловасом [1994], доказательство основано на лемме 14.2.5.

Предложение 14.2.4. *Конус $\xi(\text{НУР}_{n+1})$ определяется неравенствами (14.2.2) с $b \in \mathbb{Z}^n$ удовлетворяющими условию*

$$\max_{1 \leq i \leq n} |b_i| \leq \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} n!.$$

Лемма 14.2.5. *Пусть E — эллипсоид в $\mathbb{R}^n$, а L — n -мерная решетка в $\mathbb{R}^n$. Допустим, что E пуст в L , т. е. нет ни одной точки решетки, лежащей внутри области, ограниченной E . Пусть $x_0 = 0, x_1, \dots, x_n$ — аффинно независимые точки в $E \cap L$, а Δ — натянутый на них симплекс. Тогда*

$$\text{vol}(\Delta) \leq \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \det(L).$$

Доказательство. Рассмотрим тело разностей $\Delta - \Delta := \{x - y \mid x, y \in \Delta\}$. Это выпуклое тело, центрально симметричное с центром в начале координат. Легко убедиться, что начало координат является единственной точкой решетки, принадлежащей внутренности $\Delta - \Delta$. Значит, по теореме Минковского (см., например, Зигель [1989]) выполнено

$$\text{vol}(\Delta - \Delta) \leq 2^n \det(L).$$

С другой стороны, в Роджерс и Шефард [1957] доказано, что

$$\text{vol}(\Delta - \Delta) = \binom{2n}{n} \text{vol}(\Delta).$$

Отсюда получаем искомый результат. ■

Доказательство предложения 14.2.4. Назовем вектор b «коротким», если

$$|b_i| \leq \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} n!$$

при всех $1 \leq i \leq n$. Используя оценку объема симплекса из леммы 14.2.5, можно несколько изменить третье доказательство теоремы 14.2.1 и убедиться, что при каждом p , принадлежащем границе $\xi(\text{НУР}_{n+1})$, найдется короткий вектор в $\text{Ann}(p)$. (При этом также используется неравенство

$$\frac{2^k}{\binom{2k}{k}} k! \leq \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} n!,$$

верное при всех k , $1 \leq k \leq n$.) ■

Замечание 14.2.6. Исходя из предложения 14.2.4 можно (грубо) оценить сверху количество фасет конуса $\xi(\text{НУР}_{n+1})$ (или конуса гиперметрик НУР_{n+1}) числом $(2B_n + 1)^n$, где

$$B_n := \frac{2^n n!}{\binom{2n}{n}}.$$

Значит, проблема определения, является ли данное расстояние гиперметрикой, принадлежит классу co-NP проблем. Неизвестно, является ли определение гиперметричности строгой NP проблемой. Однако следующие результаты относящиеся к сложности были доказаны Ависом и Гришухиным [1993]; они будут подробно рассмотрены в разделе 28.3.

- (i) Зафиксируем целочисленное расстояние d и целое число m . Удовлетворяет ли d всем гиперметрическим неравенствам $(2m + 1)$ -угольника? Эта проблема co-NP полна.
- (ii) Зафиксируем целочисленное расстояние d . Является ли d гиперметрикой? Если нет, то привести наименьшее k такое, что d не удовлетворяет неравенству $(2k + 1)$ -угольника. Эта проблема NP -трудна. ■

14.3. Многогранники Делоне в решетках корней

В этом разделе собрано несколько результатов, относящихся к многогранникам Делоне в решетках корней. Сначала мы напомним

описание неприводимых решеток корней и их многогранников Делоне. Мы покажем, что если P — многогранник Делоне в решетке корней, то граф его 1-остова полностью определяется метрической структурой P (см. предложение 14.3.3). Затем мы убедимся, что многогранники Делоне в решетках корней естественным образом возникают из тех гиперметрических пространств, которые являются связными и сильно четными (см. предложение 14.3.5). Как следствие мы получим описание всех гиперметрических или ℓ_1 -вложимых связных сильно четных d -пространств (см. теоремы 14.3.6 и 14.3.7).

Пусть P — многогранник Делоне, L — решетка корней, причем P порождает L . Если L приводима, то $L = L_1 \oplus L_2$, где L_1, L_2 — тоже решетки корней. Значит $P = P_1 \times P_2$, где P_i — многогранник Делоне в L_i ($i = 1, 2$). Таким образом достаточно дать описание порождающих многогранников Делоне в неприводимых решетках корней.

Неприводимые решетки корней были классифицированы Виттом (см., например, Броуэр, Коэн и Ноймайер [1989]). Это решетки A_n ($n \geq 0$), D_n ($n \geq 4$) и E_n ($n = 6, 7, 8$). Ниже мы приведем их описание; решетки E_6, E_7 и E_8 будут подробно изучены в разделе 16.2.

Для каждой из решеток A_n , D_n и E_n мы напомним сведения об их корнях (т. е. минимальных векторах) и пустых сферах в них (т. е. о дырах в них). Более подробные сведения можно найти, например, в работах Броуэр, Коэн и Ноймайер [1989] и Конвей, Слоэн [1990, 1991].

Решетка A_n ($n \geq 0$).

- $A_n = \{x \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{0 \leq i \leq n} x_i = 0\}$.
- Корнями A_n являются $n(n+1)$ векторов $e_i - e_j$, $0 \leq i \neq j \leq n$, где e_i — i -й координатный орт в $\mathbb{R}^{n+1}$.
- В A_n есть $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ типов пустых сфер. Их центрами являются точки

$$c_a = \left(\frac{a}{n+1}, \dots, \frac{a}{n+1}, -\frac{n+1-a}{n+1}, \dots, -\frac{n+1-a}{n+1} \right),$$

где $\frac{a}{n+1}$ повторяется $n+1-a$ раз и $-\frac{n+1-a}{n+1}$ повторяется a раз

($1 \leq a \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$). Радиусы соответствующих сфер равны $r_a =$

$= \sqrt{\frac{a(n+1-a)}{n+1}}$. Случай $a = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ соответствует глубокой дыре, т. е. дыре максимального радиуса.

- Вершинами многогранника Делоне, вписанного в пустую сферу радиуса r_a с центром в c_a , являются следующие $\sum_b \binom{n+1-a}{b} \binom{a}{b}$

векторов: $(1^b, 0^{n+1-a-b}; (-1)^b, 0^{a-b})$ (при $0 \leq b \leq a, n+1-a$). Здесь номера координат первых b единиц выбираются среди $n+1-a$ координат вхождений $\frac{a}{n+1}$ в c_a , а номера координат последних b минус единиц выбираются среди a координат вхождений $-\frac{n+1-a}{n+1}$ в c_a . Графом 1-остова этого многогранника является граф Джонсона¹⁾ $J(n+1, a)$.

Решетка D_n ($n \geq 4$).

- $D_n = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \in 2\mathbb{Z}\}$.
- Корнями D_n являются $2n(n-1)$ векторов $\pm e_i \pm e_j$ при $1 \leq i \neq j \leq n$.
- В D_n есть два типа пустых сфер, а именно пустая сфера S_1 с центром $c_1 = (0, \dots, 0, 1)$ и радиуса $r_1 = 1$ и пустая сфера S_2 с центром $c_2 = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ и радиуса $r_2 = \frac{\sqrt{n}}{2}$.
- Вершинами многогранника Делоне, вписанного в сферу S_1 , являются следующие $2n$ векторов: $(0, \dots, 0)$, $(0, \dots, 0, 2)$ и $(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0, 1)$, где компонента ± 1 расположена на одном из первых $n-1$ мест. Это ортаэдр β_n , графом его 1-остова является граф $K_{n \times 2}$.
- Вершинами многогранника Делоне, вписанного в сферу S_2 , являются 2^{n-1} векторов $x \in \{0, 1\}^n$, отвечающих условию $\sum_{0 \leq i \leq n} x_i \in 2\mathbb{Z}$. Это полукуб $h\gamma_n$, графом его 1-остова является граф полукуба $\frac{1}{2}H(n, 2)$. Он соответствует глубокой дыре в D_n .

Заметим, что в случае $n = 4$, многогранники β_4 и $h\gamma_4$ конгруэнтны (т. е. совмещаются с помощью ортогональных преобразований и параллельных переносов).

Решетка E_8 .

- $E_8 = \{x \in \mathbb{R}^8 \mid x \in \mathbb{Z}^8 \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)^8 \text{ и } \sum_{1 \leq i \leq 8} x_i \in 2\mathbb{Z}\}$, т. е. E_8 есть решетка, порожденная D_8 и $\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 8} e_i$. Решетка E_8 четная и унимодулярная, следовательно $E_8^* = E_8$.
- Корнями E_8 являются 240 векторов $\pm e_i \pm e_j$ и $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm \dots \pm e_8)$, где число минусов у корней второго сорта четно.

¹⁾ Графом Джонсона $J(n, t)$ при $1 \leq t \leq n$ называется граф со множеством вершин $\{A \subseteq \{1, \dots, n\} : |A| = t\}$ и ребрами (A, B) , отвечающими условию $|A \cap B| = t-1$.

- В E_8 есть два типа пустых сфер, а именно пустая сфера S_1 с центром $c_1 = (1, 0^7)$ и радиуса $r_1 = 1$ и пустая сфера S_2 с центром $c_2 = \left(\frac{5}{6}, \frac{1^7}{6}\right)$ и радиуса $r_2 = \sqrt{\frac{8}{9}}$.
- Вершинами многогранника Делоне, вписанного в сферу S_1 , являются следующие 16 векторов: (0^8) , $(2, 0^7)$, $(1, 0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$, где компонента ± 1 расположена на одном из последних семи мест. Это ортаэдр β_8 , графом его 1-остова является граф $K_{8 \times 2}$. Он соответствует глубокой дыре в E_8 .
- Вершинами многогранника Делоне, вписанного в сферу S_2 , являются следующие 9 векторов: (0^8) , $\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ и $(1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где вторая единица расположена на одном из последних семи мест. Это симплекс α_8 , графом его 1-остова является граф K_9 .

Подчеркнем, что так как решетка E_8 является четной и унимодулярной, то ни один из ее многогранников Делоне не является порождающим (в соответствии с леммой 13.2.6).

Решетка E_7 .

- Решетка корней E_7 представляет собой ортогональное дополнение в E_8 к любому минимальному вектору $v_0 \in E_8$. Если выбрать $v_0 = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, то $E_7 = \{x \in E_8 \mid \sum_{1 \leq i \leq 8} x_i = 0\}$. Другим возможным вариантом для v_0 мог бы быть вектор $(1, 1, 0^6)$; с соответствующим, вторым, определением E_7 мы будем иметь дело в разделе 16.2 (в действительности, там мы будем использовать в качестве E_7 следующий аффинный сдвиг: $\{x \in E_8 \mid x^T v_0 = x_1 + x_2 = 1\}$).
- В E_7 есть два типа пустых сфер, а именно пустая сфера S_1 с центром $c_1 = \left(\frac{3^2}{2}, -\frac{1^6}{4}\right)$ и радиуса $r_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и пустая сфера S_2 с центром $c_2 = \left(\frac{7}{8}, -\frac{1^7}{8}\right)$ и радиуса $r_2 = \sqrt{\frac{7}{8}}$.
- Вершинами многогранника Делоне, вписанного в сферу S_1 , являются 56 векторов $c_1 \pm \left(\frac{3^2}{4}, -\frac{1^6}{4}\right)$. Это многогранник Госсета 3_{21} , графом его 1-остова является граф Госсета G_{56} . Он соответствует глубокой дыре в E_7 .
- Вершинами многогранника Делоне, вписанного в сферу S_2 , являются следующие 8 векторов: (0^8) и $(1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$, где

минус единица расположена на одном из последних семи мест. Это семимерный симплекс α_7 , графом его 1-остова является граф K_8 .

Решетка E_6 .

- Решетка корней E_6 состоит из тех векторов E_8 , которые ортогональны произвольным двум неортогональным минимальным векторам v_0 и w_0 из E_8 . Если выбрать $v_0 = (1, 1, 0^6)$ и $w_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0^6\right)$, то $E_6 = \{x \in E_8 \mid x_1 + x_2 = x_3 + \dots + x_8 = 0\}$. (В разделе 16.2 мы выбираем другие v_0 и w_0 и рассматриваем аффинный сдвиг E_6 .)
- В решетке E_6 есть пустые сферы только одного типа, их радиус равен $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Вершинами многогранника Делоне, вписанного в пустую сферу, являются следующие 27 векторов: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{6}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{6}\right)$ (где $\frac{5}{6}$ расположено на одном из последних шести мест) и $\left(0, 0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (где обе $-\frac{2}{3}$ расположены на одном из последних шести мест). Это многогранник Шлефли 2_{21} , графом его 1-остова является граф Шлефли G_{27} . Таким образом звезда E_6 содержит только несколько экземпляров 2_{21} и их образы при центральной симметрии.

В таблице 14.3.1 мы приводим сводку результатов о многогранниках Делоне, возникающих в неприводимых решетках корней. Для каждой неприводимой решетки корней L перечислены все многогранники Делоне P , входящие в звезду L . Заметим, что P всегда является порождающим для L (т. е. $V(P)$ порождает L), за исключением случаев α_8 и β_8 , которые *не* порождают E_8 . Для каждого многогранника Делоне P представлен граф его 1-остова, обозначенный через $H(P)$ и названный *графом многогранника Делоне*. В последней колонке приводятся квадраты r^2 радиусов r сфер, описанных около P . Так как $d_{H(P)}(u, v) = \frac{1}{2}(u - v)^2$ при всех $u, v \in V(P)$ (по предложению 14.3.3), то для графа $H(P)$ его метрическое пространство $(V(P), d_{H(P)})$ является гиперметрическим, а ассоциированный L -многогранник имеет радиус $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

решетка L	многогранник Делоне P	граф многогранника Делоне $H(P)$	квадрат радиуса r^2
A_n ($n \geq 0$)	см. описание выше	$J(n+1, t)$ для $1 \leq t \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$	$\frac{t(n+1-t)}{n+1}$
D_n ($n \geq 4$)	β_n $h\gamma_n$	$K_{n \times 2}$ $\frac{1}{2}H(n, 2)$	$\frac{1}{n/4}$
E_8	α_8 β_8	K_9 $K_{8 \times 2}$	$\frac{8}{9}$ 1
E_7	α_7 3_{21}	K_8 G_{56}	$\frac{7}{8}$ $\frac{3}{2}$
E_6	2_{21}	G_{27}	$\frac{4}{3}$

Рис. 14.3.1. Многогранники Делоне в неприводимых решетках корней.

Замечание 14.3.2. Здесь собрано несколько замечаний о графах $J(n, t)$, $\frac{1}{2}H(n, 2)$, $K_{n \times 2}$, K_n , графах Шлефли G_{27} и Госсета G_{56} , встречающихся в таблице 14.3.1.

- (i) Среди них есть несколько изоморфных, а именно: $J(n, 1) = K_n$, $\frac{1}{2}H(2, 2) = K_2$, $\frac{1}{2}H(3, 2) = K_4$, $K_{3 \times 2} = J(4, 2)$, $K_{4 \times 2} = \frac{1}{2}H(4, 2)$. Заметим, что граф $J(n, 2)$ является реберным графом $L(K_n)$ графа K_n , и называется также *графом триангуляций* $T(n)$. Граф полукуба $\frac{1}{2}H(5, 2)$ тоже имеет другое название — *граф Клебша*.
- (ii) $J(n, t)$ является изометричным подграфом графов $\frac{1}{2}H(n, 2)$ и $J(n+1, t)$; $\frac{1}{2}H(n, 2)$ является изометричным подграфом графа $\frac{1}{2}H(n+1, 2)$; $K_{n \times 2}$ является изометричным подграфом графа $K_{(n+1) \times 2}$. Также $\nabla \frac{1}{2}H(5, 2)$ есть изометричный подграф G_{27} ; $\frac{1}{2}H(6, 2)$, $K_{6 \times 2}$, $J(8, 2)$ и ∇G_{27} являются изометричными подграфами G_{56} . Следовательно G_{27} есть изометричный подграф G_{56} .

(так как диаметр G_{27} равен 2). В действительности, $J(5, 2)$ (соответственно, $\frac{1}{2}H(5, 2)$, G_{27}) есть подграф $\frac{1}{2}H(5, 2)$ (соответственно, G_{27} , G_{56}) индуцированный отношением соседства с одной из вершин этого графа.

- (iii) $J(n, t)$, $K_{n \times 2}$ ($n \geq 2$), $\frac{1}{2}H(n, 2)$ являются ℓ_1 -графами, однако G_{27} и G_{56} такими не являются. ■

Следующий результат касается одного интересного свойства многогранника Делоне P в решетке корней. Оказывается, что геометрические свойства P полностью определяются метрической структурой P : граф его 1-остова состоит из пар вершин на $d^{(2)}$ -расстоянии 2. Это было доказано Деза и Гришухиным [1993].

Предложение 14.3.3. Пусть P — порождающий многогранник Делоне в решетке корней. Обозначим через $G(P)$ граф со множеством вершин $V(P)$, ребрами которого являются такие пары (u, v) (при $u, v \in V(P)$), что $d^{(2)}(u, v) = 2$. Пусть $d_{G(P)}$ — метрика кратчайшего пути на этом графе. Тогда для всех $u, v \in V(P)$ верно

$$d^{(2)}(u, v) = 2d_{G(P)}(u, v),$$

т. е. пространство расстояний многогранника Делоне $(V(P), d^{(2)})$ совпадает с пространством $(V(P), 2d_{G(P)})$. Более того, $G(P)$ совпадает графом $H(P)$ 1-остова многогранника P , т. е. две вершины u, v соединены ребром в P тогда и только тогда, когда $d^{(2)}(u, v) = 2$.

Доказательство. Рассмотрим сначала $u, v \in V(P)$ такие, что $d_{G(P)}(u, v) = 2$. Пусть (u, v_1, v) — путь в $G(P)$ от u до v , т. е. $(u - v_1)^2 = (u_1 - v)^2 = 2$ и $(u - v)^2 > 2$. Заметим, что

$$(14.3.4) \quad (u_1 - u)^T(u_1 - v) = 0.$$

Действительно, $(u_1 - u)^T(u_1 - v) \geq 0$, так как любые три вершины P образуют треугольник без тупых углов. Используя соотношение (13.2.1) получим, что $(u_1 - u)^T(u_1 - v) = 0, 1$. Более того, $(u - v)^2 = 4 - 2(u_1 - u)^T(u_1 - v) > 2$, откуда $(u_1 - u)^T(u_1 - v) = 0$, а значит и $(u - v)^2 = 4 = 2d_{G(P)}(u, v)$.

Теперь рассмотрим $u, v \in V(P)$ при $d_{G(P)}(u, v) = k \geq 2$. Пусть $(u_0 = u, u_1, \dots, u_k = v)$ — кратчайший путь в $G(P)$ от u до v . Тогда $u - v = \sum_{1 \leq i \leq k} r_i$, где $r_i := u_i - u_{i-1}$ является корнем (т. е. $r_i^2 = 2$) при $1 \leq i \leq k$. Итак, этот путь соответствует упорядоченному набору корней $(r_1, \dots, r_k)$. Рассмотрим участок пути вида (u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) . Применяя (14.3.4) заключаем, что $r_i^T r_{i+1} = 0$. Поэтому

любые два соседних корня из набора $(r_1, \dots, r_k)$ ортогональны. Заметим, что $w := u_{i-1} + u_{i+1} - u_i$ также является вершиной P , так как $w \in L$ и w принадлежит сфере, описанной вокруг P . Следовательно, $(u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, w, u_{i+1}, \dots, u_k)$ есть другой кратчайший путь от u до v ; он соответствует набору корней $(r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, r_i, r_{i+2}, \dots, r_k)$. По тем же самым соображениям $r_i^T r_{i+2} = r_{i-1}^T r_{i+1} = 0$. Повторяя этот процесс, мы убеждаемся, что любые два корня r_i, r_j ($i \neq j$) ортогональны. Следовательно

$$(u - v)^2 = \sum_{1 \leq i \leq k} r_i^2 = 2k = 2d_{G(P)}(u, v).$$

Более того, $u - v$ есть диагональ k -мерного куба, натянутого на $r_1, \dots, r_k$, все вершины которого являются вершинами P . Следовательно u и v не соединены ребром в P .

Легко убедиться, что и обратно, любые две вершины u и v из P с $(u - v)^2 = 2$ соединены ребром в P . ■

Теперь видно, что многогранники Делоне в решетках корней естественным образом возникают из связных сильно четных гиперметрических пространств. Напомним, что пространство расстояний (X, d) называется сильно четным, если $d(i, j)$ является четным (целым) числом при всех $i, j \in X$, и $d(i, j) = 2$ для некоторых $i, j \in X$.

Предложение 14.3.5. Пусть (X, d) — связное сильно четное пространство расстояний. Если (X, d) — гиперметрическое пространство с ассоциированным многогранником Делоне P_d , а решетка L_d порождена P_d , то L_d является решеткой корней.

Доказательство. Обозначим через $i \in X \mapsto v_i \in V(P_d)$ представление (X, d) в L_d . Так как пространство расстояний (X, d) связно и сильно четно, то решетка L_d порождена множеством $\{v_i - v_j \mid i, j \in X \text{ и } d(i, j) = 2\}$. Значит L_d — решетка корней. ■

В качестве приложения мы можем дать описание всех гиперметрических или ℓ_1 -вложимых связных сильно четных пространств расстояний. Следующие теоремы 14.3.6 и 14.3.7 были получены Тервиллигером и Деза [1987] и Деза и Гришухиным [1993] соответственно. Приложения к теории графов сформулированы в разделе 17.1.

Теорема 14.3.6. Пусть (X, d) — связное сильно четное пространство расстояний. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) (X, d) — гиперметрическое пространство.

- (ii) $\left(X, \frac{1}{2}d\right)$ изометрично подпространству прямого произведения графов полукубов $\frac{1}{2}H(n, 2)$ ($n \geq 7$), графов $K_{n \times 2}$ ($n \geq 7$) и нескольких экземпляров графов Госсета G_{56} .

Доказательство. (i) $\implies$ (ii). Как следует из предложения 14.3.5, многогранник Делоне P_d , ассоциированный с (X, d) , порождает решетку корней. Следовательно, по предложению 14.3.3, пространство многогранника Делоне $\left(V(P_d), \frac{d^{(2)}}{2}\right)$ совпадает с пространством графа $(V(P_d), d_{H(P_d)})$, которое, как видно из таблицы 14.3.1, является прямым произведением графов Джонсона, графов $K_{n \times 2}$, графов полукубов и нескольких экземпляров графов G_{27} и G_{56} . Окончательный результат теперь следует из замечания 14.3.2. Импликация (ii) $\implies$ (i) очевидна. ■

Теорема 14.3.7. Пусть (X, d) — связное сильно четное пространство расстояний. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) (X, d) изометрично ℓ_1 -вложимо.
(ii) $\left(X, \frac{1}{2}d\right)$ изометрично подпространству произведения графов полукубов и графов $K_{n \times 2}$. ■

Теорема 14.3.7 может быть доказана тем же способом, что и теорема 14.3.6, воспользовавшись предложением 14.1.10 и тем, что графы G_{27} и G_{56} не являются ℓ_1 -графами. Для метрических пространств графов (самый важный случай) другое доказательство было дано Шпекторовым [1993]; его доказательство элементарно (не использует многогранников Делоне), но более длинно. Мы приведем это доказательство в главе 21.

14.4. Радиусы многогранников Делоне

Здесь мы приводим ряд результатов, в некоторых случаях уточняющих имеющиеся сведения о радиусах многогранников Делоне. Первый результат есть частичное обращение импликации (ii) $\implies$ (iv) из предложения 13.1.2; дается явная оценка радиуса сферического представления пространства расстояний (X, d) отрицательного типа в случае, когда сумма $\sum_{i \in X} d(i, j)$ является константой. Этот результат

был уже сформулирован в теореме 6.2.18; напомним его здесь для удобства изложения.

Предложение 14.4.1. *Допустим, что пространство расстояний (X, d) отрицательного типа, и сумма $\sum_{i \in X} d(i, j)$ не зависит от выбора $j \in X$. Тогда (X, d) имеет сферическое представление на сфере с центром в центре масс представления и радиуса*

$$(14.4.2) \quad r^2 = \frac{1}{2|X|} \sum_{i \in X} d(i, j). \quad \blacksquare$$

Примером пространства расстояний с постоянной суммой $\sum_{i \in X} d(i, j)$ является метрическое пространство графа $(V(G), d_g)$, где G — дистанционно-регулярный граф или регулярный граф диаметра 2 (см. раздел 17.2). Предложение 14.4.3 ниже является уточнением предложения 14.4.1 для случая гиперметрических пространств, а предложение 14.4.4 является частичным обращением импликации (i) $\implies$ (ii) из предложения 13.1.2. Оба результата приведены в работе Деза, Гришухина [1993].

Предложение 14.4.3. *Пусть (X, d) — гиперметрическое пространство, а P_d — ассоциированный многогранник Делоне. Обозначим через r радиус описанной сферы S_d . Если сумма $\sum_{i \in X} d(i, j)$ не зависит от выбора $j \in X$, то радиус r определяется по формуле (14.4.2).*

Доказательство. Исходя из предложения 14.4.1, мы можем считать, что X лежит на сфере S с центром в центре масс X и радиуса r определенного по формуле 14.4.2. С другой стороны, S_d — сфера минимальной размерности, содержащая X . Отсюда $S_d \subseteq S$. Аффинное пространство, натянутое на S_d , содержит X , а значит и его центр масс, т. е. центр S . Следовательно, радиусы S и S_d совпадают. $\blacksquare$

Предложение 14.4.4. *Пусть (X, d) — связное сильно четное пространство расстояний. Предположим, что (X, d) имеет представление на сфере радиуса r , причем $r^2 < 2$. Тогда (X, d) — гиперметрическое пространство.*

Доказательство. Пусть $(v_i \mid i \in X)$ — представление (X, d) на сфере S . С точностью до параллельного переноса можно считать, что для некоторого индекса $i \in X$ $v_i = 0$. По предложению 14.3.5 $L(X, d) := \mathbb{Z}(v_i \mid i \in X)$ — решетка корней. Мы покажем, что сфера S пуста в $L(X, d)$, откуда, по предложению 14.1.2, и будет следовать гиперметричность (X, d) . Пусть H — аффинное пространство, порожденное

$(v_i \mid i \in X)$. Можно считать (заменяя, если потребуется S на $S \cap H$), что сфера S вложена в H . Пусть l — прямая в $\mathbb{R}^{n+1}$, ортогональная H и проходящая через центр S , а q — такая точка на l , что $(q - v_i)^2 = 2$ при всех $i \in X$. Заметим, что $(q - v)^2 < 2$ для всех точек v , лежащих внутри открытого шара ограниченного сферой S . Отметим также, что $(q - v_i)^T(q - v_j) \in \{0, -1, 1\}$ при всех $i \neq j \in X$. Действительно, так как (X, d) — сильно четно, то $(v_i - v_j)^2$ четно, и

$$(v_i - v_j)^2 = 4 - 2(q - v_i)^T(q - v_j) \leq 4r^2 < 8,$$

откуда $(v_i - v_j)^2 \in \{2, 4, 6\}$. Следовательно $L' := \mathbb{Z}(q - v_i \mid i \in X)$ — решетка корней, и, в частности, $a^2 \geq 2$ при всех $a \in L'$, $a \neq 0$. Предположим теперь, что некоторая точка $v \in L(X, d)$ лежит внутри открытого шара, ограниченного сферой S . Тогда $(v - q)^2 < 2$, что невозможно, так как $v - q \in L'$. ■

Мы приведем некоторые результаты о сферических t -расширениях гиперметрических пространств. Зафиксируем пространство расстояний (X, d) . Напомним, что его сферическое t -расширение $(X' := X \cap \{i_0\}, \text{sph}_t(d))$ определяется условиями:

$$\text{sph}_t(d)(i, j) = d(i, j), \quad \text{при } i, j \in X$$

$$\text{sph}_t(d)(i, i_0) = t, \quad \text{при } i \in X.$$

Следующая лемма определяет параметры¹⁾ t , при которых $\text{sph}_t(d)$ принадлежит конусу отрицательного типа, и предложение 14.4.6 ниже выделяет те значения t , при которых операция сферического t -расширения сохраняет гиперметричность. Оба результата взяты из работы Гришущина [1992b].

Лемма 14.4.5. Пусть (X, d) — пространство расстояний. В этом случае $\text{sph}_t(d) \in \text{NEG}_{n+1}$ тогда и только тогда, когда (X, d) имеет сферическое представление радиуса r при $r^2 \leq t$. Более того,

(i) Если $r^2 < t$, то $\text{sph}_t(d)$ имеет сферическое представление радиуса

$$R := \frac{t}{2\sqrt{t - r^2}}.$$

(ii) Если $r^2 = t$, то $\text{sph}_t(d)$ не имеет сферических представлений.

Доказательство. Если $\text{sph}_t(d) \in \text{NEG}_{n+1}$, то $\text{sph}_t(d)$ имеет представление $i \in X' \mapsto v_i$ при $(v_i - v_{i_0})^2 = t$. Следовательно все v_i ($i \in X$) лежат на сфере S_0 радиуса $\sqrt{t}$ с центром в v_{i_0} . Обозначим через H аффинное

¹⁾ Напомним, что в теории приближений величина $\min(\sqrt{t} \mid \text{sph}_t(d) \in \text{NEG}_{n+1})$ называется радиусом Чебышева пространства (X, d) . (Чебышев [1947]).

пространство, порожденное $(v_i \mid i \in X)$. Таким образом все v_i ($i \in X$) лежат на сфере $S_d = S_0 \cap H$ радиуса r не превосходящего $\sqrt{t}$.

Обратно, рассмотрим представление $(v_i \mid i \in X)$ пространства (X, d) на сфере S_d радиуса r при $r^2 \leq t$. Рассмотрим прямую, проходящую через центр S_d и ортогональную аффинному пространству H , порожденному $(v_i \mid i \in X)$. Выберем точку v_{i_0} на этой прямой на расстоянии $\sqrt{t - r^2}$ от H . Тогда $(v_i \mid i \in X')$ является представлением $\text{sph}_t(d)$, откуда $\text{sph}_t(d) \in \text{NEG}_{n+1}$.

Допустим, что $r^2 < t$. Обозначим через S сферу размерности на единицу большей, чем S_d , и содержащую S_d и v_{i_0} . Таким образом $S_d = S \cap H$ и радиус сферы S равен $R = \frac{t}{2\sqrt{t - r^2}}$. С другой стороны, если $r^2 = t$, то точка v_{i_0} является центром $S_0 = S_d$, и представление $\text{sph}_t(d)$ не сферично. ■

Предложение 14.4.6. Пусть (X, d) — гиперметрическое пространство, а r — радиус сферы S_d , описанной около многогранника P_d .

- (i) Если $t \geq 2r^2$, то $\text{sph}_t(d)$ является гиперметрическим пространством радиуса $R := \frac{t}{2\sqrt{t - r^2}}$, причем $t \geq 2R^2$ (и $R \geq r$, где равенство достигается тогда и только тогда, когда $t = 2r^2$). Следовательно $\text{sph}_t^m(d)$ является гиперметрическим пространством при всех натуральных m . Пусть P — многогранник Делоне, ассоциированный с $\text{sph}_t(d)$. Если $t \geq 2r^2$, или $t = 2r^2$ и многогранник P_d асимметричен, то многогранник P есть пирамида с основанием P_d . Если многогранник P_d центрально симметричен, то P является бипирамидой с основанием P_d .
- (ii) Если $r^2 < t < 2r^2$ и многогранник P_d центрально симметричен, то $\text{sph}_t(d)$ не является гиперметрическим пространством.

Доказательство. Мы будем пользоваться обозначениями доказательства леммы 14.4.5.

(i) Пусть L_d — решетка, порожденная $V(P_d)$, а L — решетка, порожденная L_d и v_{i_0} . Таким образом L состоит из слоев, являющихся сдвигами L_d ; расстояние между последовательными слоями равно $h = \sqrt{t - r^2}$. По предположению $t \geq 2r^2$, откуда $h \geq R = \frac{t}{2\sqrt{t - r^2}}$. Это доказывает, что сфера S пуста в L . Следовательно $\text{sph}_t(d)$ является гиперметрическим пространством, а его ассоциированный многогранник Делоне имеет радиус R . Если $t > 2r^2$, то P есть пирамида с основанием P_d и вершиной v_{i_0} . Если $t = 2r^2$, то легко убедиться, что точка $v_{i_0}^*$, центрально противоположная v_{i_0} , лежит на сфере S в L

тогда и только тогда, когда многогранник P_d центрально симметричен. Следовательно, в случае центрально симметричного P_d , многогранник P является бипирамидой с основанием P_d и вершиной v_{i_0} , а в случае асимметричного P_d , многогранник P является пирамидой с основанием P_d и вершиной v_{i_0} . Заметим, что неравенство $t > 2R^2$ следует из того, что $R = \frac{t}{2h}$ и $h > R$.

(ii) Пусть $v \in V(P_d)$, а v^* означает центрально противоположную точку на сфере S_d . Тогда $w = v + v^* - v_{i_0}$ принадлежит L . Докажем, что w лежит внутри S , откуда будет следовать, что пространство $\text{sph}_t(d)$ не является гиперметрическим. Действительно,

$$(v - v^*)^2 = 4r^2, \quad (v - v_{i_0})^2 = (v^* - v_{i_0})^2 = t, \\ (v - c)^2 = (v^* - c)^2 = (v_{i_0} - c)^2 = R^2,$$

а значит $(w - c)^2 = R^2 + 2t - 4r^2 < R^2$. ■

В заключение приведем без доказательства результат Деза и Гришукина [1996b], связывающий радиус покрытия решетки с радиусами ее симметричных многогранников Делоне.

Предложение 14.4.7. Пусть L — k -мерная решетка в $\mathbb{R}^k$ с радиусом покрытия $\rho(L)$ (т. е. $\rho(L)$ есть максимум из радиусов сфер, описанных около многогранников Делоне в L). Обозначим через R максимум из радиусов симметричных многогранников Делоне в L (полагая $R := 0$, если таких не найдется), а через r — максимум из радиусов собственных симметричных граней многогранников Делоне в L . Тогда $R \leq \rho(L) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \max\{R, r\}$. ■

Сейчас мы приведем несколько примеров приложений (взятых, в частности, из Авис и Маехара [1994] и Гришухин [1992b]).

Пример 14.4.8. Рассмотрим полный двудольный граф $K_{1,n}$ и его надстройку $\nabla K_{1,n}$. Тогда их метрики кратчайших путей могут быть представлены как $d(K_{1,n}) = \text{sph}_1(d)$, $d(\nabla K_{1,n}) = \text{sph}(\text{sph}_1(d))$, где $d := 2d(K_n)$ принимает значение 2 на всех парах элементов из $\{1, \dots, n\}$.

Расстояние d является гиперметрикой с радиусом r равным $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$ (по предложению 14.4.3). Следовательно, пользуясь леммой 14.4.5, заключаем, что $d(K_{1,n})$ имеет сферическое представление радиуса $R = \frac{1}{2\sqrt{1-r^2}} = \sqrt{\frac{n}{4}}$. Таким образом $d(\nabla K_{1,n})$ является пространством отрицательного типа тогда и только тогда, когда $n \leq 4$. Более того,

у $d(\nabla K_{1,n})$ нет сферического представления при $n = 4$, а при $n = 2, 3$ пространство $d(\nabla K_{1,n})$ имеет сферическое представление радиуса $\frac{1}{2\sqrt{1-R^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-n}}$. ■

Пример 14.4.9. Для $n \geq 4$ рассмотрим граф $K_n \setminus P_3$ (где P_3 обозначает линейный путь с тремя вершинами). Обозначим через d расстояние на трех точках, принимающее два раза значение 2 и один раз значение 1. Ясно, что $d(K_4 \setminus P_3) = \text{sph}_1(d)$ и $d(K_n \setminus P_3) = \text{sph}_1^{n-3}(d)$ при $n \geq 4$. Легко убедиться, что d является гиперметрикой с квадратом радиуса $r_3^2 = \frac{4}{7}$ и ассоциированным многогранником Делоне α_2 . Положим

$$(r_{n+1})^2 = \frac{1}{4(1-r_n^2)}$$

при $n \geq 3$. Тогда

$$r_4^2 = \frac{7}{12}, \quad r_5^2 = \frac{3}{5}, \quad r_6^2 = \frac{5}{8}, \quad r_7^2 = \frac{2}{3}, \quad r_8^2 = \frac{3}{4}, \quad r_9^2 = 1.$$

Из леммы 14.4.5 заключаем, что $d(K_n \setminus P_3)$ имеет сферическое представление радиуса r_n , если $n \leq 9$, а $d(K_{10} \setminus P_3)$ — отрицательного типа, но сферического представления не имеет. Применяя предложение 14.4.4 к $2d(K_n \setminus P_3)$, получаем, что $d(K_n \setminus P_3)$ гиперметрично при $n \leq 8$. Известно, что многогранником Делоне, ассоциированным с $2d(K_7 \setminus P_3)$, является многогранник Шлефли 2_{21} , а многогранником Делоне, ассоциированным с $2d(K_8 \setminus P_3)$, является многогранник Госсета 3_{21} (см. раздел 16.2). Значит, из предложения 14.4.6 следует, что $d(K_9 \setminus P_3)$ не является гиперметрикой, так как многогранник 3_{21} центрально симметричен. В довершение заметим, что $d(K_n \setminus P_3)$ является ℓ_1 -вложимым при $n \leq 6$, но не при $n = 7$. Последнее утверждение будет обосновано позднее в замечании 19.2.9. ■

Здесь мы хотели бы отметить любопытную аналогию между минимальным ℓ_1 -размером и радиусом многогранника Делоне, ассоциированного с ℓ_1 -вложимым расстоянием. Пусть (X, d) — пространство расстояний с $|X| = n$. Рассмотрим итерированное сферическое t -расширение $\text{sph}_t^m(d)$. Часть предложения 14.4.6 может быть переформулирована следующим образом:

(а) Пусть $d \in \text{HYP}_n$. Тогда $\text{sph}_t^m(d) \in \text{HYP}_{n+m}$ при всех $m \geq 1$, если $t \geq \frac{1}{2}(\text{diam}(P_d))^2$, где $\text{diam}(P_d)$ обозначает диаметр сферы описанной около многогранника Делоне P_d , ассоциированного с d .

Сравните (а) с леммой 7.3.3, которая утверждает:

(б) Пусть $d \in \text{CUT}_n$. Тогда $\text{sph}_t^m(d) \in \text{CUT}_{n+m}$ при всех $m \geq 1$, если $t \geq \frac{1}{2}s_{\ell_1}(d)$, где $s_{\ell_1}(d)$ обозначает минимальный ℓ_1 -размер d .

Кроме того, отметим, что предельные значения $\text{diam}(P_{\text{sph}_t^m(d)})^2$ в (а) и $s_{\ell_1}(\text{sph}_t^m(d))$ в (b) при m стремящемся к бесконечности равны $2t$.

Пример 14.4.10. Положим $d := d(K_n)$. Тогда d является гиперметрикой с радиусом r равным $\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$ (по предложению 14.4.3). Следовательно, в соответствии с леммой 14.4.5 (i)) имеем

$$\text{sph}_t(d) \in \text{NEG}_{n+1} \iff t \geq \frac{n-1}{2n},$$

и легко убедиться, что

$$\text{sph}_t(d) \in \text{MET}_{n+1} \text{ (или CUT}_{n+1} \text{ или НУР}_{n+1}) \iff t \geq \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Пример 14.4.11. Положим $d := d(K_{n \times 2})$. Тогда d является гиперметрикой с радиусом r равным $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (по предложению 14.4.3). Проверка показывает, что при всех $m \geq 1$

$$\text{sph}_t^m(d) \in \text{MET}_{n+m} \text{ (или CUT}_{n+m} \text{ или НУР}_{n+m}) \iff t \geq 1.$$

(Достаточно применить предложение 14.4.6 (i) и приведенные выше соотношения (а),(b), заметив при этом, что $s_{\ell_1}(d) = 2$.) $\blacksquare$

Глава 15.

Многогранники Делоне: ранг и гиперметрические грани

Для гиперметрических пространств определено естественное понятие ранга. А именно, если (X, d) — гиперметрическое пространство, то его рангом $\text{rk}(X, d)$ называется размерность наименьшей грани конуса $\text{НУР}(X)$, содержащей d . Предельные случаи, когда ранг или коранг (X, d) равен 1 отвечают, соответственно, случаям, когда d принадлежит крайнему лучу или фасете $\text{НУР}(X)$. В соответствии с этим и ранг $\text{rk}(P)$ многогранника Делоне P определяется как ранг пространства $(V(P), d^{(2)})$ этого многогранника Делоне. Многогранники Делоне ранга 1 называются экстремальными; они ассоциированы с гиперметриками, лежащими на крайних лучах конуса гиперметрик. Понятие ранга многогранника Делоне имеет следующую геометрическую интерпретацию: это число степеней свободы, с которым можно деформировать данный многогранник, оставаясь в классе многогранников Делоне. Точная формулировка приведена в теореме 15.2.5.

Экстремальные многогранники Делоне имеют очень жесткую геометрическую структуру — единственными аффинными преобразованиями, переводящими их снова во многогранники Делоне, являются гомотетии (см. следствие 15.2.4). Первым примером экстремального многогранника Делоне является отрезок α_1 , ассоциированный с разрезной полуметрикой. Известны и другие примеры: многогранник Шлефли 2_{21} , многогранник Госсета 3_{21} (построенный с помощью решетки корней E_8) и некоторые другие, построенные с помощью решетки Лича Λ_{24} и решетки Барнса–Уолла Λ_{16} ; они будут описаны в главе 16.

Многогранники Делоне коранга 1, соответствующие фасетам конуса гиперметрик, хорошо изучены. Это многогранники переделывания, рассмотренные Вороным (см. раздел 15.2).

В разделе 15.1 исследуются некоторые свойства понятия ранга многогранника Делоне; в частности, его инвариантность относительно

выбора порождающего подпространства (см. теорему 15.1.8) и аддитивность по отношению к прямому произведению многогранников Делоне (см. предложение 15.1.10). В разделе 15.3 мы приводим некоторые оценки ранга многогранника Делоне через число его вершин (см. предложение 15.3.1). Также в разделе 15.2 подробно исследуется соответствие между гранями конуса гиперметрик и их ассоциированных многогранников Делоне.

15.1. Ранг многогранника Делоне

Займемся исследованием понятия ранга, определенного для многогранников Делоне. Мы, в основном, будем следовать работе Деза, Гришухина и Лоран [1992], где это понятие было введено и изучалось. Пусть (X, d) — гиперметрическое пространство. Определим его *аннулятор*¹⁾ $\text{Ann}(X, d)$, как

$$\text{Ann}(X, d) = \{b \in \mathbb{Z}^X \mid b \neq e_i, \text{ при } i \in X, \sum_{i \in X} b_i = 1, \sum_{i, j \in X} b_i b_j d(i, j) = 0\}.$$

Обозначим через $S(X, d)$ систему, состоящую из уравнений

$$\sum_{i, j \in X} b_i b_j x(i, j) = 0 \quad \text{при } b \in \text{Ann}(X, d);$$

т. е. $S(X, d)$ состоит из гиперметрических неравенств, обращающихся в равенство для d . Пусть $F(X, d)$ (или просто $F(d)$) — наименьшая (по вложению) грань конуса гиперметрик $\text{HYP}(X)$, содержащая d . Тогда

$$F(X, d) = \text{HYP}(X) \cap \bigcap_{b \in \text{Ann}(X, d)} H_b,$$

где через H_b обозначена гиперплоскость в $\mathbb{R}^{\binom{|X|}{2}}$, заданная уравнением:

$$\sum_{i, j \in X} b_i b_j x(i, j) = 0$$

Размерность $F(X, d)$ равна рангу множества решений системы $S(X, d)$.

Определение 15.1.1.

- (i) Ранг $\text{rk}(X, d)$ гиперметрического пространства (X, d) равен размерности наименьшей грани $F(X, d)$ конуса $\text{HYP}(X)$, содержащей d . Коранг (X, d) полагается равным $\binom{|X|}{2} - \text{rk}(X, d)$.

¹⁾ Это понятие уже использовалось в доказательстве теоремы 14.2.1

- (ii) Ранг $\text{rk}(P)$ многогранника Делоне P равен рангу пространства многогранника Делоне $(V(P), d^{(2)})$, т. е. $\text{rk}(P) := \text{rk}(V(P), d^{(2)})$. Многогранник Делоне ранга 1 называется *экстремальным*.

Таким образом $\text{rk}(X, d) = 1$, если d лежит на крайнем луче конуса гиперметрик; $\text{rk}(X, d) = \binom{|X|}{2}$, если d является внутренней точкой $\text{НУР}(X)$, т. е. $F(X, d) = \text{НУР}(X)$; $\text{rk}(X, d) = \binom{|X|}{2} - 1$, если $F(X, d)$ является фасетой $\text{НУР}(X)$.

В действительности ранг гиперметрического пространства является инвариантом его ассоциированного многогранника Делоне, а именно, верно равенство $\text{rk}(X, d) = \text{rk}(P_d)$ (см. следствие 15.1.9). Для доказательства этой инвариантности нам необходимо исследовать некоторые свойства системы $S(X, d)$ гиперметрических равенств, которым удовлетворяет d .

Заметим, что гиперметрическое пространство и любое его 0-расширение имеют одинаковый ранг. Это означает, что мы можем ограничиться рассмотрением только метрик вместо всех полуметрик. Пусть (X, d) — пространство расстояний, $i_0 \in X$, $j_0 \notin X$. Пусть $(X' := X \cup \{j_0\}, d')$ — его 0-гейт-расширение, определенное равенствами $d'(i_0, j_0) = 0$, $d'(i, j_0) = d(i_0, i)$ при $i \in X$, и $d'(i, j) = d(i, j)$ при $i, j \in X$.

Лемма 15.1.2. Пусть (X', d') — 0-расширение гиперметрического пространства (X, d) . Тогда

$$\text{rk}(X', d') = \text{rk}(X, d).$$

Доказательство. Будем считать, что (X', d') определено как указано выше. Докажем, что множества решений систем $S(X, d)$ и $S(X', d')$ имеют одинаковый ранг. Учитывая, что система $S(X, d)$ является подсистемой системы $S(X', d')$, достаточно проверить, что каждая дополнительная переменная $x(i, j_0)$ ($i \in X$) системы $S(X', d')$ может быть выражена через переменные $x(i, j)$ ($i, j \in X$). Так как $d(i_0, j_0) = 0$, равенства треугольника $x(i_0, i) - x(j_0, i) - x(i_0, j_0) = 0$ и $x(j_0, i) - x(i_0, i) - x(i_0, j_0) = 0$ принадлежат системе $S(X', d')$. Значит равенство $x(j_0, i) = x(i_0, i)$ ($i \in X$) следует из системы $S(X', d')$. ■

Пусть $P \subseteq \mathbb{R}^k$ — k -мерный многогранник Делоне со множеством вершин $V(P)$, а $V \subseteq V(P)$ — порождающее подмножество $V(P)$. Для $w \in V(P)$ каждый элемент $a \in \mathbb{Z}^V$ такой, что $w = \sum_{v \in V} a_v v$ и $\sum_{v \in V} a_v = 1$ называется *аффинной реализацией w во множестве V* .

Из предложения 14.1.5 следует, что для $b \in \mathbb{Z}^V$ с $\sum_{v \in V} b_v = 1$ верно

$$b \in \text{Ann}(V, d^{(2)}) \iff \sum_{v \in V} b_v v \in V(P).$$

Другим словами, существует взаимно-однозначное соответствие между

- (i) уравнениями из $S(V, d^{(2)})$ и
- (ii) аффинными реализациями вершин P во множестве V .

В частности, если B является базисным множеством в $V(P)$, то для каждой вершины есть единственная аффинная реализация во множестве B . Следовательно, $S(B, d^{(2)})$ есть система из $|V(P) \setminus B| = |V(P)| - k - 1$ уравнений от $\binom{k+1}{2}$ переменных. Таким образом,

$$(15.1.3) \quad \binom{k+2}{2} - |V(P)| \leq \text{rk}(B, d^{(2)}) \leq \binom{k+1}{2}.$$

Лемма 15.1.4. Пусть V — порождающее подмножество $V(P)$, а $c \in \mathbb{Z}^V$ удовлетворяет условиям $\sum_{v \in V} c_v = 0$ и $\sum_{v \in V} c_v v = 0$. Тогда следующие уравнения следуют из системы $S(V, d^{(2)})$:

$$(15.1.5) \quad \sum_{v \in V} c_v x(u, v) = 0 \quad \text{при } u \in V,$$

$$(15.1.6) \quad \sum_{u, v \in V} c_u c_v x(u, v) = 0.$$

Доказательство. Определим для $u \in V$ элемент $c' \in \mathbb{Z}^V$ условиями $c'_u := c_u + 1$, $c'_v := c_v$ при $v \in V \setminus \{u\}$. Тогда c' будет аффинной реализацией u в V . Значит уравнение

$$\sum_{v, w \in V} c'_v c'_w x(v, w) = 0$$

принадлежит системе $S(V, d^{(2)})$. Перепишем это уравнение в виде

$$\sum_{v, w \in V} c_v c_w x(v, w) + 2 \sum_{v \in V} c_v x(u, v) = 0.$$

Умножая это равенство на c_u и суммируя по всем $u \in V$ получаем (15.1.6). Таким образом, уравнение (15.1.6) следует из системы $S(V, d^{(2)})$, а значит из этой системы следует и уравнения (15.1.5). $\blacksquare$

Для каждого $w \in V(P)$ обозначим через $a^w \in \mathbb{Z}^V$ фиксированную аффинную реализацию w в V . Пусть $S'(V, d^{(2)})$ — система, состоящая из уравнений (15.1.5), (15.1.6) и гиперметрических уравнений

$$\sum_{u, v \in V} a_u^w a_v^w x(u, v) = 0 \quad \text{при } w \in V(P).$$

Лемма 15.1.7. *Множества решений систем $S(V, d^{(2)})$ и $S'(V, d^{(2)})$ совпадают.*

Доказательство. Остается проверить, что каждое уравнение системы $S(V, d^{(2)})$ следует из системы $S'(V, d^{(2)})$. Пусть $w \in V(P)$, а b — другая аффинная реализация w в V . Тогда мы можем применить (15.1.6) для $c := a^w - b$, откуда

$$\sum_{u,v \in V} (a_u^w - b_u)(a_v^w - b_v)x(u, v) = 0, \quad \text{т. е.}$$

$$\sum_{u,v \in V} a_u^w a_v^w x(u, v) - 2 \sum_{u,v \in V} a_u^w b_v x(u, v) + \sum_{u,v \in V} b_u b_v x(u, v) = 0.$$

Проверим, что первые две суммы в последнем равенстве равны нулю, так что уравнение

$$\sum_{u,v \in V} b_u b_v x(u, v) = 0$$

будет следовать из системы $S'(V, d^{(2)})$. Действительно, первая сумма равна нулю, так как она соответствует уравнению из $S'(V, d^{(2)})$. С другой стороны, при $u \in V$ уравнение

$$\sum_{v \in V} a_v^w x(u, v) = \sum_{v \in V} b_v^w x(u, v)$$

следует из (15.1.5). Значит вторая сумма равна

$$-2 \sum_{u,v \in V} a_u^w a_v^w x(u, v) = 0. \quad \blacksquare$$

Теорема 15.1.8. *Пусть P — многогранник Делоне, а V — порождающее подмножество $V(P)$. Тогда*

$$\text{rk}(V, d^{(2)}) = \text{rk}(V(P), d^{(2)}).$$

Доказательство. Покажем, что множества решений систем $S(V, d^{(2)})$ и $S(P(V), d^{(2)})$ имеют одинаковый ранг. Так как система $S(V, d^{(2)})$ является подсистемой системы $S(P(V), d^{(2)})$, достаточно проверить, что каждая переменная $x(w, w')$ ($(w, w') \in (V \times (V(P) \setminus V)) \cup (V(P) \setminus V)^2$) может быть выражена через переменные $x(u, v)$ при $u, v \in V$.

Пусть $w, w' \in V(P) \setminus V$. Обозначим через a и a' аффинные реализации w и w' в V соответственно. Покажем, что из $S(P(V), d^{(2)})$ следуют следующие уравнения (a) и (b):

$$(a) \quad x(w, u) = \sum_{v \in V} a_v x(u, v) \quad \text{при } u \in V,$$

$$(b) \quad x(w, w') = \sum_{u, v \in V} a_u a'_v x(u, v).$$

Для этого зададим $b, b' \in \mathbb{Z}^{V(P)}$ условиями $b_w := -1$, $b_v := a_v$ при $v \in V$ и $b_v := 0$ при $v \in V(P) \setminus (V \cup \{w\})$; $b'_w := -1$, $b'_v := a'_v$ при $v \in V$ и $b'_v := 0$ при $v \in V(P) \setminus (V \cup \{w'\})$. Теперь мы можем применить лемму 15.1.4. Из (15.1.5) получаем

$$\sum_{v \in V(P)} b_v x(u, v) = 0 \quad \text{при всех } u \in V,$$

откуда следует (а). Применяя (15.1.6) к b, b' и $b + b'$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{u, v \in V(P)} b_u b_v x(u, v) &= 0, & \sum_{u, v \in V(P)} b'_u b'_v x(u, v) &= 0, \\ \sum_{u, v \in V(P)} (b_u + b'_u)(b_v + b'_v) x(u, v) &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{u, v \in V(P)} b_u b'_v x(u, v) = 0$$

Выражая b' через a' , b через a и подставляя в последнее равенство имеем:

$$x(w, w') - \sum_{u \in V} a_u x(u, w') - \sum_{v \in V} a'_v x(w, v) + \sum_{u, v \in V} a_u a'_v x(u, v) = 0.$$

Вторая и третья сумма в последнем равенстве равны $x(w, w')$ по (а). Отсюда немедленно следует (b). $\blacksquare$

Следствие 15.1.9. Пусть (X, d) — гиперметрическое пространство, а P_d — его ассоциированный многогранник Делоне. Тогда

$$\text{rk}(X, d) = \text{rk}(P_d).$$

Доказательство. Пусть $V \subseteq V(P_d)$ представляет (X, d) . Тогда $\text{rk}(X, d) = \text{rk}(V, d^{(2)})$ по лемме 15.1.2 и $\text{rk}(V, d^{(2)}) = \text{rk}(P_d)$ по теореме 15.1.8, так как V порождает $V(P_d)$. $\blacksquare$

Закончим этот раздел еще одним свойством ранга многогранников Делоне.

Предложение 15.1.10. Пусть P_1 и P_2 — многогранники Делоне. Тогда их прямое произведение $P_1 \times P_2$ является многогранником Делоне ранга

$$\text{rk}(P_1 \times P_2) = \text{rk}(P_1) + \text{rk}(P_2). \quad \blacksquare$$

Например, для гиперкуба γ_k ранг $\text{rk}(\gamma_k)$ равен k , так как γ_k есть прямое произведение $(\gamma_1)^k$, а $\text{rk}(\gamma_1) = 1$.

15.2. Многогранники Делоне, соответствующие граням

15.2.1. Гиперметрические грани

Мы покажем, что гиперметрики, лежащие внутри одной и той же грани конуса гиперметрик, ассоциированы с аффинно эквивалентными многогранниками Делоне, что позволяет говорить о вполне определенном многограннике Делоне, ассоциированном с данной гранью конуса гиперметрик. Этот результат был доказан в работе Деза, Гришухина и Лоран [1992] и приводится ниже в теореме 15.2.1.

Пусть T — аффинная биекция $\mathbb{R}^k$. Для $u, v \in \mathbb{R}^k$ положим

$$d_T(u, v) := (T(u) - T(v))^2.$$

Теорема 15.2.1. Пусть $P \subseteq \mathbb{R}^k$ — многогранник Делоне и V — порождающее подмножество $V(P)$. Пусть T — аффинная биекция $\mathbb{R}^k$. Обозначим через F наименьшую грань конуса гиперметрик $\text{HYP}(V)$, содержащую $(V, d^{(2)})$. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) Если $T(P)$ — многогранник Делоне, то d_T является внутренней точкой грани F , т. е. $F(d_T) = F$.
- (ii) Пусть $d \in \text{HYP}(V)$. Если d является внутренней точкой грани F , то многогранник Делоне P_d , ассоциированный с d , аффинно эквивалентен P .

Доказательство. (i) Пусть $b \in \mathbb{Z}^V$ и $\sum_{v \in V} b_v = 1$. Мы покажем, что

$$\sum_{u, v \in V} b_u b_v (T(u) - T(v))^2 = 0 \iff \sum_{u, v \in V} b_u b_v (u - v)^2 = 0.$$

Для этого обозначим через c и r (c_T и r_T , соответственно) центр и радиус сферы, описанной вокруг P (вокруг $T(P)$, соответственно). Тогда

$$\sum_{u, v \in V} b_u b_v (T(u) - T(v))^2 = 2(r_T)^2 - 2 \left(\sum_{u \in V} b_u T(u) - c_T \right)^2,$$

что равно нулю тогда и только тогда, когда $\sum_{u \in V} b_u T(u)$ является вершиной $T(P)$. С другой стороны,

$$\sum_{u, v \in V} b_u b_v (u - v)^2 = 2r^2 - 2 \left(\sum_{u \in V} b_u u - c \right)^2$$

равняется нулю тогда и только тогда, когда $\sum_{u \in V} b_u u$ является вершиной P . Из этого уже следует наш результат, потому что

$$\sum_{u \in V} b_u T(u) = T \left(\sum_{u \in V} b_u u \right)$$

является вершиной $T(P)$ тогда и только тогда, когда $\sum_{u \in V} b_u u$ является вершиной P (так как T — аффинная биекция). Значит d_T является внутренней точкой грани F .

(ii) Пусть P_d — многогранник Делоне, ассоциированный с d . Обозначим через $T: V \mapsto V(P_d)$ порождающее отображение, так что $d(u, v) = (T(u) - T(v))^2$ при $u, v \in V$. Отображение T взаимно-однозначно, так как $d(u, v) \neq 0$ при $u \neq v \in V$. Покажем, что T может быть продлено до аффинной биекции пространства, натянутого на V , переводящей $V(P)$ в $V(P_d)$.

Сначала проверим, что T сохраняет аффинные зависимости из V , т. е., что если $c \in \mathbb{Z}^V$ при $\sum_{v \in V} c_v = 0$, то

$$\sum_{v \in V} c_v v = 0 \iff \sum_{v \in V} c_v T(v) = 0.$$

Так как все векторы $v \in V$ (как и их образы $T(v)$) лежат на одной сфере, то:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{u, v \in V} c_u c_v d^{(2)}(u, v) &= \sum_{u, v \in V} c_u c_v (u - v)^2 = -2 \left(\sum_{v \in V} c_v v \right)^2, \\ \text{(b)} \quad \sum_{u, v \in V} c_u c_v d(u, v) &= \sum_{u, v \in V} c_u c_v (T(u) - T(v))^2 = -2 \left(\sum_{v \in V} c_v T(v) \right)^2. \end{aligned}$$

По предположению, $F(d) = F$, т. е. (в соответствии с леммой 15.1.7 множества решений систем $S'(V, d)$ и $S'(V, d^{(2)})$) совпадают. Отсюда следует, что выражения (a) и (b) обращаются в нуль одновременно.

Проверим, что при $b \in \mathbb{Z}^V$ с $\sum_{v \in V} b_v = 1$

$$\sum_{v \in V} b_v v \text{ является вершиной } P \iff \sum_{v \in V} b_v T(v) \text{ является вершиной } P_d.$$

По предложению 14.1.5 $\sum_{v \in V} b_v v \in V(P)$ тогда и только тогда, когда $d^{(2)}$ удовлетворяет уравнению $\sum_{u,v \in V} b_u b_v x(u,v) = 0$, а $\sum_{v \in V} b_v T(v) \in V(P_d)$ тогда и только тогда, когда d удовлетворяет тому же уравнению. Следовательно, можно продлить T на пространство, порожденное V , полагая

$$T\left(\sum_{v \in V} b_v v\right) := \sum_{v \in V} b_v T(v);$$

причем T будет являться аффинной биекцией и отображать P на P_d . ■

Следствие 15.2.2. Пусть (X, d) и (X', d') — два гиперметрических пространства с ассоциированными многогранниками Делоне P_d и P'_d . Пусть $F(d)$ и $F'(d')$ — наименьшие грани $\text{НУР}(X)$, содержащие d и d' соответственно. Если $F(d) = F'(d')$, то P_d и P'_d аффинно эквивалентны.

Доказательство. Если $d(i, j) \neq 0$ при всех $i \neq j \in X$, то (X, d) изоморфно подпространству $(V, d^{(2)})$ пространства $(V(P_d), d^{(2)})$, где V — порождающее подмножество $V(P_d)$. Так как d' является внутренней точкой $F(d)$, то из теоремы 15.2.1 (ii) следует, что P'_d аффинно эквивалентен P_d . В противном случае, заметим, что $d(i, j) = 0$ тогда и только тогда, когда $d'(i', j') = 0$, так как из равенства $F(d) = F'(d')$ следует, что d и d' удовлетворяют одним и тем же равенствам треугольника. Значит есть такое разбиение $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$, $m < |X|$, что при $i \neq j \in X$, $d(i, j) = d'(i, j) = 0$ тогда и только тогда, когда $i, j \in X_h$ при некотором $h \in \{1, \dots, m\}$. Пусть $x_1 \in X_1, \dots, x_m \in X_m$. Обозначим через d_0 (соответственно, d'_0) проекцию d (d' , соответственно) на $X_0 := \{x_1, \dots, x_m\}$. Легко убедиться, что d_0, d'_0 лежат внутри одной и той же грани $\text{НУР}(X_0)$, откуда, как и выше, следует, что P_d и P'_d аффинно эквивалентны. Действительно, d_0 ассоциировано с тем же многогранником Делоне P_d , что и d , а d'_0 ассоциировано с P'_d . ■

Замечание 15.2.3. Импликация следствия 15.2.2, вообще говоря, необратима. Действительно, легко привести пример гиперметрик $d, d' \in \text{НУР}(X)$ с ассоциированными многогранниками Делоне, но принадлежащих различным граням $\text{НУР}(X)$, т. е. с $F(d) \neq F(d')$. Например, любые две различные разрезные полуметрики $\delta(S), \delta(T)$ ассоциированы с одним и тем же многогранником Делоне, а именно, с α_1 , но они принадлежат различным граням, так как каждая разрезная полуметрика принадлежит крайнему лучу $\text{НУР}(X)$. Другой пример легко получить, выбрав порождающее подмножество $V := \{v_1, \dots, v_n\}$

многогранника Делоне P и рассмотрим гиперметрики $d, d' \in \text{НУР}$ заданные условиями $d(i, j) = (v_i - v_j)^2$, $d'(i, j) = (v_{\sigma(i)} - v_{\sigma(j)})^2$ при $i, j \in \{1, \dots, n\}$, где σ — перестановка множества $\{1, \dots, n\}$. ■

Следствие 15.2.4. Пусть P — многогранник Делоне в $\mathbb{R}^k$. P является экстремальным тогда и только тогда, когда единственными (с точностью до ортогональных преобразований и параллельных переносов) аффинными биекциями T пространства $\mathbb{R}^k$, для которых $T(P)$ снова многогранник Делоне являются гомотетии¹⁾.

Доказательство. Предположим сначала, что $\text{rk}(P) = 1$, т. е., что $(V(P), d^{(2)})$ принадлежит крайнему лучу $\text{НУР}(V(P))$. Допустим, что $T(P)$ — многогранник Делоне. По теореме 15.2.1 (i), $d_T = \lambda^2 d^{(2)}$ для некоторого скаляра λ . Значит $(T(u) - T(v))^2 = \lambda^2(u - v)^2$ при всех $u, v \in V(P)$. Несложно убедиться, что с точностью до параллельного переноса $\lambda^{-1}T$ является ортогональным преобразованием.

Предположим теперь, что единственными аффинными биекциями T , для которых $T(P)$ снова многогранник Делоне являются гомотетии. Пусть $d \in \text{НУР}(V(P))$ с $F(d) = F(d^{(2)})$. По теореме 15.2.1 (ii), многогранник Делоне P_d , ассоциированный с d , имеет вид λP , где $\lambda > 0$, $d = \lambda^2 d^{(2)}$. Отсюда видно, что $(V(P), d^{(2)})$ принадлежит крайнему лучу $\text{НУР}(V(P))$, т. е. $\text{rk}(P) = 1$. ■

Пусть P — k -мерный многогранник Делоне в $\mathbb{R}^k$. Обозначим через $\mathcal{T}(P)$ множество всех аффинных биекций T пространства $\mathbb{R}^k$ (рассматриваемых с точностью до ортогональных преобразований и параллельных переносов), для которых $T(P)$ снова многогранник Делоне. Если ранг P равен 1, то, по следствию 15.2.4, $\mathcal{T}(P)$ состоит только из гомотетий, а следовательно имеет размерность 1. Этот факт может быть обобщен на случай произвольного ранга, как показывает следующий результат Лоран [1996a].

Теорема 15.2.5. Для многогранника Делоне P топологическая размерность множества $\mathcal{T}(P)$ равна рангу P .

Доказательство. Без потери общности мы можем считать, что P является k -мерным многогранником Делоне в $\mathbb{R}^k$, а центр координат — одна из его вершин. Обозначим через V множество вершин P , а через d_P — расстояние на V , определенное по формуле

$$d_P(u, v) := (u - v)^2 \quad \text{при всех } u, v \in V.$$

¹⁾ Отображение $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ называется *гомотетией*, если найдется $\lambda \neq 0$ такое, что $T(x) = \lambda x$ для всех $x \in \mathbb{R}^k$.

Пусть F_P — наименьшая грань конуса гиперметрик $\text{HYP}(V)$, содержащая d_P . Обозначим через $\mathcal{T}_0(P)$ множество невырожденных $k \times k$ матриц A , для которых многогранник $A(P) := \{Ax \mid x \in P\}$ снова является многогранником Делоне. Ясно, что множество $\mathcal{T}(P)$ совпадает со множеством $\mathcal{T}_0(P)/\text{OA}(k)$. (Здесь $\mathcal{T}_0(P)/\text{OA}(k)$ означает множество $\mathcal{T}_0(P)$, факторизованное по множеству $\text{OA}(k)$ ортогональных матриц порядка k .) Покажем, что размерность множества $\mathcal{T}_0(P)/\text{OA}(k)$ равна рангу P . Для этого нам потребуется ввести промежуточный конус $\mathcal{C}_P$.

Так как конус гиперметрик $\text{HYP}(V)$ полиэдрален, то мы можем считать, что он определен гиперметрическими неравенствами $\sum_{u,v \in V, u < v} b_u b_v x_{uv} \leq 0$ при $b \in \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — конечное подмножество множества $\{b \in \mathbb{Z}^V \mid \sum_{u \in V} b_u = 1\}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ подсистему гиперметрических равенств из $\mathcal{B}$, задающую грань F_P ; т. е. $b \in \mathcal{A}$, если $\sum_{u,v \in V} b_u b_v (u-v)^2 = 0$. Рассмотрим конус $\mathcal{C}_P$, состоящий из симметрических неотрицательно определенных $k \times k$ матриц M , удовлетворяющих условиям:

- (a)
$$\sum_{u,v \in V} b_u b_v (u-v)^T M (u-v) \leq 0 \quad \text{при } b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A},$$
- (b)
$$\sum_{u,v \in V} b_u b_v (u-v)^T M (u-v) = 0 \quad \text{при } b \in \mathcal{A}.$$

Тогда относительная внутренность конуса $\mathcal{C}_P$ состоит из положительно определенных матриц M , удовлетворяющих (b) и строгому неравенству в (a). Утверждается, что

- (c) Размерность конуса $\mathcal{C}_P$ равна рангу P .

Действительно, положим $s := \text{rk}(P)$ и $t := \dim(\mathcal{C}_P)$. Пусть $d_1, \dots, d_s$ — линейно независимые точки, принадлежащие относительной внутренности грани F_P . Применяя теорему 15.2.1 (ii) получаем $A_1, \dots, A_s \in \mathcal{T}_0(P)$ такие, что $d_i(u, v) = (u-v)^T A_i^T A_i (u-v)$ для всех $u, v \in V$ и $i = 1, \dots, s$. Тогда $A_1^T A_1, \dots, A_s^T A_s$ являются линейно независимыми элементами конуса $\mathcal{C}_P$, откуда $s \leq t$. Обратно, пусть $M_1, \dots, M_t$ линейно независимы и принадлежат относительной внутренности $\mathcal{C}_P$. Так как все M_h положительно определены, то они имеют вид $A_h^T A_h$ при некоторых невырожденных $k \times k$ матрицах A_h . Положим $d_h(u, v) := (u-v)^T M_h (u-v) = (A_h u - A_h v)^2$ при $u, v \in V$ и $h = 1, \dots, t$. Тогда точки $d_1, \dots, d_t$ принадлежат относительной внутренности грани F_P . Более того, они линейно независимы, откуда следует, что $t \leq s$. Значит $s = t$, и утверждение (c) верно. (Действительно, допустим, что $\sum_{h=1}^t \lambda_h d_h = 0$ при некоторых скалярах λ_h . Тогда $(u-v)^T (\sum_{h=1}^t \lambda_h M_h) (u-v) = 0$ при

всех $u, v \in V$. Так как V имеет полную размерность и содержит центр координат, то отсюда легко следует, что $\sum_{h=1}^t \lambda_h M_h = 0$, а значит и $\lambda_h = 0$ при всех h .)

Сейчас мы можем определить гомеоморфизм (т. е. непрерывную в обе стороны биекцию) между множеством $\mathcal{T}_0(P)/\text{OA}(k)$ и относительной внутренностью конуса $\mathcal{C}_P$. Рассмотрим отображение

$$\theta: A \mapsto A^T A.$$

Очевидно, что θ взаимно-однозначно отображает множество $\mathcal{T}_0(P)/\text{OA}(k)$ на относительную внутренность конуса $\mathcal{C}_P$. Наш результат теперь следует из того, что θ является гомеоморфизмом между фактором множества $k \times k$ матриц по отношению эквивалентности: $A \sim B$, если $A^T A = B^T B$; и множеством симметрических неотрицательно определенных $k \times k$ матриц. ■

15.2.2. Гиперметрические фасеты

Дадим, следуя работе Ависа и Гришухина [1993], описание многогранников Делоне, ассоциированных с фасетами конуса гиперметрик.

Пусть Δ_1, Δ_2 — два симплекса, лежащие в аффинных пространствах, пересекающихся по точке, принадлежащей $\Delta_1 \cap \Delta_2$. В этом случае их выпуклая оболочка $P := \text{Conv}(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ называется *многогранником переделивания*. Такие многогранники изучались Вороным [1908, 1909]. Между вершинами Δ_1 и Δ_2 есть только одна аффинная зависимость; а именно

$$\sum_{v \in V_1} b_v v = \sum_{v \in V_2} b_v v,$$

где $\sum_{v \in V_1} b_v = \sum_{v \in V_2} b_v = 1$, $b_v \geq 0$ при $v \in V_1 \cup V_2$, а V_i обозначает множество вершин Δ_i , $i = 1, 2$. Положим

$$V_0 := \{v \in V_1 \cup V_2 \mid b_v = 0\}.$$

Тогда

$$P_1 := \text{Conv}(V_1 \cup V_2 \setminus V_0)$$

также является многогранником переделивания с той же аффинной зависимостью между вершинами, что и P , причем

$$P = \prod_{v \in V_0} \text{Pyr}_v(P_1).$$

Обозначим многогранник переделывания P через $P_{p,q}^m$, где $m = |V_0|$, $p+1 = |V_1 \setminus V_0|$ и $q+1 = |V_2 \setminus V_0|$. Таким образом $P_{p,q}^m$ имеет $m+p+q+2$ вершины (если $p, q \geq 1$), а размерность его равна $m+p+q$. Отметим, что $P_{p,q}^m$ обозначает не конкретный многогранник, а целый класс аффинно эквивалентных многогранников переделывания.

Докажем, что многогранник Делоне, ассоциированный с фасетой конуса гиперметрик, является многогранником переделывания. Пусть $b \in \mathbb{Z}^X$, $\sum_{v \in X} b_v = 1$, и гиперметрическое уравнение

$$(15.2.6) \quad \sum_{i,j \in X} b_i b_j x(i, j) = 0$$

задает фасету $\text{HYP}(X)$. Рассмотрим $d \in \text{HYP}(X)$ и допустим, что d принадлежит внутренности данной фасеты, т. е. (15.2.6) является единственным гиперметрическим равенством, выполненным для d . В частности, $d(i, j) > 0$ при различных i, j (иначе d будет удовлетворять $2(|X| - 2)$ равенствам треугольника).

Предложение 15.2.7. Пусть P_d — многогранник Делоне, ассоциированный с точкой d конуса гиперметрик, принадлежащей внутренней фасеты, заданной уравнением (15.2.6). Тогда P_d является многогранником переделывания $P_{p,q}^m$, где $m = |\{i \mid b_i = 0\}|$, $p+1 = |\{i \mid b_i > 0\}|$ и $q = |\{i \mid b_i < 0\}|$. Более того, P_d является базисным многогранником.

Доказательство. Обозначим через $(v_i \mid i \in X)$ представление d в $V(P_d)$. По предложению 14.1.5, равенство (15.2.6) эквивалентно утверждению, что точка

$$(15.2.8) \quad v_0 = \sum_{i \in X} b_i v_i$$

является вершиной P_d . Воспользовавшись снова предложением 14.1.5 и тем, что (15.2.6) является единственным гиперметрическим равенством, выполненным для d , заключаем, что $v_0 \notin \{v_i \mid i \in X\}$, $V(P_d) = \{v_i \mid i \in X\} \cup \{v_0\}$ и элементы множества $\{v_i \mid i \in X\}$ аффинно независимы. Следовательно, у P_d ровно $|X| + 1$ вершина, а $\sum_{v \in V(P_d)} b_v v = 0$ — единственная аффинная зависимость между вершинами P_d (где $b_{v_i} := b_i$ при $i \in X$ и $b_{v_0} := -1$). Положим

$$V_0 := \{v \in V(P_d) \mid b_v = 0\}, \quad V_+ := \{v \in V(P_d) \mid b_v > 0\}, \\ V_- := \{v \in V(P_d) \mid b_v < 0\}, \quad m := |V_0|, \quad p+1 := |V_+| \quad \text{и} \quad q+1 := |V_-|.$$

Тогда $P_1 := \text{Conv}(V_+ \cup V_-)$ является многогранником переделывания $P_{p,q}^0$, а многогранник $P_d := \prod_{v \in V_0} \text{Pyr}_v(P_1)$ является многогранником переделывания $P_{p,q}^m$. ■

Как мы увидим в примере 15.2.10 (iii), существуют различные гиперметрические фасеты, у которых b_i имеют одинаковое число положительных и отрицательных компонент, а значит соответствующие многогранники переделывания имеют одинаковые параметры p и q . По этой причине мы будем также обозначать многогранник переделывания, ассоциированный с гиперметрической фасетой (15.2.6) через $P_{p,q}^m(b)$. Заметим, что матрица Y_γ , определяющая тип многогранника переделывания $P_{p,q}^m(b)$, имеет вид $\begin{bmatrix} I_n \\ b_1 \dots b_n \end{bmatrix}$ (см. раздел (13.3)).

На рисунке 15.2.9 собраны вместе основные известные нам факты о соотношениях между гранями конуса гиперметрик и их ассоциированными многогранниками Делоне.

гиперметрика d		многогранник Делоне P_d
d — разрезная полуметрика	$\iff$	$P_d = \alpha_1$
$F(d) = \text{HYP}_{n+1}$	$\iff$	$P_d = \alpha_n$
$d \in \text{CUT}_{n+1}$	$\iff$	$V(P)$ вложено во множество вершин параллелепипеда
$F(d)$ — фасета	$\iff$	P_d — многогранник переделывания
$F(d)$ — крайний луч	$\iff$	P_d — экстремальный многогранник
$F(d) = F(d')$	$\implies$	$P_d, P_{d'}$ аффинно эквивалентны

Рис. 15.2.9. Гиперметрические грани и многогранники Делоне.

Относительно первых двух эквивалентностей см. примеры 14.1.6 и 14.1.7, а относительно последних четырех — предложения 14.1.10, 15.2.7, теорему 15.1.8 и следствие 15.2.2 соответственно.

Пример 15.2.10.

- (i) Рассмотрим случай, когда (15.2.6) является равенством треугольника $x(1,2) - x(1,3) - x(2,3) = 0$, т. е., когда $b_1 = b_2 = 1$, $b_3 = -1$ и

все остальные $b_i = 0$. Тогда (15.2.8) запишется как $v_0 = v_1 + v_2 - v_3$ и $V_+ = \{v_1, v_2\}$, $V_- = \{v_3, v_0\}$. Таким образом, многогранником Делоне, ассоциированным с треугольной фасетой, будет $P_{1,1}^0$, или, более точно, $P_{1,1}^0(1, 1, -1)$ — прямоугольник, диагоналями которого являются отрезки $[v_1, v_2]$ и $[v_0, v_3]$.

- (ii) Рассмотрим случай, когда (15.2.6) определяет пентагональную фасету, т. е., когда $b_1 = b_2 = b_3 = 1$, $b_4 = b_5 = -1$. Тогда (15.2.8) запишется как $v_0 = v_1 + v_2 + v_3 - v_4 - v_5$. Следовательно, многогранником Делоне, ассоциированным с пятиугольной фасетой, будет $P_{2,2}^0$, или, более точно, $P_{2,2}^0(1, 1, 1, -1, -1)$ — выпуклая оболочка двух пересекающихся треугольников.
- (iii) Положим $b_1 := (2, 2, 2, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -1, -1)$, $b_2 := (1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1)$. Тогда (15.2.6) определяет некоторую фасету как для b_1 , так и для b_2 . Значит с этими двумя фасетами ассоциированы многогранники переделывания с одинаковыми параметрами $p = q = 5$, однако аффинные зависимости (15.2.8) между их вершинами, очевидно, различны. ■

Замечание 15.2.11. Здесь собрано несколько замечаний о гиперметрических фасетах.

- (i) При $n \leq 6$ $\text{HYP}_n = \text{CUT}_n$, и все фасеты HYP_n уже известны (см. раздел (30.6)). А именно, при $n = 3, 4$ фасеты HYP_n задаются неравенствами треугольника. При $n = 5$ фасеты задаются неравенствами треугольника и неравенствами пятиугольника (6.1.9). При $n = 6$ фасеты задаются неравенствами треугольника, неравенствами пятиугольника и неравенствами вида $\sum_{1 \leq i < j \leq 6} b_i b_j x_{ij} \leq 0$ при $b = (2, 1, 1, -1, -1, -1)$ и $(-2, -1, 1, 1, 1, 1)$ (с точностью до перестановки компонент). Описание случая $n = 6$ было независимо получено Барановским [1971] и Ависом [1989].
- (ii) В случае $n = 7$ гиперметрическое неравенство $\sum_{1 \leq i < j \leq 7} b_i b_j x_{ij} \leq 0$ при $b = (3, 1, 1, 1, -1, -2, -2)$ определяет фасету HYP_7 , но не CUT_7 . Действительно, существует ровно 19 линейно независимых разрезов полуметрик, для которых это неравенство обращается в равенство. Еще одну гиперметрику d , удовлетворяющую данному равенству, можно получить следующим образом. Рассмотрим граф $\overline{G}_9$, показанный на рисунке (16.2.4) (вершины со степенями 3, 2, 2, 2, 5, 1, 1 мы обозначим через 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 соответственно) и положим $d_{ij} := 2$, если ij — ребро $\overline{G}_9$, $d_{ij} = 1$, если ij не является ребром в $\overline{G}_9$. Рассмотрев это расстояние d вместе с девятнадцатью разрезами полуметриками, мы получим систему

из двадцати линейно независимых векторов, удовлетворяющих данному гиперметрическому неравенству. Это и означает, что задана фасета HYP_7 .

В действительности, Барановский [1995] описал все фасеты конуса HYP_7 . Это будут, во-первых, гиперметрические фасеты CUT_7 (см. их перечень в разделе 30.6), во-вторых, фасеты заданные неравенствами $\sum_{1 \leq i < j \leq 7} b_i b_j x_{ij} \leq 0$ при $b = (3, 1, 1, 1, -1, -2, -2)$, $(-3, 1, 1, 1, 1, -2, -2)$, $(-3, -1, -1, -1, 1, -2, 2)$ и $(3, 1, 1, -1, -1, 2, 2)$ (с точностью до перестановки).

- (iii) Есть простой способ построения новых гиперметрических фасет из уже известных с помощью так называемой «операции переключения». Подробно эта операция будет описана в разделе 26.3), здесь мы продемонстрируем ее действие на гиперметрических неравенствах. Рассмотрим $b \in \mathbb{Z}^n$ и подмножество $A \subset V_n := \{1, \dots, n\}$. Определим вектор $b^A \in \mathbb{Z}^n$ по правилу $b_i^A := -b_i$, если $i \in A$ и $b_i^A := b_i$, если $i \in V_n \setminus A$. Если $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ и $b(A) = 0$, то неравенство $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i^A b_j^A x_{ij} \leq 0$ тоже будет гиперметрическим. В действительности, верно, что

- (a) Гиперметрическое неравенство $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} \leq 0$ определяет фасету $\text{HYP}_n \iff$ его переключение $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i^A b_j^A x_{ij} \leq 0$ определяет фасету HYP_n .

В качестве примера можно рассмотреть фасеты из п. (ii) выше. Дадим краткий набросок доказательства утверждения (a).

Рассмотрим отображение $r_{\delta(A)}: \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \mapsto \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$, где $y = r_{\delta(A)}(x)$ определяется условиями: $y_{ij} := 1 - x_{ij}$ при $\delta(A)_{ij} = 1$ и $y_{ij} := x_{ij}$ при $\delta(A)_{ij} = 0$. Так как HYP_n является полиэдральным конусом, мы можем считать, что он задан гиперметрическими неравенствами $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} \leq 0 \mid b \in \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — конечное подмножество множества $\{b \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n b_i = 1\}$. Положим

$$\mathcal{B}' := \{b^A \mid b \in \mathcal{B}, A \subseteq V_n\}.$$

Для $d \in \text{HYP}_n$ определим

$$\alpha_d := \min \frac{(\sum_{i=1}^n b_i)^2 - 1}{4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_{ij}},$$

где минимум берется по всем $b \in \mathcal{B}'$ при которых $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_{ij} > 0$. Если таких b нет, то полагаем $\alpha_d := 1$. Легко убедиться, что $r_{\delta(A)}(\alpha_d d) \in \text{HYP}_n$ при всех $d \in \text{HYP}_n$. Теперь можно доказать (a). Если $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} \leq 0$ задает фасету HYP_n , то можно найти $\binom{n}{2}$ аффинно независимых векторов $d_1 := 0, d_2, \dots, d_{\binom{n}{2}} \in \text{HYP}_n$ удовлетво-

ряющих равенству $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} = 0$. Тогда векторы $r_{\delta(A)}(\alpha_d d_i)$ ($i = 1, \dots, \binom{n}{2}$) являются аффинно независимыми и удовлетворяют равенству $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i^A b_j^A x_{ij} = 0$, что и доказывает (а). ■

Закончим раздел одним замечанием о многогранниках Делоне малого коранга. Напомним, что в задаче 13.2.3 спрашивалось, каждый ли многогранник Делоне является базисным. Это верно для симплексов и многогранников переделивания, т. е. многогранников, ассоциированных с гиперметриками корангов 0 и 1. Мы распространяем это утверждение на случай гиперметрик корангов 2 и 3.

Предложение 15.2.12. Пусть P — k -мерный многогранник Делоне, а V — порождающее подмножество $V(P)$. Если

$$\binom{|V|}{2} - \text{rk}(V, d^{(2)}) \leq 3,$$

то P является базисным.

Доказательство. Докажем, что V состоит из аффинно независимых векторов, откуда будет следовать, что P — базисный многогранник. Допустим, от противного, что $\sum_{v \in C} b_v v = 0$ является аффинной зависимостью, где $C \subseteq V$ и $b_v \neq 0$ при некотором $v \in C$. По лемме 15.1.4, уравнение $\sum_{v \in C} b_v x(u, v) = 0$ (при $u \in V$) следует из системы $S(V, d^{(2)})$. Можно проверить, что матрица подсистемы $\sum_{v \in C} b_v x(u, v) = 0$ (при $u \in C$) имеет полный ранг $|C|$. Так как коранг $(V, d^{(2)})$ равен рангу матрицы системы $S(V, d^{(2)})$, то $\text{corank}(V, d^{(2)}) \geq |C|$, откуда $|C| \leq 3$. Итак, $C = \{v_1, v_2, v_3\}$, причем (с точностью до переобозначения) v_3 принадлежит отрезку $[v_1, v_2]$. Таким образом, получен треугольник с тупым углом, и мы пришли к противоречию. ■

15.3. Оценки ранга базисных многогранников Делоне

В этом разделе приведены некоторые оценки ранга базисных многогранников Делоне, взятые из работы Деза, Гришухина и Лоран [1992]. Напомним, что многогранник Делоне P называется базисным, если множество его вершин $V(P)$ содержит базис решетки, порожденной $V(P)$.

Предложение 15.3.1. Пусть P — базисный k -мерный многогранник Делоне. Тогда

$$(15.3.2) \quad \binom{k+2}{2} - |V(P)| \leq \text{rk}(P) \leq \binom{k+1}{2},$$

$$(15.3.3) \quad \text{rk}(P) \geq \binom{k+1}{2} - \frac{|V(P)|}{2} + 1,$$

если P центрально симметричен.

Доказательство. (15.3.2) немедленно следует из соотношения (15.1.3) и теоремы (15.1.8). Докажем (15.3.3). Пусть B — базисное множество в $V(P)$. Для $w \in V(P)$ обозначим через a^w аффинную реализацию w в B , а через $h(w)$ соответствующее гиперметрическое равенство из системы $S(B, d^{(2)})$:

$$h(w) := \sum_{u,v \in B} a_u^w a_v^w x(u, v).$$

Пусть $v \in B$. Так как $w^* = v + v^* - w$, то аффинная реализация a^{w^*} элемента w^* из B задается формулой $a^{w^*} = e_v + a^{v^*} - a^w$, где e_v — v -й координатный орт $\mathbb{R}^B$. Следовательно,

$$\begin{aligned} h(w^*) &= h(v^*) + h(w) + 2 \sum_{u' \in B} a_{u'}^{v^*} x(v, u') - 2 \sum_{u' \in B} a_{u'}^w x(v, u') - \\ &\quad - 2 \sum_{u, u' \in B} a_{u'}^{v^*} a_u^w x(u, u') = \\ &= h(w) + \sum_{u \in B} a_u^w \left(h(v^*) - 2x(v, u) + 2 \sum_{u' \in B} a_{u'}^{v^*} (x(v, u') - x(u, u')) \right). \end{aligned}$$

Если $w \in B$, то $h(w) = 0$, и из предыдущего равенства следует, что

$$(15.3.4) \quad h(w^*) = h(v^*) - 2x(v, w) + 2 \sum_{u' \in B} a_{u'}^{v^*} (x(v, u') - x(w, u')).$$

Из (15.3.4) заключаем, что при всех $w \in V(P)$ верно

$$(15.3.5) \quad h(w^*) = h(w) + \sum_{u \in B} a_u^w h(u^*).$$

Применяя соотношение (15.3.5) к $w = v^*$ получаем

$$(15.3.6) \quad 0 = h(v^*) + \sum_{u \in B} a_u^{v^*} h(u^*).$$

Мы покажем, что система $S(B, d^{(2)})$ может быть сведена к системе из $\frac{|V(P)|}{2} - 1$ уравнений, откуда будет следовать, что ранг множества

решений не менее $\binom{k+1}{2} - \frac{|V(P)|}{2} + 1$. Ясно, что базис B содержит не более одной пары диаметрально противоположных точек. Для множества A положим $A^* := \{a^* \mid a \in A\}$. Допустим сначала, что B не содержит диаметрально противоположных точек. Тогда $V(P) = B \cup B^* \cup A \cup A^*$ для некоторого $A \subseteq V(P) \setminus B$. В соответствии с (15.3.5), каждое уравнение $h(a^*) = 0$ ($a \in A$) следует из уравнений $h(u) = 0$ при $u \in A \cup B^*$. Ввиду (15.3.6) одно из уравнений $h(b^*) = 0$ ($u \in B$) следует из других. Значит система $S(B, d^{(2)})$ сводится к системе из $|A| + |B^*| - 1 = \frac{|V(P)|}{2} - 1$ уравнений. Рассмотрим теперь случай, когда B содержит одну пару диаметрально противоположных точек, т. е. $B = B' \cup \{v, v^*\}$ при $|B'| = k - 1$. Тогда $V(P) = B \cup (B')^* \cup A \cup A^*$ при некотором $A \subseteq V(P) \setminus B$. Это означает, что $S(B)$ опять сводится к системе из $|A| + |(B')^*| - 1 = \frac{|V(P)|}{2} - 1$ уравнений. ■

Например у k -мерного симплекса α_k ровно $k+1$ вершина; значит оба неравенства в (15.3.2) обращаются в равенства для α_k . Легко убедиться, что ранг k -мерного ортаэдра β_k равен

$$\text{rk}(\beta_k) = \binom{k+1}{2} - k + 1.$$

Значит для многогранника β_k в оценке (15.3.3) достигается равенство.

Следующая лемма полезна для вычисления ранга многогранников Делоне.

Лемма 15.3.7. Пусть P — k -мерный центрально-симметричный базисный многогранник Делоне, а $B := \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ — базисное множество в $V(P)$. Обозначим через H аффинное пространство, порожденное $B_1 := \{v_1, \dots, v_k\}$, и положим $P_1 := P \cap H$. Если P_1 — асимметричный многогранник Делоне, и существует вектор $w \in V(P) \setminus H$ такой, что $w \notin \{v_1^*, \dots, v_k^*\}$ и $w - v_0 \notin H$, то $\text{rk}(P_1) = \text{rk}(P)$.

Доказательство. Множество B_1 является базисным в $V(P_1) = V(P) \cap H$. Значит $\text{rk}(P_1)$ равен рангу множества решений системы $S(B_1, d^{(2)})$. Для доказательства равенства $\text{rk}(P_1) = \text{rk}(P)$ достаточно проверить, что каждая переменная $x(v_0, v_i)$ ($1 \leq i \leq k$) может быть выражена через переменные $x(v_i, v_j)$ ($1 \leq i, j \leq k$) системы $S(B, d^{(2)})$. Обозначим через $a, b \in \mathbb{Z}^{k+1}$ аффинные реализации w и v_0^* в B . Так как $w \notin H$ и $w - v_0 \notin H$, то $a_0 \neq 0, 1$. Более того, $b_0 \neq -1$, так как в противном случае центр $\frac{v_0 + v_0^*}{2}$ многогранника P принадлежит H ,

что противоречит асимметричности P . Применяя соотношение (15.3.4) к $v = v_0$ и $w = v_i$, получаем равенство

$$h(v_i^*) = h(v_0^*) - 2x(v_0, v_i) + 2 \sum_{0 \leq j \leq k} b_j (x(v_0, v_j) - x(v_i, v_j)).$$

Положим

$$h_i := -2 \sum_{1 \leq j \leq k} b_j x(v_i, v_j),$$

при $1 \leq i \leq k$. Тогда

$$h(v_i^*) = h(v_0^*) - 2x(v_0, v_i)(b_0 + 1) + h_i + 2 \sum_{1 \leq j \leq k} b_j x(v_0, v_j).$$

Вычисляя разность двух предыдущих уравнений при значениях индекса i и 1, получаем, что уравнение

$$(a) \quad x(v_0, v_i) = x(v_0, v_1) + \frac{h_i - h_1}{2(b_0 + 1)}$$

следует из $S(B, d^{(2)})$. Рассмотрим теперь уравнение $h(w) = 0$, т. е.

$$0 = \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j x(v_i, v_j) + \sum_{1 \leq i \leq k} a_i a_0 x(v_0, v_i).$$

Воспользовавшись (а), перепишем это выражение в виде

$$0 = \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j x(v_i, v_j) + a_0(1 - a_0)x(v_0, v_1) + \frac{a_0}{2(b_0 + 1)} \sum_{1 \leq i \leq k} a_i (h_i - h_1).$$

Следовательно, $x(v_0, v_1)$, а значит и $x(v_i, v_0)$, могут быть выражены через переменные $x(v_i, v_j)$ ($1 \leq i < j \leq k$). ■

Экстремальные многогранники Делоне

В этой главе рассматриваются экстремальные многогранники Делоне, т. е. многогранники Делоне ранга 1. Геометрическое описание экстремальных многогранников Делоне было дано в следствии 15.2.4. Экстремальные многогранники Делоне представляют особый интерес, так как они отвечают крайним лучам конуса гиперметрик. Точнее, если $d \in \text{НУР}_n$ принадлежит крайнему лучу НУР_n , то ассоциированный с d многогранник Делоне P_d является экстремальным многогранником размерности $k \leq n - 1$. Обратно, если P — k -мерный экстремальный многогранник Делоне, то для каждого порождающего подмножества V множества его вершин, гиперметрическое пространство $(V, d^{(2)})$ принадлежит крайнему лучу конуса гиперметрик $\text{НУР}(V)$. Более того, рассматривая 0-гейт-расширения пространства $(V, d^{(2)})$, мы получаем крайние лучи конуса НУР_n при любом $n \geq |V|$. В частности, если P является базисным, то каждому базисному подмножеству в $V(P)$ соответствует крайний луч конуса гиперметрик НУР_{k+1} , а значит и конуса НУР_n при $n \geq k + 1$. Таким образом, нахождение крайних лучей конуса гиперметрик НУР_n приводит к задаче нахождения экстремальных многогранников Делоне размерности $k \leq n - 1$.

Единственным базисным экстремальным многогранником Делоне в размерностях $k \leq 5$ является отрезок α_1 размерности 1. Действительно, известно, что крайними лучами конуса гиперметрик НУР_n при $n \leq 6$ являются только разрезные полуметрики с ассоциированным многогранником Делоне α_1 (см. Деза [1960] (при $n \leq 5$) и Авис [1989] (при $n = 6$), неявно этот результат также присутствует в работах Барановского [1971, 1973]). На самом деле, в работе Эрдала [1992] утверждается, что α_1 — единственный экстремальный многогранник Делоне в размерностях $k \leq 5$, т. е. требование базисности может быть опущено.

В случае $n \geq 7$ у конуса гиперметрик есть крайние лучи, не порожденные разрезными полуметриками. Действительно, известно, что существует базисный экстремальный многогранник Делоне размерности 6 — многогранник Шлефли 2_{21} . Дальнейшие примеры экстремальных многогранников Делоне приведены в разделах 16.2, 16.3, 16.4. Легко описать экстремальные многогранники Делоне, встречающиеся в решетках корней. Верна следующая

Теорема 16.0.1. *Пусть P — порождающий многогранник Делоне в решетке корней. В этом случае P является экстремальным тогда и только тогда, когда P является либо отрезком α_1 , либо многогранником Шлефли 2_{21} , либо многогранником Госсета 3_{21} .*

Доказательство. Пусть L — решетка, порожденная $V(P)$. По предположению L является решеткой корней, причем по предложению 15.1.10 решетка L неприводима. Это означает, что P совпадает с одним из многогранников Делоне таблицы 14.3.1. Следовательно, P равен либо α_1 , либо 2_{21} , либо 3_{21} , так как остальные многогранники таблицы не экстремальны ввиду того, что пространства расстояний этих многогранников Делоне являются ℓ_1 -пространствами. ■

Эта глава начинается с формул, приведенных в разделе 16.1 для нижней границы числа вершин базисного экстремального многогранника Делоне. Оказывается, что нижние оценки числа вершин тесно связаны с некоторыми известными верхними оценками равноугольного семейства прямых. Более подробные сведения о вопросах, затронутых в главе, можно найти в работе Деза, Гришухина и Лоран [1992].

16.1. Экстремальные многогранники Делоне и равноугольные семейства прямых

В этом разделе мы приводим оценки числа вершин базисных экстремальных многогранников Делоне и сопоставляем их с некоторыми известными оценками мощности равноугольных семейств прямых. Мы также даем примеры некоторых конструкций равноугольных семейств прямых, полученных с помощью сечения сферы минимальных

векторов решетки. Следующий результат немедленно следует из предложения 15.3.1.

Теорема 16.1.1. Пусть P — k -мерный базисный многогранник Делоне. Если P является экстремальным, то

$$(16.1.2) \quad |V(P)| \geq \frac{k(k+3)}{2}, \quad \text{если } P \text{ асимметричен,}$$

$$(16.1.3) \quad |V(P)| \geq k(k+1), \quad \text{если } P \text{ центрально симметричен.} \quad \blacksquare$$

Обозначим через $N_p(k)$ максимальное число точек в сферическом множестве с двумя расстояниями размерности k , а через $N_l(k)$ — максимальное число прямых в равноугольном семействе прямых размерности k . Наблюдается удивительная аналогия между нижними оценками (16.1.2), (16.1.3) и следующими известными верхними оценками (16.1.4), (16.1.5) для $N_p(k)$ и $N_l(k)$ (см. Лемменс и Зайдель [1973]).

$$(16.1.4) \quad N_p(k) \leq \frac{k(k+3)}{2},$$

$$(16.1.5) \quad N_l(k) \leq \frac{k(k+1)}{2}.$$

Напомним, что равноугольные семейства прямых находятся во взаимно однозначном соответствии со сферическими множествами с двумя расстояниями. В частности, каждая из оценок (16.1.4), (16.1.5) может быть выведена из другой.

Оценка (16.1.5) была дана Герцоном, который также доказал, что если неравенство (16.1.5) обращается в равенство, то $k+2 = 4, 5$ или $k+2 = q^2$ для некоторого нечетного $q \geq 3$ (см. Лемменс и Зайдель [1973]). Первый случай равенства в (16.1.5) достигается при $N_l = 28$ и $q = 3, k = 7$; хорошо известно, что равноугольное семейство из 28 прямых может быть построено из многогранника Госсета 3_{21} (см. раздел 16.2). В свою очередь, множество вершин многогранника Шлефли 2_{21} является сферическим множеством с двумя расстояниями в $\mathbb{R}^6$, реализующим равенство в (16.1.4). Следующий случай равенства $N_l = 276$ достигается при $q = 5, k = 23$. Ноймаер [1987] показал, как построить равноугольное семейство из 276 прямых с помощью решетки Лича Λ_{24} . В разделе 16.3 мы убедимся, что центрально симметричный экстремальный многогранник Делоне размерности 23 с 552 вершинами может быть получен из этого семейства прямых, а выбрав подходящее его сечение, можно получить экстремальный многогранник Делоне размерности 22 с 275 вершинами. Следующие случаи равенства в (16.1.5) это $N_l = 1128$ (при $q = 7, k = 47$) и $N_l = 3160$ (при $q = 9, k = 79$), однако

неизвестно, существуют ли соответствующие равноугольные семейства прямых в этих двух случаях.

С другой стороны, в разделе 16.4 мы рассмотрим некоторые примеры экстремальных многогранников Делоне, для которых оценки (16.1.2), (16.1.3) обращаются в равенство, но которые не могут быть получены из множеств с двумя расстояниями или равноугольных семейств прямых. Приводятся также примеры экстремальных многогранников Делоне, не реализующих равенство в оценках (16.1.2), (16.1.3).

Обозначим через $N_l(k, \alpha)$ максимальное число прямых в равноугольном семействе прямых размерности k с общим углом $\arccos \alpha$. Таким образом, $N_l(k) = \max_{\alpha} N_l(k, \alpha)$. В Лемменс, Зайдель [1973] приводится следующий результат: если $N_l(k, \alpha) > 2k$, то $\frac{1}{\alpha}$ — нечетное целое число.

Более того, если $k < \frac{1}{\alpha^2}$, то

$$(16.1.6) \quad N_l(k, \alpha) \leq \frac{k(1 - \alpha^2)}{1 - k\alpha^2}.$$

Когда $k = \binom{n}{2}$ и $\alpha = \frac{1}{n-1}$, то верхняя оценка в (16.1.6) равна n^2 . Для четных n Деза и Гришухин [1996а] предложили метод построения равноугольного семейства прямых, для которого почти достигается эта граница. Точнее, верно

Предложение 16.1.7. *Если $n \equiv 0 \pmod{4}$ ($n \equiv 2 \pmod{4}$), соответственно и если существует матрица Адамара¹⁾ порядка n ($n-2$, соответственно), то можно построить n^2 прямых ($n(n-2)$ прямых, соответственно) с общим углом $\arccos(\frac{1}{n-1})$ в размерности $\binom{n}{2}$.*

Доказательство. Для построения N прямых с с общим углом $\arccos(\frac{1}{n-1})$ достаточно найти N векторов с нормами $n-1$ и попарными скалярными произведениями равными ± 1 . Рассмотрим сначала случай $n \equiv 0 \pmod{4}$. Пусть A — матрица Адамара порядка n . Откалибруем A так, чтобы первый столбец состоял из одних единиц. Теперь, удалив этот столбец мы получаем матрицу, чьи строки — это n векторов $u_1, \dots, u_n$ в $\{\pm 1\}^{n-1}$ с нормами равными $n-1$ и попарными скалярными произведениями -1 . Для каждого $i = 1, \dots, n$ рассмотрим разрезную полуметрику $\delta(i)$, которая является 0, 1-вектором длины $\binom{n}{2}$, у которого

¹⁾ Матрицей Адамара порядка m называется целочисленная $m \times (m \pm 1)$ матрица A , такая что $A^T A = mI$. При $m > 2$ необходимо $m \equiv 0 \pmod{4}$.

$n - 1$ компонента равна единице. Теперь нам осталось расположить копии векторов $u_1, \dots, u_n$ в каждой метрике $\delta(i)$ при $i = 1, \dots, n$. Так мы получим $N = n^2$ векторов в $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ с нормами $n - 1$ и попарными скалярными произведениями равными ± 1 . Похожие рассуждения проводятся и в случае $n \equiv 2 \pmod{4}$. А именно, мы приписываем новый столбец из одних единиц к матрице Адамара порядка $n - 2$, строки расширенной матрицы дают $n - 2$ вектора с нормами $n - 1$ и попарными скалярными произведениями равными 1. Располагая копии этих векторов по полуметрикам $\delta(i)$ получаем $n(n - 2)$ вектора в $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ с нормами $n - 1$ и попарными скалярными произведениями равными ± 1 . ■

Изложим общий метод построения равноугольных семейств прямых с помощью выбора подходящего сечения сферы минимальных векторов целочисленной решетки.

Пусть L — решетка с минимальной нормой t , а $L_{\min}$ — множество минимальных векторов в ней. Для данного $a \in L$, $a \neq 0$, положим $V := \{u \in L_{\min} \mid 2u^T a = a^2\}$. Тогда все $u \in V$ лежат на сфере с центром $\frac{a}{2}$. По лемме 13.2.11, если V не пусто, то многогранник $P := \text{Conv}(V)$ является многогранником Делоне. Более того, P — центрально симметричен.

Легко проверить следующие свойства: $V \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $a = a_1 + a_2$ при некоторых $a_1, a_2 \in L_{\min}$ и, следовательно, $a_1, a_2 \in V$. Если $V \neq \emptyset$, то $|V| = 1$ тогда и только тогда, когда $a^2 = 4t$. Если $|V| \geq 2$, то при всех $u, v \in V$ таких, что $v \neq u, a - u$, верно

$$(16.1.8) \quad \frac{a^2 - t}{2} \leq u^T v \leq \frac{t}{2}.$$

(Это следует из того, что $(u - v)^2 \geq t$ и $(u + v - a)^2 \geq t$.) Значит $t \leq a^2 \leq 2t$ при $|V| \geq 3$.

Так как P центрально симметричен, мы можем разбить его вершины на пары диаметрально противоположных. Каждая такая пара задает прямую, проходящую через $\frac{a}{2}$ с направлением $2u - a$ (при $u \in V$). Обозначим через $\mathcal{L}$ это множество прямых, а через $V' := \left\{ \sqrt{2} \left(u - \frac{a}{2} \right) \mid u \in V \right\}$ множество их направлений. Заметим, что $u'^2 = 2t - \frac{a^2}{2}$ при $u' \in V'$, и $u'^T v' = 2u^T v - \frac{a^2}{2}$ при $u', v' \in V'$. Таким образом, если L — целочисленная решетка, то $u'^2, u'^T v'$ — целые числа той же четности, что и $\frac{a^2}{2}$. Заметим, что из соотношения (16.1.8) следует, что $-\left(t - \frac{a^2}{2}\right) \leq u'^T v' \leq \left(t - \frac{a^2}{2}\right)$ при $u', v' \in V'$, $v' \neq u, -u'$. Объединяя все вышесказанное, мы получаем следующий результат из работы Деза и Гришукина [1995a].

Предложение 16.1.9. Пусть $\mathcal{L}$ — множество прямых, проходящих через главные диагонали многогранника $P = \text{Conv}(V)$ (как определено выше). Верны следующие утверждения:

- (i) Если $a^2 = 2t$, то прямые из $\mathcal{L}$ попарно перпендикулярны.
- (ii) Пусть $a^2 = 2t - 2$, $t \geq 2$ и решетка L — целая. Тогда $\mathcal{L}$ является равноугольным семейством прямых с общим углом $\arccos\left(\frac{1}{t+1}\right)$ (соответственно $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$), если t — чётно (соответственно, нечётно).
- (iii) Пусть $a^2 = 2t - 4$ и решетка L — целая. Если t нечётно, то $\mathcal{L}$ является равноугольным семейством прямых с общим углом $\arccos\left(\frac{1}{t+2}\right)$, а если t чётно, то углы между прямыми из $\mathcal{L}$ могут принимать два значения — $\arccos\left(\frac{2}{t+2}\right)$ и $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. ■

Продемонстрируем это построение для случая (ii), когда $a^2 = 2t - 2$, $t = 2$ и L — решетка корней (за подробностями см. Деза и Гришухин [1995a]). Для неприводимой решетки корней мы указываем соответствующий многогранник Делоне, число прямых в диагональном равноугольном семействе $\mathcal{L}$ и размерность пространства, в котором расположена решетка $\mathcal{L}$.

- Для $L = A_{n-1}$, $P = \beta_{n-1}$, $|\mathcal{L}| = n - 1$ в размерности $n - 1$;
- Для $L = D_n$, $P = \alpha_1 \times \beta_{n-2}$, $|\mathcal{L}| = 2(n - 2)$ в размерности $n - 1$;
- Для $L = E_6$, графом 1-остова многогранника P является $J(6, 3)$, $|\mathcal{L}| = 10$ в размерности 5;
- Для $L = E_7$, $P = \frac{1}{2}H(6, 2)$, $|\mathcal{L}| = 16$ в размерности 6;
- Для $L = E_8$, $P = 3_{21}$, $|\mathcal{L}| = 28$ в размерности 7.

Заметим, что в размерностях 5 и 6 максимальная мощность равноугольного семейства прямых равна 10 и 16 соответственно, так что два примера, приведенные выше, с решетками E_6 и E_7 , являются наилучшими.

16.2. Многогранники Шлефли и Госсета являются экстремальными

В этом разделе мы покажем, что многогранник Шлефли 2_{21} и многогранник Госсета 3_{21} являются экстремальными. Доказательство использует свойства ранга, изложенные в разделе 15.1. Вот основные шаги доказательства:

- (i) Предъявим аффинный базис B ($|B| = 7$ в случае многогранника 2_{21} и $|B| = 8$ в случае многогранника 3_{21}), тем самым доказав, что многогранники Делоне 2_{21} и 3_{21} — базисные.
- (ii) Пользуясь аффинным разложением в B для каждой небазисной вершины, дадим явное описание системы $S(B, d^{(2)})$ (она состоит из $27 - 7 = 20$ уравнений для 2_{21} и из $\frac{56}{2} - 1 = 27$ уравнений для 3_{21}).
- (iii) Покажем, что множество решений системы $S(B, d^{(2)})$ имеет ранг 1.

Для этого нам необходимо явное описание многогранников 2_{21} , 3_{21} . За более подробными сведениями о свойствах E_6 , E_7 , E_8 , используемых ниже, можно обратиться к книгам Броуэра, Козна и Ноймайер [1989], Конвей и Слоэн [1990, 1991]. Зададим решетку E_8 следующим образом

$$E_8 = \left\{ x \in \mathbb{R}^8 \mid x \in \mathbb{Z}^8 \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \right)^8 \text{ и } \sum_{1 \leq i \leq 8} x_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Обозначим через V_8 множество минимальных векторов E_8 . Тогда V_8 состоит из

- 112 векторов вида $(\pm 1^2, 0^6)$ и
- 128 векторов вида $\left(\pm \frac{1}{2}^8 \right)$, у которых четное число компонент с отрицательным знаком.

Итак, $|V_8| = 240$ и $v^T v = 2$ при $v \in V_8$. Все элементы множества V_8 лежат на сфере S_8 радиуса $\sqrt{2}$ с центром в нуле.

Зафиксируем минимальный вектор $v_0 = (1, 1, 0^6)$. Можно проверить, что $v^T v_0 = 0, \pm 1$ при всех $v \in V_8$, $v \neq \pm v_0$. Зададим решетку E_7 следующим образом:

$$E_7 = \{ x \in E_8 \mid x^T v_0 = 1 \}.$$

Обозначим через H_7 гиперплоскость, определенную уравнением $x^T v_0 = 1$; тогда $S_7 = S_8 \cap H_7$ есть 7-мерная сфера радиуса $\sqrt{\frac{3}{2}}$ с центром в

точке $\frac{v_0}{2}$. Положим

$$V_7 := \{x \in V_8 \mid x^T v_0 = 1\}.$$

Тогда V_7 состоит из

- 12 векторов вида $(1, 0, \pm 1, 0^5)$,
- 12 векторов вида $(0, 1, \pm 1, 0^5)$ и
- 32 векторов вида $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1^6}{2}\right)$, у которых четное число компонент с отрицательным знаком.

Итак, $|V_7| = 56$ и все элементы V_7 лежат на сфере S_7 . По лемме 13.2.11 многогранник $\text{Conv}(V_7)$ является многогранником Делоне, его называют *многогранником Госсета* и обозначают через 3_{21} . Заметим, что 56 вершин V_7 разбиты на 28 пар диаметрально противоположных точек (на сфере S_7 , т. е. диаметрально противоположная к v точка имеет вид $v^* = v_0 - v$). Таким образом многогранник 3_{21} центрально симметричен.

Рассмотрим $w_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \in V_7$, так что $w_0^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1^6}{2}\right)$. Можно проверить, что $v^T w_0 = 0, 1$ при всех $v \in V_7$, $v \neq w_0$ и $v \neq w_0^*$. Теперь зададим решетку E_6 следующим образом:

$$E_6 = \{x \in E_7 \mid x^T w_0 = 1\}.$$

Заметим, что если v^* диаметрально противоположна $v \in V_7$, то $v^T w_0 - (v^*)^T w_0 = v_0^T w_0 = 1$ и, следовательно, $v^T w_0 = 1$ тогда и только тогда, когда $(v^*)^T w_0 = 0$. Обозначим через H_6 гиперплоскость, заданную уравнением $x^T w_0 = 1$; тогда $S_6 = S_7 \cap H_6 = S_8 \cap H_7 \cap H_6$ есть 6-мерная сфера радиуса $\sqrt{\frac{4}{3}}$ с центром в точке $\frac{v_0 + w_0}{3}$. Положим

$$V_6 := \{x \in V_7 \mid x^T w_0 = 1\}.$$

и $V_6^* = \{v^* \mid v \in V_6\}$. Таким образом, $V_7 = V_6 \cup V_6^* \cup \{w_0, w_0^*\}$. Множество V_6 состоит из

- 6 векторов вида $(1, 0, 1, 0^5)$,
- 6 векторов вида $(0, 1, 1, 0^5)$ и
- 15 векторов вида $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1^2}{2}, \frac{1^4}{2}\right)$.

Итак, $|V_6| = 27$ и все элементы V_6 лежат на сфере S_6 . Многогранник $\text{Conv}(V_7)$ является (в соответствии с леммой 13.2.11) многогранником Делоне. Он называется *многогранником Шлефли* и обозначается через 2_{21} . Этот многогранник асимметричен.

Замечание 16.2.1.

- (i) 28 диагональных прямых многогранника 3_{21} образуют 7-мерное семейство равноугольных прямых с общим углом $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$; это можно увидеть непосредственно или вывести из предложения 16.1.9(ii).
- (ii) Пусть $u, v \in V_6$, $v \neq u$, $u^T v \in \{0, 1\}$. Тогда либо $d^{(2)}(u, v) = (u - v)^2 = 4$ (при $u^T v = 0$), либо $d^{(2)}(u, v) = 2$ (при $u^T v = 1$). Следовательно 27 вершин многогранника 2_{21} образуют 6-мерное сферическое множество с двумя расстояниями.
- (iii) Граф, построенный на вершинах многогранника 2_{21} , ребрами которого являются пары точек (u, v) , находящиеся на наименьшем возможном расстоянии $d^{(2)}(u, v) = 2$, называется *графом Шлефли* и обозначается через G_{27} . Граф, построенный из вершин многогранника 3_{21} , ребрами которого являются пары точек (u, v) , находящиеся на расстоянии $d^{(2)}(u, v) = 2$, называется *графом Госсета* и обозначается через G_{56} . Как следует из предложения 14.3.3, графы G_{27} и G_{56} являются графами 1-остовов многогранников 2_{21} и 3_{21} соответственно. ■

Теперь мы можем доказать экстремальность многогранников 2_{21} и 3_{21} . Этот результат был независимо установлен в работах Деза, Гришухина и Лоран [1992] и Эрдала [1992].

Теорема 16.2.2. *Многогранники Шлефли 2_{21} и Госсета 3_{21} являются экстремальными.*

Доказательство. Обозначим векторы из V_6 через $u_i := (1, 0, 1_i, 0^5)$, $v_i := (0, 1, 1_i, 0^5)$ (первые две координаты зафиксированы, а вторая единица стоит на $2 + i$ -м месте) при $1 \leq i \leq 6$, и $u_{ij} := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \left(-\frac{1}{2}\right)_i, \left(-\frac{1}{2}\right)_j, \frac{1^4}{2}\right)$ (две $-\frac{1}{2}$ расположены на $2 + i$ -м и $2 + j$ -м местах) при $1 \leq i < j \leq 6$. Полагая $t := 2$, имеем

$$(16.2.3) \quad \begin{cases} d(u_i, u_j) = d(v_i, v_j) = t & \text{при } i \neq j, \\ d(u_i, v_j) = \begin{cases} t & \text{при } i = j, \\ 2t & \text{при } i \neq j, \end{cases} \\ d(u_i, u_{kl}) = d(v_i, u_{kl}) = \begin{cases} t & \text{при } i \notin \{k, l\}, \\ 2t & \text{при } i \in \{k, l\}, \end{cases} \\ d(u_{ij}, u_{kl}) = \begin{cases} t & \text{при } |\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1, \\ 2t & \text{при } |\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Легко убедиться, что множество

$$B_6 := \{u_{12}, u_{24}, u_{34}, u_{35}, u_{15}, u_6, v_6\} =: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

является аффинным базисом E_6 . Аффинные разложения точек из $V_6 \setminus B_6$ по B_6 дают следующую систему из 20 уравнений от 21 переменной $d(i, j)$ ($1 \leq i < j \leq 7$):

$$\begin{cases} d(i, 6) + d(i+1, 6) - d(i, i+1) = 0 & \text{при } 1 \leq i \leq 5, \\ d(i, 7) + d(i+1, 7) - d(i, i+1) = 0 & \text{при } 1 \leq i \leq 5, \\ d(i, i+2) + d(i, i+3) - d(i+2, i+3) = 0 & \text{при } 1 \leq i \leq 5, \\ d(6, 7) + \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in \{k, k+1, k+2\}}} d(i, j) - \sum_{i \in \{k, k+1, k+2\}} (d(i, 6) + d(i, 7)) = 0 & \text{при } 1 \leq k \leq 5, \end{cases}$$

(все индексы рассматриваются по модулю 5).

Равенства первой, второй и четвертой строк соответствуют представлениям v_i , u_i и u_{k6} в B_6 соответственно. Равенства третьей строки соответствуют представлениям u_{45} , u_{25} , u_{23} , u_{13} и u_{14} в B_6 . (Например, равенство $d(1, 6) + d(2, 6) - d(1, 2) = 0$ появляется из аффинного разложения $v_5 = u_{12} + u_{34} - u_6$ вектора v_5 в B_6 .) Легко проверить, что множество решений системы $S(B_6, d^{(2)})$, описанной выше, в точности определяется условиями (16.2.3), а значит имеет ранг 1. Таким образом, $\text{rk}(2_{21}) = \text{rk}(B_6, d^{(2)}) = 1$, что и означает экстремальность многогранника 2_{21} .

Вернемся к случаю многогранника 3_{21} . Ясно, что множество $B_7 := B_6 \cup \{w_0\}$ является аффинным базисом E_7 . Действительно, $V_7 = V_6 \cup V_6^* \cup \{w_0, w_0^*\}$, $v_0 = u_{12} + u_{34} + u_{56} - w_0$ и, при $v \in V_6$, вектор $v^* = v_0 - v = u_{12} + u_{34} + u_{56} - w_0 - v$ является аффинно неразложимым в B_7 . Так как при всех $v \in B_6$ верно, что $w_0^T v = 1$, то $d^{(2)}(w_0, v) = 2$ при $v \in B_6$. Применяя лемму 15.3.7 к $P = 3_{21}$, $P_1 = 2_{21}$, $H = H_6$ и $w = u_{13}^*$, заключаем, что $\text{rk}(2_{21}) = \text{rk}(3_{21})$, откуда следует экстремальность многогранника 3_{21} .

Отметим, что система $S(B_7, d^{(2)})$ состоит из системы $S(B_6, d^{(2)})$ и следующих семи уравнений:

$$\begin{cases} d(i, 8) + d(i+1, 8) - d(i, i+1) = 0 & \text{при } 1 \leq i \leq 5, \\ d(1, 2) + d(1, 3) + d(2, 3) + d(k, 8) - \\ - \sum_{i=1,2,3} (d(i, k) + d(i, 8)) = 0 & \text{при } k = 6, 7. \end{cases}$$

Эти равенства соответствуют разложениям v^* в B_7 (при $v \in B_6$). ■

Так как многогранник 2_{21} является базисным и экстремальным, то каждое базисное множество $B \subseteq V(2_{21})$ соответствует крайнему лучу конуса гиперметрик НУР₇. При доказательстве теоремы 16.2.

было построено базисное множество B_6 . Интересно узнать, сколько различных (с точностью до перестановки) крайних лучей конуса НУР_7 могут быть таким же образом получены из многогранника 2_{21} . Мы думаем, что все крайние лучи конуса НУР_7 , не порожденные разрезами полуметриками, возникают из многогранника 2_{21} .

Для каждого базисного подмножества $B \subseteq V(2_{21}) = V_6$, обозначим через $G_{27}[B]$ подграф графа Шлефли G_{27} , порожденный B . Вершинами его являются элементы B , а ребрами пары точек (u, v) , находящиеся на наименьшем возможном расстоянии: $d^{(2)}(u, v) = 2$. $G_{27}[B]$ называется *базисным подграфом* графа G_{27} . Например, для указанного выше базисного множества B_6 , граф $G_{27}[B]$ совпадает с $K_7 \setminus C_5$ (где C_5 — цикл из вершин $(u_{12}, u_{34}, u_{15}, u_{24}, u_{35})$).

Прямым перебором 7-вершинных подграфов графа Шлефли мы убеждаемся, что в 2_{21} ровно 26 базисных подмножеств. Восемь из них связаны с теоремой 17.1.9; а именно, это графы G_i ($1 \leq i \leq 8$), где $G_1 = \nabla B_9$ (так, что $G_1 = G_{27}[B_6]$), $G_2 = \nabla H_2$, $G_3 = \nabla H_1$, $G_4 = \nabla B_8$, $G_5 = \nabla B_7$, $G_6 = \nabla H_4$, $G_7 = \nabla H_3$ и $G_8 = \nabla B_5$. Графы B_i ($1 \leq i \leq 8$) и H_i ($1 \leq i \leq 4$) будут приведены ниже (см. рис. 17.1.3 и 17.1.3 соответственно).

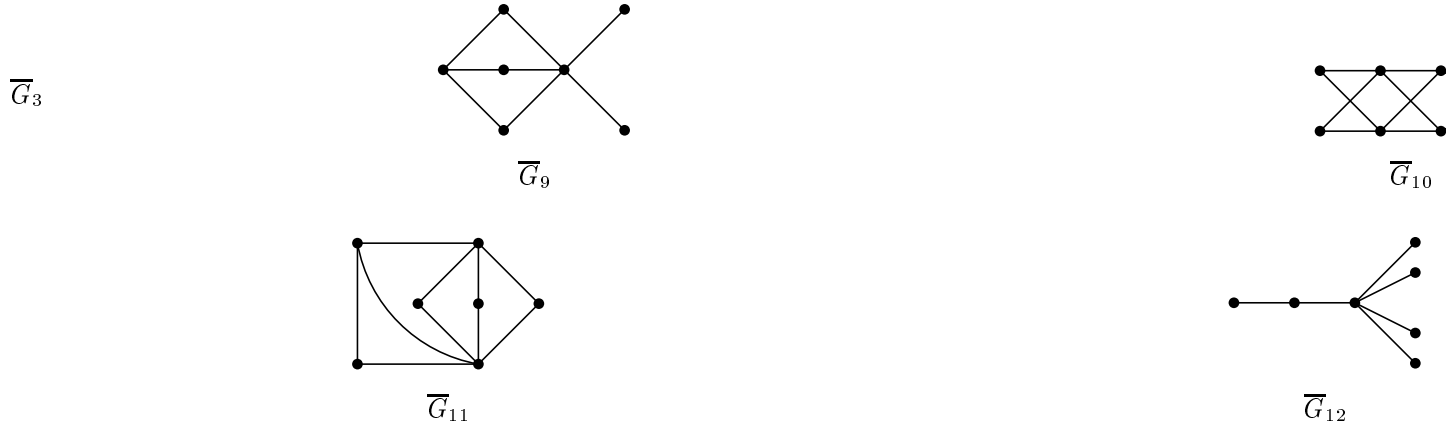
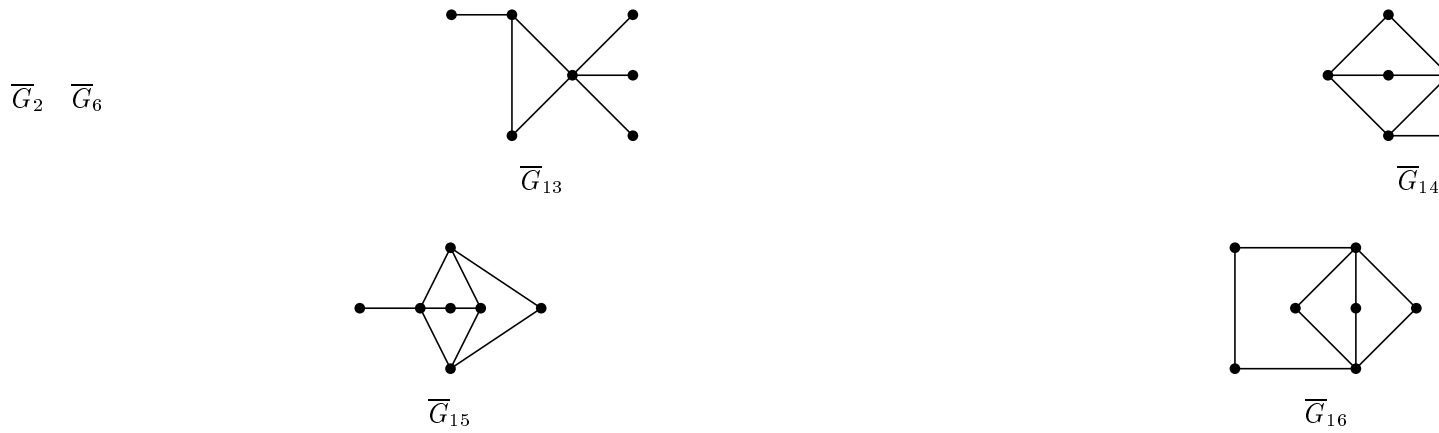


Рис. 16.2.4. Класс $q = 8$

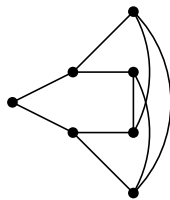
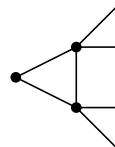
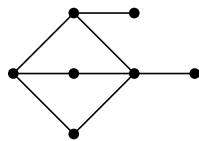
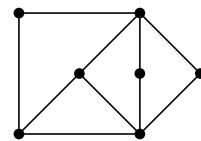
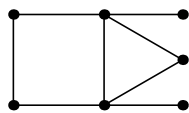
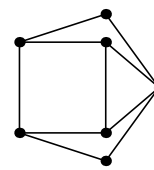
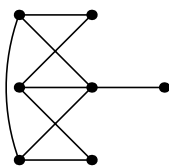
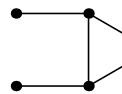
На рис. 16.2.4, 16.2.5, 16.2.6 и 16.2.7 изображено 26 базисных подграфов G_{27} . Точнее, мы приводим там дополнения $\overline{G}_i$ ко графам

Рис. 16.2.5. Класс $q = 11$

G_i , так как их проще изобразить. Таким образом, на рис. 16.2.4–16.2.7 ребром соединены пары точек находящиеся на наибольшем возможном расстоянии 4. Все 26 базисных графов G_i ($1 \leq i \leq 26$) разбиты на пять классов, занумерованных целочисленным параметром $q \in \{8, 11, 12, 14, 15\}$. В действительности, все базисные графы одного класса коммутационно (т. е. посредством операции переключения) эквивалентны, а инвариант q каждого коммутационного класса есть число нечетных троек, т. е. троек вершин, являющихся концами нечетного числа ребер. (Подробнее связь с операцией переключения освещена в работе Деза, Гришухин и Лоран [1992]). В заключение отметим, что по меньшей мере 26 различных крайних лучей конуса НУР_8 возникают из многогранника Госсета 3_{21} . Действительно, любое базисное множества многогранника 2_{21} может быть дополнено до базисного множества многогранника 3_{21} . Нам неизвестно описание других базисных множеств многогранника 3_{21} .

16.3. Экстремальные многогранники Делоне в решетке Лича Λ_{24}

В этом разделе мы даем описание двух экстремальных многогранников Делоне, возникающих в решетке Лича Λ_{24} ; эти конструкции

$\overline{G}_7 \quad \overline{G}_8$  $\overline{G}_{18}$  $\overline{G}_{19}$  $\overline{G}_{20}$  $\overline{G}_{21}$ Рис. 16.2.6. Класс $q = 12$ $\overline{G}_4$  $\overline{G}_{23}$  $\overline{G}_{24}$ $\overline{G}_1 \quad \overline{G}_5$  $\overline{G}_{25}$  $\overline{G}_2$ Рис. 16.2.7. Класс $q = 4$ (первые три графа $\overline{G}_4, \overline{G}_{23}, \overline{G}_{24}$)
и $q = 15$ (оставшиеся четыре графа).

взяты из работы Деза, Гришухина и Лоран [1992]. Данные многогранники размерностей 22 и 23 могут быть получены с помощью двух последовательных сечений сферы минимальных векторов решетки Λ_{24} точно также, как были построены многогранники Госсета $\mathcal{Z}_{21}$ и Шлефли 2_{21} в решетке E_8 (см. раздел 16.2). Подробное описание решетки Лича Λ_{24} можно найти в Конвей, Слоэн [1990]; мы напомним только некоторые факты, которые нам сейчас потребуются.

Решетка Лича Λ_{24} — это 24-мерная решетка в $\mathbb{R}^{24}$. Для удобства занумеруем координаты векторов $x \in \mathbb{R}^{24}$ элементами множества $I := \{\infty, 0, 1, \dots, 22\}$. Для $i \in I$ обозначим через e_i i -й координатный орт в $\mathbb{R}^{24}$. Если S — подмножество I , то через e_S будем обозначать вектор $e_S := \sum_{i \in S} e_i$.

Обозначим через $\mathcal{B}_{24}$ семейство блоков системы Штейнера $S(5, 8, 24)$, заданной на множестве I ; тогда $|\mathcal{B}_{24}| = 759$. Положим

$$\mathcal{B}_{23} := \{B \setminus \{\infty\} \mid B \in \mathcal{B}_{24} \text{ и } \infty \in B\};$$

так, что $\mathcal{B}_{23}$ является семейством блоков системы Штейнера $S(4, 7, 23)$, заданной на множестве $\{0, 1, \dots, 22\}$, и $|\mathcal{B}_{23}| = 253$. В $\mathcal{B}_{23}$ ровно 176 блоков, не содержащих данной точки, и ровно 77 блоков, ее содержащих.

Решетка Лича Λ_{24} порождена векторами $e_I - 4e_\infty$ и $2e_B$ для всех блоков $B \in \mathcal{B}_{24}$. Обозначим через V множество минимальных векторов решетки Λ_{24} , так что $x^T x = 32$ при $x \in V$. (Заметим, что в стандартных обозначениях, все наши векторы растянуты в отношении $\frac{1}{\sqrt{8}}$, а минимальная норма равна 4. Для упрощения обозначений мы будем опускать масштабирующий множитель.) Множество V состоит из следующих векторов:

- (I) $(\pm 4^2, 0^{22})$ ($1104 = 2 \times 24 \times 23$ таких векторов),
- (II) $(\pm 2^8, 0^{16})$, где номера ненулевых компонент образуют блок из $\mathcal{B}_{24}$, а число минус единиц четно ($2^7 \times 759$ таких векторов),
- (III) $(\mp 3, \pm 1^{23})$, где ∓ 3 могут стоять на любых местах, но верхние знаки ставятся на координатах, соответствующих кодовому слову кода Голея $\mathcal{C}_{24}$. Напомним, что кодовые слова из $\mathcal{C}_{24}$, у которых ровно 8 ненулевых позиций, есть в точности блоки из $\mathcal{B}_{24}$.

Рассмотрим $c := (5, 1^{23})$ и $a_0 := (4, 4, 0^{22})$. Тогда $c, a_0 \in \Lambda_{24}$, $c^T c = 48$ и $a_0 \in V$. Положим

$$V_{23} := \{v \in V \mid v^T c = 24\} \quad \text{и} \quad V_{22} := \{v \in V \mid v^T c = 24, \text{ и } v^T a_0 = 16\}.$$

По лемме 13.2.11 многогранники

$$P_{23} := \text{Conv}(V_{23}), \quad P_{22} := \text{Conv}(V_{22})$$

являются многогранниками Делоне. Многогранник P_{23} является центрально симметричным, а P_{22} — асимметричным. На самом деле V_{22} является сферическим множеством с двумя расстояниями (действительно, расстояния между точками из V_{22} принимают два значения — 32 и 48). Более того, 276 прямых, определенных 276 парами диаметрально противоположных вершин многогранника P_{23} , образуют равноугольное семейство с общим углом $\arccos \frac{1}{5}$.

Теорема 16.3.1.

- (i) Многогранник P_{23} является базисным центрально симметричным экстремальным многогранником Делоне размерности 23 с 552 вершинами, а значит реализует равенство в оценке (16.1.3).
- (ii) Многогранник P_{22} является базисным асимметричным экстремальным многогранником Делоне размерности 22 с 275 вершинами, а значит реализует равенство в оценке (16.1.2). ■

16.4. Экстремальные многогранники Делоне в решетке Барнса–Уолла

В этом разделе мы приводим примеры некоторых экстремальных многогранников Делоне, построенных с помощью решетки Барнса–Уолла Λ_{16} ; эти конструкции взяты из работы Деза, Гришухина и Лоран [1992]. Подробное описание решетки Барнса–Уолла Λ_{16} можно найти в книге Конвей, Слоэн [1990]. Решетка Барнса–Уолла Λ_{16} это 16-мерная решетка в $\mathbb{R}^{16}$. Множество V ее минимальных векторов состоит из:

- (I) 480 векторов вида $(\pm 2^2, 0^{14})$, где есть ровно две ненулевые компоненты, принимающие значения 2 или -2 .
- (II) 3840 векторов вида $(\pm 1^8, 0^8)$, где номера плюс-минус единиц соответствуют одному из 30 кодовых слов веса 8 кода Рида–Маллера первого порядка, а число отрицательных знаков четно.

Таким образом, $|V| = 4320$ и $v^T v = 8$ при $v \in V$. (Заметим, что в стандартных обозначениях, все наши векторы растянуты в $\frac{1}{\sqrt{2}}$ раз, а минимальная норма равна 4. Для упрощения обозначений мы будем опускать масштабирующий множитель.)

c_{12}	001111	1111	0000	00
c_{13}	010111	0010	1010	01
c_{14}	011011	0100	0011	10
c_{15}	011101	0001	0100	11
c_{16}	011110	1000	1101	00
c_{23}	100111	0010	0101	10
c_{24}	101011	0100	1100	01
c_{25}	101101	0001	1011	00
c_{26}	101110	1000	0010	11
c_{34}	110011	1001	0110	00
c_{35}	110101	1100	0001	01
c_{36}	110110	0101	1000	10
c_{45}	111001	1010	1000	10
c_{46}	111010	0011	0001	01
c_{56}	111100	0110	0110	00

Рис. 16.4.1. Кодовые слова веса 8 кода Рида-Маллера.

На рисунке 16.4.1 приведен список из 15 слов веса 8 кода Рида-Маллера первого порядка; остальные 15 слов веса 8 являются их дополнениями.

Положим $a := (2^6, 0^{10}) \in \Lambda_{16}$ (Шесть двоек расположены на местах, соответствующих первой шестерке номеров из таблицы на рисунке 16.4.1. Обозначим через S сферу радиуса $\sqrt{6}$ с центром в $\frac{a}{2}$. Таким образом, S — пустая сфера в Λ_{16} , соответствующая глубокой дыре (т. е. дыре максимального радиуса). Значит многогранник

$$P := \left\{ v \in \Lambda_{16} \mid \left(v - \frac{a}{2} \right)^2 = 6 \right\}$$

является многогранником Делоне. P центрально симметричен, имеет размерность 16 и 512 вершин. Можно проверить, что вершины P лежат в параллельных слоях: $x^T a \in \{0, 8, 12, 16, 24\}$. При $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим через H^α гиперплоскость, заданную уравнением $x^T a = \alpha$, и положим $V^\alpha := V \cap H^\alpha$. Тогда

$$V(P) = V^0 \cup V^8 \cup V^{12} \cup V^{16} \cup V^{24},$$

где $V^0 = \{0\}$, $V^{24} = (V^0)^* = \{a\}$, $V^{16} = (V^8)^*$, $|V^8| = |V^{16}| = 135$ и $|V^{12}| = 240$.

Более того, при $\alpha = 8, 12, 16$ сечение

$$P^\alpha := P \cap H^\alpha = \text{Conv}(V^\alpha)$$

гиперплоскостью H^α является многогранником Делоне размерности 15 в решетке $\Lambda_{16} \cap H^\alpha$. Многогранники P^8 и P^{16} асимметричны, имеют 135 вершин, но множество их вершин не является сферическим с двумя расстояниями (так как расстояния между вершинами могут принимать три значения — 8, 12, 16). Многогранник P^{12} центрально симметричен, имеет 240 вершин, но 120 прямых, заданных 120 парами его диаметрально противоположных вершин, не образуют равноугольного семейства (возможны два значения угла — $\arccos 0$, $\arccos \frac{1}{3}$). Заметим, что радиус P^{16} равен $\frac{4}{\sqrt{3}}$, а радиус P^{12} равен $\sqrt{6}(> \frac{4}{\sqrt{3}})$. Отсюда следует, что P^{16} не соответствует глубокой дыре решетки $\Lambda_{16} \cap H^{16}$. Теперь положим

$$Q := \text{Conv}(V^0 \cup V^8 \cup V^{12} \cup V^{16} \cup V^{24}).$$

Q имеет размерность 16 и $2 \times 135 + 2 = 272$ вершины. Q является многогранником Делоне в решетке $\Lambda_{16} \cup \{x \mid x^T a = 0 \pmod{8}\}$. Можно проверить, что многогранники P , P^8 , P^{16} и Q являются базисными.

Теорема 16.4.2.

- (i) P является центрально симметричным экстремальным многогранником Делоне размерности 16 с 512 вершинами.
- (ii) P^8 и P^{16} являются асимметричными экстремальными многогранниками Делоне размерности 15 с 135 вершинами.
- (iii) P^{12} — не экстремальный многогранник.
- (iv) Q является центрально симметричным экстремальным многогранником Делоне размерности 16 с 272 вершинами, следовательно реализует равенство в оценке (16.1.3). ■

В заключение рассмотрим сечение сферы минимальных векторов гиперплоскостью H^4 . Так мы получим многогранник Делоне

$$Q' := \text{Conv}(x \in \Lambda_{16} \mid x^T x = 8 \text{ и } x^T a = 4).$$

Q' является 15-мерным многогранником с 1080 вершинами. Рассмотрим вершину $c := (2, 0, \dots, 0, 2)$ многогранника Q' . Тогда расстояние $d^{(2)}(c, v)$ от остальных вершин v до c может принимать значения 8, 12, 16, 20, 24; в действительности значение 8 (12, 16, 20, 24, соответственно) реализуется для 119 (336, 427, 176, 21, соответственно) вершин многогранника Q' . Таким образом, набор из 119 вершин, находящихся на расстоянии 8

многогранники Делоне	разм.	число вершин	симм.	равенство в оценке?	экстр.?
$P = \text{Conv}(S \cap \Lambda_{16})$	16	512	ЦС	нет	да
$P^8 = \text{Conv}(S \cap \Lambda_{16} \cap H^8)$	15	135	А	да	да
$P^{16} = \text{Conv}(S \cap \Lambda_{16} \cap H^{16})$	15	135	А	да	да
$P^{12} = \text{Conv}(S \cap \Lambda_{16} \cap H^{12})$	15	240	ЦС	да	нет
$Q = \text{Conv}(S \cap \Lambda_{16} \cap$ $\cap \{x \mid x^T a = 0, 8, 16, 24\})$	16	272	ЦС	да	да
$\text{Conv}(x \in \Lambda_{16} \mid x^T x = 8,$ $a^T x = 4, c^T x = 8)$	14	119	А	да	нет
$Q' = \text{Conv}(x \in \Lambda_{16} \mid$ $\mid x^T x = 8, a^T x = 4)$	15	1080	А	нет	да

Рис. 16.4.3. Многогранники Делоне в решетке Барнса–Уолла.

от вершины s , задает 14-мерный асимметричный многогранник Делоне, реализующий равенство в оценке (16.1.3). Однако это не экстремальный многогранник. С другой, стороны сам многогранник Q' — экстремальный.

В таблице на рисунке 16.4.3 собраны результаты этого раздела о многогранниках Делоне в решетке Барнса–Уолла Λ_{16} . (Во второй колонке приведена размерность многогранника, в четвертой указано, асимметричным (А) или центрально симметричным (ЦС) является данный многогранник, в пятой колонке отмечено, реализуется ли равенство в оценке (16.1.2) или (16.1.3).) Напомним, что $a = (2^6, 0^{10})$, $c = (2, 0^{14}, 2)$; S обозначает сферу радиуса $\sqrt{6}$ с центром в $\frac{a}{2}$, а H^α — гиперплоскость, заданную уравнением $x^T a = \alpha$.

16.5. Экстремальные многогранники Делоне и совершенные решетки

Пусть L — k -мерная решетка (содержащая центр координат) с минимальной нормой t ; $L_{\min} := \{v \in L \mid v^2 = t\}$. Для базиса $(v_1, \dots, v_k)$ решетки L обозначим через $v := \sum_{i=1}^k b_i^v v_i$ разложение вектора $v \in L_{\min}$ по данному базису (где $b^v \in \mathbb{Z}^k$). Пусть S_L — система, состоящая из уравнений:

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq k} b_i^v b_j^v x_{ij} = t \quad \text{при } v \in L_{\min}$$

от $\binom{k+1}{2}$ переменных. Решетка L называется *совершенной*, если система S_L имеет максимальный ранг $\binom{k+1}{2}$, т. е. если система имеет единственное решение, которое в этом случае определяется формулой

$$x_{ij} = 2v_i^T v_j \quad (\text{при } 1 \leq i < j \leq k), \quad x_{ii} = v_i^2 \quad (\text{при } 1 \leq i \leq k).$$

Совершенные решетки важны тем, что они включают в себя решетки с локально максимально плотной упаковкой (см., например, Рышков и Барановский [1979]). Аффинная решетка L , являющаяся образом решетки L_0 при параллельном переносе, называется совершенной тогда и только тогда, когда решетка L_0 совершенна.

Следующие предложения 16.5.1, 16.5.2, 16.5.3 показывают, что совершенные решетки тесно связаны с многогранниками Делоне; все три результата взяты из работы Гришухина [1993].

Предложение 16.5.1. Пусть P — многогранник Делоне радиуса r . Обозначим через L_0 решетку, порожденную множеством $V(P)$ вершин многогранника P , а через t — ее минимальную норму. Предположим, что P — такой базисный экстремальный многогранник Делоне, что найдется пара вершин $u, v \in P$ с $(u - v)^2 = t$ и $t \geq \frac{4}{3}r^2$. Тогда найдется точка w , не принадлежащая аффинному пространству, натянутому на P , такая, что $(w - v)^2 = t$ при всех $v \in V(P)$, а решетка L , порожденная $L_0 \cup \{w\}$, совершенна.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что центр координат является вершиной P . По лемме 14.4.5, сферическое t -расширение пространства $(V(P), d^{(2)})$ имеет сферическое представление. Обозначим через w вектор, представляющий отмеченную точку расширения. Тогда $(w - v)^2 \geq t$ при всех $v \in L_0$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $v \in V(P)$. Пусть L — решетка,

порожденная $L_0 \cup \{w\}$. Тогда $L = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} L_a$, где $L_a := (L_0 + aw)$ — слои, из которых состоит L . Расстояние между двумя соседними слоями равно $h = \sqrt{t - r^2}$.

Убедимся, что минимальная норма L равна t , т. е., что $v^2 \geq t$ при всех $v \in L$, $v \neq 0$. Это очевидно в случае $v \in L_0$. Если v лежит в слое L_a , не соседнем с L_0 , то $\|v\| \geq 2h$, т. е. $v^2 \geq 4h^2 = 4(t - r^2) \geq t$, так как $t \geq \frac{4}{3}r^2$. Если v принадлежит соседнему с L_0 слою, скажем $v = u - w$, где $u \in L_0$, то $v^2 \geq t$.

Так как P — базисный многогранник, мы можем выбрать в L_0 базис $(v_1, \dots, v_k)$, состоящий из вершин P . Тогда $(w, v_1, \dots, v_k)$ будет базисом L . Значит система S_L , состоит из уравнений:

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq k} b_i b_j x_{ij} = t, \quad \text{где} \quad \left(b_0 w + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i v_i \right)^2 = t \text{ при } b \in \mathbb{Z}^{k+1}.$$

Докажем, что система S_L имеет максимальный ранг. Пусть x — решение S_L . Так как $w, w - v_1, \dots, w - v_k \in L_{\min}$, то уравнения

$$x_{00} = t, \quad x_{00} + x_{ii} - x_{0i} = t \quad (1 \leq i \leq k)$$

принадлежат S_L . Значит $x_{00} = t$ и $x_{ii} = x_{0i}$ при $i = 1, \dots, k$. Пусть $v \in V(P)$, $v := \sum_{1 \leq i \leq k} b_i^v v_i$, где $b^v \in \mathbb{Z}^k$. Тогда $v - w \in L_{\min}$, откуда следует, что уравнение

$$x_{00} - \sum_{1 \leq i \leq k} b_i^v x_{0i} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} b_i^v b_j^v x_{ij} = t$$

принадлежат S_L . Значит, x удовлетворяет уравнению

$$(a) \quad \sum_{1 \leq i \leq k} ((b_i^v)^2 - b_i^v) x_{ii} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} b_i^v b_j^v x_{ij} = 0$$

при всех $v \in V(P)$.

По условию, P является экстремальным многогранником Делоне, т. е. система $S(V(P), d^{(2)})$, состоящая из уравнений

$$(b) \quad \sum_{1 \leq i \leq k} \left(1 - \sum_{1 \leq j \leq k} b_j^v \right) b_i^v d_{0i} + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i^v b_j^v d_{ij} = 0$$

(для всех $v \in V(P)$) имеет ранг $\binom{k+1}{2} - 1$.

Положим $d_{0i} := x_{ii}$ при $1 \leq i \leq k$, и $d_{ij} := x_{ii} + x_{jj} - 2x_{ij}$ при $1 \leq i < j \leq k$. Так как x удовлетворяет (a), то с необходимостью d удовлетворяет (b). Таким образом, d определено однозначно с точностью

до пропорциональности. Значит и x определен однозначно с точностью до пропорциональности. Условие существования пары $u, v \in V(P)$ с $(u - v)^2 = t$ однозначно определяет коэффициент пропорциональности. Таким образом, система S_L имеет единственное решение x , и решетка L совершенна. ■

Заметим, что предложение 16.5.1 будет по-прежнему верно, если заменить условие $t \geq \frac{4}{3}r^2$ следующим условием: $t \geq r^2$ и t — минимальная норма L .

Как мы убедились в лемме 13.2.11, каждое сечение контактного многогранника гиперплоскостью, не содержащей начала координат, является многогранником Делоне. Значит можно переформулировать предложение 16.5.1 следующим образом.

Предложение 16.5.2. Пусть L — k -мерная решетка с минимальной нормой t , а P — многогранник Делоне, полученный в сечении контактного многогранника решетки L гиперплоскостью, не содержащей начала координат. Если P является базисным экстремальным многогранником и содержит пару вершин u, v с $(u - v) \in L_{\min}$, то решетка L совершенна. ■

Например, решетка корней E_8 и решетка Лича Λ_{24} совершенны. Это можно проверить, применив предложение 16.5.2; в случае E_8 $t = 2$ и $P = 3_{21}$ (квадрат радиуса равен $\frac{3}{2}$), в случае Λ_{24} $t = 32$ и $P = P_{23}$ (квадрат радиуса равен $\frac{2}{4}$); см. разделы 16.2 и 16.3. Другим примером совершенной решетки служит решетка $\Lambda_{16} \cap \{x \mid x^T a = 0 \pmod{8}\}$, где Λ_{16} — решетка Барнса–Уолла и a — минимальный вектор в ней; предложение 16.5.2 применяется к многограннику P^{16} (см. раздел 16.4).

Верен также следующий результат.

Предложение 16.5.3. Пусть P — экстремальный базисный многогранник Делоне радиуса r , а L' — решетка, порожденная вершинами и центром многогранника P (L' называют центрированной решеткой). Если минимальная норма L' равна r^2 , то L' совершенна. ■

Например, многогранник Шлефли 2_{21} является экстремальным базисным многогранником Делоне в E_6 . Решетка, порожденная $V(2_{21})$ и центром координат есть двойственная решетка E_6^* , которая действительно совершенна.

Гиперметрические графы

В этой главе собрано несколько результатов о гиперметричности пространств расстояний, возникающих из графов.

Есть два содержательных способа построения пространства расстояний из графа. Самой классической конструкцией пространства расстояний на связном графе G является метрическое пространство графа $(V(G), d_G)$, где d_G — метрика кратчайшего пути на G ; $d_G(u, v)$ есть длина кратчайшего пути, соединяющего вершины $u, v \in V(G)$. Будем называть G *гиперметрическим графом* (ℓ_1 -*графом* или *графом отрицательного типа*), если пространство $(V(G), d_G)$ гиперметрично (соответственно, ℓ_1 -вложимо или отрицательного типа).

Другим примером пространства расстояний на графе G служит $(V(G), d_G^*)$, где d_G^* — *усеченное расстояние* на G . По определению

$$\begin{cases} d_G^*(i, j) = 1, & \text{если } ij \in E(G), i \neq j; \\ d_G^*(i, j) = 2, & \text{если } ij \notin E(G), i \neq j; \\ d_G^*(i, i) = 0 & \text{при всех } i \in V(G). \end{cases}$$

Если диаметр¹⁾ $G \leq 2$, то понятия метрики кратчайшего пути и усеченного расстояния совпадают. Именно так обстоит дело, например, в случае надстроенных графов. В действительности графы, чья надстройка имеет отрицательный тип, образуют класс графов, привлекавший особое внимание исследователей — это графы, у которых минимальное собственное значения матрицы смежности не меньше -2 .

Напомним, что *матрицей смежности* A_G графа $G = (V, E)$ с n вершинами называется симметрическая $n \times n$ матрица с нулевой диагональю, у которой (i, j) -й элемент равен 1, если вершины i и j соединены ребром в G , и 0 — в противном случае (при различных $i, j \in V$). Обозначим через $\lambda_{\min}(A_G)$ минимальное собственное значения матрицы A_G .

¹⁾ *Диаметром* графа G называется наибольшее (относительно метрики кратчайшего пути) из расстояний между двумя его вершинами.

Мы рассматриваем здесь вопросы, касающиеся гиперметричности и ℓ_1 -вложимости для обоих расстояний d_G и d_G^* на графе G . В разделах 17.1 и 17.2 представлен ряд результатов, относящихся к задаче описания графов, у которых метрика кратчайшего пути или усеченное расстояние являются гиперметричными или ℓ_1 -вложимыми. Нас, в частности, интересует нахождение «хорошего» описания; т. е. описания, предоставляющего алгоритм, определяющий, выполнены ли данные свойства, за полиномиальное время. Известны такие результаты для некоторых классов графов. В разделе 17.1 мы обращаем особое внимание на надстроенные графы и двудольные графы, наделенные усеченным расстоянием. В разделе 17.2 исследуются графы, обладающие некоторыми свойствами регулярности. Наконец, в разделе 17.3 изучаются графы G , для которых расстояния d_G или d_G^* принадлежат крайнему лучу конуса гиперметриков.

17.1. Описания гиперметричных и ℓ_1 -вложимых графов

Исследование гиперметричности и ℓ_1 -вложимости для метрик кратчайшего пути. Начнем с исследования графов, для которых метрика кратчайшего пути является гиперметрикой или изометрично ℓ_1 -вложима. Соответствующий результат непосредственно следует из теорем 14.3.6 и 14.3.7 (впрочем, описание ℓ_1 -графов вытекает также из результатов Шпекторова [1993], изложенных в главе 21.)

Теорема 17.1.1. *Пусть G — связный граф. Тогда верно следующее:*

- (i) *Граф G гиперметричен тогда и только тогда, когда G является подграфом (с индуцированной метрикой) декартова произведения графов полукубов, графов $K_{n \times 2}$ и нескольких экземпляров графа Госсета G_{56} .*
- (ii) *Граф G — ℓ_1 -граф тогда и только тогда, когда G является подграфом (с индуцированной метрикой) декартова произведения графов полукубов и $K_{n \times 2}$ графов.* ■

Некоторые описания вложимых в гиперкуб графов приводятся в главе 19; это «хорошие» описания в том смысле, что они позволяют определить за полиномиальное время, является ли данный граф подграфом (с индуцированной метрикой) гиперкуба. Результат (ii) теоремы 17.1.1,

а priori не дает хорошего описания ℓ_1 -графов. Однако метод доказательства, развитый Шпекторовым [1993], позволяет распознавать ℓ_1 -графы за полиномиальное время (см. следствие 21.1.9). Для гиперметрических графов не известно ни одного хорошего описания (напомним замечание 14.2.6). Мы формулируем это ниже, как открытую проблему.

Проблема 17.1.2. *Какова сложность задачи распознавания, является ли данный граф гиперметрическим (относительно метрики кратчайшего пути)?*

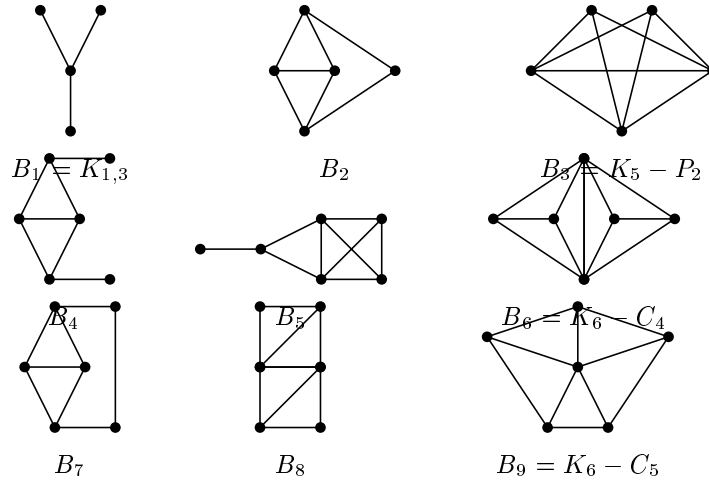


Рис. 17.1.3. Запрещенные для реберных графов конфигурации

Проблема 17.1.2 решена в классе надстроенных графов. Действительно, для таких графов известны уточненные критерии гиперметричности и ℓ_1 -вложимости, которые, в частности, приводят к полиномиальным по времени алгоритмам распознавания гиперметричности (ср. теоремы 17.1.8 и 17.1.9). Диаметр надстроенных графов ≤ 2 , а значит метрика кратчайшего пути совпадает с усеченным расстоянием. В целом графы с гиперметричным или ℓ_1 -вложимым усеченным расстоянием достаточно плохо изучены. Однако есть хорошие описания для некоторых подклассов, например, для двудольных графов (ср. теорему 17.1.13) и графов, обладающих свойствами регулярности (ср. раздел 17.2).

Хорошие описания гиперметричных и ℓ_1 -вложимых надстроенных графов. Рассмотрим подробно случай надстроенных графов. Заметим

сначала, что надстройка ∇G графа G гиперметрична (ℓ_1 -вложима) тогда и только тогда, когда гиперметрична (соответственно, ℓ_1 -вложима) надстройка ∇H каждой связной компоненты H графа G . Действительно, метрика кратчайшего пути на ∇G есть 1-сумма таких же метрик на $\nabla H_1, \dots, \nabla H_m$, где $H_1, \dots, H_m$ — связные компоненты графа G (см. раздел 7.6). Таким образом мы можем ограничиться рассмотрением связных графов G .

Начнем с описания надстроенных графов, имеющих отрицательный тип. Данное описание было получено Ассуадам и Делормом [1980] (сравните результаты предложений 17.1.4 и 17.2.1).

Предложение 17.1.4. *Надстройка ∇G графа G имеет отрицательный тип тогда и только тогда, когда $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$.*

Доказательство. Воспользовавшись предложением 13.1.2, достаточно доказать, что $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$ тогда и только тогда, когда пространство $(V(\nabla G), d_{\nabla G})$ имеет представление. Обозначим через i_0 отмеченную точку надстройки ∇G . Пусть граф G имеет n вершин. Если $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$, то матрица $A_G + 2I$ неотрицательно определена. Следовательно, найдется n векторов $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ (при некотором m) таких, что

$$\begin{cases} (u_i)^2 = 2 & \text{при } i = 1, \dots, n; \\ u_i^T u_j = 1 & \text{при } ij \in E(G); \\ u_i^T u_j = 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда отображение

$$i \in V(G) \rightarrow u_i, \quad i_0 \rightarrow u_0 := 0,$$

задает представление пространства $(V(\nabla G), 2d_{\nabla G})$. Действительно, $(u_i - u_j)^2 = 2$ при $ij \in E(G)$, и $(u_i - u_j)^2 = 4$ в противном случае. Все предыдущие рассуждения обратимы, что доказывает противоположную импликацию: если ∇G имеет отрицательный тип, то $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$. ■

Напомним, что $L(H)$ обозначает реберный граф графа H . Легко видеть, что надстройка $\nabla L(H)$ любого реберного графа является ℓ_1 -графом. Действительно, если мы поставим в соответствие каждому ребру $e := ij \in E(G)$ вектор $\frac{e_i + e_j}{2}$ (e_i означает i -й единичный вектор пространства $\mathbb{R}^{V(H)}$), а в соответствие отмеченной вершине — нулевой вектор, то мы получим ℓ_1 -вложение $\nabla L(H)$. Более того, отсюда также следует, что $2d(\nabla L(H))$ вложимо в гиперкуб. Реберные графы были описаны Байнеке [1970] в терминах запрещенных подграфов. А именно, верна

Теорема 17.1.5. *Граф G является реберным тогда и только тогда, когда G не содержит в качестве индуцированного подграфа ни один из девяти графов B_i ($1 \leq i \leq 9$), изображенных на рис. 17.1.3.* ■

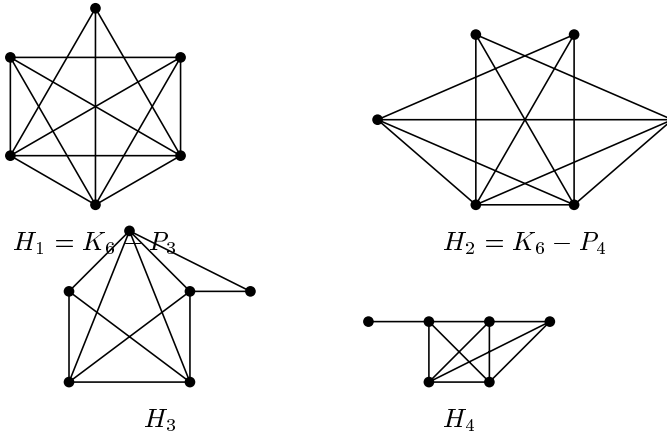


Рис. 17.1.6. Четыре графа с не ℓ_1 -вложимыми надстройками.

Замечание 17.1.7. Можно доказать следующие утверждения:

- (i) ∇B_i не является ℓ_1 -графом при всех $1 \leq i \leq 9$, за исключением случая $i = 3$. В действительности графы $\nabla B_1, \nabla B_2$ не являются пентагональными, а $\nabla B_4, \nabla B_6$ не являются 7-гональными.
- (ii) Надстройка ∇H_i каждого из графов H_i ($1 \leq i \leq 4$) рисунка 17.1.6 не является ℓ_1 -графом.

Другими словами, если обозначить через d метрику кратчайшего пути на любом из графов ∇B_i (при $1 \leq i \leq 9$, $i \neq 3$) или ∇H_i ($1 \leq i \leq 4$), найдется неравенство вида $v^T x \leq 0$, задающее фасету CUT_7 , невыполненное для d (т. е. $v^T d > 0$). За явным описанием таких неравенств можно обратиться к работе Деза и Лоран [1992a]. ■

Рассмотрим связный граф G . Пусть его надстройка ∇G гиперметрична. Обозначим через H граф 1-остова многогранника Делоне, ассоциированного с пространством $(V(\nabla G), 2d_{\nabla G})$. Тогда ∇G есть индуцированный подграф графа H , и H является одним из графов многогранников Делоне, приведенных на рисунке 14.3.1. Таким образом, если ∇G — ℓ_1 -граф, то, по предложению 14.1.10, $H \neq G_{27}, G_{56}$, и, следовательно, H есть один из следующих графов: $J(m, t)$, $\frac{1}{2}H(m, 2)$ или $K_{m \times 2}$. Точнее, согласно с Ассуадом и Делормом [1980, 1982], имеет место

Теорема 17.1.8. Пусть G — связный граф. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) ∇G есть ℓ_1 -граф.
- (ii) G не содержит в качестве индуцированного подграфа ни один из графов данного семейства:

$$\mathcal{F} := \{B_1, B_2, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, H_1, H_2, H_3, H_4\}.$$

- (iii) Либо G — реберный граф, либо G является индуцированным подграфом графа $K_{n \times 2}$.

Доказательство. Импликация (i) $\implies$ (ii) следует из того, что надстройки графов из $\mathcal{F}$ не являются ℓ_1 -графами. Импликация (iii) $\implies$ (i) очевидна. Докажем импликацию (ii) $\implies$ (iii). Пусть G — связный граф, не содержащий в качестве индуцированного подграфа ни один из графов семейства $\mathcal{F}$. Так как G не содержит B_3 в качестве индуцированного подграфа, то по теореме 17.1.5 G — реберный граф. Значит, достаточно рассмотреть случай, когда B_3 — индуцированный подграф G ; пусть граф $B_3 = G[Y]$ индуцирован подмножеством Y вершин графа G , $|Y| = 5$. Докажем, что G тогда будет индуцированным подграфом графа $K_{n \times 2}$. Для этого рассмотрим следующее свойство (P):

- (P) Для каждого подмножества $Z \subseteq V(G)$ такого, что $Y \subseteq Z$, и для всех $i \in V(G) \setminus Z$ верно утверждение: если граф $G[Z]$ есть индуцированный подграф графа $K_{n \times 2}$, а граф $G[Z \cup \{i\}]$ связан, то $G[Z \cup \{i\}]$ есть индуцированный подграф графа $K_{n \times 2}$.

Докажем (P) индукцией по $|Z|$.

Первый случай. Докажем, что (P) верно при $Z = Y$. Рассмотрим такую вершину $i \in V(G) \setminus Y$, что граф $G[Y \cup \{i\}]$ связан. Тогда $G[Y \cup \{i\}]$ — связный граф с шестью вершинами, содержащий $B_3 = K_5 \setminus P_2$ в качестве индуцированного подграфа. Непосредственной проверкой убеждаемся, что существует ровно 11 связных графов с шестью вершинами, содержащих B_3 в качестве индуцированного подграфа. Среди них будут графы H_1, H_2, H_3, H_4 , два графа, содержащих B_2 , и три графа, содержащих B_1 ; все эти случаи исключаются, так как G не содержит графов из $\mathcal{F}$. Оставшиеся два графа — $K_6 \setminus P_2$ и $\nabla \nabla K_{2 \times 2}$ являются индуцированными подграфами $K_{5 \times 2}$ и $K_{4 \times 2}$ соответственно. Итак, свойство (P) верно при $Z = Y$.

Рассмотрим теперь Z такое, что $Y \subseteq Z \subseteq V(G)$, $|Z| \geq 6$, и $G[Z]$ является индуцированным подграфом графа $K_{n \times 2}$. Рассмотрим такую вершину $i \in V(G) \setminus Z$, что граф $G[Z \cup \{i\}]$ связан. Положим $Y' := \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, где, например, вершина y_1 не соединена в G ребром

с y_2 (и, следовательно, все остальные пары различных вершин из Y соединены ребром в G).

Второй случай. Рассмотрим $s, t \in Z$, не соединенные ребром в G . Покажем, что i соединена с обеими вершинами s и t . Так как $G[Z]$ является индуцированным подграфом графа $K_{n \times 2}$, то все остальные вершины Z соединены и с s и с t . Пусть $u \in Z$ — вершина, соединенная с i . Тогда i соединена хотя бы с одной из вершин s или t (иначе $G[\{u, s, t, i\}]$ будет индуцированным подграфом типа B_1 графа G). Значит, при $U := \{s, t, y_3, y_4, y_5\}$, граф $G[U]$ есть B_3 -граф, а граф $G[U] \cup \{i\}$ — связан. В соответствии с первым рассмотренным случаем, $G[U] \cup \{i\}$ есть индуцированный подграф графа $K_{n \times 2}$, а значит, вершина i соединена с обеими вершинами s и t .

Третий случай. Рассмотрим $s, t \in Z$, соединенные ребром в G . Покажем, что i соединена хотя бы с одной из вершин s или t . Если существует вершина $r \in Z$, не соединенная с s , то в соответствии со вторым рассмотренным случаем, i соединена с r и t . Аналогично, если существует вершина $r \in Z$, не соединенная с t , то i соединена с t . В противном случае все вершины $r \in Z$ соединены и с s и с t . Рассмотрим вершину $r \in Z$, соединенную с i . Существует множество U такое, что $|U| = 5$, $r, s, t \in U$ и $G[U] = B_3$. Значит $G[U \cup \{i\}]$ — индуцированный подграф графа $K_{n \times 2}$, откуда следует, что вершина i соединена хотя бы с одной из вершин s или t .

Из второго и третьего случая вытекает, что $G[Z \cup \{i\}]$ является индуцированным подграфом графа $K_{n \times 2}$, что и доказывает свойство (P). ■

Теорема 17.1.9. Пусть G — связный граф. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) ∇G есть гиперметричный, но не ℓ_1 -граф.
- (ii) G есть индуцированный подграф графа Шлефли G_{27} , и G содержит в качестве индуцированного подграфа один из графов семейства $\mathcal{F}_0$:

$$\mathcal{F}_0 := \mathcal{F} \setminus \{B_1, B_2, B_4, B_6\} = \{B_5, B_7, B_8, B_9, H_1, H_2, H_3, H_4\}.$$

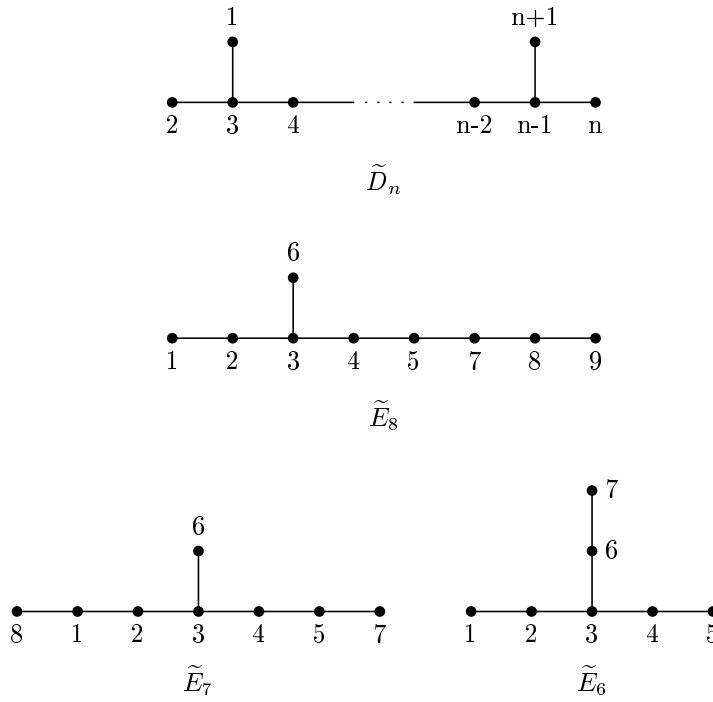
Доказательство. (i) $\implies$ (ii) По теореме 17.1.8, если ∇G не является ℓ_1 -графом, то G содержит в качестве индуцированного подграфа элемент $\mathcal{F}$, точнее, даже элемент из $\mathcal{F}_0$, так как $\nabla B_1, \nabla B_2, \nabla B_4, \nabla B_6$ не гиперметричны (см. замечание 17.1.7). Обозначим через P многогранник Делоне, ассоциированный с гиперметрическим пространством

$(V(\nabla G, 2d_{\nabla G}),$ а через H — граф его 1-остова. По предложению 14.3.5, P является порождающим многогранником Делоне решетки корней. Следовательно, P есть прямое произведение многогранников Делоне, изображенных на рисунке 14.3.1, а H есть прямое произведение графов многогранников Делоне, из рисунка 14.3.1. В действительности из связности графа G следует, что H не является прямым произведением, т. е. H просто является одним из графов многогранников Делоне, изображенных на рисунке 14.3.1. Значит H есть либо G_{27} либо G_{56} , так как все остальные варианты графов многогранников Делоне являются ℓ_1 -графами. Итак, ∇G есть изометричный подграф графа G_{56} , а следовательно и G является изометричным подграфом графа G_{27} . Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидна. ■

Следствие 17.1.10. *Пусть G — связный граф с n вершинами. Тогда выполнены следующие утверждения:*

- (i) *Если $n \geq 37$, то граф ∇G является ℓ_1 -графом тогда и только тогда, когда граф ∇G пентагонален и имеет отрицательный тип.*
- (ii) *Если $n \geq 28$, то граф ∇G является ℓ_1 -графом тогда и только тогда, когда граф ∇G гиперметричен.* ■

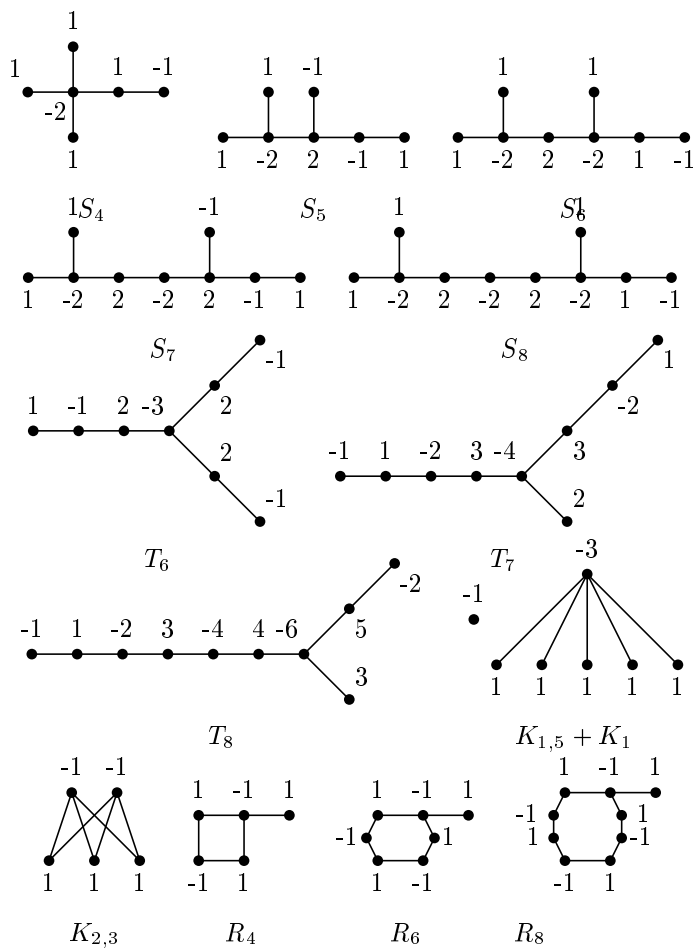
Хорошее описание гиперметричных и ℓ_1 -вложимых усеченных метрик на двудольных графах. Исследуем теперь в целом вопрос о гиперметричности и ℓ_1 -вложимости для усеченных метрик. В случае двудольных графов Ассуад и Делорм [1982] получили несколько эквивалентных описаний, приводящих к полиномиальным по времени алгоритмам распознавания данных свойств метрик. Эти результаты сформулированы ниже в теореме 17.1.13.

Рис. 17.1.11. Графы $\tilde{D}_n, \tilde{E}_8, \tilde{E}_7, \tilde{E}_6$

Теорема 17.1.13. Пусть G — двудольный граф, а d_G^* — усеченная метрика на нем. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) d_G^* — ℓ_1 -вложимая метрика.
- (ii) d_G^* — гиперметрика.
- (iii) d_G^* — 31-гональная метрика.
- (iv) G не содержит ни один из 13 графов семейства $\mathcal{F}_1$, изображенного на рисунке 17.1.12, в качестве индуцированного подграфа.
- (v) Граф G либо — звезда (т. е. $G = K_{1,n}$ при некотором $n \geq 1$), либо каждая связная компонента G есть индуцированный подграф цикла C_{2n} ($n \geq 2$) с четным числом вершин или одного из графов $\tilde{D}_n$ ($n \geq 4$), $\tilde{E}_8, \tilde{E}_7, \tilde{E}_6$, изображенных на рисунке 17.1.11. ■

²⁾ Заметим что графы $\tilde{D}_n, \tilde{E}_8, \tilde{E}_7, \tilde{E}_6$ и $\tilde{A}_n = C_{n+1}$ возникают, как диаграммы Дынкина решеток корней (ср. Броуэр, Козэн и Ноймайер [1989]).

Рис. 17.1.12. Семейство $\mathcal{F}_1$

Доказательство теоремы 17.1.13 опирается на следующие леммы.

Лемма 17.1.14. Пусть $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ — два графа с непересекающимися множествами вершин, G — их клик 0-сумма, со множеством вершин $V_1 \cup V_2$ и множеством ребер $E_1 \cup E_2$. Если усеченные расстояния $d_{G_i}^*$ на G_i допускают ℓ_1 -вложения размера ≤ 4 при $i = 1, 2$, то и усеченное расстояние d_G^* допускает ℓ_1 -вложение размера ≤ 4 .

Доказательство. Пусть $d_{G_1}^* = \sum_{S \subseteq V_1} \alpha_S \delta(S)$ ($\alpha_S \geq 0$), причем можно считать, что $\sum_S \alpha_S = 4$ (если $\sum_S \alpha_S < 4$, то можно сделать данную сумму равной четырем, добавив в качестве слагаемого пустую разрезную метрику с коэффициентом $4 - \sum_S \alpha_S$). Точно так же $d_{G_2}^* = \sum_{T \subseteq V_2} \beta_T \delta(T)$, где $\beta_T \geq 0$ и $\sum_T \beta_T = 4$. Тогда можно проверить, что d_G^* имеет разложение:

$$d_G^* = \frac{1}{8} \sum_{S \subseteq V_1} \sum_{T \subseteq V_2} \alpha_S \beta_T [\delta(S \cup T) + \delta(S \cup (V_2 \setminus T))]$$

размера $\frac{1}{4} \sum_{S, T} \alpha_S \beta_T = 4$. ■

Нам потребуется результат, относящийся к обобщенным реберным графам. Эти графы определяются следующим образом. Пусть H — граф с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$, а $a_1, \dots, a_n$ — некоторые неотрицательные целые числа. Для каждой вершины v_i графа H рассмотрим граф $K_{a_i \times 2}$ (будем считать, что множества вершин таких графов не пересекаются). *Обобщенный реберный граф* $L(H; a_1, \dots, a_n)$ получается объединением реберного графа $L(H)$ и n графов $K_{a_i \times 2}$, причем каждая вершина $e := v_i v_j$ графа $L(H)$ (соответствующая ребру e графа H) дополнительно соединяется ребрами со всеми вершинами графов $K_{a_i \times 2}$ и $K_{a_j \times 2}$. Обычный реберный граф получается из этой конструкции при $a_1 = \dots = a_n = 0$. Усеченная метрика на реберных и $K_{n \times 2}$ графах ℓ_1 -вложима. Ассуад и Делорм заметили, что это свойство распространяется и на обобщенные реберные графы.

Лемма 17.1.15. Если H — двудольный граф, то усеченное расстояние на любом обобщенном реберном графе графа H допускает ℓ_1 -вложение размера ≤ 4 .

Доказательство. Обозначим через S и T две части разбиения множества вершин графа H : $V = \{v_1, \dots, v_n\} = S \cup T$. Для данных целых $a_1, \dots, a_n \geq 0$ рассмотрим обобщенный реберный граф $L(H; a_1, \dots, a_n)$. Пусть $Y_{v_i} \cup Y'_{v_i}$ — множество вершин, на которых задан граф $K_{a_i \times 2}$.

Обозначим через $V^{(\alpha)}, Y_{v_i}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) четыре непересекающиеся экземпляра каждого из множеств V и Y_{v_i} ($i = 1, \dots, n$). Рассмотрим два $K_{n \times 2}$ графа, G_1 и G_2 , где G_1 определен на множестве вершин $\bigcup_{\alpha=1,2} (V^{(\alpha)} \cup \bigcup_{i=1}^n Y_{v_i}^{(\alpha)})$, а G_2 определен на множестве вершин $\bigcup_{\alpha=3,4} (V^{(\alpha)} \cup \bigcup_{i=1}^n Y_{v_i}^{(\alpha)})$ (выделяя, очевидно, пары противоположных вершин). Построим изометрическое вложение графа $L(H; a)$ с усеченной метрикой в прямое произведение графов G_1 и G_2 . А именно, сопоставим вершине $v_i v_j$ графа $L(H)$ (где $v_i \in S, v_j \in T$) пару $(v_i^{(1)}, v_j^{(3)})$; вершине $y \in Y_{v_i}$ ($y \in Y'_{v_i}$) при $v_i \in S$ — пару $(v_i^{(1)}, y^{(3)})$ (пару $(v_i^{(1)}, y^{(4)})$, соответственно); вершине $y \in Y_{v_i}$ ($y \in Y'_{v_i}$) при $v_i \in T$ — пару $(y^{(1)}, v_i^{(3)})$ (пару $(y^{(2)}, v_i^{(3)})$, соответственно). Это доказывает лемму, так как графы $K_{n \times 2}$ допускают ℓ_1 -вложение размера 2, и, следовательно, прямое произведение двух таких графов допускает ℓ_1 -вложение размера 4. ■

Лемма 17.1.16. *Усеченное расстояние на каждом из графов C_{2n} ($n \geq 2$), $\tilde{D}_n$ ($n \geq 4$), $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ допускает ℓ_1 -вложение размера ≤ 4 .*

Доказательство. Для графов C_{2n} и $\tilde{D}_n$ утверждение следует из леммы 17.1.15. Случай C_{2n} очевиден, так как $C_{2n} = L(C_{2n})$. С другой стороны, $\tilde{D}_n$ является индуцированным подграфом реберного графа $L(C_{2n}; a)$ некоторого цикла четной длины, где все компоненты a кроме двух (равных единице) — нулевые. Укажем теперь явно ℓ_1 -вложения для усеченных метрик на $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ (используя нумерацию вершин из рисунка 17.1.11) размеров 3, 4, 4 соответственно.

$$2d_{\tilde{E}_6}^* = \delta(\{1, 2, 5\}) + \delta(\{1, 4, 5\}) + \delta(\{1, 2, 7\}) + \delta(\{4, 5, 7\}) + \delta(\{1, 6, 7\}) + \\ + \delta(\{5, 6, 7\});$$

$$2d_{\tilde{E}_7}^* = \delta(\{1, 2, 5, 7, 8\}) + \delta(\{1, 2, 3, 4, 8\}) + \delta(\{1, 6, 8\}) + \delta(\{2, 3, 6\}) + \\ + \delta(\{1, 2\}) + \delta(\{4, 5\}) + \delta(\{7\}) + \delta(\{8\});$$

$$2d_{\tilde{E}_8}^* = \delta(\{1, 2, 5, 7\}) + \delta(\{1, 2, 3, 4\}) + \delta(\{1, 6\}) + \delta(\{2, 3, 6\}) + \\ + \delta(\{1, 2, 8, 9\}) + \delta(\{4, 5\}) + \delta(\{9\}) + \delta(\{7, 8\}).$$

■

Доказательство теоремы 17.1.13. Импликации (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) очевидны. Доказательство импликации (iii) $\implies$ (iv) опирается на то, что на всех графах G из $\mathcal{F}_1$ усеченное расстояние не

является гиперметрикой. Таким образом найдется такой целочисленный вектор b с $\sum_i b_i = 1$, что $Q(b)^T d_G^* > 0$. Явный вид вектора b для каждого графа из $\mathcal{F}_1$ приведен на рисунке 17.1.12. Заметим, что $\sum_i |b_i| \leq 31$, причем равенство достигается в случае графа T_8 .

Импликация (v) $\implies$ (i) непосредственно следует из уже доказанного. Действительно, если граф G — звезда, то расстояние d_G^* является, очевидно, ℓ_1 -вложимым. В противном случае утверждение следует из лемм 17.1.14 и 17.1.16.

Докажем последнюю импликацию (iv) $\implies$ (v). Пусть G — двудольный граф, не содержащий ни одного из тринадцати графов рисунка 17.1.12 в качестве индуцированного подграфа. Первое замечание состоит в том, что

- (a) каждая связная компонента графа G является либо деревом либо циклом четной длины.

Действительно, предположим, что связная компонента H графа G не является ни деревом, ни циклом четной длины. Пусть C — индуцированный цикл минимальной длины в H . Тогда $|C| \geq 4$ и четно. Найдется вершина x вне C , соединенная с какой-либо вершиной из C . В действительности, из минимальности $|C|$ следует, что при $|C| \geq 6$ вершина x соединена ребром ровно с одной вершиной из C . В этом случае графы R_6, R_8, T_7 являются индуцированными подграфами H при $|C| = 6, 8$ или $|C| \geq 10$ соответственно. Пусть $|C| = 4$. В зависимости от того, соединена ли вершина x ребром ровно с одной вершиной из C или с двумя вершинами из C , граф R_4 или граф $K_{2,3}$ является индуцированным подграфом H . Таким образом, утверждение (a) доказано.

Если у графа G есть вершина степени ≥ 5 , то G связан (в противном случае граф $K_{1,5} + K_1$ является индуцированным подграфом G). Более того, граф G в этом случае является звездой (иначе индуцированным подграфом будет S_4).

Предположим теперь, что все вершины графа G имеют степень ≤ 4 . Пусть H — связная компонента графа G с максимальной степенью Δ , являющаяся деревом. Докажем, что H является индуцированным подграфом какого-либо из графов $\tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ или $\tilde{E}_8$. Если $\Delta \leq 2$, то H — путь, следовательно содержится в $\tilde{D}_n$. Если $\Delta = 4$, то $H = K_{1,4} = \tilde{D}_4$ (иначе индуцированным подграфом будет S_4). Рассмотрим случай $\Delta = 3$. Пусть x — вершина степени 3 в H , а L_1, L_2, L_3 — связные компоненты $H \setminus \{x\}$. При $i = 1, 2, 3$ рассмотрим геодезические пути от x до точек из L_i и обозначим через m_i длину наибольшего из них. Будем считать, что $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3$. Заметим, что $m_3 \geq 3 \implies m_1 = 1$

(из-за T_6), $m_2 \geq 3 \implies m_3 = 3$ (из-за T_7), $m_1 = 1$ и $m_3 \geq 6 \implies m_2 = 1$ (из-за T_8). Выделим два случая.

Первый случай. В H есть вершина x степени 3 с $m_2 \geq 2$. Тогда ввиду вышесказанного для тройки (m_1, m_2, m_3) возможны только следующие варианты: $(1, 2, 2)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, и $(1, 2, 5)$. Отсюда следует, что все вершины $H \setminus \{x\}$ содержатся в $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ (иначе в H найдется запрещенный подграф), а значит H является индуцированным подграфом одного из графов $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ или $\tilde{E}_8$.

Второй случай. Для каждой вершины степени 3 в H имеем $m_2 = 1$. Тогда H является индуцированным подграфом некоторого графа $\tilde{D}_n$. ■

С другой стороны, для усеченных метрик на произвольных графах не существует такого критерия, как теорема 17.1.13, использующего фиксированное число точек. Действительно, при каждом $n \geq 2$ найдется такой граф G с $2n+1$ вершинами, что его усеченное расстояние не является гиперметрикой, но усеченное расстояние на любом его собственном подграфе ℓ_1 -вложимо. В следующем примере 17.1.17 приводится конструкция такого графа из работы Ассуада и Делорма [1982]. Сформулируем предварительный результат для обобщенных реберных графов.

Пример 17.1.17. Обозначим через G_n обобщенный реберный граф $L(C_{2n-1}, a)$, где C_{2n-1} — цикл нечетной длины и $a := (1, 0, \dots, 0)$. На рисунке 17.1.18 изображен граф G_4 с 9 вершинами. Усеченное расстояние на G_n не гиперметрично (так как нарушается чистое гиперметрическое неравенство, где коэффициенты ± 1 расставлены как показано на рисунке 17.1.18). С другой стороны, усеченное расстояние на любом собственном индуцированном подграфе ℓ_1 -вложимо. Действительно, удалив вершину степени 2 данного цикла, мы получим обобщенный реберный граф пути. Если же удалим вершину степени 4, получим дерево, являющееся поддеревом некоторого графа вида D_n . В обоих случаях получается граф с ℓ_1 -вложимой усеченной метрикой (напомним леммы 17.1.15 и 17.1.16). Наконец, легко построить ℓ_1 -вложение, если удалена одна из оставшихся двух вершин степени 2. ■

В заключение упомянем, что Ассуад и Делорм [1980, 1982] дали описание графов, для которых усеченное расстояние может быть вложено в гиперкуб с любой шкалой λ ; ими было доказано существование такого целого $n(\lambda)$, что λd_G^* вложимо в гиперкуб как только это же выполнено для любого индуцированного подграфа G из $n(\lambda)$ вершин. Этот результат подробно рассматривается в разделе 24.4.

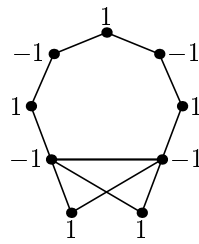


Рис. 17.1.18. Минимальный граф,
для которого усеченное расстояние не гиперметрично.

17.2. Регулярные гиперметричные графы

В этом разделе мы рассматриваем регулярные графы и некоторые подклассы, такие как дистанционно-регулярные графы и сильно регулярные графы (определенные ниже). Напомним, что граф G называется *регулярным*, если все его вершины имеют одинаковую степень, которая называется *валентностью* графа G . Мы по-прежнему обращаемся к вопросу о метрических свойствах этих графов; какие из них являются гиперметричными, ℓ_1 -вложимыми, имеют отрицательный тип и т. д. Исследуются случаи как метрики кратчайшего пути, так и усеченного расстояния.

Свойства усеченных метрик на регулярных графах. Здесь мы приводим несколько результатов, относящихся к гиперметричности усеченных расстояний на регулярных графах. В частности, доказанные утверждения применяются к обычным метрикам кратчайшего пути на сильно регулярных (т. е. дистанционно-регулярных диаметра 2) графах.

Для данного графа G с n вершинами обозначим через D_G^* симметрическую $n \times n$ матрицу, элемент (i, j) которой равен $d_G^*(i, j)$ (при всех $i, j \in V(G)$). Напомним, что через A_G мы обозначили матрицу смежности графа G .

Первый результат (из Деза и Гришук [1993]) состоит из нескольких эквивалентных описаний регулярных графов с гиперметричными усеченными расстояниями.

Предложение 17.2.1. *Рассмотрим связный регулярный граф G с n вершинами валентности k . Следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) d_G^* имеет отрицательный тип.

- (ii) Пространство расстояний $(V(G), 2d_G^*)$ имеет сферическое представление радиуса r , где $r^2 < 2$.
- (iii) d_G^* — гиперметрика.
- (iv) ∇G имеет отрицательный тип.
- (v) $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$.
- (vi) Матрица D_G^* имеет ровно одно положительное собственное значение.

Более того, если d_G^* является гиперметрикой, то радиус r многогранника Делоне, ассоциированного с пространством $(V(G), 2d_G^*)$ равен

$$(17.2.2) \quad r^2 = 2 - \frac{k+2}{n}.$$

Доказательство. (i) $\implies$ (ii). Заметим, что сумма $\sum_{i \in V(G)} 2d_G^*(i, j) = 2(2n - 2 - k)$ является константой. Следовательно, по предложению 14.4.1 пространство $(V(G), 2d_G^*)$ имеет сферическое представление, радиус которого определяется соотношением (14.4.2). Таким образом, $r^2 = 2 - \frac{k+2}{n}$ и, следовательно, $r^2 < 2$.

Импликация (ii) $\implies$ (iii) следует из предложения 14.4.4.

(iii) $\implies$ (iv). По предложению 14.4.3 радиус многогранника Делоне, ассоциированного с пространством $(V(G), 2d_G^*)$, задается формулой (17.2.2). Так как пространство $(\nabla V(G), 2d_{\nabla G}^*)$ является сферическим 2-расширением пространства $(V(G), 2d_G^*)$, из леммы 14.4.5 заключаем, что $(V(\nabla G), 2d_{\nabla G}^*)$ имеет отрицательный тип.

Эквивалентность (iv) $\iff$ (v) следует из предложения 17.1.4.

(v) $\implies$ (vi). Обозначим через $\lambda_1 = k, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq -2$ собственные значения матрицы смежности A_G графа G . Заметим, что

$$D_G^* = 2J - (A_G + 2I),$$

где J есть $n \times n$ матрица, состоящая из одних единиц. Вектор из одних единиц является общим собственным вектором матриц A_G и D_G^* , отвечающий собственным значениям k и $2n - 2 - k$ соответственно. Легко проверить, что другими собственными значениями D_G^* являются $-\lambda_2 - 2, \dots, -\lambda_n - 2$ — неположительные числа. Значит $2n - 2 - k$ — единственное положительное собственное значение матрицы D_G^* .

Импликация (vi) $\implies$ (v) получается обращением доказательства импликации (v) $\implies$ (vi). Очевидная импликация (iv) $\implies$ (i) завершает доказательство эквивалентностей (i)–(vi). $\blacksquare$

Предложение 17.2.1 применимо, в частности, к регулярным графам диаметра 2; в этом случае расстояния d_G и d_G^* совпадают. Заметим однако, что без условия регулярности эквивалентности (i)-(vi) не имеют места. Например, граф $K_9 \setminus P_3$ диаметра 2 не является регулярным и удовлетворяет условию (v), но не удовлетворяет условию (iii) (напомним пример 14.4.9).

Пусть G — такой связный регулярный граф, что $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$. Тогда усеченное расстояние d_G^* на нем является гиперметрикой. Обозначим через P_G^* многогранник Делоне, ассоциированный с пространством $(V(G), 2d_G^*)$, а через H_G^* — граф его 1-остова. По предложению 14.3.3, $(V(G), d_G^*)$ является изометричным подпространством пространства расстояний $(V(H_G^*), d_{H_G^*}^*)$ графа H_G^* . По предложению 14.3.5, P_G^* есть многогранник Делоне в решетке корней, и, следовательно, граф H_G^* является прямым произведением некоторых графов многогранников Делоне из числа изображенных на рисунке 14.3.1. Следующий результат из работы Деза и Гришухина [1993] показывает, что если граф H_G^* не является тривиальным произведением, то он получается перемножением двух полных графов.

Двудольный граф B с разбиением вершин $V_1 \cup V_2$ называется *полурегулярным*, если все вершины из V_1 (V_2 , соответственно) имеют одинаковую степень.

Лемма 17.2.3. *Рассмотрим связный регулярный граф G с n вершинами валентности k . Допустим, что $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$ и обозначим через H_G^* граф 1-остова многогранника Делоне P_G^* , ассоциированного с пространством $(V(G), 2d_G^*)$. Если граф H_G^* представим в виде нетривиального прямого произведения, то $H_G^* = K_{n_1} \times K_{n_2}$ при некоторых $n_1, n_2 \geq 1$; G является реберным графом двудольного полурегулярного графа и*

$$n = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} (k + 2).$$

Доказательство. Предположим, что H имеет вид нетривиального прямого произведения $H_1 \times H_2$. По предположению, $(V(G), d_G^*)$ является изометричным подпространством пространства расстояний $(V(H), d_H^*)$ графа H . Пусть

$$f: i \in V(G) \mapsto f(i) = (f_1(i), f_2(i)) = (i_1, i_2) \in V(H_1) \times V(H_2)$$

задает изометричное вложение. При $i \in V(G)$ положим

$$V_1(i) := \{j \in V(G) \mid f_1(i) = f_1(j)\}, \quad V_2(i) := \{j \in V(G) \mid f_2(i) = f_2(j)\}.$$

Если i, j соединены ребром в G , то $j \in V_1(i) \cup V_2(i)$. Обратно, проверим, что если $|V_1(i)|, |V_2(i)| > 1$, то и $V_1(i)$ и $V_2(i)$ индуцируют полный граф в G .

Для этого рассмотрим $j \in V_1(i)$ и $h \in V_2(i)$ такие, что $j \neq i, h \neq i$. Тогда

$$2 \geq d_G^*(j, h) = d_{H_1}(j_1, h_1) + d_{H_2}(j_2, h_2) = d_{H_1}(i_1, h_1) + d_{H_2}(j_2, i_2)$$

(так как $i_1 = j_1, i_2 = h_2$), что эквивалентно $d_G^*(i, h) + d_G^*(i, j) \geq 2$. Следовательно, $d_G^*(i, h) = d_G^*(i, j) = 1$, т. е. обе вершины h и j соединены с i . Отсюда легко вывести, что любые две вершины как в V_1 , так и в V_2 соединены ребром.

Таким образом, если $|V_1(i)|, |V_2(i)| > 1$, то $|V_1(i)| + |V_2(i)| = k + 2$. При всех $j \in V_1(i)$

$$V_1(i) = V_1(j), \quad k + 2 \leq |V_1(j)| + |V_2(j)|,$$

откуда $|V_2(i)| \leq |V_2(j)|$ и, следовательно, $|V_1(j)|, |V_2(j)| > 1$. Значит

$$k + 2 = |V_1(j)| + |V_2(j)| \quad \text{откуда} \quad |V_2(j)| = |V_2(i)|.$$

Из связности G заключаем, что найдутся такие целые $p, q \geq 1$, что $|V_1(i)| = p, |V_2(i)| = q$ при всех $i \in V(G)$.

Обозначим через B двудольный граф с разбиением вершин $V_1 \cup V_2$, где

$$V_1 := f_1(V(G)) \subseteq V(H_1) \quad \text{и} \quad V_2 := f_2(V(G)) \subseteq V(H_2),$$

а вершины $i_1 \in V_1, i_2 \in V_2$ соединены ребром в B тогда и только тогда, когда $(i_1, i_2) = f(i)$ для некоторой вершины $i \in V(G)$. Итак, каждая вершина V_1 (V_2) имеет валентность p (q соответственно), т. е. граф B — полурегулярный. Ясно, что G является реберным графом графа B .

Докажем, что графы H_1, H_2 — полные. Положим $n_1 := |V_1|, n_2 := |V_2|, n := |V(G)|$. Обозначим через r радиус многогранника Делоне P_G^* ; r задается соотношением (17.2.2). Тогда

$$r^2 = 2 - \frac{k + 2}{n} = \frac{n_1 - 1}{n_1} + \frac{n_2 - 1}{n_2}.$$

Обозначим через r_m радиус многогранника Делоне, графом 1-остова которого является H_m ($m = 1, 2$). В таком случае $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. Воспользуемся следующим свойством: радиус r любого многогранника Делоне в решетке корней удовлетворяет неравенству

$$r^2 \geq \frac{|V(P)| - 1}{|V(P)|},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда P — симплекс. Таким образом,

$$r_m^2 \geq \frac{|V(H_m)| - 1}{|V(H_m)|} \geq \frac{n_m - 1}{n_m},$$

так как $|V(H_m)| \geq n_m$ ($m = 1, 2$). Но

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = \frac{n_1 - 1}{n_1} + \frac{n_2 - 1}{n_2},$$

откуда заключаем, что

$$r_m^2 = \frac{n_m - 1}{n_m}, \quad |V(H_m)| = n_m,$$

следовательно H_m совпадает с полным графом K_{n_m} ($m = 1, 2$). ■

Следствие 17.2.4. Пусть G — связный регулярный граф с n вершинами валентности k , причем $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.

- (i) G является реберным графом двудольного полурегулярного графа и $n = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}(k + 2)$ при некоторых $n_1, n_2 \geq 1$.
- (ii) G является реберным графом регулярного графа и $n = \frac{m}{4}(k + 2)$ при некотором $m \geq 3$.
- (iii) $G = K_{m \times 2}$ и $n = k + 2$.
- (iv) G является индуцированным подграфом графа Госсета G_{56} и $n = 2(k + 2)$.
- (v) G является индуцированным подграфом графа Шлефли G_{27} и $n = \frac{3}{2}(k + 2)$.
- (vi) G является индуцированным подграфом графа Клебша $\frac{4}{3}H(5, 2)$ и $n = \frac{3}{2}(k + 2)$.

Доказательство. Обозначим через H_G^* граф 1-остова многогранника Делоне P_G^* , ассоциированного с пространством $(V(G), 2d_G^*)$. Если граф H_G^* разлагается в прямое произведение, то из леммы 17.2.3 следует утверждение (i). Поэтому рассмотрим случай, когда H_G^* является одним из графов многогранников Делоне, изображенных на рисунке 14.3.1. Мы уже знаем, что радиус r многогранника P_G^* удовлетворяет неравенству $r^2 = 2 - \frac{k+2}{n} < 2$.

- Если $H_G^* = J(m, t)$ при некоторых $t \geq 1$, $n \geq 2t$, то $r^2 = \frac{t(m-t)}{m} < 2$, откуда $t = 1, 2, 3$. Если $H_G^* = J(m, 1) = K_m$, то $G = H_G^* =$

$= K_m$ является реберным графом двудольного полурегулярного графа $K_{1,m}$; следовательно $m = n$ и выполнено утверждение (i). Если $H_G^* = J(m, 2) = L(K_m)$, то G является реберным графом. Так как G регулярен, то, как можно убедиться, G необходимо является реберным графом двудольного полурегулярного графа. Из равенства $r^2 = \frac{2(m-2)}{m}$ заключаем, что $n = \frac{m}{4}(k+2)$. Итак, выполнено либо утверждение (i), либо (ii). Если $H_G^* = J(m, 3)$, то $m = 6, 7, 8$. Если $H_G^* = J(6, 3)$, то G является индуцированным подграфом графа G_{56} и $r^2 = \frac{3}{2} = 2 - \frac{k+2}{n}$, откуда $n = 2(k+2)$, т. е. выполнено утверждение (iv). Случаи $m = 7, 8$ исключаются. Действительно, можно проверить, что любой подграф графа $J(m, 3)$ ($m = 7, 8$), не содержащийся ни в $J(6, 3)$ ни в $J(n, 2)$ и не содержащий ни одной пары вершин на расстоянии (в графе $J(m, 3)$) равном 3, имеет строго меньше, чем $\frac{m(k+2)}{9-m}$ вершин.

- Если $H_G^* = K_{m \times 2}$, то выполнено утверждение (iii).
- Если $H_G^* = \frac{1}{2}H(m, 2)$ при некотором $m \geq 4$, то $r^2 = \frac{m}{4} < 2$, откуда $m = 4, 5, 6, 7$. Если $m = 4$, то $H_G^* = K_{4 \times 2}$, и выполнено утверждение (iii). Если $m = 5$, то $r^2 = \frac{5}{4}$, откуда $n = \frac{4}{3}(k+2)$, и имеет место утверждение (vi). Если $m = 6$, то $r^2 = \frac{3}{2}$, откуда $n = 2(k+2)$, и, следовательно, выполнено утверждение (iv), так как граф $\frac{1}{2}H(6, 2)$ является индуцированным подграфом графа G_{56} . Случай $m = 7$ исключается (аналогично случаю с $J(7, 3)$ и $J(8, 3)$; действительно, в графе $\frac{1}{2}H(7, 2)$ не существует k -регулярного подграфа из $n = 4(k+2)$ вершин, не содержащегося ни в $\frac{1}{2}H(6, 2)$ ни в $J(7, 2)$ и не содержащего ни одной пары вершин на расстоянии 3).
- Если $H_G^* = G_{56}$, то выполнено утверждение (iv), если $H_G^* = G_{27}$, то выполнено утверждение (v). ■

Замечание 17.2.5. В предположениях следствия 17.2.4 для графа H_G^* 1-остова многогранника Делоне P_G^* , ассоциированного с гиперметрическим пространством $(V(G), 2d_G^*)$ возможны только следующие варианты: $H_G^* = K_{n_1} \times K_{n_2}, J(m, 1), J(m, 2), J(6, 3), K_{m \times 2}, \frac{1}{2}H(5, 2), \frac{1}{2}H(6, 2), G_{27}, G_{56}$. В частности, если G не является ни реберным, ни гра-

фом $K_{n \times 2}$, то H_G^* — один из графов $J(6, 3)$, $\frac{1}{2}H(5, 2)$, $\frac{1}{2}H(6, 2)$, G_{27} , G_{56} . Заметим, что радиус r многогранника Делоне P_G^* удовлетворяет равенствам $r^2 = \frac{5}{4}$ для $\frac{1}{2}H(5, 2)$, $r^2 = \frac{4}{3}$ для G_{27} и $r^2 = \frac{3}{2}$ для $\frac{1}{2}H(6, 2)$, $J(6, 3)$ и G_{56} . ■

Графы, удовлетворяющие условию $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$, активно изучались специалистами.

Ясно, что для каждого реберного графа G верно, что $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$ (если $G = L(H)$, то матрица $2I + A_G = N^T N$ неотрицательно определена, где N — матрица инцидентности вершина/ребро графа H). Более того, $\lambda_{\min}(A_G) = -2$, если G есть граф $K_{n \times 2}$. Этот результат обобщается: $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$ для всех обобщенных реберных графов.

В действительности обобщенные реберные графы являются (с точностью до конечного числа исключений) единственными связными графами с условием $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$. Точнее, Камерон, Гётальс, Зайдель и Шульц [1976] доказали следующий результат: Если G — связный граф с $n > 36$ вершинами, отвечающий условию $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$, то G — обобщенный реберный граф. Более того, если G — связный регулярный граф с $n > 28$ вершинами, и $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$, то G — либо реберный либо, граф $K_{n \times 2}$.

Это приводит нас к рассмотрению класса $\mathcal{L}_{BCS}$, состоящего из связных регулярных графов, отвечающих условию $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$, и не являющихся ни реберными ни графами $K_{n \times 2}$. Буссмеер, Цветкович и Зайдель [1976] дали полное описание графов из $\mathcal{L}_{BCS}$. Класс $\mathcal{L}_{BCS}$ состоит из 187 графов, каждый из которых имеет не более 28 вершин и валентность не выше 16. Графы класса $\mathcal{L}_{BCS}$ разбиты на три уровня $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$, в зависимости от величины $\frac{n}{k+2}$, где n — число вершин, а k — валентность данного графа из $\mathcal{L}_{BCS}$. Уровень $\mathcal{L}_1$ ($\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$, соответственно) состоит из тех графов G , для которых $\frac{n}{k+2} = 2$ ($\frac{n}{k+2} = \frac{3}{2}$, $\frac{n}{k+2} = \frac{4}{3}$, соответственно).

Наш подход проливает новый свет на параметр $\frac{n}{k+2}$, определяющий уровни в $\mathcal{L}_{BCS}$. Величина $\frac{k+2}{n}$ является ничем иным, как разностью $2 - r^2$, где r — радиус многогранника Делоне P_G^* , ассоциированного с пространством $(V(G), 2d_G^*)$ для графа G из $\mathcal{L}_{BCS}$. Следовательно, каждый уровень в $\mathcal{L}_{BCS}$ определяется величиной, непосредственно связанной с гиперметрическими свойствами соответствующих графов.

Приведем кратко некоторые сведения о классе $\mathcal{L}_{BCS}$ и его трех уровнях.

- Первый уровень $\mathcal{L}_1$ состоит из 163 графов (графы NN1 – 163 в Буссмеркер, Цветкович и Зайдель [1976]); они определяются параметром $\frac{n}{k+2} = 2$. Для всех графов $G \in \mathcal{L}_{BCS}$ радиус многогранника Делоне P_G^* , ассоциированного с пространством $(V(G), 2d_G^*)$ равен $\frac{3}{2}$, а графом 1-остова является $\frac{1}{2}H(6, 2)$, $J(6, 3)$ или G_{56} . Таким образом, все графы $G \in \mathcal{L}_1$ являются индуцированными подграфами графа G_{56} , и, следовательно, имеют диаметр 2 или 3. Таким образом, графы первого уровня диаметра 2 являются гиперметричными, и графами соответствующих многогранников Делоне являются $\frac{1}{2}H(6, 2)$, $J(6, 3)$ или G_{56} .
- Второй уровень $\mathcal{L}_2$ состоит из 21 графа (графы NN164–184 в Буссмеркер, Цветкович и Зайдель [1976]), включая граф Шлефли G_{27} (NN184). Эти графы определяются параметром $\frac{n}{k+2} = \frac{3}{2}$. Многогранником Делоне P_G^* для всех графов $G \in \mathcal{L}_2$ является 2_{21} радиуса r : $r^2 = \frac{4}{3}$. Таким образом, все графы $G \in \mathcal{L}_2$ являются изометричными подграфами графа G_{27} , и, следовательно, имеют диаметр 2 и гиперметричны.
- Третий уровень $\mathcal{L}_3$ состоит из 3 графов. Это граф Клебша $\frac{1}{2}H(5, 2)$ (NN187 в Буссмеркер, Цветкович и Зайдель [1976]) и два его регулярных подграфа (NN185, 186). Уровень $\mathcal{L}_3$ определяется параметром $\frac{n}{k+2} = \frac{4}{3}$. Многогранником Делоне P_G^* для всех графов $G \in \mathcal{L}_3$ является $h\gamma_5$ радиуса r : $r^2 = \frac{5}{4}$, с графом 1-остова $\frac{1}{2}H(5, 2)$. Таким образом, все графы $G \in \mathcal{L}_3$ являются изометричными подграфами графа $\frac{1}{2}H(5, 2)$, и, следовательно, имеют диаметр 2, ℓ_1 -вложимы, а графом их многогранников Делоне является $\frac{1}{2}H(5, 2)$.

Свойства метрик кратчайшего пути для дистанционно-регулярных графов. Завершим раздел несколькими результатами о гиперметрических дистанционно-регулярных графах. Граф G называется *дистанционно-регулярным*, если найдутся целые b_m, c_m ($m > 0$) такие, что для любых двух вершин $i, j \in V(G)$ на расстоянии $d_G(i, j) = m$ существует ровно c_m вершин на расстоянии 1 от i и $m - 1$ от j , и b_m вершин на

расстоянии 1 от i и $m+1$ от j . Таким образом, граф G однороден, имеет валентность b_0 , и для каждой его вершины $i \in V(G)$ есть k_m вершин, находящихся на расстоянии m от нее. k_m определяется условиями: $k_0 = 1$, $k_1 = 1$, $k_{m+1} = \frac{k_m b_m}{c_{m+1}}$, $m \geq 0$. Обозначим через μ число вершин, отстоящих от каждой из двух данных на расстояние 2, т. е. $\mu = c_2$. Сильно регулярным называется дистанционно-регулярный граф диаметра 2.

Отметим, что величина $\sum_{i \in V(G)} d_G(i, j) = \sum_{m \geq 0} m k_m$ для дистанционно-регулярных графов не зависит от выбора $j \in X$. Следовательно, мы получаем (например, из теоремы 6.2.18) следующий результат.

Предложение 17.2.6. *Для дистанционно-регулярного графа G следующие условия эквивалентны.*

- (i) G имеет отрицательный тип.
- (ii) Пространство расстояний $(V(G), 2d_G^*)$ имеет сферическое представление.
- (iii) Матрица D_G имеет ровно одно положительное собственное значение. ■

Кулен и Шпекторов [1994] полностью описали дистанционно-регулярные графы отрицательного типа. Ниже приведена их классификация, за описанием не определенных нами, но упомянутых в теореме графов, можно обратиться к книге Броуэра, Козна и Ноймайера [1989].

Теорема 17.2.7. *Пусть G — дистанционно-регулярный граф. G имеет отрицательный тип тогда и только тогда, когда верно одно из следующих утверждений.*

- (i) $\mu = 2n - 2$ и G является графом $K_{n \times 2}$.
- (ii) $\mu = 10$ и G является графом Госсета G_{56} .
- (iii) $\mu = 8$ и G является графом Шлефли G_{27} .
- (iv) $\mu = 6$ и G является графом полукуба $\frac{1}{2}H(n, 2)$ ($n \geq 4$).
- (v) $\mu = 4$ и G является одним из трех графов Чанга.
- (vi) $\mu = 4$ и G является графом Джонсона $J(n, d)$ ($d \geq 2$).
- (vii) $\mu = 2$ и G является графом Хэмминга $H(n, d) (= (K_d)^n)$ ($n, d \geq 2$).
- (viii) $\mu = 2$ и G является графом Дуба (включая случай графа Шрикханде).
- (ix) $\mu = 2$ и G является графом икосаэдра.
- (x) $\mu = 1$ и G является графом додекаэдра.
- (xi) $\mu = 1$ и G является графом Петерсена.
- (xii) $\mu = 1$ и G является циклом C_n .

- (xiii) $\mu = 1$ и G является удвоенным нечетным графом DO_{2n+1} .
- (xiv) $\mu = 0$ и G является полным графом K_n . ■

В действительности все графы, перечисленные в теореме 17.2.7 являются гиперметричными. Следовательно, выполнено

Следствие 17.2.8. *Метрически-регулярный граф гиперметричен тогда и только тогда, когда он имеет отрицательный тип, т. е., когда он является одним из (i)–(xiv) графов.* ■

Таким образом, иерархия метрических свойств из теоремы 6.3.1 укорачивается для дистанционно-регулярных графов: как мы убедимся в теореме 19.2.8, то же происходит и в случае связных двудольных графов.

Отметим, что все перечисленные в теореме 17.2.7 графы, за исключением G_{27} , G_{56} и трех графов Чанга, ℓ_1 -вложимы, и, исключая дополнительно случай графов $K_{n \times 2}$ при $n \geq 5$, являются изометричными подграфами графов полукубов. Следовательно, имеет место

Следствие 17.2.9. *Пусть G — дистанционно-регулярный граф. Тогда верно следующее.*

- (i) G является ℓ_1 -графом тогда и только тогда, когда G есть граф, описанный в пп. (i), (iv) или (vi)–(xiii) теоремы 17.2.7.
- (ii) G является изометрическим подграфом графа полукуба тогда и только тогда, когда G есть граф, описанный в пп. (iv), (vi)–(xiv).
- (iii) G является изометрическим подграфом графа гиперкуба тогда и только тогда, когда G есть либо удвоенный нечетный граф DO_{2n+1} , либо гиперкуб $H(n, 2)$, либо цикл C_{2n} .
- (iv) Пусть G — сильно регулярный граф. В этом случае G является гиперметрическим тогда и только тогда, когда G есть один из следующих графов: $K_n \times K_n$, $J(n, 2)$, $K_{n \times 2}$, $\frac{1}{2}H(5, 2)$, G_{27} , 5-цикл C_5 , граф Петерсена, граф Шрикханде, три графа Чанга. ■

Утверждение (ii) было доказано Шпекторовым [1998a]; (iii) можно найти в работах Кулена [1990] и Вайшеля [1992], и (iv) — в работах Кулена [1990] и Деза и Гришухина [1993]. Дальнейшие результаты, относящиеся к дистанционно-регулярным графам, удовлетворяющим некоторым подклассам гиперметрических неравенств (как, например, пентагональные или гексагональные неравенства) можно найти в работах Кулена [1990, 1994].

17.3. Экстремальные гиперметрические графы

В этом разделе мы рассматриваем экстремальные гиперметрические графы, т. е. графы, чья метрика кратчайшего пути d_G (или усеченное расстояние d_G^*) принадлежит крайнему лучу конуса гиперметрик. (Напомним, что граф G называется гиперметрическим, если гиперметрична его метрика кратчайшего пути.) Все результаты, приведенные ниже, взяты из работы Деза, Гришухин [1993].

Пусть G — гиперметрический граф. Обозначим через P_G многогранник Делоне, ассоциированный с гиперметрическим пространством $(V(G), 2d_G)$, а через H_G — граф его 1-остова. Тогда P_G является многогранником Делоне в решетке корней, а G — изометричный подграф H_G . Более того, G — экстремальный гиперметрический граф тогда и только тогда, когда P — экстремальный многогранник Делоне (см. теорему 15.1.8). По теореме 16.0.1, в решетках корней встречаются только следующие экстремальные многогранники Делоне: отрезок α_1 , многогранники Шлефли 2_{21} и Госсета 3_{21} . Значит, если G — экстремальный гиперметрический граф, отличный от K_2 , т. е. только два варианта:

- (i) Либо $H_G = G_{56}$, т. е. G является изометричным подграфом графа G_{56} , причем порождающим (т. е. $V(G)$), рассматриваемое как подмножество всех вершин $V(3_{21})$ многогранника 3_{21} , порождает $V(3_{21})$); в этом случае будем говорить, что G является экстремальным гиперметрическим графом *первого типа*.
- (ii) Либо $H_G = G_{27}$, т. е. G является изометричным подграфом графа G_{27} , причем порождающим (т. е. $V(G)$), порождает $V(2_{21})$); в этом случае будем говорить, что G является экстремальным гиперметрическим графом *второго типа*.

Порождающее подмножество в G_{27} содержит не менее 7 элементов. Оказывается, что в G_{27} есть 26 различных (с точностью до перестановки) порождающих подмножеств из 7 элементов (т. е. базисных подмножеств 2_{21} — см. раздел 16.2). Напомним, что для $B \subseteq V(G_{27})$ через $G_{27}[B]$ обозначается подграф G_{27} , индуцированный B . Заметим, что $G_{27}[B]$ является изометричным подграфом графа G_{27} тогда и только тогда, когда диаметр $G_{27}[B]$ равен 2. В этом случае $G_{27}[B]$ является гиперметрическим графом. Среди 26 базисных подмножеств B в G_{27} (графы $G_{27}[B]$ которых приведены на рисунках 16.2.4, 16.2.5, 16.2.6 и 16.2.7) граф $G_{27}[B]$ имеет диаметр 2 ровно в 12 случаях: это

графы G_i ($1 \leq i \leq 8$), G_{16} , G_{18} , G_{24} и G_{26} . Следовательно, эти графы являются экстремальными гиперметрическими графами с 7 вершинами и многогранником Делоне G_{27} . Для каждого из этих двенадцати графов G_i ($1 \leq i \leq 8$, $i = 16, 18, 24, 26$), его надстройка ∇G_i является экстремальным гиперметрическим графом с 8 вершинами и многогранником Делоне G_{56} .

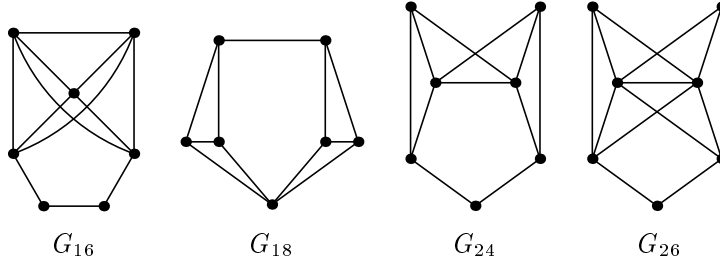


Рис. 17.3.1

Напомним, что $G_1 = \nabla B_9$, $G_2 = \nabla H_2$, $G_3 = \nabla H_1$, $G_4 = \nabla B_8$, $G_5 = \nabla B_7$, $G_6 = \nabla H_4$, $G_7 = \nabla H_3$ и $G_8 = \nabla B_5$. Графы B_i ($1 \leq i \leq 8$) и H_i ($1 \leq i \leq 4$) приведены на рисунках 17.1.3 и 17.1.6. На рисунке 17.3.1 показаны графы G_{16} , G_{18} , G_{24} и G_{26} (а дополнительные к ним графы — на рисунках 16.2.5, 16.2.6 и 16.2.7).

Лемма 17.3.2. Пусть H — максимальный (по включению) граф многогранника Делоне, являющийся собственным изометричным подграфом G_{56} . Тогда H является графом из следующего списка:

- (i) $H = J(8, 2)$,
- (ii) $H = K_{6 \times 2} \times K_2$,
- (iii) $H = \frac{1}{2}H(6, 2)$,
- (iv) $H = G_{27}$.

Доказательство. Известно, что H является прямым произведением графов из рисунка 14.3.1. Обозначим через r радиус многогранника Делоне, графом 1-остова которого является H . Так как H содержится в G_{56} , то $r^2 \leq \frac{3}{2}$. Рассмотрим следующие случаи (напомним, что запись $H_1 \hookrightarrow H_2$ употребляется, когда граф H_1 есть изометрический подграф графа H_2):

- Если $H = J(n, t)$, то $r^2 = \frac{t(n-t)}{n} \leq \frac{3}{2}$, откуда $t = 1, 2, 3$. Но тогда H не является максимальным, за исключением случая $J(8, 2)$.

Действительно, если $t = 1$, то $n \leq 7$ и $K_n \hookrightarrow J(8, 2)$; если $t = 2$, то $n \leq 8$ и $J(n, 2) \hookrightarrow J(8, 2)$; если $t = 3$, то $n = 6$ и $J(6, 3) \hookrightarrow \frac{1}{2}H(6, 2)$.

- Если $H = K_{n \times 2}$, то $n \leq 6$ и $K_{n \times 2} \hookrightarrow K_{6 \times 2} \times K_2$.
- Если $H = \frac{1}{2}H(n, 2)$ то $r^2 = \frac{n}{4} \leq \frac{3}{2}$, откуда $n \leq 6$ и $H \hookrightarrow \frac{1}{2}H(6, 2)$

Остаются случаи, когда $H = G_{27}$, или когда H разлагается в прямое произведение. Пусть $H = H_1 \times H_2$. Обозначим через r_1 и r_2 радиусы тех многогранников Делоне, графами 1-остовов которых являются H_1 и H_2 соответственно. Тогда $r^2 = r_1^2 + r_2^2 \leq \frac{3}{2}$. Обратив внимание на радиусы многогранников Делоне из рисунка 14.3.1, легко заметить, что единственным возможным вариантом является $H_1 = K_{6 \times 2}$, $H_2 = K_2$; $r_1^2 = 1$, $r_2^2 = \frac{1}{2}$ (например, при $H_1 = H_2 = K_4$, $r_1^2 = r_2^2 = \frac{3}{4}$, но $K_4 \times K_4 \hookrightarrow J(8, 2)$). ■

Лемма 17.3.3. Пусть H — максимальный (по включению) граф многогранника Делоне, являющийся собственным изометричным подграфом G_{27} . Тогда H является графом из следующего списка:

- (i) $H = J(6, 2)$,
- (ii) $H = K_{5 \times 2}$,
- (iii) $H = \frac{1}{2}H(5, 2)$,
- (iv) $H = K_6$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 17.3.2. Воспользуемся тем фактом, что радиус r многогранника Делоне, графом 1-остова которого является H , удовлетворяет неравенству $r^2 \leq \frac{4}{3}$. Легко видеть, что H не разлагается в прямое произведение.

Рассмотрим следующие случаи.

- Если $H = J(n, t)$, то $r^2 = \frac{t(n-t)}{n} \leq \frac{4}{3}$, откуда $t = 1, 2$ и $n \leq 6$. Следовательно, реализуется (i) или (iv).
- Если $H = K_{n \times 2}$, то $n \leq 5$ (так как $K_{6 \times 2}$ не содержится в G_{27}) и, следовательно, $H \hookrightarrow K_{5 \times 2}$.
- Если $H = \frac{1}{2}H(n, 2)$ то $r^2 = \frac{n}{4} \leq \frac{4}{3}$, откуда $n \leq 5$ и, следовательно, $H \hookrightarrow \frac{1}{2}H(5, 2)$. ■

Мы получаем следующее описание экстремальных гиперметрических графов.

Предложение 17.3.4. Пусть G — связный граф, отличный от K_2 . G является экстремальным гиперметрическим графом тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений.

- (I) G является изометричным подграфом графа G_{56} и не является изометричным подграфом графов $J(8, 2)$, $K_{6 \times 2} \times K_2$, $\frac{1}{2}H(6, 2)$ или G_{27} .
- (II) G является изометричным подграфом графа G_{27} и не является изометричным подграфом графов $K_{5 \times 2}$, $J(6, 2)$, K_6 или $\frac{1}{2}H(5, 2)$. ■

Отметим, что все исключенные в предложении 17.3.4 графы являются ℓ_1 -вложимыми. Другими словами, каждый изометричный подграф G_{56} есть либо экстремальный гиперметрический граф, либо ℓ_1 -граф.

В качестве приложения предложения 17.3.4 получаем следующее.

- Каждый изометричный подграф G_{27} с $n \geq 17$ вершинами экстремален.
- Каждый индуцированный подграф G_{27} с $n \geq 20$ вершинами экстремален (действительно, при удалении 7 вершин из G_{27} диаметр по-прежнему остается равным 2, так как $\mu(G_{27}) = 8$).
- Каждый изометричный подграф G_{56} с $n \geq 33$ вершинами экстремален.
- Каждый индуцированный подграф G_{56} с $n \geq 47$ вершинами экстремален (так как $\mu(G_{56}) = 10$).
- Если G — связный граф диаметра 2, то его надстройка ∇G является экстремальным гиперметрическим графом первого типа тогда и только тогда, когда G является экстремальным гиперметрическим графом второго типа.

В заключение, соберем здесь некоторые свойства экстремальных гиперметрических пространств, возникающих из графов класса $\mathcal{L}_{BCS}$.

Как мы убедились в разделе 17.2, если G — связный регулярный граф с $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$, то его усеченное расстояние d_G^* гиперметрично. Обозначим через P_G^* многогранник Делоне, ассоциированный с пространством $(V(G), 2d_G^*)$, а через H_G^* — граф его 1-остова.

Предположим, что G принадлежит классу $\mathcal{L}_{BCS}$; т. е. G — связный регулярный граф с $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$, при этом не являющийся ни реберным, ни графом $K_{n \times 2}$. В соответствии с Замечанием 17.2.5, H_G^* есть один из следующих графов: $J(6, 3)$, $\frac{1}{2}H(5, 2)$, $\frac{1}{2}H(6, 2)$, G_{27} , G_{56} . Так как $(V(G), 2d_G^*)$ есть изометричное подпространство пространства $(V(H_G^*), 2d_{H_G^*}^*)$, которое, в свою очередь, является изометричным под-

пространством $(V(G_{56}), 2d_{G_{56}}^*)$, заключаем, что G не содержит ни одной пары вершин, находящихся на расстоянии 3 в G_{56} . В частности, если G является индуцированным подграфом $\frac{1}{2}H(6, 2)$, то G имеет не более 16 вершин. Следовательно, имеют место следующие утверждения.

Предложение 17.3.5. Пусть G — граф из класса $\mathcal{L}_{BCS}$. Если G не является индуцированным подграфом $\frac{1}{2}H(6, 2)$, то d_G^* — экстремальная гиперметрика. В частности, если G имеет $n \geq 17$ вершин, то d_G^* — экстремальная гиперметрика. ■

Предложение 17.3.6.

- (i) Граф $G \in \mathcal{L}_{BCS}$ — экстремальный гиперметрический граф тогда и только тогда, когда диаметр G равен 2 и G не является индуцированным подграфом $\frac{1}{2}H(6, 2)$.
- (ii) Все регулярные экстремальные гиперметрические графы диаметра 2 содержатся в классе $\mathcal{L}_{BCS}$.
- (iii) Пусть G — экстремальный гиперметрический граф из класса $\mathcal{L}_{BCS}$. Тогда G является графом первого (соответственно, второго) типа в том, и только том случае, когда G принадлежит уровню $\mathcal{L}_1$ ($\mathcal{L}_2$, соответственно).
- (iv) Все графы из класса $\mathcal{L}_{BCS}$ с $n \geq 17$ вершинами и валентностью $k \geq 9$ являются экстремальными гиперметрическими. Это 29 графов уровня $\mathcal{L}_1$ (NN135–163) и 8 графов уровня $\mathcal{L}_2$ (NN177–184).
- (v) Все девять максимальных (по вложению) графов из класса $\mathcal{L}_{BCS}$ являются экстремальными гиперметрическими. Это граф Шлефли G_{27} (N184), три графа Чанга (NN161–163) и пять графов (NN148–152) с 22 вершинами. ■

Часть III.

**Изометричные вложения
графов**

Введение

В этой, третьей, части мы изучаем различные свойства вложимости графов. С каждым связным графом можно связать метрическое пространство с помощью следующей конструкции. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф. *Метрика кратчайшего пути* d_G на V определяется как длина кратчайшего пути, соединяющего две вершины из V . Тогда пространство (V, d_G) является метрическим и называется *метрическим пространством графа G* . *Матрицей расстояний* графа G называется матрица $D_G := (d_G(a, b))_{a, b \in V}$.

В первой части мы убедились в существовании иерархии метрических свойств, которыми может обладать данное пространство расстояний. В частности, рассматривались изометричные вложения в гиперкуб и банаховы ℓ_1 -, ℓ_2 -пространства, условия гиперметричности и отрицательности типа. В этой части мы изучаем графы, метрика кратчайшего пути на которых обладает одним из данных свойств. Так, граф G называется ℓ_1 -графом, *вложимым в гиперкуб*, *гиперметричным* или *отрицательного типа*, если его метрика кратчайшего пути d_G является изометрично ℓ_1 -вложимой, вложимой в гиперкуб, гиперметрикой или метрикой отрицательного типа соответственно.

Для двух данных графов G и H запись

$$G \hookrightarrow H$$

будет означать, что G является *изометричным* (или *сохраняющим расстояние*) подграфом H , т. е., что существует такое отображение

$$\sigma: V(G) \rightarrow V(H),$$

при котором

$$d_H(\sigma(a), \sigma(b)) = d_G(a, b)$$

при всех $a, b \in V(G)$. В третьей части мы обращаем особое внимание на случаи, когда объемлющий граф H является гиперкубом (см. главу 19), графом Хэмминга, или, более широко, прямым произведением неприводимых графов (см. главу 20).

Некоторые более слабые типы вложений рассматривались в литературе. Например, можно изучать графы G , вложимые в H как индуцированные подграфы; такие вложения называются топологическими

(и здесь не рассматриваются). Еще более слабое понятие вложения можно получить, потребовав, чтобы граф G являлся (обычным) подграфом графа H , т. е. ограничиваясь лишь сохранением смежности вершин; см. раздел 19.3, где кратко обсуждается случай гиперкубического объемлющего графа H .

Теория изометричных вложений графов очень богата и имеет много приложений. Основной является задача об изометричном вложении данного графа в другой, более простой. Исследования в этой области возможно были инициированы задачей о коммуникациях, поставленной Пирсом [1972]. В телефонной сети требуется установить соединение между терминалами A и B , причем B не знает, что ему должно поступить сообщение. Идея состоит в том, чтобы предварить сообщение некоторым «адресом» B , позволяющим в каждом узле сети выбрать следующее направление для данного сообщения. А именно, сообщение должно быть отправлено в тот узел сети, расстояние Хэмминга от которого до точки назначения B минимально. Наиболее естественной реализацией данной схемы была бы нумерация всех узлов с помощью двоичных последовательностей, что сводится к вложению графа в гиперкуб. К сожалению, не все графы допускают вложение в гиперкуб. В главе 19 мы подробно исследуем вложимые в гиперкуб графы. Мы приводим их основное структурное описание по Джоковичу (теорему 19.1.1) и некоторые другие эквивалентные описания (см. теоремы 19.2.1, 19.2.5 и 19.2.8).

Условие существования изометричного вложения в гиперкуб можно ослабить несколькими способами.

Во-первых, можно рассматривать (как в работе Грэхем и Поллак [1971]) изометричные вложения в сдвоенные гиперкубы. Это означает, что мы будем пытаться занумеровать вершины с помощью строк из символов $\{0, 1, *\}$, где расстояние между $x, y \in \{0, 1, *\}$ полагается равным 1, если $\{x, y\} = \{0, 1\}$, и 0 в противном случае. Оказывается, что любой связный граф с n вершинами может быть изометрично вложен в сдвоенный гиперкуб размерности $n-1$ (Уинклер [1983]). (Отметим, что сдвоенный гиперкуб *не является* полуметрическим пространством.)

Во-вторых, можно рассматривать изометричные вложения в произвольные прямые произведения. В действительности для каждого связного графа есть единственное каноническое изометричное вложение в прямое произведение с неприводимыми сомножителями (Грэхем и Уинклер [1985]). Этот результат вместе с некоторыми его приложениями приводится в главе 20.

Можно также ослабить условие существования изометричного вложения в гиперкуб, рассматривая такие вложения с точностью до нормировки, т. е. рассматривая ℓ_1 -графы. Впервые такие вложения появились в работе Блэйка и Джилхриста [1973]. Результаты, относящиеся к ℓ_1 -графам, содержатся в главе 21; там же приведен полиномиальный по времени алгоритм распознавания ℓ_1 -вложимости графа и структурное описание изометричных подграфов графов полукубов.

Глава 18.

Предварительные замечания о графах

Мы вводим здесь некоторые понятия, относящиеся к графам и вложениям, необходимые нам в дальнейшем в этой части. Сначала дадим определение некоторого отношения θ на ребрах графа, которое, в свою очередь, ведет к понятию изометрической размерности графа.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$. Каждое ребро (a, b) разбивает множество V вершин графа G на три части:

$$V = G(a, b) \cup G(b, a) \cup G_=(a, b),$$

где

$$(18.0.1) \quad \begin{cases} G(a, b) := \{x \in V \mid d_G(x, a) < d_G(x, b)\}, \\ G(b, a) := \{x \in V \mid d_G(x, b) < d_G(x, a)\}, \\ G_=(a, b) := \{x \in V \mid d_G(x, a) = d_G(x, b)\}. \end{cases}$$

Ясно, что если G — двудольный граф, то $G_=(a, b) = \emptyset$ для каждого ребра (a, b) графа G .

Следующее отношение θ между ребрами графа было впервые введено Дьюковичем [1973]. Это понятие является основным в теории изометричных вложений. Для двух данных ребер $e = (a, b)$ и $e' = (a', b')$ графа G будем говорить, что

$$(18.0.2) \quad e \theta e', \quad \text{если } d_G(a', a) - d_G(a', b) \neq d_G(b', a) - d_G(b', b).$$

Другими словами, e' находится в отношении θ с e , если ребро e' «разрезает» разбиение $V = G(a, b) \cup G(b, a) \cup G_=(a, b)$, индуцированное ребром e , т. е., если концы e' принадлежат разным частям этого разбиения. Очевидно, что отношение θ рефлексивно и симметрично, но, вообще говоря, оно не транзитивно. Например, θ не транзитивно, если G — полный двудольный граф $K_{2,3}$. На самом деле отношение θ транзитивно тогда и только тогда, когда граф G может быть изометрично вложен в $(K_3)^m$ при некотором $m \geq 1$ (см. следствие 20.1.3). Транзитивное замыкание θ обозначается через θ^* . Число классов эквивалентности

θ^* называется *изометрической размерностью* графа G и обозначается как $\dim_I(G)$. Как мы убедимся в главе 20, каждый связный граф G может быть канонически вложен в прямое произведение $\dim_I(G)$ неприводимых графов.

Напомним некоторые определения, которые потребуются в дальнейшем в этой части. Для двух данных векторов $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ определим *расстояние Хэмминга* $d_H(x, y)$ между ними по формуле:

$$d_H(x, y) = |\{i \in \{1, \dots, m\} : x_i \neq y_i\}|.$$

Прямым произведением двух данных графов G и H называется граф $G \times H$ с множеством вершин $V(G) \times V(H)$ и ребрами вида $((a, x), (b, y))$, где $a, b \in V(G)$, $x, y \in V(H)$ и либо $(a, b) \in E(G)$ и $x = y$, либо $a = b$ и $(x, y) \in E(H)$. Прямое произведение $H_1 \times \dots \times H_k$ k графов $H_1, \dots, H_k$ обозначается также через $\prod_{h=1}^k H_h$. *Графом Хэмминга* называется прямое произведение полных графов, т. е. граф вида $\prod_{j=1}^m K_{q_j}$ при некоторых целых $q_1, \dots, q_m$, $m > 1$. Заметим, что пространство расстояний графа Хэмминга $\prod_{j=1}^m K_{q_j}$ совпадает пространством Хэмминга $(\prod_{j=1}^m \{0, 1, \dots, q_j - 1\}, d_H)$. *Графом m -мерного гиперкуба* называется граф $H(m, 2)$ с множеством вершин $\{0, 1\}^m$, где ребрами являются пары $(x, y) \in \{0, 1\}^m \times \{0, 1\}^m$ с $d_H(x, y) = 1$; в графе $H(m, 2)$ ровно 2^m вершин и $m2^{m-1}$ ребер. Следовательно, граф $H(m, 2)$ изоморфен графу Хэмминга $(K_2)^m$, а его пространство расстояний совпадает с пространством $(\{0, 1\}^m, d_H)$. Или, что то же самое, можно для любого конечного множества Ω определить граф $|\Omega|$ -мерного гиперкуба $H(\Omega)$, вершинами которого будут все подмножества из Ω , а ребрами — такие пары подмножеств (A, B) , что $|A \Delta B| = 1$. *Графом полукуба* называется граф $\frac{1}{2}H(m, 2)$, вершинами которого являются все подмножества из $\{1, \dots, m\}$, состоящие из четного числа элементов, а ребрами — пары (A, B) такие, что $|A \Delta B| = 2$. Граф $K_{m \times 2}$ — это полный m -дольный граф, причем каждая из долей состоит из двух вершин. Таким образом, *граф $K_{m \times 2}$* состоит из $2m$ вершин $v_1, \dots, v_{2m}$, а ребрами соединены все пары различных вершин кроме m пар (v_i, v_{i+m}) ($i = 1, \dots, m$).

Связный граф G *вложим в гиперкуб*, если можно занумеровать его вершины двоичными векторами так, чтобы расстояние между двумя вершинами совпадало с расстоянием Хэмминга между номерами (или, что то же самое, если метрика кратчайшего пути d_G представима в виде целочисленной комбинации разрезных полуметрик с неотрицательными

коэффициентами). Другими словами, граф G вложим в гиперкуб, если G является изометричным подграфом $(K_2)^m$ при некотором $m \geq 1$. Наименьшее целое m , при котором граф G вложим в $H(m, 2)$, обозначается через $m_h(G)$. Заметим, что величина $m_h(G)$ совпадает с минимальным h -размером $s_h(d_G)$ метрики кратчайшего пути на G , введенным в разделе 4.3. Граф G называется ℓ_1 -графом, если его метрика кратчайшего пути d_G ℓ_1 -вложима. В соответствии с Предложением 4.3.8, это эквивалентно существованию вложения в гиперкуб, рассматриваемого с точностью до нормировки. Наименьшее целое v , при котором граф vd_G вкладывается в гиперкуб, называется *минимальной шкалой* графа G . Граф G называется ℓ_1 -жестким, если его метрика кратчайшего пути d_G ℓ_1 -жестка (см. раздел 4.3 за определением ℓ_1 -жесткости). Отметим, что прямое произведение $G \times H$ является ℓ_1 -жестким графом тогда и только тогда, когда оба графа G и H — ℓ_1 -жесткие (см. раздел 7.5).

Более общо, граф G является изометричным подграфом графа Хэмминга тогда и только тогда, когда его метрика кратчайшего пути d_G представима в виде целочисленной комбинации кратных разрезных полуметрик с неотрицательными коэффициентами (напомним Предложение 4.2.9). Если $(S_1, \dots, S_t)$ — разбиение V_n , то кратная разрезная полуметрика $\delta(S_1, \dots, S_t)$ разлагается следующим образом:

$$\delta(S_1, \dots, S_t) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq t} \delta(S_i).$$

Отсюда следует, что для каждого изометричного подграфа G графа Хэмминга, $2d_G$ является целочисленной комбинацией разрезных полуметрик с неотрицательными коэффициентами, т. е. метрика $2d_G$ вложима в гиперкуб. Другими словами, каждый изометричный подграф графа Хэмминга является ℓ_1 -графом со шкалой ≤ 2 , или, что то же самое является изометричным подграфом графа полукуба. Полученные в итоге зависимости между различными типами вложений приводятся на рисунке ниже. В действительности, как мы скоро убедимся, все эти свойства графов распознаются за полиномиальное время.

граф G вложим в гиперкуб
 $\implies G$ — изометричный подграф графа Хэмминга
 $\implies G$ — изометричный подграф графа полукуба
 $\implies G$ — ℓ_1 -граф

Изометричные вложения графов в гиперкубы

В этой главе мы изучаем графы, допускающие изометричное вложение в гиперкуб. В теоремах 19.1.1, 19.2.1, 19.2.5 и 19.2.8 приведено несколько эквивалентных описаний таких графов. Как следствие доказанных результатов, устанавливается существование полиномиального по времени алгоритма, распознающего, вложим ли изометрично данный граф в гиперкуб. В действительности, если граф допускает вложение в гиперкуб, то такое вложение, по сути, единственно; два выражения для размерности соответствующего гиперкуба приведено в предложениях 19.1.2 и 19.2.12.

19.1. Описание Дьоковича

Напомним, что для фиксированного графа $G = (V, E)$ подмножество $U \subseteq V$ называется d_G -выпуклым, или просто *выпуклым*, если оно замкнуто относительно выбора кратчайшего пути.

Сформулируем основное утверждение этого раздела, содержащее структурное описание вложимых в гиперкуб графов (см. Дьокович [1973]). Мы будем пользоваться обозначением $G(a, b)$, определенным выше с помощью соотношения (18.0.1).

Теорема 19.1.1. *Пусть G — связный граф. Следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) *Граф G допускает изометричное вложение в гиперкуб.*
- (ii) *Граф G — двудольный, и множество $G(a, b)$ выпукло для любого ребра (a, b) графа G .*

Доказательство. (i) $\implies$ (ii). Если граф G вложим в гиперкуб, то его метрика кратчайшего пути d_G удовлетворяет условию

$$d_G(a, b) + d_G(a, c) + d_G(b, c) \equiv 0 \pmod{2}$$

для всех вершин a, b, c графа G , откуда и следует, что граф G — двудольный. Докажем выпуклость множества $G(a, b)$ для любых соединенных ребром вершин a и b . Рассмотрим ребро (a, b) графа G и точки $x, y \in G(a, b)$. Пусть $z \in V$ принадлежит кратчайшему пути, соединяющему x и y . Рассмотрим вложение графа G в гиперкуб, при котором вершина a занумерована $\emptyset$, вершина b — синглетоном $\{1\}$, а вершины x, y, z — множествами X, Y, Z соответственно. Тогда $1 \notin X, Y$, так как $x, y \in G(a, b)$ и $|X \Delta Y| = |X \Delta Z| + |Y \Delta Z|$, так как $d_G(x, y) = d_G(x, z) + d_G(z, y)$. Отсюда $1 \notin Z$, т. е. $z \in G(a, b)$, что доказывает выпуклость $G(a, b)$.

(ii) $\implies$ (i). Докажем сначала, что для двух данных ребер $e = (a, b)$, $e' = (a', b')$ графа G $e\theta e'$ тогда и только тогда, когда два биразбиения множества V на $G(a, b) \cup G(b, a)$ и $G(a', b') \cup G(b', a')$ совпадают. Предположим, например, что $a' \in G(a, b)$ и $b' \in G(b, a)$. Докажем, что $G(a, b) = G(a', b')$. Для этого достаточно проверить, что $G(a, b) \subseteq G(a', b')$. Пусть $x \in G(a, b)$. Если $x \in G(b', a')$, то b' лежит на кратчайшем пути из x в a' . Из выпуклости $G(a, b)$ следует, что $b' \in G(a, b)$. Противоречие. Таким образом, отношение θ транзитивно. Обозначим через $\overline{E} := E/\theta$ множество классов эквивалентностей отношения θ . Для $e \in E$ обозначим через $\overline{e}$ класс эквивалентности e в $\overline{E}$. Итак, все ребра (a, b) из одного класса эквивалентности отвечают одному и тому же разбиению $G(a, b) \cup G(b, a)$ множества V . Зафиксируем вершину x_0 графа G . Каждой вершине $x \in V$ сопоставим множество $A(x)$ таких элементов $\overline{e} \in \overline{E}$, что x и x_0 принадлежат разным множествам биразбиения $V = G(a, b) \cup G(b, a)$, где (a, b) — ребро из $\overline{e}$. В частности, $A(x_0) = \emptyset$. Докажем, что это соответствие задает вложение G в гиперкуб, т. е., что для всех вершин $x, y \in V$ выполнено

$$|A(x) \Delta A(y)| = d_G(x, y).$$

Пусть $x, y \in V$ и $m := d_G(x, y)$. Рассмотрим кратчайший в графе G путь $P := (x_0 = x, x_1, \dots, x_m = y)$ из x в y , состоящий из ребер $e_i = (x_{i-1}, x_i)$ ($i = 1, \dots, m$). Утверждается, что

$$A(x) \Delta A(y) = \{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_m\}.$$

Ясно, что все $\overline{e}_i$ принадлежат $A(x) \Delta A(y)$. Действительно, если например $x_0 \in G(x_{i-1}, x_i)$, то $\overline{e}_i \in A(y) \setminus A(x)$, так как $x \in G(x_{i-1}, x_i)$ и $y \in G(x_i, x_{i-1})$. Обратно, рассмотрим такое ребро $e = (a, b) \in E$, что

$\bar{e} \in A(x) \triangle A(y)$. Можно считать, что, например, $\bar{e} \in A(y) \setminus A(x)$, где $x_0, x \in G(a, b)$ и $y \in G(b, a)$. Пусть i — наибольший индекс из $\{1, \dots, p\}$, при котором $x_{i-1} \in G(a, b)$. Тогда $e_i \theta e$, откуда $\bar{e} = \bar{e}_i$. Следовательно, мы доказали, что равенство $|A(x) \triangle A(y)| = d_G(x, y)$ выполнено для всех вершин $x, y \in V$. Отсюда следует, что G может быть изометрично вложено в гиперкуб размерности $\dim_I(G) := |\bar{E}|$. ■

Следующий результат Деза и Лоран [1994a] также является следствием теоремы 20.3.1.

Предложение 19.1.2. *Если граф G вложим в гиперкуб, то G — ℓ_1 -жесткий граф; в частности G допускает единственное (с точностью до эквивалентности) изометричное вложение в гиперкуб размерности $m_h(G) = \dim_I(G)$.*

Доказательство. Допустим, что граф G вложим в гиперкуб. Докажем, что G — ℓ_1 -жесткий граф. Как следствие мы покажем, что G допускает единственное изометричное вложение и, следовательно, $m_h(G) = \dim_I(G)$. Сохраним обозначения из доказательства теоремы 19.1.1. Для каждого элемента $\bar{e} \in \bar{E}$ (где $e = (a, b)$) обозначим через $S_{\bar{e}}$ то из двух множеств $G(a, b)$ и $G(b, a)$, которое не содержит фиксированной вершины x_0 . Из равенства $d_G(x, y) = |A(x) \triangle A(y)|$ (верного для всех вершин $x, y \in V$) заключаем, что d_G допускает следующее разложение:

$$d_G = \sum_{\bar{e} \in \bar{E}} \delta(S_{\bar{e}}).$$

Пусть F_G — наименьшая грань разрезного конуса CUT_n (где n — число вершин графа G), содержащая d_G . Утверждается, что грань F_G является симплексом размерности $\dim_I(G)$. Ясно, что все разрезные полуметрики $\delta(S_{\bar{e}})$ ($\bar{e} \in \bar{E}$) содержатся в F_G и линейно независимы. Докажем, что любая разрезная полуметрика $\delta(S)$, принадлежащая F_G , имеет вид $\delta(S_{\bar{e}})$ для некоторого $\bar{e} \in \bar{E}$. Тем самым мы докажем, что грань F_G конуса CUT_n является симплексом размерности $|\bar{E}| = \dim_I(G)$. Пусть S — такое подмножество V , что $\delta(S) \in F_G$. Тогда $\delta(S)$ удовлетворяет тем же равенствам треугольника, что и d_G . Из связности графа G следует существование ребра $e = (a, b)$ с концами $a \in S$ и $b \in V \setminus S$. Предположим, например, что $x_0 \in G(b, a)$, т. е., что $S_{\bar{e}} = G(a, b)$. Так как d_G удовлетворяет равенству треугольника $d_G(x_0, a) = d_G(x_0, b) + d_G(a, b)$, то $\delta(S)$ удовлетворяет равенству $\delta(S)(x_0, a) = \delta(S)(x_0, b) + \delta(S)(a, b)$, откуда $x_0 \in V \setminus S$. Покажем, что выполнено равенство $S = G(a, b)$. Если $x \in G(a, b)$, то $d_G(x, b) = d_G(x, a) + d_G(a, b)$, откуда $\delta(S)(x, b) = \delta(S)(x, a) + \delta(S)(a, b)$, и, следовательно, $x \in S$.

Точно так же, $G(b, a)$ содержится в $V \setminus S$, что и доказывает равенство $S = G(a, b)$. ■

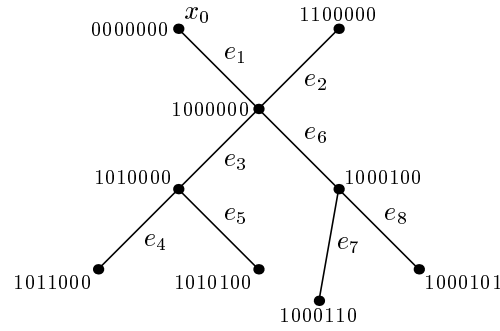


Рис. 19.1.3. Вложение дерева в гиперкуб

Пример 19.1.4. Случай деревьев. Рассмотрим дерево T с n вершинами и множеством ребер E . Тогда T изометрично вкладывается в $(n-1)$ -мерный гиперкуб, т. е. $\dim_I(T) = n-1$. Воспользовавшись доказательством теоремы 19.1.1 легко построить это вложение. А именно, отметим некоторую вершину x_0 в T и занумеруем каждую вершину x дерева T множеством $A(x)$, состоящим из ребер T , принадлежащих пути из x_0 в x . На рисунке 19.1.3 приведен пример дерева вместе с его вложением в гиперкуб. С другой стороны, метрика кратчайшего пути d_T дерева T допускает разложение $d_T = \sum_{e \in E} \delta(S_e)$, где для ребра $e \in E$, S_e есть связная компонента $T \setminus e$, не содержащая отмеченной точки x_0 .

Матрица расстояний для дерева обладает некоторыми замечательными свойствами. Пусть T — дерево с n вершинами, а D_T — его матрица расстояний. Тогда (см. Грэхем и Поллак [1971]) $\det(D_T) = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}$. (Чтобы убедиться в этом, обозначим вершины дерева T через $a_1, \dots, a_n$ так, чтобы вершина a_n была соединена ребром с a_{n-1} . Вычтем из n -го столбца матрицы D_T $(n-1)$ -й столбец и $(n-1)$ -ю строку из n -й. Повторяя эту операцию мы приведем D_T к симметричной $n \times n$ матрице, где все элементы равны нулю, за исключением элементов $(1, i)$ и $(i, 1)$, равных 1, и элементов (i, i) , равных -2 (при $i = 2, \dots, n$). Грэхем и Ловас [1978] доказали более общий результат, а именно, выразили коэффициенты характеристического многочлена матрицы D_T в терминах числа вхождений определенных лесов в T . ■

Замечание 19.1.5. Из теоремы 19.1.1 немедленно следует, что определить, является ли данный граф G вложимым в гиперкуб, можно за

полиномиальное время. Более того, минимальная размерность $m_h(G)$ гиперкуба, изометрично содержащего G , также вычислима за полиномиальное время, так как она совпадает с изометрической размерностью $\dim_I(G)$ графа G (см. предложение 19.1.2).

Пусть G — граф с n вершинами. Ауренхаммер и Хагауэр [1991] предъявили алгоритм, распознающий вложимость графа G в гиперкуб, требующий $O(n^2 \log n)$ времени и $O(n^2)$ памяти. Их алгоритм основан на данном в следствии 20.1.3 (iv) описании и состоит в проверке, является ли граф G двудольным, а отношение θ — транзитивным. Федер [1992] предложил другой алгоритм, требующий $O(mn)$ времени и $O(m)$ памяти. Он требует меньше памяти, чем предыдущий алгоритм, так как легко проверить, что $m \leq \frac{1}{2}n \log_2 n$ для вложимых в гиперкуб графов. Алгоритм Федера основан на результатах из главы 20.1 и состоит в проверке, является ли каждый сомножитель канонического метрического представления G изоморфным K_2 . ■

19.2. Дальнейшие описания

Начнем с двух описаний вложимых в гиперкуб графов, предложенных, соответственно, Ависом [1981] и Ротом и Уинклером [1986].

Теорема 19.2.1. *Пусть G — связный граф. G допускает вложение в гиперкуб тогда и только тогда, когда G — двудольный граф и d_G удовлетворяет следующему неравенству пятиугольника:*

$$(19.2.2) \quad d(i_1, i_2) + d(i_1, i_3) + d(i_2, i_3) + d(i_4, i_5) - \sum_{\substack{h=1,2,3 \\ k=4,5}} d(i_h, i_k) \leq 0$$

для всех вершин $i_1, \dots, i_5 \in V$.

Доказательство. Если граф G допускает вложение в гиперкуб, то его метрика d_G кратчайшего пути ℓ_1 -вложима и, следовательно, d_G удовлетворяет неравенству пятиугольника по теореме 6.3.1. Предположим теперь, что граф G — двудольный и не вложим в гиперкуб. Тогда по теореме 19.1.1 в графе G найдется такое ребро (a, b) , что множество $G(a, b)$ не выпукло. Значит найдутся точки $x, y \in G(a, b)$ и $z \in G(b, a)$, удовлетворяющие равенству $d_G(x, z) + d_G(z, y) = d_G(x, y)$. Запишем неравенство (19.2.2) для вершин $i_1 = x, i_2 = y, i_3 = b, i_4 = a$ и $i_5 = z$.

Несложное вычисление показывает, что левая часть неравенства (19.2.2) принимает значение 2, следовательно для d_G равенство пятиугольника нарушается. ■

	x	y	a	b	s
x	0	1	$n+1$	n	1
y	1	0	n	$n+1$	2
a	$n+1$	n	0	1	n
b	n	$n+1$	1	0	$n+1$
s	1	2	n	$n+1$	0

Рис. 19.2.3. Пространство расстояний $A(n)$ на пяти точках $\{x, y, a, b, s\}$.

	x	y	a	b	r	s
x	0	1	$m+1$	m	p	$p+1$
y	1	0	m	$m+1$	$p+1$	$p+2$
a	$m+1$	m	0	1	$n+1$	n
b	m	$m+1$	1	0	n	$n+1$
r	p	$p+1$	$n+1$	n	0	1
s	$p+1$	$p+2$	n	$n+1$	1	0

Рис. 19.2.4. Пространство расстояний $B(m, n, p)$ на шести точках $\{x, y, a, b, r, s\}$.

Теорема 19.2.5. Пусть G — связный двудольный граф. G допускает изометричное вложение в гиперкуб тогда и только тогда, когда пространство (V, d_G) не содержит в качестве изометричного подпространства ни одно из пространств $A(n)$ и $B(m, n, p)$, матрицы расстояний которых приведены на рисунках 19.2.3 и 19.2.4 соответственно.

Доказательство. Предположим, что G не допускает изометричного вложения в гиперкуб. Тогда по теореме 19.1.1 найдется такое ребро (a, b) , что множество $G(a, b)$ не замкнуто. Рассмотрим изометричные пути в G , соединяющие две вершины из $G(a, b)$ и пересекающие $G(b, a)$. Пусть P — минимальный (по длине) из таких путей. Запишем его в виде $P = (y, x, z_1, \dots, z_k, r, s)$, где $y, s \in G(a, b)$ и $x, r \in G(b, a)$. Положим $m = d_G(x, b)$, $n = d_G(r, b)$ и $p = d_G(x, r)$ (так что $p = k + 1$). Можно проверить, что расстояния между точками a, b, x, y, r, s

однозначно определяются параметрами m, n, p . А именно, если обе точки x и r совпадают, то $p = 0$, $m = n$ и пятиточечное подпространство $(\{x, y, a, b, s\}, d_G)$ пространства (V, d_G) совпадает с пространством $A(n)$, матрица расстояний которого приведена на рисунке 19.2.3. Если же точки x и r различны, то шеститочечное подпространство $(\{x, y, a, b, r, s\}, d_G)$ совпадает с пространством $B(m, n, p)$, матрица расстояний которого приведена на рисунке 19.2.4.

Обратно, если пространство $A(n)$ или $B(m, n, p)$ изометрично вложено в (V, d_G) , то граф G не может быть вложен в гиперкуб по теореме 19.1.1. Действительно, как $A(n)$, так и $B(m, n, p)$ нарушают неравенство пятиугольника; а именно, нарушается неравенство (19.2.2) при $\{i_1, i_2, i_3\} = \{b, y, s\}$ и $\{i_4, i_5\} = \{x, a\}$. ■

Напомним, что для конечного пространства расстояний (X, d) имеется следующая цепочка импликаций (см. предложение 4.3.8, теоремы 6.2.16 и 6.3.1):

Пространство (X, d) вложимо в гиперкуб
 $\implies (X, d)$ ℓ_1 -вложимо
 $\implies (X, d)$ гиперметрично
 $\implies (X, d)$ имеет отрицательный тип
 $\implies$ матрица расстояний пространства (X, d) имеет ровно одно положительное собственное значение

Рис. 19.2.6. Иерархия метрических свойств

Напомним также (см. лемму 6.1.14 и теорему 6.2.2) следующие эквивалентности:

(X, d) — пространство отрицательного типа
 $\iff$ пространство $(X, \sqrt{d})$ — ℓ_2 -вложимо
 $\iff$ матрица $(d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y))_{x, y \in X \setminus \{x_0\}}$, где x_0 — фиксированный элемент X , неотрицательно определена.

Рис. 19.2.7. Критерии ℓ_2 -вложимости

Рот и Уинклер [1986] показали, что для пространств расстояний двудольных графов иерархия рисунка 19.2.6 упрощается. (Еще до этого, Блэйк и Джилхрист [1973] заметили, что связные двудольные ℓ_1 -графы вложимы в гиперкуб.)

Теорема 19.2.8. Пусть G — связный двудольный граф. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) G вложим в гиперкуб.
- (ii) G — ℓ_1 -граф.
- (iii) G — гиперметричный граф.
- (iv) G имеет отрицательный тип.
- (v) Матрица расстояний графа G имеет ровно одно положительное собственное значение.

Доказательство. Достаточно доказать, что если G не может быть вложен в гиперкуб, то его матрица расстояний D_G имеет по меньшей мере два положительных собственных значения. Пусть граф G не вложим в гиперкуб. По теореме 19.2.5 пространство (V, d_G) содержит подпространство C , изометричное одному из запрещенных пространств $A(n)$ или $B(m, n, p)$. Другими словами, матрица D_C пространства C является главным минором матрицы D_G . Ясно, что хотя бы одно собственное значение матрицы D_C положительно, так как след ее равен нулю. Если мы докажем, что матрица D_C имеет по меньшей мере два положительных собственных значения, то из леммы 2.4.4 будет следовать, что и матрица D_G имеет не меньше двух положительных собственных значений (так как число положительных собственных значений D_G не меньше, чем число положительных собственных значений D_C).

Рассмотрим сначала случай, когда C имеет вид $A(n)$. Можно проверить, что определитель матрицы D_C равен $-8n(n+1)$. Значит матрица D_C невырождена и имеет по меньшей мере два положительных собственных значения (если бы только одно собственное значение матрицы D_C было положительным, то был бы положительным и ее определитель).

Предположим теперь, что C имеет вид $B(m, n, p)$. Можно проверить, что определитель матрицы D_C равен

$$4(4mnp + 2mp + 2np + 2mn - m^2 - n^2 - p^2),$$

что можно переписать в виде

$$16mnp + 4(n+p-m)(p+m-n) + 4(p+m-n)(m+n-p) + 4(m+n-p)(n+p-m).$$

Так как числа m, n, p являются расстояниями между парами вершин графа G , то из неравенства треугольника следует, что в предыдущем выражении все величины в скобках неотрицательны. Значит определитель матрицы D_C положителен. Следовательно матрица D_C имеет не меньше двух положительных собственных значений (в противном случае ее определитель был бы отрицателен). ■

Замечание 19.2.9. Для общих (не двудольных) графов все импликации иерархии метрических свойств рисунка 19.2.6 являются строгими. Приведем единообразные контрпримеры ко всем обратным импликациям, предложенные в работе Авис и Маехара [1994]. Во всех этих примерах за основу берется граф $K_n \setminus P_3$ (где P_3 — путь с 3 вершинами). Таким образом, это замечание является продолжением примера 14.4.9. Метрика $d(K_n \setminus P_3)$ использовалась в примере 14.4.9 для опровержения некоторых импликаций между свойствами гиперметричности, отрицательности типа и существования сферического представления. Тогда использовался подход, основанный на свойствах многогранников Делоне, а сейчас мы исследуем вопрос в терминах линейных неравенств.

- Метрики кратчайшего пути на графах $K_4 \setminus P_3$, $K_5 \setminus P_3$ и $K_6 \setminus P_3$ являются ℓ_1 -вложимыми (так как метрики $2d_G$ вложимы в гиперкуб), но не вложимы в гиперкуб (так как каждый из данных графов содержит три точки, попарные расстояния между которыми равны 1).
- Метрики кратчайшего пути на графах $K_7 \setminus P_3$ и $K_8 \setminus P_3$ гиперметричны, но не являются ℓ_1 -вложимыми. (Идея состоит в следующем. Неравенство

$$5x_{12} + 5x_{13} + 3x_{23} - 3 \sum_{j=4,5,6,7} x_{1,j} - 2 \sum_{j=4,5,6,7} (x_{2,j} + x_{3,j}) + \sum_{4 \leq i < j \leq 7} x_{i,j} \leq 0$$

выполнено для разрезного конуса CUT_7 (это CW-неравенство:

$$\text{CW}_7^1(3, 2, 2, -1, -1, -1, -1)^T x \leq 0,$$

задающее фасету конуса CUT_7 ; см. главу 29). Однако, если рассмотреть граф K_7 с вершинами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и путь P_3 в нем вида (2, 1, 3), то данное неравенство не выполнено для метрики кратчайшего пути на $K_7 \setminus P_3$. Значит, $K_7 \setminus P_3$ — не является ℓ_1 -графом.)

- Метрики кратчайшего пути на графах $K_9 \setminus P_3$ и $K_{10} \setminus P_3$ имеют отрицательный тип, но не гиперметричны. (Идея состоит в следующем. Метрика кратчайшего пути на графе $K_9 \setminus P_3$ нарушает неравенство

$$Q_9(3, 2, 2, -1, -1, -1, -1, -1, -1)^T x \leq 0,$$

если P_3 есть путь (2, 1, 3). Для того, чтобы убедиться в отрицательности типа метрики на графе $K_{10} \setminus P_3$, можно воспользоваться теоремой 6.2.16. А именно, достаточно проверить, что матрица $M = \begin{pmatrix} D & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, окаймляющая минор D , имеет ровно одно положительное собственное значение (через D обозначена матрица расстояний

графа $K_{10} \setminus P_3$). Непосредственно проверяется, что собственными значениями матрицы M являются числа $4 + \sqrt{41}$, 0 , $4 - \sqrt{41}$ и -1 (кратности 8).)

- Матрица расстояний графа $K_{11} \setminus P_3$ имеет ровно одно положительное собственное значение, но $K_{11} \setminus P_3$ не является графом отрицательного типа. Матрицы расстояний графов $K_n \setminus P_3$ имеют два положительных собственных значения при всех $n \geq 12$. (Идея состоит в следующем. $K_{11} \setminus P_3$ не является графом отрицательного типа, так как его метрика нарушает следующее неравенство отрицательного типа:

$$Q_{11} \left(\frac{24}{7}, \frac{16}{7}, \frac{16}{7}, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1 \right)^T x \leq 0,$$

если P_3 — путь вида $(2, 1, 3)$). Другой пример графа, матрица расстояний которого имеет ровно одно положительное собственное значение, но граф не отрицательного типа, приводится ниже в примере 19.2.11. ■

На рисунке 19.2.7 приведено два описания пространств расстояний отрицательного типа. Уинклер [1985] предложил еще одно описание графов отрицательного типа, приведенное ниже в теореме 19.2.10. Пусть G — граф. Рассмотрим ориентацию G' на G , когда для каждого ребра (a, b) выбрана ровно одна дуга¹⁾ — ориентированных ребер: из a в b или из b в a . Для двух дуг $e = (a, b)$ и $e' = (a', b')$ определим

$$\langle e, e' \rangle := \frac{1}{2} (d_G(a, b') - d_G(a, a') - d_G(b, b') + d_G(b, a')).$$

(Это определение совпадает с данным ниже в (21.2.13) с точностью до множителя 2). Заметим, что если метрика d_G — отрицательного типа, и $u_a \in \mathbb{R}^m$ ($a \in V$) — векторы, удовлетворяющие $d_G(a, b) = (\|u_a - u_b\|_2)^2$ при всех $a, b \in V$, то $\langle e, e' \rangle$ совпадает со скалярным произведением $(u_b - u_a)^T (u_{b'} - u_{a'})$.

Теорема 19.2.10. Пусть G — связный граф с $n + 1$ вершиной, а G' — произвольная ориентация G . Пусть T — порождающее дерево в G , которому соответствуют дуги $e_1, \dots, e_n$ из G' . Следующие утверждения эквивалентны:

- d_G имеет отрицательный тип.
- $n \times n$ матрица $(\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n}$ неотрицательно определена.

¹⁾ Дуга — ориентированное ребро. — Прим. перев.

Доказательство. Обозначим через $V = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ множество вершин G . По определению, d_G имеет отрицательный тип тогда и только тогда, когда

$$\sum_{0 \leq r \leq s \leq n} d_G(a_r, a_s) x_r x_s \leq 0 \quad \text{при всех } x \in U := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{0 \leq r \leq n} x_r = 0 \right\}.$$

Для каждой вершины $a_r \in V$, определим

$$A(a_r) := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_r \text{ — конец дуги } e_i\},$$

$$B(a_r) := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_r \text{ — начало дуги } e_i\}.$$

Для $y \in \mathbb{R}^n$ определим $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, полагая

$$x_r = \sum_{i \in A(v_r)} y_i - \sum_{i \in B(v_r)} y_i,$$

при $r = 0, 1, \dots, n$. Можно проверить, что $\sum_{0 \leq r \leq n} x_r = 0$, т. е. $x \in U$, а при $x = (0, \dots, 0)$ необходимо $y = (0, \dots, 0)$. Таким образом, мы установили взаимно-однозначное линейное соответствие между пространствами $\mathbb{R}^n$ и U . Проверим, что при этом соответствии

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle e_i, e_j \rangle y_i y_j = - \sum_{0 \leq r \leq s \leq n} d_G(a_r, a_s) x_r x_s$$

Действительно, $d_G(a_r, a_s)$ входит в $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle e_i, e_j \rangle y_i y_j$ с коэффициентом

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in A(v_r) \times B(v_s)} y_i y_j + \sum_{(i,j) \in B(v_r) \times A(v_s)} y_i y_j - \\ & - \sum_{(i,j) \in A(v_r) \times A(v_s)} y_i y_j - \sum_{(i,j) \in B(v_r) \times B(v_s)} y_i y_j, \end{aligned}$$

что равно $-x_r x_s$. Тем самым доказана эквивалентность (i) и (ii). $\blacksquare$

Пример 19.2.11. Рассмотрим граф $G_n = K_{n+1} \setminus K_{n-1}$ с множеством вершин $\{a_0, \dots, a_n\}$ и ребрами (a_0, a_1) , (a_0, a_i) и (a_1, a_i) при $i = 2, 3, \dots, n$. В этом случае метрика кратчайшего пути на графе G_n имеет отрицательный тип тогда и только тогда, когда $n \leq 5$. (Чтобы убедиться в этом, рассмотрим ориентированное порождающее дерево T с дугами $e_1 = (a_0, a_1), \dots, e_n = (a_0, a_n)$. У матрицы $(\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n}$ элементы на диагонали равны 1, элементы $(1, i)$ и $(i, 1)$ равны $\frac{1}{2}$ ($i = 2, \dots, n$), а все остальные элементы равны нулю. Определитель равен $\frac{5-n}{4}$.) Заметим, что при $n \geq 6$, граф G_n являет собой контрпример

к обращению последней импликации рисунка 19.2.6, так как у матрицы расстояний графа G_n есть ровно одно положительное собственное значение, но G_n не является графом отрицательного типа. (Действительно, собственными значениями матрицы расстояний графа G_n являются числа $2n - 1, -1, -2$ с кратностями $1, 1, n - 1$ соответственно.) ■

В заключение приведем еще одно выражение для изометрической размерности вложимого в гиперкуб графа в терминах числа отрицательных собственных значений его матрицы расстояний (по работе Грэхема и Уинклера [1985]).

Предложение 19.2.12. Пусть G — граф, а D_G — его матрица расстояний. Обозначим через $n_+(D_G), n_-(D_G)$ число положительных и отрицательных собственных значений матрицы D_G . Если граф G вложим в гиперкуб, то $\dim_I(G) = n_-(D_G)$ и $n_+(D_G) = 1$.

Доказательство. Пусть $\dim_I(G) = k$. Обозначим через σ изометричное вложение G в k -мерный гиперкуб $H(k, 2)$, а через $\sigma(a) = (a_1, \dots, a_k) \in \{0, 1\}^k$ — образ вершины $a \in V$ при этом вложении. При $h = 1, \dots, k$ положим

$$X_h := \{a \in V \mid a_h = 0\}, \quad Y_h := \{a \in V \mid a_h = 1\} = V \setminus X_h.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{a, b \in V} d_G(a, b) x_a x_b &= \sum_{a, b \in V} \left(\sum_{1 \leq h \leq k} |a_h - b_h| \right) x_a x_b = \\ &= \sum_{1 \leq h \leq k} \left(\sum_{a \in X_h} x_a \right) \left(\sum_{b \in Y_h} x_b \right) = \\ &= \frac{k}{4} \left(\sum_{a \in V} x_a \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{1 \leq h \leq k} \left(\sum_{a \in X_h} x_a - \sum_{b \in Y_h} x_b \right)^2, \end{aligned}$$

где последнее равенство получается с помощью тождества $xy = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2)$. Следовательно, квадратичная форма

$$\sum_{a, b \in V} d_G(a, b) x_a x_b$$

представляется в виде одного «положительного» квадрата и k «отрицательных». По закону инерции, это означает, что $n_+(D_G) \leq 1$ и $n_-(D_G) \leq k$. С другой стороны, $n_+(D_G) \geq 1$, так как след матрицы

D_G равен нулю. Значит $n_+(D_G) = 1$ и ранг матрицы D_G удовлетворяет условию $\text{rank}(D_G) = n_+(D_G) + n_-(D_G) \leq k+1$. Докажем, что $\text{rank}(D_G) = k+1$, откуда и будет следовать, что $n_-(D_G) = k$. Без потери общности можно считать, что данная вершина $a^{(0)}$ имеет номер $\sigma(a^{(0)}) := (0, \dots, 0)$ при вложении в гиперкуб. Утверждается, что найдется k таких вершин $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$, что их номера $\sigma(a^{(1)}), \dots, \sigma(a^{(k)})$ линейно независимы. Для этого достаточно доказать, что система $\{\sigma(a) \mid a \in V\} \subseteq \{0, 1\}^k$ имеет полную размерность k . Предположим, от противного, что, например, k -я координата выражается через остальные, т. е., что найдутся такие скаляры $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$, что $a_k = \sum_{1 \leq j \leq k-1} \lambda_j a_j$ при всех $a \in V$. Тогда для любых двух соединенных ребром вершин a и b выполнено $a_k = b_k$. Рассматривая кратчайший путь от $a^{(0)}$ до a , получаем, что для всех вершин $a \in V$ $a_k = 0$. Значит граф G можно вложить в $(k-1)$ -мерный гиперкуб, что противоречит условию $\dim_I(G) = k$. Докажем теперь, что минор

$$M := (d_G(a^{(i)}, a^{(j)}))_{i,j=0,\dots,k}$$

невырожден. Отсюда будет следовать, что $\text{rank}(D_G) \geq k+1$, и, следовательно, $\text{rank}(D_G) = k+1$. При $i = 0, 1, \dots, k$, положим

$$u^{(i)} = 2\sigma(a^{(i)}) - e,$$

где $e = (1, \dots, 1)^T$. Так как все компоненты векторов $u^{(i)}$ равны ± 1 , имеем

$$\begin{aligned} d_G(a^{(i)}, a^{(j)}) &= \sum_{1 \leq h \leq k} |a_h^{(i)} - a_h^{(j)}| = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq h \leq k} |u_h^{(i)} - u_h^{(j)}| = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq h \leq k} (1 - u_h^{(i)} u_h^{(j)}) = \frac{k}{2} - \frac{1}{2} (u^{(i)})^T u^{(j)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M = \frac{k}{2} J - \frac{1}{2} \text{Gram}(u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(k)}),$$

где J — матрица из одних единиц, а $\text{Gram}(u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ — матрица Грама векторов $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$. Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-2)^{-(k+1)} (\det(\text{Gram}(u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(k)})) - \\ &\quad - k \det(\text{Gram}(u^{(1)} - u^{(0)}, u^{(2)} - u^{(0)}, \dots, u^{(k)} - u^{(0)}))). \end{aligned}$$

Но $\det(\text{Gram}(u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(k)})) = 0$, так как векторы $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ линейно зависимы, а $\det(\text{Gram}(u^{(1)} - u^{(0)}, u^{(2)} - u^{(0)}, \dots, u^{(k)} - u^{(0)})) \neq 0$, так как векторы $u^{(1)} - u^{(0)}, u^{(2)} - u^{(0)}, \dots, u^{(k)} - u^{(0)}$ линейно независимы. Следовательно $\det(M) \neq 0$. ■

19.3. Дополнительные замечания

В этом разделе мы касаемся вопроса об ослаблении понятия изометричного вложения в гиперкуб. Во-первых, можно рассматривать изометричные вложения в сдавленные гиперкубы. Во-вторых, можно рассматривать вложения в гиперкуб просто как подграфа, без требования изометричности. Наконец, можно обобщить это понятие на гиперграфы.

Изометричные вложения в сдавленные гиперкубы. Как мы только что убедились, не все графы могут быть изометрично вложены в гиперкубы. Поэтому Грэхем и Поллак [1971] стали рассматривать изометричные вложения в сдавленные гиперкубы. Введем на множестве $B_* = \{0, 1, *\}$ расстояние d_* , полагая

$$d_*(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } \{x, y\} = \{0, 1\}; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

($x, y \in B_*$). Итак, точка «*» находится на нулевом расстоянии от остальных точек, ее еще называют «безразличной» точкой. Расстояние d_* можно продолжить на B_*^m , полагая

$$d_*((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) = \sum_{1 \leq i \leq m} d_*(x_i, y_i).$$

Пространство расстояний (B_*^m, d_*) называется *сдавленным m -мерным гиперкубом*. Обычный m -мерный гиперкуб является его подпространством. Можно считать, что каждая точка $(x_1, \dots, x_m) \in B_*^m$ представляет грань m -мерного гиперкуба; а именно, грань, состоящую из таких точек $y \in \{0, 1\}^m$, что $y_i = x_i$ при всех i , для которых $x_i \in \{0, 1\}$. Замечательное свойство сдавленных гиперкубов состоит в том, что любой связный граф может быть изометрично вложен в некоторый сдавленный гиперкуб. Действительно, пусть G — связный граф, а $\{1, \dots, n\}$ — его множество вершин. Положим

$$m := \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_G(i, j).$$

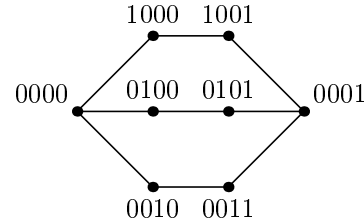
Выберем некоторые попарно непересекающиеся подмножества D_{ij} в множестве $\{1, \dots, m\}$ так, что $|D_{ij}| = d_G(i, j)$ ($1 \leq i < j \leq n$). Поставим в соответствие каждой вершине i набор $(i_1, \dots, i_m) \in B_*^m$ из m элементов, полагая

$$i_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k \in \bigcup_{h=i+1}^n D_{ih}; \\ 1 & \text{при } k \in \bigcup_{h=i}^{i-1} D_{ih}; \\ * & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $d_*((i_1, \dots, i_m), (j_1, \dots, j_m)) = |D_{ij}| = d_G(i, j)$. Тем самым доказано, что граф G может быть изометрично вложен в m -мерный сдавленный гиперкуб. Обозначим через $r(G)$ наименьшую из размерностей сдавленных гиперкубов, в которые можно вложить данный граф G . Уинклер [1983] показал, что $r(G) \leq n - 1$ для каждого графа с n вершинами. С другой стороны, $r(G) \geq \max(n_+(D_G), n_-(D_G))$, где через $n_+(D_G), n_-(D_G)$ обозначено число положительных и отрицательных собственных значений матрицы расстояний D_G графа G (Грэхем и Поллак [1972]). Например, $r(K_n) = n - 1$, так как $n-1(D_{K_n}) = n - 1$. Изометрично вложить K_3 в сдавленный квадрат можно следующим образом:

$$1 \rightarrow (0, 0), \quad 2 \rightarrow (0, 1), \quad 3 \rightarrow (1, *).$$

Неизометричные вложения графов в гиперкубы. Другим, ослабленным, вариантом понятия изометрично вложимого в гиперкуб графа является понятие кубичного графа. Граф G называется *кубичным*, если он является подграфом некоторого гиперкуба $H(m, 2)$, т. е., если существует инъективное отображение множества вершин графа G во множество вершин гиперкуба $H(m, 2)$, которое переводит ребра G в ребра $H(m, 2)$. Ясно, что все кубичные графы — двудольные, и что любой изометрично вложимый в гиперкуб граф — кубичный. Ниже приведен пример кубичного графа, не допускающего изометричного вложения в гиперкуб.



Структура минимальных некубичных графов исследовалась в работе Гери и Грэхема [1975], где приведены некоторые конструкции таких графов. Например $K_{2,3}$ и циклы нечетной длины являются минимальными некубичными графами. Напомним, что по замечанию 19.1.5 можно за полиномиальное время распознать, вложим ли данный граф G изометрично в гиперкуб и даже вычислить $m_h(G)$ — наименьшую из размерностей гиперкубов, в которые можно изометрично вложить граф G . С другой стороны, было доказано, что определение, является ли данный граф G кубичным, является NP -полной проблемой (Афрати,

Пападимитриу и Папагеоргиу [1985, 1989]; Крумме, Венкатараман и Цыбенко [1986]). Более того, для кубического графа G вычисление наименьшей из размерностей гиперкубов, содержащих G в качестве подграфа, также является сложной проблемой. Например, каждое дерево — кубичный граф (в действительности дерево из n вершин изометрично вкладывается в $(n-1)$ -мерный гиперкуб). Однако для данного дерева T и фиксированного целого m проблема определения, является ли T подграфом m -мерного гиперкуба, является NP -полной (Вагнер и Корнейл [1990]). Долго изучалась и задача о нахождении наименьшей из размерностей гиперкубов, содержащих данное дерево (см. Хавел и Либл [1972, 1973]). Еще одна проблема из той же области, об определении для данного графа G и фиксированных целых m, k , является ли G подграфом $(K_m)^k$, также NP -полна (Вагнер и Корнейл [1993]).

Изометричные вложения в кубо-гиперграфы. Характеризация графов, которые можно изометрично вложить в гиперкуб, была обобщена в контексте равномерных гиперграфов Бурошем и Чеккерини [1995]. t -униформный гиперграф $H = (V, \mathcal{E})$ состоит из множества вершин V и множества (гипер)ребер $\mathcal{E}$, каждое из которых имеет одинаковое число элементов $t \geq 2$. Полуметрику d_H можно определить следующим образом. Построим такой граф G_H с множеством вершин V , что две вершины $x, y \in V$ будут смежными, если они содержатся в общем (гипер)ребре H . Тогда в качестве d_H можно взять метрику кратчайшего пути графа G_H . (Гипер)граф $H = (V, \mathcal{E})$ называется изометрически вложимым в (гипер)граф $H' = (V', \mathcal{E}')$, если граф G_H можно изометрически вложить в $G_{H'}$. В качестве гиперграф-аналога гиперкуба Бураш и Чеккерини [1995] рассматривают следующий t -униформный гиперграф $Q(n, t)$: его множеством вершин является множество $\{0, 1, \dots, t-1\}^n$, типичное ребро состоит из всех векторов $x \in \{0, 1, \dots, t-1\}^n$, координаты которых фиксированы на $(n-1)$ -й позиции, со свободной последней координатой. Следовательно, два вектора x, y принадлежат общему (гипер)ребру гиперграфа $Q(n, t)$ тогда и только тогда, когда их расстояние Хэмминга равно 1. Другими словами, структурным графом $G_{Q(n, t)}$, соответствующим гиперграфу $Q(n, t)$ является граф Хэмминга $H(n, t)$. Бурош и Чеккерини описали все t -однородные гиперграфы, вложимые в кубо-гиперграфы $Q(n, t)$; их описание является непосредственным обобщением соответствующих результатов для графов, а именно, результата Дьоковича (теорема 19.1.1) и Грэхэма и Уинклера (следствие 20.1.3 (iv)).

Изометричные вложения графов в прямые произведения

В предыдущей главе мы описали графы, допускающие изометричное вложение в гиперкуб. Гиперкуб является простейшим примером прямого произведения графов; действительно, m -мерный гиперкуб есть ни что иное, как $(K_2)^m$. Теперь мы рассмотрим изометричные вложения графов в произвольные прямые произведения. Оказывается, что любой граф имеет каноническое вложение в прямое произведение «неприводимых» сомножителей, т. е. таких, которые сами не раскладываются в прямое произведение. Этот результат применяется нами дважды: при нахождении разложения графа на простые множители и при доказательстве существования единственного разложения метрики кратчайшего пути на двудольных графах в виде неотрицательной комбинации простых полуметрик.

20.1. Каноническое метрическое представление графа

Рассмотрим графы $G, H_1, \dots, H_k$. Изометричное вложение графа G в прямое произведение $\prod_{1 \leq i \leq k} H_i$ называется *неприводимым*, если каждый сомножитель H_h есть связный граф, имеющий не менее двух вершин, а каждая вершина графа H_h является координатой образа какой-то вершины графа G . Ясно, что любое изометричное вложение в прямое произведение можно сделать неприводимым, удалив одноточечные сомножители и недействовавшие вершины в каждом из оставшихся сомножителей. Неприводимое изометричное вложение графа G в прямое произведение называется также *метрическим представлением* графа G . Два изометричных вложения графа G в прямое произведение называются *эквивалентными*, если существуют: биекция сомножителей

одного произведения на сомножители другого и изоморфизмы между соответствующими сомножителями, так что естественно возникающая диаграмма коммутативна. Граф G называется *неприводимым*, если все его метрические представления эквивалентны тривиальному вложению G в себя.

Примерами неприводимых графов служат: полный граф K_n ($n \geq 2$), нечетный цикл C_{2n+1} ($n \geq 1$), граф полукуба $\frac{1}{2}H(n, 2)$ ($n \geq 2$), граф $K_{n \times 2}$ ($n \geq 3$), граф Петерсена P_{10} , граф Госсета G_{56} , граф Шлефли G_{27} , и т. д. В действительности, как замечено в работе Грэхема и Уинклера [1985], вероятность того, что произвольный (с реберной вероятностью $\frac{1}{2}$) граф с n вершинами неприводим, стремится к 1 при $n \mapsto \infty$.

В следующей теореме приведен главный результат этого раздела, доказанный в работе Грэхем и Уинклер [1985] (см. также Уинклер [1987b] и Грэхем [1988]).

Теорема 20.1.1. *Для каждого связного графа G имеется единственное метрическое представление*

$$G \hookrightarrow \prod_{1 \leq h \leq k} G_h$$

с неприводимыми сомножителями G_h . Такое представление называется каноническим. Более того, $k = \dim_I(G)$, и если

$$G \hookrightarrow \prod_{1 \leq i \leq m} H_i$$

— другое метрическое представление графа G , то существует такое разбиение $(S_1, \dots, S_m)$ множества $\{1, \dots, k\}$ и такие метрические представления

$$H_i \hookrightarrow \prod_{h \in S_i} G_h$$

($i = 1, \dots, m$), что соответствующая диаграмма коммутативна.

Теорема 20.1.1 играет существенную роль в метрической теории графов и имеет многочисленные приложения; мы приводим некоторые из них, в частности, в разделах 20.2, 20.3 и главе 21. Главным инструментом для построения канонического метрического представления графа G служит отношение Дьоковича, введенное ранее в (18.0.2). В действительности, сомножители канонического метрического представления соответствуют классам эквивалентности транзитивного замыкания

θ^* отношения θ . Приведем несколько полезных правил вычисления этих классов:

- Любые два ребра изометричного цикла нечетной длины находятся в отношении θ .
- Пусть $C = (a_1, \dots, a_{2m})$ — изометричный цикл четной длины в G . Назовем два ребра $e_i := (a_i, a_{i+1})$ и $e_{m+i} := (a_{m+i}, a_{m+i+1})$ (где индексы рассматриваются по модулю m) *противоположными* в C , если $d_G(a_i, a_{m+i}) = d_G(a_{i+1}, a_{m+i+1}) = m$. Ясно, что противоположные в C ребра находятся в отношении θ . Ломоносов и Шебё [1993] заметили, что если G — двудольный граф, то два его ребра находятся в отношении θ тогда и только тогда, когда они противоположны в некотором четном цикле G .

Следующая лемма является основной в доказательстве теоремы 20.1.1.

Лемма 20.1.2. *Обозначим через $E_1, \dots, E_k$ классы эквивалентности транзитивного замыкания θ^* отношения θ , определенного соотношением (18.0.2). Для двух данных вершин a и b графа G обозначим через P кратчайший путь из a в b , а через Q — произвольный путь, соединяющий a и b в G . Тогда при всех $h = 1, \dots, k$ выполнено неравенство*

$$|E(P) \cap E_h| \leq |E(Q) \cap E_h|.$$

Доказательство. Пусть $P = (x_0 = a, x_1, \dots, x_p = b)$. Для каждого индекса $h \in \{1, \dots, k\}$ и каждой вершины $x \in G$ определим

$$f_h(x) := \sum_{i \in \{1, \dots, p\} \mid (x_{i-1}, x_i) \in E_h} (d_G(x, x_i) - d_G(x, x_{i-1})).$$

Тогда $f_h(a) = |E(P) \cap E_h|$ и $f_h(b) = -|E(P) \cap E_h|$. Рассмотрим ребро (x, y) графа G . Утверждается, что

$$f_h(x) = f_h(y) \quad \text{при } (x, y) \notin E_h.$$

Действительно,

$$f_h(x) - f_h(y) = \sum_{i \mid (x_{i-1}, x_i) \in E_h} (d_G(x, x_i) - d_G(y, x_i)) - (d_G(x, x_{i-1}) - d_G(y, x_{i-1})),$$

что равно нулю, так как ребро (x, y) не находится в отношении θ ни с одним ребром из E_h . С другой стороны,

$$|f_h(x) - f_h(y)| \leq 2 \quad \text{при } (x, y) \in E_h.$$

Действительно, по доказанному выше

$$\begin{aligned} |f_h(x) - f_h(y)| &= \left| \sum_{1 \leq j \leq k} (f_j(x) - f_j(y)) \right| = \\ &= |(d_G(x, b) - d_G(x, a)) - (d_G(y, b) - d_G(y, a))| \leq \\ &\leq |d_G(x, b) - d_G(x, a)| + |d_G(y, b) - d_G(y, a)| \leq 2. \end{aligned}$$

Так как $f_h(a) = |E(P) \cap E_h|$ и $f_h(b) = -|E(P) \cap E_h|$, то при движении вдоль пути Q функция $f_h(\cdot)$ изменяет свое абсолютное значение на $2|E(P) \cap E_h|$. Но на ребрах из $E \setminus E_h$ функция $f_h(\cdot)$ остается постоянной, а на ребрах из E_h увеличивается не более, чем на 2. Таким образом, путь Q должен содержать по меньшей мере $|E(P) \cap E_h|$ ребер из E_h . ■

Доказательство теоремы 20.1.1. Обозначим, как и лемме 20.1.2, через $E_1, \dots, E_k$ классы эквивалентности транзитивного замыкания θ^* отношения θ . Для каждого $h = 1, \dots, k$ обозначим через G_h граф, полученный из G стягиванием ребер из $E \setminus E_h$. Другими словами, для построения графа G_h нужно отождествить между собой те вершины графа G , которые можно соединить путем, не содержащих ребер из E_h . Тем самым определено сюръективное отображение $\sigma(h)$ из $V(G)$ в $V(G_h)$ и отображение

$$\sigma: V(G) \mapsto \prod_{1 \leq h \leq k} V(G_h),$$

где полагаем $\sigma(v) := (\sigma_1(v), \dots, \sigma_k(v))$ для всех вершин v графа G . Докажем, что отображение σ дает искомое метрическое представление. Для этого нужно проверить, что σ — неприводимое метрическое вложение, и что все сомножители G_h неприводимы. Рассмотрим две вершины a и b графа G и кратчайший в G путь P из a в b . Докажем, что

$$d_G(a, b) = \sum_{1 \leq h \leq k} d_{G_h}(\sigma_h(a), \sigma_h(b)).$$

Действительно, для всех h расстояние $d_{G_h}(\sigma_h(a), \sigma_h(b))$ является минимумом из всех значений $|E(Q) \cap E_h|$, принимаемых на путях Q , соединяющих a и b . Следовательно, по лемме 20.1.2, $d_{G_h}(\sigma_h(a), \sigma_h(b)) = |E(P) \cap E_h|$. Значит

$$\sum_{1 \leq h \leq k} d_{G_h}(\sigma_h(a), \sigma_h(b)) = \sum_{1 \leq h \leq k} |E(P) \cap E_h| = |E(P)| = d_G(a, b).$$

Тем самым доказано, что σ является изометричным вложением G в $\prod_{h=1}^k G_h$. Более того, воспользовавшись опять леммой 20.1.2, получаем,

что концы ребер из E_h не отождествляются в графе G_h . Следовательно, в каждом сомножителе G_h не менее двух вершин. Таким образом, отображение σ неприводимо, так как все отображения σ_h сюръективны. Рассмотрим теперь любое другое метрическое представление

$$G \hookrightarrow \prod_{1 \leq j \leq m} H_j$$

графа G и обозначим через $(x_1, \dots, x_m)$ образ вершины x в G . Если $e = (x, y)$ — ребро графа G , соответствующее ребру в j -м сомножителе H_j , т. е. $(x_j, y_j) \in E(H_j)$ и $x_i = y_i$ при всех $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$, то каждое ребро f , находящееся в отношении θ с ребром e , само является ребром в H_j . Значит каждый сомножитель H_j «содержит» в точности ребра $\bigcup_{i \in J} E_i$ для некоторого непустого множества индексов J . В частности, верно неравенство $m \leq k$. Отсюда следует, что каждый сомножитель G_h неприводим (иначе мы получили бы метрическое представление графа G более, чем с k сомножителями). Таким образом, $G \hookrightarrow G_1 \times \dots \times G_k$ есть каноническое метрическое представление G , что и завершает доказательство. $\blacksquare$

Следствие 20.1.3. Пусть G — связный граф. Тогда выполнены следующие утверждения:

- (i) G неприводим тогда и только тогда, когда $\dim_I(G) = 1$.
- (ii) Если в графе G ровно n вершин, то $\dim_I(G) \leq n - 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда G — дерево.
- (iii) G изометрично вкладывается в $(K_3)^m$ при некотором $m \geq 1$ тогда и только тогда, когда отношение θ транзитивно.
- (iv) G изометрично вкладывается в $(K_2)^m$ при некотором $m \geq 1$ тогда и только тогда, когда граф G — двудольный и отношение θ транзитивно.

Доказательство. (i) немедленно следует из теоремы 20.1.1.

(ii) Пусть $k := \dim_I(G)$, а T — порождающее дерево в G . Утверждается, что в T есть хотя бы одно ребро из класса эквивалентности E_h . Действительно, если e — ребро из $E \setminus E(T)$, принадлежащее E_h , то по лемме 20.1.2 T должно содержать по крайней мере одно ребро из E_h . Следовательно, $n - 1 = |E(T)| \geq k$. Если есть два ребра $e, f \in E$, находящиеся в отношении θ , то примем за T порождающее дерево, содержащее и e и f . Тогда $k \leq n - 2$. Следовательно, равенство $k = n - 1$ выполнено тогда и только тогда, когда граф G является деревом.

(iii) Заметим, что G изометрично вкладывается в $(K_3)^m$ тогда и только тогда, когда каждый сомножитель G_h канонического

представления G есть либо K_2 , либо K_3 (см. замечание 20.1.10). С другой стороны, G_h совпадает с K_2 или K_3 тогда и только тогда, когда E_h состоит из всех тех ребер, которые рассекаются разбиением $G(a, b) \cup G(b, a) \cup G_=(a, b)$ множества V (где $(a, b) \in E_h$), а в этом случае отношение θ транзитивно.

Утверждение (iv) следует из (iii), так как в случае двудольного графа $G_=(a, b) = \emptyset$ для любого ребра (a, b) . ■

Легко убедиться, что для двудольного графа G отношение θ транзитивно тогда и только тогда, когда $G(a, b)$ выпукло для любого ребра (a, b) . Таким образом, из утверждения (iv) следствия 20.1.3 вытекает описание вложимых в гиперкуб графов, данное в теореме 19.1.1. В частности, если вложимый в гиперкуб граф G имеет изометрическую размерность $\dim_I(G) = k$, то вложение $G \hookrightarrow (K_2)^k$ и есть каноническое метрическое представление графа G . Ломоносов и Шебё [1993] приводят следующую дополнительную информацию.

Предложение 20.1.4. *Если G — двудольный граф, то все сомножители $G_1, \dots, G_k$ канонического метрического представления — двудольные графы.*

Доказательство. Предположим, от противного, что некоторый сомножитель G_h канонического метрического представления не является двудольным графом. Тогда в графе G найдется такой цикл C , что число $|E(C) \cap E_h|$ — нечетно. Рассмотрим такой цикл C с минимальной длиной. Так как граф G — двудольный, то цикл C имеет четную длину, скажем, $C = (a_1, \dots, a_{2m})$. Рассмотрим пары (a_i, a_{m+i}) (где индексы рассматриваются по модулю m) диаметрально противоположных вершин цикла C . Если $d_G(a_i, a_{m+i}) = d_G(a_{i+1}, a_{m+i+1}) = m$, то $d_G(a_{m+i}, a_{i+1}) - d_G(a_{m+i}, a_i) = -1$ и $d_G(a_{m+i+1}, a_{i+1}) - d_G(a_{m+i+1}, a_i) = 1$, откуда следует, что ребра (a_i, a_{i+1}) и (a_{m+i}, a_{m+i+1}) находятся в отношении θ . Значит найдется пара (a_i, a_{m+i}) , для которой $d_G(a_i, a_{m+i}) < m$ (в противном случае любые две вершины C находятся в отношении θ , откуда следует, что число $|E(C) \cap E_h|$ четно). Пусть P — кратчайший путь из a_i в a_{m+i} в G . Предположим, что только концы P принадлежат C . Концы пути P разбивают цикл C на два пути, которые вместе с P образуют два цикла C_1 и C_2 . Так как C_1 и C_2 имеют меньшую, чем C длину, то оба числа $|E(C_1) \cap E_h|$ и $|E(C_2) \cap E_h|$ — четные. Следовательно и число $|E(C) \cap E_h|$ четно, что приводит к противоречию. Точно также рассматривается случай, когда путь P пересекает цикл C еще в некоторых (отличных от двух концов) точках. ■

Замечание 20.1.5. Пусть G — граф с n вершинами и m ребрами. Его каноническое метрическое представление $G \hookrightarrow G_1 \times \dots \times G_k$ может быть найдено за полиномиальное время; точнее за время $O(mn)$ с использованием $O(m)$ памяти. Действительно, получить разложение можно следующим образом:

- (i) Вычисляем отношение θ и находим классы эквивалентности $E_1, \dots, E_k$ его транзитивного замыкания θ^* .
- (ii) Для каждого $h = 1, \dots, k$ строим граф G_h из графа G , стягивая ребра из $E \setminus E_h$.

Второй шаг легко осуществить за время $O(mn)$ с использованием $O(m)$ памяти. (Действительно, для данного класса эквивалентности E_h граф G_h можно построить следующим образом. Удалим ребра E_h из графа G и найдем связанные компоненты получившегося графа. Это в точности вершины графа G_h . Две вершины графа G_h соединяются ребром в G_h , если две соответствующие компоненты соединены ребром. Наконец, из утверждения (ii) следствия 20.1.3 известно, что число классов эквивалентности не превосходит $n - 1$.) Очевидно, что первый шаг можно осуществить за время $O(m^2)$. Федер [1992] показал, как проделать это за время $O(mn)$. Для этого он рассмотрел другое отношение θ_1 , содержащееся в θ и такое, что транзитивные замыкания θ и θ_1 совпадают, т. е. $\theta^* = \theta_1^*$. Точнее, для данного порождающего дерева T графа G положим

$$e \theta_1 e' \iff e \theta e' \quad \text{и} \quad T \cap \{e, e'\} \neq \emptyset.$$

Отношение θ_1 вычисляется за время $O(mn)$, так как для этого достаточно сравнить каждое ребро из T с ребрами графа G .

То, что транзитивные замыкания θ и θ_1 совпадают, следует из леммы 20.1.6 ниже, откуда следует, что лемма 20.1.2 остается верной для отношения θ_1 . Действительно, предположим, что есть k_1 класс эквивалентности $F_1, \dots, F_{k_1}$ по отношению θ_1^* . Тогда $k \leq k_1$, так как каждый класс отношения θ_1^* есть объединение классов отношения θ^* . С другой стороны, при доказательстве теоремы 20.1.1 мы убедились, что $G \hookrightarrow \prod_{h=1}^{k_1} H_h$ есть метрическое представление графа G , где H_h получено из G стягиванием ребер из $E \setminus E_h$. Это доказывает, что $k_1 \leq k$. Значит $k = k_1$, т. е. транзитивные замыкания θ и θ_1 совпадают. ■

Следующая лемма была доказана Федером [1992].

Лемма 20.1.6. *Обозначим через $F_1, \dots, F_{K_1}$ классы эквивалентности транзитивного замыкания θ_1^* отношения θ_1 . Для двух данных вершин a и b графа G обозначим через P кратчайший путь из a в b , а через Q — произвольный путь, соединяющий a и b в G . Тогда при всех $h = 1, \dots, k_1$ выполнено неравенство*

$$|E(P) \cap F_h| \leq |E(Q) \cap F_h|.$$

Доказательство. Обозначим через $P_T := (a := z_0, z_1, \dots, z_t = b)$ путь из a в b в дереве T , и положим $Q := (y_0 := a, y_1, \dots, y_q = b)$. При $i \in \{1, \dots, q\}$ и $j \in \{1, \dots, t\}$, положим

$$\mu_{ij} := d_G(z_{j-1}, y_i) - d_G(z_{j-1}, y_{i-1}) - d_G(z_j, y_i) + d_G(z_j, y_{i-1}).$$

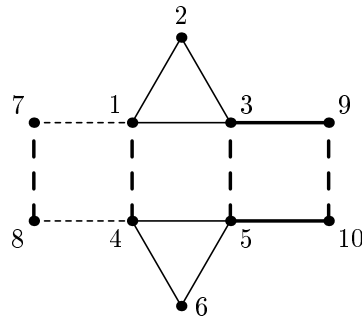
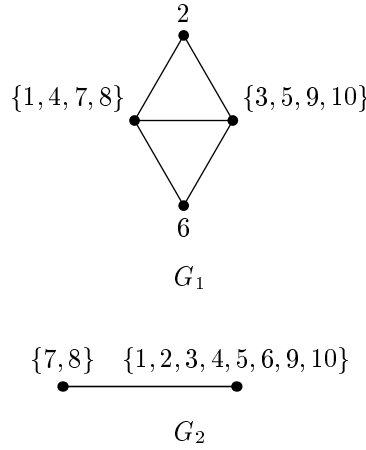
Заметим, что $\mu_{ij} = 0$, если ребра (z_{j-1}, z_j) и (y_{i-1}, y_i) не находятся в отношении θ . Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{i|(y_{i-1}, y_i) \in E(Q) \cap F_h} d_G(a, y_i) - d_G(a, y_{i-1}) - d_G(b, y_i) + d_G(b, y_{i-1}) = \\ &= \sum_{j|(z_{j-1}, z_j) \in E(P_T)} \sum_{i|(y_{i-1}, y_i) \in E(Q) \cap F_h} \mu_{ij} = \\ &= \sum_{j|(z_{j-1}, z_j) \in E(P_T) \cap F_h} \sum_{i|(y_{i-1}, y_i) \in E(Q) \cap F_h} \mu_{ij} = \\ &= \sum_{j|(z_{j-1}, z_j) \in E(P_T) \cap F_h} \sum_{i|(y_{i-1}, y_i) \in E(Q)} \mu_{ij} = \\ &= \sum_{j|(z_{j-1}, z_j) \in E(P_T) \cap F_h} d_G(z_{j-1}, b) - d_G(z_{j-1}, a) - d_G(z_j, b) + d_G(z_j, a). \end{aligned}$$

Полагая $P := (x_0 := a, x_1, \dots, x_p := b)$, получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i|(x_{i-1}, x_i) \in E(P) \cap F_h} d_G(a, x_i) - d_G(a, x_{i-1}) - d_G(b, x_i) + d_G(b, x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i|(y_{i-1}, y_i) \in E(Q) \cap F_h} d_G(a, y_i) - d_G(a, y_{i-1}) - d_G(b, y_i) + d_G(b, y_{i-1}). \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана, так как левая часть равенства равна $2|E(P) \cap F_h|$, а правая часть равна $2|E(Q) \cap F_h|$. $\blacksquare$

Рис. 20.1.7. Граф G Рис. 20.1.8. Сомножители канонического метрического представления G

Пример 20.1.9. Рассмотрим граф G , изображенный на рисунке 20.1.7. Есть следующие четыре класса эквивалентности по отношению θ^* :

$$E_1 = \{12, 13, 23, 45, 46, 56\}, \quad E_2 = \{17, 48\},$$

$$E_3 = \{39, 510\}, \quad E_4 = \{14, 35, 78, 910\},$$

где пара ij означает ребро (i, j) . Ребра классов E_1, E_2, E_3, E_4 обозначены простыми, пунктирными, жирными и жирными пунктирными линиями соответственно. Таким образом, отображение $G \hookrightarrow G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4$ есть каноническое метрическое представление графа G , где G_1, G_2, G_3, G_4 — графы, изображенные на рисунке 20.1.8. (Множество, которым помечена данная вершина сомножителя G_h , со-

стоит из номеров тех вершин графа G , которые были отождествлены при построении G_h .) ■

Замечание 20.1.10. Изометричные вложения в графы Хэмминга.

Напомним, что граф может быть изометрично вложен в граф Хэмминга (т. е. в прямое произведение полных графов), если можно так занумеровать его вершины последовательностями неотрицательных целых чисел, что длина кратчайшего пути между двумя вершинами будет совпадать с расстоянием Хэмминга между номерами этих вершин. Из теоремы 20.1.1 следует, что граф G может быть изометрично вложен в граф Хэмминга тогда и только тогда, когда каждый сомножитель G_h канонического метрического представления графа G является полным графом. (Действительно, пусть

$$\alpha: G \hookrightarrow \prod_{1 \leq i \leq m} K_{q_i}$$

— изометричное вложение графа G в граф Хэмминга. Можно считать отображение α неприводимо, так как удаление вершины из полного графа приводит опять к полному графу. В силу того, что полные графы неприводимы, заключаем, что α — каноническое метрическое представление графа G .) Следовательно, вложение в граф Хэмминга единственно (Уинклер [1984]). Более того, распознать, вложим ли данный граф G изометрично в граф Хэмминга, можно за полиномиальное время. Для этого достаточно найти каноническое метрическое представление графа G и проверить, все ли его сомножители являются полными графами. Это можно проделать за время $O(mn)$, используя $O(m)$ памяти (с помощью алгоритма Федера из замечания 20.1.5). Ранее Уилкейт [1990] предложил алгоритм, затрачивающий $O(n^3)$ времени, который дополнительно предоставляет структурное описание изометричных подграфов графов Хэмминга.

Например, рассмотрим граф H (из работы Уилкейт [1990]), изображенный на рисунке 20.1.11. Есть следующие три класса эквивалентности по отношению θ^* :

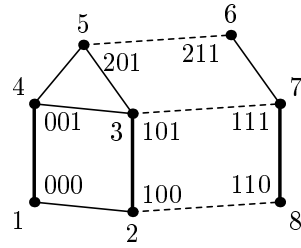
$$E_1 = \{12, 34, 35, 45\}, \\ E_2 = \{28, 37, 56\} \quad \text{и} \quad E_3 = \{14, 23, 78\}.$$

Таким образом, отображение $H \hookrightarrow K_3 \times K_2 \times K_2$ есть каноническое метрическое представление графа H . На рисунке 20.1.11 также указаны последовательности из $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}^2$, задающие правильную нумерацию вершин графа H . Или, что то же самое, можно разложить метрику

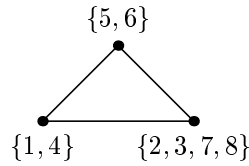
кратчайшего пути на H в следующую целочисленную сумму мульти-разрезных полуметрик:

$$d_H = \delta(\{1, 4\}, \{2, 3, 7, 8\}, \{5, 6\}) + \delta(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8\}) + \\ + \delta(\{1, 2, 8\}, \{3, 4, 5, 6, 7\}).$$

(см. предложение 4.2.9). ■



H



множители H

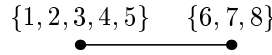


Рис. 20.1.11. Вложение графа H в граф Хэмминга

20.2. Разложение графа на простые множители

Рассмотрим связный граф G . *Разложением* G называется метрическое представление, являющееся изоморфизмом. Граф G называется *простым*, если он не разлагается в прямое произведение двух других графов (имеющих не менее двух вершин). Сабидусси [1960] доказал, что для каждого графа существует единственное разложение на простые множители. Для несвязных графов единственность уже не имеет места (см. Зарецкий [1965]). *Задача о разложении графа*

формулируется следующим образом:

Для данного графа G определить, является ли G простым.

Если граф G — составной, найти его разложение на простые множители.

Эта задача решается за полиномиальное (по количеству вершин) время (Файгенбаум, Хершбергер и Шеффер [1985], Уинклер [1987a]). Мы ограничиваемся случаем связных графов, так как задача о разложении для несвязных графов является заведомо не менее сложной, чем проблема изоморфизма графов. (Действительно, определить, изоморфны ли графы G и H , можно проверив наличие множителя из двух изолированных вершин в разложении дизъюнктного объединения G и H .) Алгоритм предложенный Файгенбаум, Хершбергер и Шеффер [1985] основан на исходном доказательстве Сабидусси и довольно сложен; он требует $O(n^{4,5})$ времени (где n — число вершин). Уинклер [1987a] предложил алгоритм, основанный на каноническом метрическом представлении графа, описанном в разделе 20.1; такой алгоритм требует $O(n^4)$ времени. Дадим краткое описание основных шагов построения данного алгоритма.

Пусть G — связный граф, чье разложение на простые множители требуется найти. Обозначим через

$$\sigma: V(G) \mapsto \prod_{1 \leq h \leq k} V(G_h)$$

каноническое метрическое представление G и положим

$$\sigma(a) = (\sigma_1(a), \dots, \sigma_k(a))$$

для каждой вершины $a \in V$. Пусть $S := \{1, \dots, k\}$. Для подмножества T множества S обозначим через σ_T следующее отображение из V в $\prod_{h \in T} V(G_h)$:

$$\sigma_T(a) = (\sigma_h(a) \mid h \in T)$$

(при $a \in V$). Разбиение $(S_1, \dots, S_m)$ множества S называется «хорошим», если

$$\sigma(V) = \prod_{1 \leq i \leq m} \sigma_{S_i}(V).$$

Если это выполнено, то формула

$$G = \prod_{1 \leq i \leq m} \sigma_{S_i}(G)$$

задает разложение графа G на простые множители. В частности, разложение G на простые множители соответствует хорошему разбиению

множества S . Подмножество T множества S называется *полным*, если

$$\sigma_T(V) = \prod_{h \in T} V(G_h).$$

Определить полноту подмножества $T \subseteq S$ можно за полиномиальное время. Если множество S само является полным, то $G = G_1 \times \dots \times G_k$ есть разложение графа G на простые множители. В противном случае S не полно. Найти минимальное неполное подмножество T в S можно за полиномиальное время. (Действительно, проверяем, все ли $(k-1)$ -элементные подмножества S полные. Если «да», то S — минимальное неполное подмножество. Иначе выбираем неполное $(k-1)$ -элементное подмножество T . Проверяем, все ли $(k-2)$ -элементные подмножества T полные, и т. д.) Основное утверждение состоит в том, что если T — минимальное неполное подмножество, а $(S_1, \dots, S_m)$ — хорошее разбиение множества S , то $T \subseteq S_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, m\}$. (Иначе множества $T \cap S_1, \dots, T \cap S_m$ являются полными, откуда следует, что само множество T — полное.) Таким образом, $\sigma_T(G)$ не делится на сомножители разложения G . Значит вместо исходного представления $G \hookrightarrow \prod_{1 \leq h \leq k} G_h$, можно рассмотреть метрическое представление

$$G \hookrightarrow \sigma_T(G) \times \prod_{h \in S \setminus T} G_h,$$

имеющее не более $k-1$ сомножителя ($|T| \geq 2$, так как все синглетоны полны). Повторяя этот процесс для каждого нового представления, мы в итоге придем к представлению с полным множеством индексов. Это и будет разложение графа G на простые множители.

Федер [1992] показал, как можно реализовать этот алгоритм за $O(mn)$ шагов с использованием $O(m)$ памяти; более быстрый алгоритм, требующий $O(m \log n)$ время и $O(m)$ памяти был предложен Ауренхаммером, Хагауэром и Имрихом [1990].

20.3. Метрическое разложение двудольных графов

Напомним, что конус полуметрик MET_n определяется как

$$\text{MET}_n = \{x \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \mid x_{ij} - x_{ik} - x_{jk} \leq 0 \text{ при всех } i, j, k \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Другими словами, конус MET_n состоит из всех n -точечных полуметрик. Полуметрика $d \in \text{MET}_n$ называется *примитивной*, если d лежит на крайнем луче MET_n , т. е. когда из равенства $d = d_1 + d_2$ ($d_1, d_2 \in \text{MET}_n$) следует, что $d_1 = \alpha_1 d$, $d_2 = \alpha_2 d$ при некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. При $d \in \text{MET}_n$ обозначим через $F(d)$ наименьшую грань конуса MET_n , содержащую d . Таким образом, $F(d)$ состоит из всех векторов $y \in \text{MET}_n$, удовлетворяющих тем же равенствам треугольника, что и d , т. е. из тех векторов, для которых $y_{ij} - y_{ik} - y_{jk} = 0$, как только $d_{ij} - d_{ik} - d_{jk} = 0$. Тогда грань $F(d)$ является симплексом (т. е. примитивные полуметрики, принадлежащие $F(d)$, линейно независимы) тогда и только тогда, когда у d есть единственное разложение в сумму примитивных полуметрик (см. лемму 4.3.2).

Пусть G — связный граф с n вершинами. Его метрика кратчайшего пути d_G принадлежит конусу MET_n . Возникает естественный вопрос, какие возможны разложения метрики d_G в сумму примитивных полуметрик. Ломоносов и Шебё [1993] показали, что если граф G — двудольный, то такое разложение для d_G единственно, т. е. d_G лежит на симплицальной грани конуса MET_n . В действительности примитивные полуметрики, входящие в разложение d_G , являются гейт-0-расширениями метрик кратчайшего пути сомножителей канонического метрического представления G .

Теорема 20.3.1. *Пусть G — связный двудольный граф изометрической размерности $\dim_I(G) = k$ с n вершинами. Обозначим через $F(d_G)$ наименьшую грань конуса MET_n , содержащую d_G . Тогда грань $F(d_G)$ является симплексом размерности k .*

Доказательство. Обозначим через $E_1, \dots, E_k$ классы эквивалентности отношения θ^* , через

$$G \hookrightarrow \prod_{1 \leq h \leq k} G_h$$

— ассоциированное каноническое метрическое представление графа G . Для вершины $a \in V$, обозначим через $(a_1, \dots, a_k)$ ее образ при каноническом вложении. При $h = 1, \dots, k$ определим полуметрику d_h на V по формуле:

$$d_h(a, b) := d_{G_h}(a_h, b_h),$$

где $a, b \in V$. Тогда d имеет следующее разложение:

$$d = \sum_{1 \leq h \leq k} d_h.$$

Ясно, что полуметрики $d_1, \dots, d_k$ линейно независимы и принадлежат грани F_G . Докажем, что F_G порождается множеством $\{d_1, \dots, d_k\}$. Для этого покажем, что все $x \in F_G$ имеют вид $x = \sum_{1 \leq h \leq k} \alpha_h d_h$, где $\alpha_h \geq 0$ — некоторые скаляры. Пусть $x \in F_G$. По определению, это означает, что каждое неравенство треугольника, обращающееся в равенство для d_G , обращается в равенство и для x . Утверждается, что если $e = (a, b)$ и $e' = (a', b')$ — ребра графа G , то

$$e\theta e' \implies x(a, b) = x(a', b').$$

Действительно, так как граф G — двудольный, то можно считать, что $a' \in G(a, b)$ и $b' \in G(b, a)$. Легко проверить, что d_G удовлетворяет следующим четырем равенствам треугольника:

$$\begin{aligned} d_G(a', b) &= d_G(a', a) + d_G(a, b), & d_G(a, b') &= d_G(a, b) + d_G(b, b'), \\ d_G(a', b) &= d_G(a', b') + d_G(b, b') & \text{и} & & d_G(a, b') &= d_G(a, a') + d_G(a', b'). \end{aligned}$$

Следовательно x также удовлетворяет этим четырем равенствам. Из первых двух равенств заключаем, что

$$x(a', b) - x(a, b') = x(a', a) - x(b, b'),$$

а из последних двух, что

$$x(a', b) - x(a, b') = x(b, b') - x(a, a').$$

Следовательно, $x(a, a') = x(b, b')$ и $x(a, b') = x(a', b)$, откуда $x(a, b) = x(a', b')$. Значит имеются такие скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$, что $x(a, b) = \alpha_h$ для каждого ребра (a, b) из класса E_h . Докажем, что

$$x = \sum_{1 \leq h \leq k} \alpha_h d_h.$$

При $a, b \in V$ обозначим через $P := (a_0 = a, a_1, \dots, a_p = b)$ кратчайший путь из a в b в графе G . Положим $N_h := |E(P) \cap E_h|$ при $h = 1, \dots, k$. Используя равенства треугольника вдоль пути P , получаем, что

$$x(a, b) = \sum_{1 \leq i \leq p} x(a_{i-1}, a_i) = \sum_{1 \leq h \leq k} \alpha_h N_h.$$

Так как путь P содержит N_h ребер из E_h , то стянув остальные ребра P , мы получим путь в графе G_h из a_h в b_h длины N_h . Следовательно $d_{G_h}(a_h, b_h) \leq N_h$. Пусть Q' — кратчайший путь в графе G_h из a_h в b_h . Тогда Q' получается из некоторого пути Q в графе G , соединяющего вершины a и b . По лемме 20.1.2 путь Q содержит не менее N_h ребер из E_h . Следовательно, $|Q'| \geq N_h$, откуда $d_{G_h}(a_h, b_h) = N_h$. Таким

образом,

$$\sum_{1 \leq h \leq k} \alpha_h d_h(a, b) = \sum_{1 \leq h \leq k} \alpha_h N_h = x(a, b).$$

Тем самым доказано, что F_G порождается множеством $\{d_1, \dots, d_k\}$. Следовательно, грань $F(d_G)$ конуса MET_n является симплексом размерности k . ■

Следствие 20.3.2. Пусть G — связный двудольный граф. Тогда его метрика кратчайшего пути d_G принадлежит крайнему лучу полуметрического конуса MET_n в том, и только том случае, когда $\dim_I(G) = 1$, т. е. когда граф G неприводим. ■

Следствие 20.3.2 неверно для недрудольных графов. Например, граф K_3 неприводим, но метрика кратчайшего пути принадлежит внутренности полуметрического конуса MET_3 .

20.4. Дополнительные замечания

Несколько дальнейших аспектов метрической теории графов привлекли большое внимание в литературе и привели к богатым теориям. Например, дистанционно-регулярные графы и сильно регулярные графы определяются с помощью некоторых инвариантных свойств их метрик кратчайшего пути. Изучение этих графов приводит к большой и богатой области исследований, связанной с алгебраической теорией графов. Монография Броуэра, Коэна и Ноймайера [1989] является прекрасным источником информации по этой теме. Напомним только, что некоторые результаты из этой области были приведены в главе II, и особенно в разделе 17, где рассматривались гиперметрические графы. В работах Кулена [1990, 1993, 1994], Кулена и Шпекторова [1994], Вайшеля [1992] изучаются графы с высокой регулярностью, обладающие некоторыми специальными метрическими свойствами, такими, как гиперметричность или ее различные частные случаи (выполнение неравенства пятиугольника или шестиугольника), и т. п. Например, все вложимые в гиперкуб дистанционно-регулярные графы полностью расклассифицированы: это гиперкубы, циклы четной длины, дважды-нечетные циклы (Кулена [1990], Вайшеля [1992]). Дистанционно-регулярные графы отрицательного типа (или, что то же самое, являющиеся гиперметричными) расклассифицированы в работе Кулена и Шпекторова [1994]; см. теорему 17.2.7.

В этом разделе мы укажем некоторые дальнейшие темы, связанные с метрической структурой графов. В их числе изучение графов с особыми метрическими свойствами (например, интервально-регулярных графов, геодезических графов) и исследование вопроса о вложении произвольного пространства расстояний в (взвешенный) граф. По этим тематикам имеется обширная литература, поэтому мы не будем вдаваться в подробные исследования, а только приведем без доказательств некоторые факты, результаты и дадим необходимые ссылки.

Промежуточно-регулярные графы и геодезические графы. Рассмотрим связный граф $G = (V, E)$. Для двух вершин $x, y \in V$ обозначим через $\gamma(x, y)$ число кратчайших путей из x в y в графе G . Положим

$$I(x, y) := \{z \in V \mid d_G(x, y) = d_G(x, z) + d_G(z, y)\}$$

Для $i = 0, 1, \dots, d_G(x, y)$ определим также

$$N_i(x, y) := \{z \in I(x, y) \mid d_G(x, z) = i\}$$

и

$$N_{-1}(x, y) := \{z \in V \mid d_G(x, z) = 1 \text{ и } d_G(z, y) = d_G(x, y) + 1\}.$$

Граф G является дистанционно-регулярным, если числа $|N_1(x, y)|$ и $|N_{-1}(x, y)|$ зависят только от $d_G(x, y)$. Граф G называется *интервально-регулярным*, если для всех вершин $x, y \in V$ выполнено $|N_1(x, y)| = d_G(x, y)$ (см. Малдер [1980, 1982]). Граф G называется *равномерно геодезическим* (Кук и Прайс [1983]) или *F-геодезическим* (Чеккерини и Саппа [1986]), если величина $\gamma(x, y)$ зависит только от $d_G(x, y)$. Все дистанционно-регулярные графы являются равномерно геодезическими (Кук и Прайс [1983]), все графы Хэмминга являются интервально-регулярными (так как подграф, индуцированный промежутком $I(x, y)$, изоморфен $d_G(x, y)$ -мерному гиперкубу). За более подробной информацией о равномерно геодезических графах можно обратиться к работам Скапеллато [1990] и Кулена [1993]; Кулен [1993] дает также описание равномерно геодезических двудольных графов.

Известно также несколько различных описаний гиперкуба. Фолдес [1977] показал, что гиперкуб является единственным связным двудольным графом, для которого равенство $\gamma(x, y) = d_G(x, y)!$ выполнено для любой пары вершин. Чеккерини и Саппа [1986] показали, что связный двудольный граф G изоморфен гиперкубу тогда и только тогда, когда прямое произведение $G \times K_2$ является равномерно геодезическим графом.

Промежуточно-регулярные графы связаны с гиперкубами следующим образом. Малдер [1982] показал, что связный граф G является интервально-регулярным тогда и только тогда, когда для любых двух вершин x, y подграф графа G , состоящий из ребер, соединяющих два соседних уровня $N_i(x, y)$ и $N_{i+1}(x, y)$ ($i = 0, 1, \dots, d_G(x, y) - 1$), изоморфен $d_G(x, y)$ -мерному гиперкубу. Или, что то же самое, граф G является интервально-регулярным тогда и только тогда, когда $\gamma(x, y) = d_G(x, y)!$ для всех вершин $x, y \in V$.

Графы Хэмминга допускают следующее описание в терминах интервально-регулярных графов (Бандельт и Малдер [1991]). Связный граф G является графом Хэмминга тогда и только тогда, когда G интервально-регулярный граф, G не содержит $K_{1,1,2}$ в качестве индуцированного подграфа и единственными возможными нечетными изометричными циклами в G являются треугольники. Для более общей ситуации, Бандельт и Малдер [1991] описали все связные графы, которые разлагаются в прямое произведение, где все сомножители суть надстройки геодезических графов диаметра, не превышающего 2. (Геодезическим называется граф, в котором для любой пары вершин есть ровно один кратчайший путь, их соединяющий.)

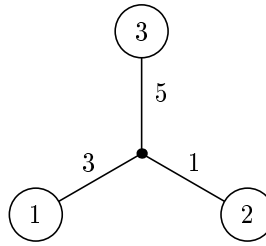
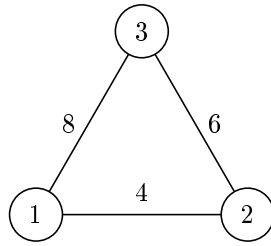
Вложение метрик в графы. Рассмотрим вопрос о вложении метрик в графы, или, более общий вопрос о вложении во взвешенные графы. Эта тема имеет много применений в различных областях, таких как психология (Каннингхэм [1978]) и биология (Пенни, Фудс и Хенди [1982]).

Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с неотрицательными весами $\omega_e \in \mathbb{R}_+$ ($e \in E$), приписанными соответствующим ребрам. Метрика кратчайшего пути $d_{G,\omega}(x, y)$ на взвешенном графе полагается равной наименьшему значению суммы $\sum_{e \in E(P)} \omega_e$, рассматриваемой на путях P , соединяющих x и y в G .

Взвешенный граф (G, w) называется *реализацией* данного конечного метрического пространства (X, d) , если существует отображение $i \in X \rightarrow x_i \in V$ такое, что для всех $i, j \in X$ выполнено равенство

$$d(i, j) = d_{G,\omega}(x_i, x_j).$$

Число вершин графа G может превышать число точек пространства X . Ясно, что каждое метрическое пространство может быть реализовано некоторым графом, а именно полным графом с $|X|$ вершинами и ребрами веса $d(i, j)$. Рассмотрим, например, метрику d на $X = \{1, 2, 3\}$, заданную как $d(1, 2) = 4$, $d(1, 3) = 8$, $d(2, 3) = 6$. Тогда d



реализуется следующими двумя взвешенными графами: K_3 и дерево с одной вспомогательной вершиной.

В соответствии с этим, стоит задача о нахождении графа (G, w) наименьшего общего веса $\sum_{e \in E} \omega_e$, реализующего пространство (X, d) . Существование наилучшей (т. е. с минимальным среди всех реализаций весом) реализации было доказано в работе Имриха, Симойш-Перейра и Замфиреску [1984]. Однако нахождение наилучшей реализации является NP -трудной проблемой, даже если считать метрику целочисленной (Альтхёфер [1988], Уинклер [1988]).

С другой стороны, метрические пространства, допускающие реализацию взвешенным деревом, хорошо известны; ранее они встречались нам как метрики деревьев. Точнее, пространство (X, d) может быть реализовано взвешенным деревом тогда и только тогда, когда d удовлетворяет следующему, так называемому *четырёхточечному*, соотношению:

$$d(i, j) + d(r, s) \leq \max(d(i, r) + d(j, s), d(i, s) + d(j, r)),$$

т. е. две наибольшие суммы из трех данных: $d(i, j) + d(r, s)$, $d(i, r) + d(j, s)$, $d(i, s) + d(j, r)$, совпадают при всех $i, j, r, s \in X$ (Бунеман [1974]). Заметим, что из четырёхточечного соотношения вытекает условие метричности (полагая $r = s$). Более того, если пространство (X, d) реализуется деревом, то такая реализация ровно одна, которая является наилучшей среди всех реализаций графами, и которая может быть найдена за полиномиальное время (Хакими и Яу [1964]).

Четырёхточечное соотношение тесно связано с другим метрическим условием, а именно с ультраметричностью. Напомним, что пространство расстояний (X, d) называется *ультраметрикой*, если при всех $i, j, k \in X$ выполнено условие:

$$d(i, j) \leq \max(d(i, k), d(j, k)).$$

Другими словами, любые три точки образуют равнобедренный треугольник, где основание не превосходит боковых сторон. Применения понятия ультраметрики и соответствующие ссылки можно найти в работе Ашбахер, Балди, Баум и Вильсон [1987]. Ясно, что каждое ультраметрическое пространство удовлетворяет четырехточечному соотношению. Фактически, каждая метрика дерева может быть выражена в терминах ассоциированной ультраметрики следующим образом (Бандельт [1990]). Рассмотрим пространство расстояний (X, d) , $r \in X$ и такую константу c , что $c \geq \max(d(i, j) \mid i, j \in X)$. Определим расстояние $d^{(c)}$ на $X \setminus \{r\}$, полагая

$$d^{(c)}(i, j) := c + \frac{1}{2}(d(i, r) + d(j, r) - d(i, j))$$

при $i \neq j \in X$. Тогда d является метрикой дерева в том, и только том случае, когда $d^{(c)}$ — ультраметрика. Для ультраметрик имеются также аналоги представлений деревьями, которые используются в теории классификаций, в частности в таксономии (см. Гордон [1987], там же ссылки на подробные источники). Рассмотрим дерево $T = (V, E)$ с неотрицательными весами $\omega_e \in \mathbb{R}_+$ ($e \in E$), приписанными соответствующим ребрам. Пусть $r \in V$ — отмеченная вершина (корень) дерева T , а X — множество листьев (вершин степени 1), отличных от r . Будем считать, что $d_{T, \omega}(r, x) = h$ при всех $x \in X$, где h — некоторая константа, которую называют высотой дерева T . Тогда T называется еще *дендрограммой* или *индексированной иерархией*. Высота $h(v)$ вершины v определяется как длина кратчайшего пути из v до какого-нибудь листа из X . Теперь можно определить метрическое пространство (X, d_X) , полагая расстояние $d_X(x, y)$ равным высоте первого общего предка x и y . Метрическое пространство (X, d_X) ультраметрично, и все ультраметричные пространства получаются таким образом. Более того, пространства расстояний (X, d_X) и $\left(X, \frac{1}{2}d_{T, \omega}\right)$ совпадают.

Глава 21.

ℓ_1 -графы

В этой главе мы исследуем ℓ_1 -графы, т. е. графы, допускающие изометричное вложение в ℓ_1 -пространство. Такие графы могут быть описаны, как изометричные подграфы прямого произведения элементарных графов двух типов, а именно, графов полукубов и графов $K_{n \times 2}$. Этот результат уже был установлен во второй части с помощью теории многогранников Делоне. Здесь мы приводим другое, элементарное, доказательство, проведенное Шпекторовым [1993], которое к тому же предоставляет полиномиальный по времени алгоритм распознавания. В разделе 21.4 содержатся дополнительные результаты, касающиеся ℓ_1 -графов; в частности, там дается описание изометричных подграфов графов полукубов в терминах запрещенных изометричных подпространств.

21.1. Теоремы о ℓ_1 -графах

Как было упомянуто в главе 18, граф G является ℓ_1 -вложимым тогда и только тогда, когда он вложим в нормированный гиперкуб с точностью до нормировки. λ -*вложением* графа G в гиперкуб $H(\Omega)$ называется такое отображение

$$x \in V \rightarrow X \subseteq \Omega,$$

что

$$\lambda d_G(x, y) = |X \Delta Y|$$

для всех вершин x, y графа G . Если у G имеется λ -вложение в гиперкуб, будем говорить, что граф G вложим в гиперкуб со шкалой λ . 1-вложение есть ни что иное, как изометричное вложение в гиперкуб.

Основную роль в теории ℓ_1 -графов играют следующие три класса графов: полные графы, графы $K_{n \times 2}$ и графы полукубов. Все они, а следовательно и их прямые произведения, являются ℓ_1 -графами. На самом

деле, как мы увидим ниже, все ℓ_1 -графы появляются как изометричные подграфы таких прямых произведений. Для полных графов K_m ($m \geq 3$) и графов полукубов $\frac{1}{2}H(m, 2)$ ($m \geq 3$) минимальная шкала равна 2. Заметим, что

$$\frac{1}{2}H(2, 2) = K_2, \quad \frac{1}{2}H(3, 2) = K_{4 \times 2},$$

а K_m является изометричным подграфом как $K_{m \times 2}$, так и $\frac{1}{2}H(m, 2)$. Следующее утверждение очевидно.

Лемма 21.1.1. *Граф G вложим в гиперкуб со шкалой 2 (т. е. метрика $2d_G$ вложима в гиперкуб) тогда и только тогда, когда G является изометричным подграфом некоторого графа полукуба.* ■

С другой стороны, нахождение минимальной шкалы для графов $K_{n \times 2}$ является сложной задачей. Подробно эта проблема рассмотрена в главе 23, см. также раздел 7.4. Из теоремы 19.2.8 уже известно, что все связанные двудольные ℓ_1 -графы вложимы в гиперкуб. Недвудольные графы обладают следующим свойством (Блэйк и Джилхрист [1973]).

Лемма 21.1.2. *Пусть G — ℓ_1 -граф, допускающий λ -вложение в гиперкуб. Если граф G — не двудольный, то λ — четное число. Следовательно, минимальная шкала ℓ_1 -графа равна 1 или четна.*

Доказательство. Предположим, что граф G — не двудольный. Рассмотрим в графе G цикл C минимальной нечетной длины. Тогда C — изометричный подграф графа G . Пусть $C = (a_1, \dots, a_{2k+1})$. Можно считать, что при λ -вложении графа G в гиперкуб, вершины a_1, a_{k+1}, a_{k+2} помечены множествами $\emptyset, A, B$ соответственно. Тогда, так как $d_G(a_1, a_{k+1}) = d_G(a_1, a_{k+2}) = k$ и $d_G(a_{k+1}, a_{k+2}) = 1$, то $\lambda = |A \triangle B|$ и $|A| = |B| = \lambda k$. Таким образом, $\lambda = 2\lambda k - 2|A \cap B|$. Следовательно λ — четное число. ■

Приведем сейчас основной результат данной главы, доказанный Шпекторовым [1993].

Теорема 21.1.3. *Пусть G — ℓ_1 -граф. Тогда существуют: граф $\hat{G}$ и изометричное вложение $\hat{\sigma}$ из G в $\hat{G}$ такие, что*

- (i) $\hat{G} = \hat{G}_1 \times \dots \times \hat{G}_k$, где каждый граф $\hat{G}_h$ изоморфен либо полному графу, либо графу $K_{m \times 2}$ ($m \geq 3$), либо графу полукуба, и
- (ii) если ψ — λ -вложение графа G в гиперкуб, то существует такое λ -вложение $\hat{\psi}$ графа $\hat{G}$ в гиперкуб, что $\psi = \hat{\psi}\hat{\sigma}$.

Следствие 21.1.4. *Связный граф G является ℓ_1 -вложимым тогда и только тогда, когда все сомножители его канонического метрического представления ℓ_1 -вложимы.*

Следствие 21.1.5. *Связный граф G является ℓ_1 -вложимым тогда и только тогда, когда G является изометричным подграфом прямого произведения графов $K_{n \times 2}$ и графов полукубов.*

Следствие 21.1.6. *Пусть G — ℓ_1 -граф. Тогда граф G — ℓ_1 -жесткий в том, и только том случае, когда граф $\hat{G}$ — ℓ_1 -жесткий.*

Следствие 21.1.7. *Каждый ℓ_1 -жесткий граф является изометричным подграфом некоторого графа полукуба и, следовательно, его минимальная шкала η равна 1 или 2.*

Следствие 21.1.8. *Пусть G — ℓ_1 -граф с $n \geq 4$ вершинами. Тогда его минимальная шкала η удовлетворяет условию $\eta \leq n - 2$.*

Следствие 21.1.9. *Рассмотрим граф G с n вершинами и m ребрами. Существует алгоритм, определяющий, является ли граф G ℓ_1 -вложимым, за время $O(mn)$, используя $O(n^2)$ памяти.*

В разделе 21.2 приводится явное построение графа $\hat{G}$ из теоремы 21.1.3 с помощью специального λ -вложения графа G . Доказательства теоремы 21.1.3 и следствий 21.1.4–21.1.9 представлены в разделе 21.3.

Утверждение следствия 21.1.5 уже было установлено во второй части (теорема 17.1.1. (ii)), с помощью соответствия между многогранниками Делоне и гиперметриками. Однако с помощью таких методов доказательства нельзя получить дальнейшие результаты, такие, как описание ℓ_1 -жесткости и существование полиномиального по времени алгоритма распознавания ℓ_1 -вложимости. В противоположность рассмотренному доказательству в приведенных ниже рассуждениях используются только элементарные понятия. В известном смысле, это продолжение теории канонических метрических представлений графов. Действительно, существенным моментом доказательства является то, что любой сомножитель канонического метрического представления ℓ_1 -графа может быть далее вложен в полный граф, граф $K_{n \times 2}$, или в граф полукуба.

Ввиду следствий 21.1.4 и 21.1.5, проверить, является ли данный граф G ℓ_1 -вложимым, можно следующим образом.

- (i) Построить каноническое метрическое представление графа G .

- (ii) Для каждого сомножителя G_h канонического метрического представления проверить, является ли граф G_h изометричным подграфом графа $K_{n \times 2}$, или графа полукуба.

В этом случае G является ℓ_1 -вложимым тогда и только тогда, когда ответ во втором шаге всегда положителен. Как мы убедились в замечании 20.1.5, первый шаг можно выполнить за время $O(mn)$, используя $O(m)$ памяти. Главная трудность на втором шаге состоит в распознавании изометричных подграфов графов полукубов. Следующий результат неявно присутствует в работе Шпекторова [1993]; подробный алгоритм приведен в работе Деца и Шпекторова [1996]. Мы дадим доказательство этого утверждения в разделе 21.3.

Предложение 21.1.10. *Рассмотрим граф G с n вершинами и m ребрами. Существует алгоритм, определяющий является ли G изометричным подграфом графа полукуба, за время $O(mn)$, используя $O(n^2)$ памяти. Данный алгоритм дает построение искомого вложения, если оно существует.*

Предположим, что каждый сомножитель G_h канонического метрического представления графа G имеет n_h вершин и m_h ребер, причем $m_h \geq n_h - 1$ в силу связности G_h . Тогда $m \geq m_1 + \dots + m_k$ и $n_h \leq n$ при всех h . Таким образом, $n_1 m_1 + \dots + n_k m_k \leq mn$. Проверить, является ли G_h подграфом графа $K_{n \times 2}$, можно за время $O(n_h^2)$ и используя такое же количество памяти (просто проверяя, соединена ли каждая вершина ребром со всеми, кроме одной). Значит общая сложность алгоритма распознавания ℓ_1 -вложимости данного графа равна $O(mn)$ по времени и $O(n^2)$ по памяти, как и утверждалось в следствии 21.1.9.

21.2. Построение $\hat{G}$ с помощью атомных графов

В этом разделе мы покажем, как построить граф $\hat{G}$ из теоремы 21.1.3 с помощью специального масштабированного вложения графа G . Оказывается, что в действительности граф $\hat{G}$ не зависит от выбора масштабированного вложения и является изометрическим расширением канонического метрического представления графа G . Основным инструментом построения $\hat{G}$ служит, как мы покажем ниже, атомный граф графа G .

Рассмотрим ℓ_1 -граф $G = (V, E)$. Пусть

$$\psi: x \in V \mapsto X \subseteq \Omega$$

— λ -вложение графа G в гиперкуб $H(\Omega)$. Без потери общности можно считать, что $\Omega = \bigcup_{x \in V} X$, а данной вершине $x_0 \in V$ соответствует пустое множество. Положим

$$(21.2.1) \quad E_0 := \{e = (x, y) \in E \mid d_G(x_0, x) \neq d_G(x_0, y)\}.$$

Можно считать, что¹⁾ $x_0 \in G(x, y)$ для ребра $e = (x, y) \in E_0$. Легко убедиться, что имеют место следующие утверждения:

$$(21.2.2) \quad X = \lambda d_G(x_0, x) \quad \text{при всех } x \in V,$$

$$(21.2.3) \quad |X \cap Y| = \frac{\lambda}{2}(d_G(x_0, x) + d_G(x_0, y) - d_G(x, y)) \quad \text{при всех } x, y \in V.$$

Для ребра $e = (x, y)$ имеем:

$$(21.2.4) \quad \begin{cases} X \setminus Y = |Y \setminus X| = \frac{\lambda}{2} & \text{при } e \notin E_0; \\ X \subseteq Y & \text{при } e \in E_0. \end{cases}$$

Будем называть *атомом* каждое множество вида $X \triangle Y$, соответствующее ребру $e = (x, y)$ графа G , а *собственным атомом* каждое множество вида $X \setminus Y$, соответствующее ребру $e = (x, y) \in E_0$ (при $x_0 \in G(x, y)$). Атомы имеют мощность λ , и

если A, B — различные собственные атомы, то $|A \cap B| = 0, \frac{\lambda}{2}$.

Определим *атомный граф* $\Lambda(G)$ как граф, вершинами которого служат собственные атомы графа G , и две вершины A и B соединяются ребром, если $|A \cap B| = \frac{\lambda}{2}$. Обозначим через $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ связные компоненты графа $\Lambda(G)$. При $h = 1, \dots, k$ обозначим через Ω_h объединение всех собственных атомов — вершин графа Λ_h . Таким образом, каждый собственный атом либо содержится в множестве Ω_h , либо не пересекается с ним. Фактически, как показывает следующий результат, тем же свойством обладают и все атомы.

Утверждение 21.2.6. Пусть A — атом графа G . Тогда для всех $h = 1, \dots, k$ либо $A \subseteq \Omega_h$, либо $A \cap \Omega_h = \emptyset$.

Доказательство. Пусть (x, y) — ребро графа G , соответствующее атому A , т. е. $A = X \triangle Y$. Можно считать, что ребро (x, y) не содержится в E_0 . Следовательно вершина x_0 находится на одном и том

¹⁾ $G(x, y)$ определен в (18.0.1). — Прим. ред.

же расстоянии s как от x , так и от y . Обозначим через $(x_0, x_1, \dots, x_s = x)$ и $(y_0 = x_0, y_1, \dots, y_s = y)$ кратчайшие пути в графе G от x_0 до x и y соответственно. Тогда

$$X = \bigcup_{1 \leq i \leq s} B_i, \quad Y = \bigcup_{1 \leq i \leq s} C_i,$$

где B_i — собственный атом $X_i \setminus X_{i-1}$, а C_i — собственный атом $Y_i \setminus Y_{i-1}$ при $i = 1, \dots, s$. Утверждается, что при некотором $i_0 \in \{1, \dots, s\}$

$$X \setminus Y \subseteq B_{i_0}.$$

Действительно, рассмотрим $\alpha \in X \setminus Y$ и предположим, что, например, $\alpha \in B_1$. Тогда $B_1 \cap Y \neq B_1$. С другой стороны, $B_1 \cap Y \neq \emptyset$, так как в противном случае $B_1 \subseteq X \setminus Y$, откуда $|X \setminus Y| \geq \lambda$, что противоречит (21.2.4). В силу того, что мощность $B_1 \cap Y$ кратна (по (21.2.5)) $\frac{\lambda}{2}$, заключаем, что $|B_1 \cap Y| = \frac{\lambda}{2}$, $|B_1 \setminus Y| = \frac{\lambda}{2}$. Таким образом, $X \setminus Y = B_1 \setminus Y \subseteq B_1$. Аналогично

$$Y \setminus X \subseteq C_{j_0}$$

при некотором $j_0 \in \{1, \dots, s\}$. Кроме того, так как множества C_j попарно не пересекаются, то каждое множество B_i либо совпадает с некоторым C_j , либо пересекается с двумя из них, за исключением случая $B_i = B_{i_0}$, когда B_i пересекается ровно с одним C_j . Симметричное утверждение выполнено для каждого C_i . Это означает, что подграф атомного графа $\Lambda(G)$, индуцированный множеством $\{B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_s\}$ состоит из изолированных вершин, циклов и ровно одного пути с концами в B_{i_0} и C_{j_0} . Обозначим через Λ_{h_0} связную компоненту графа $\Lambda(G)$, содержащую этот путь. Тогда $B_{i_0}, C_{j_0} \subseteq \Omega_{h_0}$, откуда $A = X \Delta Y \subseteq \Omega_{h_0}$. Более того, при $h \neq h_0$, множества B_{i_0}, C_{j_0} не пересекаются с Ω_h . Следовательно и A не пересекаются с Ω_h . ■

Обозначим через $\bar{G}_h$ граф с множеством вершин $\{\bar{X} := X \cap \Omega_h \mid x \in V\}$, где пара $(\bar{X}, \bar{Y})$ является ребром, если $|\bar{X} \Delta \bar{Y}| = \lambda$. Положим $\bar{G} := \prod_{1 \leq h \leq k} \bar{G}_h$.

Утверждение 21.2.7.

- (i) Каждый граф $\bar{G}_h$ λ -вложим в гиперкуб $H(\Omega_h)$, а соответствующий атомный граф $\Lambda(\bar{G}_h)$ совпадает с Λ_h .
- (ii) Граф $\bar{G}$ λ -вложим в гиперкуб $H(\Omega)$.
- (iii) Отображение $x \in V \mapsto (X \cap \Omega_1, \dots, X \cap \Omega_k)$ задает изометричное вложение графа G в граф $\bar{G}$.

Доказательство. Рассмотрим две вершины x и y графа G , соответствующие вершинам $\bar{X} = X \cap \Omega_h$ и $\bar{Y} = Y \cap \Omega_h$ графа $\bar{G}_h$. Докажем, что

$$|\bar{X} \triangle \bar{Y}| = \lambda d_{\bar{G}_h}(\bar{X}, \bar{Y}).$$

Положим $s := d_G(x, y)$ и $t := d_{\bar{G}_h}(\bar{X}, \bar{Y})$. Пусть $(y_0 = x, y_1, \dots, y_s = y)$ — кратчайший путь в графе G от x до y . Тогда множество

$$X \triangle Y = \sum_{1 \leq i \leq s} Y_i \setminus Y_{i-1}$$

является дизъюнктивным объединением атомов. Обозначим через t_h число атомов $Y_i \setminus Y_{i-1}$, содержащихся в Ω_h . Из утверждения 21.1.6 заключаем, что

$$|\bar{X} \triangle \bar{Y}| = |(X \triangle Y) \cap \Omega_h| = t_h \lambda.$$

Более того, мы нашли путь длины t_h в графе $\bar{G}_h$, соединяющий $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, откуда следует, что $t_h \geq t$. Пусть $(\bar{Z}_0 = \bar{X}, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_t = \bar{Y})$ — кратчайший путь в графе $\bar{G}_h$, соединяющий $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Тогда

$$|\bar{X} \triangle \bar{Y}| = |(\bar{X} \triangle \bar{Z}_1) \triangle (\bar{Z}_1 \triangle \bar{Z}_2) \triangle \dots \triangle (\bar{Z}_{t-1} \triangle \bar{Y})| \leq \sum_{1 \leq i \leq t} |\bar{Z}_{i-1} \triangle \bar{Z}_i| = t \lambda.$$

Отсюда следует, что $t_h \leq t$, а значит и $t_h = t$. Таким образом, граф $\bar{G}_h$ ℓ_1 -вложен в гиперкуб $H(\Omega_h)$. Легко убедиться, что его атомным графом является Λ_h . Таким образом, утверждение (i) выполнено. Более того, отображение

$$(X \cap \Omega_1, \dots, X \cap \Omega_k) \mapsto \bigcup_h X \cap \Omega_h = X$$

задает ℓ_1 -вложение произведения $\bar{G}_1 \times \dots \times \bar{G}_k$ в гиперкуб $H(\Omega)$, что доказывает (ii). Также заключаем, что для всех вершин $x, y \in V$ верно равенство

$$d_G(x, y) = \sum_{1 \leq h \leq k} d_{\bar{G}_h}(X \cap \Omega_h, Y \cap \Omega_h),$$

чем доказано утверждение (iii). ■

Покажем теперь, что каждый сомножитель $\bar{G}_h$ может быть далее вложен в некоторый граф $\hat{G}_h$, изоморфный либо полному графу, либо графу $K_{n \times 2}$, либо графу полукуба. Рассмотрим сначала случай, когда атомный граф $\Lambda(G)$ связан, т. е. когда $k = 1$. В этом случае граф $\bar{G}$ есть просто граф G , вложенный в гиперкуб $H(\Omega)$.

Утверждение 21.2.8. Если граф $\Lambda(G)$ связан, то существует единственный такой минимальный граф $\hat{G}$, содержащий граф G в качестве изометричного подграфа, что $\hat{G}$ изоморфен либо полному графу, либо графу $K_{m \times 2}$ ($m \geq 3$), либо графу полукуба. Более того, граф $\hat{G}$ λ -вложим в гиперкуб $H(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно три случая.

Первый случай. $\Lambda(G)$ — полный граф. Тогда граф G сам является полным и $\hat{G} = G$. Действительно, каждая вершина x соединена ребром с x_0 (иначе множество X являлось бы дизъюнктивным объединением собственных атомов, соответствующих ребрам кратчайшего пути из x_0 в x). Для любых двух вершин $x, y \in V$ соответствующие собственные атомы X и Y соединены ребром, откуда $|X \Delta Y| = \lambda$ и, следовательно, вершины x и y смежны в G . (На самом деле $\Lambda(K_n) = K_{n-1}$.)

Второй случай. Граф $\Lambda(G)$ — не полный, но является индуцированным подграфом графа $K_{n \times 2}$. Пусть A, B — два собственных атома на расстоянии 2 в графе $\Lambda(G)$. Любой другой собственный атом соединен ребром как с A , так и с B , откуда $C \subseteq A \cup B$. Следовательно для каждой вершины $x \in V$ множество X содержится в 2λ -элементном множестве $A \cup B$. Утверждается, что G — индуцированный подграф графа $K_{n \times 2}$. Действительно, любые две не смежные вершины G находятся на расстоянии 2 друг от друга, так как $|X \Delta Y| \leq 2\lambda$ при всех $x, y \in V$. Более того, каждая вершина x соединяется ребрами со всеми остальными вершинами, кроме быть может одной, которая в этом случае занумерована дополнением к множеству X . Тогда в качестве $\hat{G}$ рассмотрим граф $K_{m \times 2}$, полученный добавлением «противоположной» вершины, занумерованной дополнением к X , для каждой вершины x , смежной со всеми остальными вершинами в графе G . Тогда $\hat{G}$ может быть λ -вложен в тот же самый гиперкуб $H(\Omega)$. Более того, $m \geq 3$, так как в противном случае G является подграфом $K_{2 \times 2}$, откуда G равен либо P_3 , либо C_4 , но в обоих этих случаях граф $\Lambda(G)$ состоит из двух изолированных вершин.

Третий случай. Граф $\Lambda(G)$ не является индуцированным подграфом графа $K_{n \times 2}$. Докажем, что граф G изометрично вкладывается в граф полукуба. Во-первых, установим существование таких различных

собственных атомов A, B, C, D , что

$$\begin{cases} A \cap C = \emptyset, \\ A \cap D = \emptyset, \\ C \text{ смежен с } D \text{ в } \Lambda(G), \\ B \text{ смежен с } A \text{ и } C \text{ в } \Lambda(G). \end{cases}$$

Действительно, пусть A и C — два собственных атома на расстоянии 2 в графе $\Lambda(G)$, а B — собственный атом, соединенный ребрами и с A и с C . Предположим, от противного, что каждый собственный атом D смежен с A тогда и только тогда, когда D смежен ребром с C . Если атом D смежен и с A и с C , то $D \subseteq A \cup C$. Если атом D' смежен и с A и с C , а D смежен с D' , то D пересекается с A или с C , следовательно атом D смежен и с A и с C , откуда $D \subseteq A \cup C$. Из связности графа $\Lambda(G)$ заключаем, что каждый собственный атом D содержится в $A \cup C$. Таким образом, если D и D' — два непересекающихся собственных атома, то D' является дополнением к D . Тем самым доказано, что каждый собственный атом соединен ребром со всеми остальными собственными атомами, кроме быть может одного. Мы пришли к противоречию, так как по предположению граф $\Lambda(G)$ не является подграфом графа $K_{n \times 2}$.

Будем называть *половинкой* каждое множество вида $A \cap B$ или $A \setminus B$, где A, B — смежные собственные атомы. Мощность каждой половинки равна $\frac{\lambda}{2}$, и каждый собственный атом является дизъюнктивным объединением двух половинок. Утверждается, что

(21.2.9) Разные половинки не пересекаются.

Если условие (21.2.9) выполнено, то для каждой вершины $x \in V$ множество X может быть единственным образом представлено в виде дизъюнктного объединения половинок. Действительно, если $(x_0, x_1, \dots, x_s = x)$ — кратчайший путь от x_0 до x в графе G , то $X = \bigcup_{1 \leq i \leq s} X_i \setminus X_{i-1}$, где каждый собственный атом $X_i \setminus X_{i-1}$ является объединением двух половинок. Это множество половинок не зависит от выбора кратчайшего пути. Тем самым получено изометричное вложение графа G в граф полукуба $\hat{G}$, заданного на множестве половинок. По построению, граф $\hat{G}$ ℓ_1 -вложен в гиперкуб $H(\Omega)$.

Докажем теперь утверждение (21.2.9). В силу связности графа $\Lambda(G)$ можно так занумеровать собственные атомы $A_1, A_2, \dots, A_p$, чтобы каждый атом A_j ($j \geq 2$) оказался смежным хотя бы с одним атомом A_s при $s < j$. Будем считать, что $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = C, A_4 = D$. Докажем индукцией по j ($j \geq 4$), что различные половинки,

построенные из первых j собственных атомов $A_1, A_2, \dots, A_j$, попарно не пересекаются.

Рассмотрим сначала случай $j = 4$. Половинки $H_1 = A \setminus B$, $H_2 = A \cap B$, $H_3 = B \cap C$, $H_4 = C \setminus B$ не пересекаются по построению. Рассмотрим половинку $C \cap D$. Так мощность множества $B \cap D = B \cap C \cap D = (C \cap D) \cap H_3$ равна либо нулю либо $\frac{\lambda}{2}$, то $C \cap D$ совпадает либо с H_3 либо с H_4 . Половинка $H_5 = D \setminus C$ не пересекается с H_1, H_2, H_3, H_4 .

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{H}$ всех половинок, построенных из первых $j-1$ собственных атомов $A_1, A_2, \dots, A_{j-1}$ ($j \geq 5$). Предположим, что половинки из $\mathcal{H}$ попарно не пересекаются. Будем считать две половинки $H, H' \in \mathcal{H}$ смежными, если $H \cup H'$ является собственным атомом A_s при некотором $s < j$. Тем самым на $\mathcal{H}$ задана структура графа, притом связного. Пусть атом A_j соединен ребром с A_s при $s < j$ и $A_s = X_1 \cup X_2$ при $X_1, X_2 \in \mathcal{H}$. Допустим, что множество $A_j \cap A_s$ не совпадает ни с X_1 ни с X_2 . Положим $\alpha = |A_j \cap X_1|$ и $\beta = |A_j \cap X_2|$, где $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha + \beta = \frac{\lambda}{2}$. Если Y_1, Y_2 — две соседние половинки и $|A_j \cap Y_1| = \alpha$ или β , то $|A_j \cap Y_2| = \beta$ или α соответственно. Из связности графа $\mathcal{H}$ заключаем, что для любой пары (Y_1, Y_2) соседних половинок $|A_j \cap Y_1| = \alpha$, $|A_j \cap Y_2| = \beta$, или наоборот. Тогда $|A_j \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5)| = 2(\alpha + \beta) + \alpha$ или $2(\alpha + \beta) + \beta$, что больше λ . Противоречие. Таким образом, $A_j \cap A_s$ совпадает либо с X_1 либо с X_2 . Следовательно $A_j \setminus A_s$ либо является половиной из $\mathcal{H}$, либо новой половиной, не пересекающейся ни с одной половиной из $\mathcal{H}$. Тем самым утверждение индукции, а вместе с ним и утверждение 21.2.8, доказаны. $\blacksquare$

Утверждение 21.2.10. Если у графа $\Lambda(G)$ k связных компонент $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$, то существует единственный такой минимальный граф $\hat{G}$, содержащий G в качестве изометричного подграфа, что

$$\hat{G} = \prod_{1 \leq h \leq k} \hat{G}_h,$$

где каждый сомножитель $\hat{G}_h$ изоморфен либо полному графу, либо графу $K_{m \times 2}$ ($m \geq 3$), либо графу полукуба. Более того, граф $\hat{G}$ λ -вложим в гиперкуб $H(\Omega)$.

Доказательство. Так как атомный граф $\Lambda(\hat{G}_h) = \Lambda_h$ связан, можно применить Утверждение 21.2.8. Тогда для каждого $h = 1, \dots, k$ существует единственный такой минимальный граф $\hat{G}_h$, содержащий $\bar{G}_h$ в качестве изометричного подграфа, который изометричен либо

полному графу, либо графу $K_{m \times 2}$ ($m \geq 3$), либо графу полукуба. Таким образом, отображение

$$G \hookrightarrow \widehat{G} = \prod_{1 \leq h \leq k} \widehat{G}_h$$

задает минимальный граф, удовлетворяющий условиям утверждения 21.2.10. Более того, граф $\widehat{G}$ λ -вложим в гиперкуб $H(\Omega)$, так как каждый сомножитель $\widehat{G}_h$ λ -вложим в гиперкуб $H(\Omega_h)$, а множества Ω_h являются попарно не пересекающимися подмножествами Ω . ■

Замечание 21.2.11. Графы $\overline{G}_h$ — неприводимы, так как каждый из них есть изометричный подграф либо полного графа, либо графа $K_{m \times 2}$ не менее, чем с 6 вершинами, либо графу полукуба, а все эти графы неприводимы. Ясно, что вложение $G \hookrightarrow \overline{G}$ неприводимо, поэтому из теоремы 20.1.1 заключаем, что метрическое представление

$$G \hookrightarrow \overline{G} = \prod_{1 \leq h \leq k} \overline{G}_h$$

в действительности является каноническим метрическим представлением графа G (поэтому мы и обозначили число связных компонент атомного графа той же буквой k , что и изометрическую размерность графа G в главе 20). В частности, граф $\overline{G}$, чья конструкция a priori зависела от выбора масштабированного вложения в гиперкуб графа G , в действительности не зависит от выбора конкретного вложения. Значит и граф $\widehat{G}$ не зависит от выбора данного вложения. ■

Замечание 21.2.12. Можно также непосредственно убедиться, что граф $\overline{G}$ не зависит от выбора масштабированного вложения графа G . Действительно, атомный граф можно определить инвариантно, не пользуясь фиксированным вложением. Для двух ребер $e = (x, y)$ и $e' = (x', y')$ графа G положим

$$(21.2.13) \quad \langle e, e' \rangle := d_G(y', x) - d_G(y', y) - d_G(x', x) + d_G(x', y).$$

Величина $\langle e, e' \rangle$ принимает значения $0, \pm 1, \pm 2$ в зависимости от того, каким множествам разбиения $V = G(x, y) \cup G(y, x) \cup G_{=}(x, y)$ (определенного соотношением (18.0.1)) принадлежат вершины x', y' . Заметим, что $\langle e, e' \rangle \neq 0$ тогда и только тогда, когда e и e' находятся в отношении θ ((определенном в (18.0.2)). В случае, когда оба ребра e, e' принадлежат множеству E_0 (см. 21.2.1) при, допустим, $x_0 \in G(x, y) \cap G(x', y')$, получаем, что

$$\langle e, e' \rangle = \frac{1}{\lambda} |(Y \setminus X) \cap (Y' \setminus X')| \in \{0, 1, 2\},$$

где $x \mapsto X$ — λ -вложение графа G в гиперкуб. В частности, $\langle e, e' \rangle = 2$ тогда и только тогда, когда ребра e, e' соответствуют одному и тому же собственному атому $Y \setminus X = Y' \setminus X'$. При $e, e' \in E_0$ будем считать, что

$$e \sim e' \quad \text{если } \langle e, e' \rangle = 2.$$

Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на E_0 . Ясно, что классы эквивалентности по отношению $\sim$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с собственными атомами. На соответствующем фактор-множестве можно определить структуру графа $\mathcal{E}$, соединяя два класса $\bar{e}, \bar{e}'$ ребром, если $\langle e, e' \rangle = 1$ (значение $\langle e, e' \rangle$ не зависит от выбора представителей). Граф $\mathcal{E}$ очевидно совпадает с графом $\Lambda(G)$. Обозначим через $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$ связные компоненты графа $\mathcal{E}$. Таким образом, каждое ребро $e \in E_0$ соответствует вершине в одном из графов $\mathcal{E}_h$. Продолжим теперь это соответствие на остальные ребра графа G . Рассмотрим ребро $e = (x, y)$, не принадлежащее E_0 , т. е. такое, что $d_G(x_0, x) = d_G(x_0, y) =: s$. Обозначим через $(x_0, x_1, \dots, x_s = x)$ и $(y_0, y_1, \dots, y_s = y)$ кратчайшие пути в графе G от x_0 до x и y соответственно, и положим $e_i := (x_{i-1}, x_i)$, $f_i := (y_{i-1}, y_i)$ ($i = 1, \dots, s$). Рассмотрим подграф в $\mathcal{E}$, индуцированный множеством $\{\bar{e}_i, \bar{f}_i : i = 1, \dots, s\}$. Аналогично утверждению 21.2.6 убеждаемся, что этот граф состоит из изолированных вершин, циклов и ровно одного пути. Более того, компонента $\mathcal{E}_h$, содержащая этот путь, зависит только от ребра (x, y) (а не от выбора кратчайших путей из x_0 в x и y). Это дает возможность определить разбиение $E_1 \cup \dots \cup E_k$ множества ребер E графа G , полагая E_h состоящим из ребер, соответствующих $\mathcal{E}_h$ при описанном выше сопоставлении. Тогда обозначим через $\mathcal{G}_h$ граф, полученный стягиванием ребер из $E \setminus E_h$. Граф $\mathcal{G}_h$ совпадает с графом $\overline{\mathcal{G}}_h$ с точностью до перенумерации вершин.

Итак, мы продемонстрировали, как можно определить граф $\overline{\mathcal{G}}$ инвариантно, не используя фиксированного масштабированного вложения графа G . ■

21.3. Доказательства

Доказательство теоремы 21.1.3. Существование графа $\widehat{G}$, удовлетворяющего условию (i) теоремы 21.1.3 следует из утверждения 21.2.10. Докажем вторую часть теоремы 21.1.3. Рассмотрим λ -вложение $\psi: x \rightarrow X$ графа G в гиперкуб $H(\Omega)$. Предположим сначала,

что данной вершине x_0 при отображении ψ соответствует пустое множество. По отображению ψ , с помощью конструкции раздела 21.2, получаем граф $\widehat{G}_\psi$, который λ -вложим в $H(\Omega)$ и изоморфен $\widehat{G}$ по замечанию 21.2.11. Тем самым определено λ -вложение $\widehat{\psi}$ такое, что $\psi = \widehat{\psi}\widehat{\sigma}$. Теперь пусть данной вершине x_0 при отображении ψ соответствует множество X_0 . Рассмотрим λ -вложение $x \rightarrow X \triangle X_0$ (будем обозначать его через $\psi \triangle X_0$) графа G в $H(\Omega)$. Из того, что $\psi \triangle X_0$ переводит x_0 в $\emptyset$, заключаем, что $\widehat{\psi}$ имеет вид $(\psi \triangle X_0) \triangle X_0$. ■

Доказательство следствий 21.1.4 и 21.1.5. Если G — ℓ_1 -граф, то по утверждению 21.2.7 $\widehat{G}$ также является ℓ_1 -графом, а по замечанию 21.2.11 $\widehat{G}$ совпадает с каноническим метрическим представлением графа G . Тем самым доказано следствие 21.1.4. Следствие 21.1.5, очевидно, вытекает из следствия 21.1.4. ■

Доказательство следствий 21.1.6 и 21.1.7. Импликация: граф $\widehat{G}$ — ℓ_1 -жесткий $\implies$ граф G — ℓ_1 -жесткий следует из утверждения (ii) теоремы 21.1.3. Обратное, предположим, что граф G — ℓ_1 -жесткий. Докажем, что тогда и граф $\widehat{G}$ ℓ_1 -жесткий. Рассмотрим масштабированные вложения $\widehat{\psi}_i$ графа G в гиперкубы Ω_i ($i = 1, 2$). Добавив, если потребуется, дополнительные элементы, можно считать, что Ω_1 и Ω_2 имеют одинаковые мощности. Также можно считать, что у отображений $\widehat{\psi}_1$ и $\widehat{\psi}_2$ одна и та же шкала. (Если шкала $\widehat{\psi}_i$ равна λ_i ($i = 1, 2$), то заменим $\widehat{\psi}_i$ на $\widehat{\psi}'_i$, где $\widehat{\psi}'_1$ есть $\lambda_1\lambda_2$ -вложение, полученное из $\widehat{\psi}_1$ заменой элементов Ω_1 на непересекающиеся множества мощности λ_2 , $\widehat{\psi}'_2$ — $\lambda_1\lambda_2$ -вложение, полученное тем же способом из $\widehat{\psi}_2$.) Тогда отображение $\psi_i := \widehat{\psi}_i\widehat{\sigma}: x \rightarrow X_i$ является λ -вложением графа G в гиперкуб $H(\Omega_i)$ (при $i = 1, 2$). Из ℓ_1 -жесткости графа G следует, что любые два его изометричных ℓ_1 -вложения эквивалентны (см. определение в главе 18). Легко убедиться, что отсюда вытекает существование биекции $\alpha: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ и множества $A \subseteq \Omega_2$ таких, что $X_2 = \varphi(X_1)$ для любой вершины x графа G , где мы полагаем

$$\varphi(Z) = \sigma(Z) \triangle A.$$

для подмножества $Z \subseteq \Omega_1$. По отображению ψ_i с помощью конструкции раздела 21.2 получаем граф $\widehat{G}_{\psi_i}$, который λ -вкладывается в гиперкуб $H(\Omega_i)$ отображением $\widehat{\psi}_i$. Из минимальности графов $\widehat{G}_{\psi_1}$, $\widehat{G}_{\psi_2}$ (см. утверждение 21.2.10) заключаем, что φ задает эквивалентность между вложениями $\widehat{\psi}_1$ и $\widehat{\psi}_2$. Таким образом, граф $\widehat{G}$ — ℓ_1 -жесткий, и следствие 21.1.6 доказано. Из этого легко вывести следствие 21.1.7.

Действительно, если граф G — ℓ_1 -жесткий, то и $\widehat{G}$, и, следовательно, и все сомножители $\widehat{G}_h$ — ℓ_1 -жесткие графы (так как прямое произведение графов ℓ_1 -жестко тогда и только тогда, когда все сомножители — ℓ_1 -жесткие графы; см. предложение 7.5.2). Таким образом, каждый сомножитель $\widehat{G}_h$ является графом из следующего списка: K_2 , K_3 , $K_{3 \times 2}$, $\frac{1}{2}H(m, 2)$ при $m \geq 5$. Так как все эти графы 2-вложимы в гиперкуб, то и граф G 2-вложим в гиперкуб, т. е. является изометричным подграфом полукубического графа. ■

Доказательство следствия 21.1.8. Пусть в графе G n вершин. Если один из сомножителей $\widehat{G}_h$ является графом $K_{m \times 2}$, то $m < n$. Следовательно, по лемме 7.4.4, граф $\widehat{G}_h$ допускает вложение в гиперкуб со шкалой 2^{k-1} , где $2^{k-1} < n - 1 \leq 2^k$. Все остальные сомножители также допускают вложение в гиперкуб со шкалой 2^{k-1} , так как $k \geq 2$ при $n \geq 4$. Таким образом, граф G вложим в гиперкуб со шкалой 2^{k-1} . Следовательно минимальная шкала η удовлетворяет неравенству $\eta \leq 2^{k-1} < n - 1$. ■

Доказательство предложения 21.1.10. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф с n вершинами и m ребрами. Все необходимые приготовления для построения алгоритма определения, является ли данный граф G изометричным подграфом графа полукуба, мы уже проделали выше, в основном в замечании 21.1.12 (полагая $\lambda = 2$). Опишем основные шаги доказательства.

Пусть, x_0 — некоторая вершина графа G . Рассмотрим два ребра e, e' графа G . Напомним, что величина $\langle e, e' \rangle$ была определена соотношением (21.2.13), причем $\langle e, e' \rangle \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Более того, если для ребер $e := (x, y)$ и $e := (x', y')$ выполнены равенства

$$d_G(x_0, y) = d_G(x_0, x) + 1, \quad d_G(x_0, y') = d_G(x_0, x') + 1$$

(т. е., если ребра e, e' принадлежат множеству E_0 , определенному в (21.2.1)), то $\langle e, e' \rangle \geq 0$ в случае, когда G — изометричный подграф графа полукуба. «Трюк», использованный в работе Деза и Шпекторова [1996] для уменьшения сложности алгоритма, состоит в исследовании порождающего дерева, вместо всего множества E_0 . Алгоритм состоит из следующих шагов (i)–(v).

(i) Рассмотрим такое порождающее дерево $T = (V, E_T)$ графа G , что

$$d_T(x_0, x) = d_G(x_0, x) \quad \text{для всех вершин } x \text{ графа } G.$$

(Такое дерево можно построить за время $O(m)$ с помощью алгоритма поиска в ширину.)

- (ii) Для любых двух ребер $e = (x, y)$, $e' = (x', y') \in E_T$ (таких, что $x_0 \in G(x, y) \cap G(x', y')$) проверяем, выполнено ли условие $\langle e, e' \rangle \in \{0, 1, 2\}$. Если не выполнено, то граф G не может быть изометрично вложен в граф полукуба.
- (iii) Определим на E_T отношение $\sim$, полагая

$$e \sim e' \quad \text{если } \langle e, e' \rangle = 2.$$

Проверяем, является ли данное отношение отношением эквивалентности на E_T . Если не является, то граф G не может быть изометрично вложен в граф полукуба.

- (iv) Определим на фактор-множестве $(E_T, \sim)$ структуру графа Σ , соединяя ребром те классы $\bar{e}$ и $\bar{e}'$, для которых $\langle e, e' \rangle = 1$. Проверяем корректность этого определения, т. е., что значение $\langle e, e' \rangle$ не зависит от выбора представителей классов. Если зависит, то граф G не может быть изометрично вложен в граф полукуба.
- (iv) Проверяем, является ли граф Σ реберным. (Это можно проделать за время $O(m')$, где m' — число ребер графа Σ (Лехо [1975]); заметим, что $m' < n^2$). Если граф Σ не является реберным, то граф G не может быть изометрично вложен в граф полукуба.

Пусть H_Σ — граф, реберным графом которого является Σ . Тогда изометричное вложение графа G в граф полукуба можно построить следующим образом.

Поставим в соответствие вершине x графа G множество X с помощью следующей рекурсивной процедуры. Сначала ставим в соответствие вершине x_0 пустое множество $X_0 = \emptyset$. Пусть $e := (x, y)$ — такое ребро графа G , что $x_0 \in G(x, y)$, и предположим, что вершина x уже занумерована множеством X . Класс эквивалентности $\bar{e}$ (из фактора $(E_T, \sim)$) является вершиной графа Σ , и таким образом соответствует ребру $p(\bar{e})$ графа H_Σ , где $p(\bar{e})$ — двухэлементное множество. Занумеруем вершину y множеством $Y := X \cup p(\bar{e})$. Проверим, что это построенное соответствие $x \mapsto X$ задает изометричное вложение графа G в граф полукуба.

Заметим, что

$$|p(\bar{e}) \cap p(\bar{e}')| = \langle e, e' \rangle$$

для всех ребер $e, e' \in E_T$. В частности, $p(\bar{e}) \cap p(\bar{e}') = \emptyset$ тогда и только тогда, когда ребра e и e' не находятся в отношении θ . Покажем сначала, что

$$|X| = 2d_G(x_0, x) \quad \text{при всех } x \in V.$$

Для этого обозначим через $(x_0, x_1, \dots, x_p := x)$ путь из x_0 в x в дереве T , где $p := d_G(x_0, x)$. Обозначим через e_i ребро (x_{i-1}, x_i) при $i = 1, \dots, p$.

По построению, вершина x занумерована множеством

$$X := p(\bar{e}_1) \cup \dots \cup p(\bar{e}_p).$$

Тогда $|X| = 2p = 2d_G(x_0, x)$, так как множества $p(\bar{e}_i)$ попарно не пересекаются, в силу того, что ребра $e_1, \dots, e_p$ не находятся в отношении θ . Проверим теперь, что

$$|Y \triangle Y'| = 2d_G(y, y') \quad \text{при всех } y, y' \in V.$$

Докажем это индукцией по $s := d_G(x_0, y) + d_G(x_0, y')$. Можно считать, что вершины y, y' отличны от x_0 . Рассмотрим вершину x , стоящую перед y на пути из x_0 в y в дереве T , и вершину x' , стоящую перед y' на пути из x_0 в y' . Положим $e := (x, y)$ и $e' := (x', y')$. По предположению индукции, имеем:

$$|X \triangle X'| = 2d_G(x, x'), \quad |X \triangle Y'| = 2d_G(x, y'), \quad |X' \triangle Y| = 2d_G(y, x'),$$

или, что то же самое,

$$(a) \quad \begin{cases} X \cap X' = d_G(x_0, x) + d_G(x_0, x') - d_G(x, x'), \\ X \cap Y' = d_G(x_0, x) + d_G(x_0, y') - d_G(x, y'), \\ X' \cap Y = d_G(x_0, y) + d_G(x_0, x') - d_G(y, x'). \end{cases}$$

По построению, $Y = X \cup p(\bar{e})$, $Y' = X' \cup p(\bar{e}')$, и, следовательно,

$$(b) \quad |Y \cap Y'| = |X \cap Y'| + |X' \cap Y| - |X \cap X'| + |p(\bar{e}) \cap p(\bar{e}')|.$$

С другой стороны,

$$|Y \triangle Y'| = |Y| + |Y'| - 2|Y \cap Y'| = 2d_G(x_0, y) + 2d_G(x_0, y') - 2|Y \cap Y'|.$$

Таким образом, из (a), (b) и (21.2.13) получаем равенство

$$|Y \triangle Y'| = 2(d_G(x, y') + d_G(y, x') - d_G(x, x') - |p(\bar{e}) \cap p(\bar{e}')|) = 2d_G(y, y'),$$

которое завершает доказательство. $\blacksquare$

21.4. Еще немного о ℓ_1 -графах

Здесь мы приводим несколько дополнительных фактов и результатов, относящихся к структурным свойствам ℓ_1 -графов.

Предложение 19.1.2 показывает, что каждый вложимый в гиперкуб граф является ℓ_1 -жестким. Следовательно, имеет место следующая цепочка импликаций:

Граф G является изометричным подграфом гиперкуба
 $\implies G$ — ℓ_1 -жесткий граф
 $\implies G$ является изометричным подграфом графа полукуба

ℓ_1 -жесткость некоторых классов графов доказана в работе Деза и Лоран [1994a]; в их числе графы полукубов $\frac{1}{2}H(n, 2)$ ($n \neq 3, 4$), графы Джонсона $J(n, d)$ ($d \neq 1$), графы Петерсена и Шрикханде, додекаэдр, икосаэдр и все взвешенные циклы. Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 19.1.2. А именно, проверяется, что метрика кратчайшего пути для данного графа принадлежит симплициальной грани соответствующего разрезного конуса. В работах Чепого, Деза и Гришухина [1997], Деза и Гришухина [1997a], Деза, Деза и Гришухина [1998] проводится дальнейшее исследование вопроса о ℓ_1 -жесткости для других классов графов.

Примечательно, что ℓ_1 -граф может не являться ℓ_1 -жестким из-за того, по сути, что не являются ℓ_1 -жесткими полные графы с не менее, чем четырьмя вершинами. Действительно, из теоремы 21.1.3 следует, что любое ℓ_1 -вложение графа G возникает из некоторого ℓ_1 -вложения его расширения $\hat{G}$. Так как $\hat{G}$ является прямым произведением полных графов, графов $K_{n \times 2}$ и графов полукубов, то множество ℓ_1 -вложений графа $\hat{G}$ определяется множествами ℓ_1 -вложений его сомножителей. Но граф полукуба не является ℓ_1 -жестким только когда он совпадает с K_4 или $K_{4 \times 2}$. Более того, ℓ_1 -вложение графа $K_{n \times 2}$ возникает из ℓ_1 -вложения графа K_n , так как метрика кратчайшего пути графа $K_{n \times 2}$ может быть построена из метрики на K_n с помощью антиподального отображения (см. раздел 7.4). Таким образом, множество ℓ_1 -вложений графа $\hat{G}$, а, значит, и графа G определяется множествами ℓ_1 -вложений полных графов; подробным исследованием множеств вложений полных графов мы займемся в главе 23. В действительности, как мы убедимся в предложении 21.4.4 ниже, если ℓ_1 -граф не является ℓ_1 -жестким, то он обязательно содержит клику с не менее, чем четырьмя вершинами.

В разделе 19 мы привели структурное описание изометричных подграфов гиперкубов. теорема 21.4.2 ниже дает описание структурное описание изометричных подграфов графов полукубов. Этот результат установлен в работе Чепого, Деза и Гришухина [1997], и его можно рассматривать, как аналог теоремы 19.2.5 для случая изометричных подграфов гиперкубов. С другой стороны, никакого подобного

результата для произвольных ℓ_1 -графов неизвестно. Следовательно, является открытой следующая проблема.

Проблема 21.4.1. *Дать структурное описание ℓ_1 -графов (например, в терминах запрещенных изометричных подпространств).*

Для некоторых классов графов существует такое описание. Например, в теореме 17.1.8 мы привели описание всех ℓ_1 -графов с универсальной вершиной¹⁾. Этот результат приведен во второй части, потому что его доказательство опирается на технику гиперметрик и многогранников Делоне. В частности, как мы убедились в следствии 17.1.10, если G — граф с $n \geq 28$ ($n \geq 37$) вершинами, то его надстройка ∇G является ℓ_1 -графом тогда и только тогда, когда граф ∇G гиперметричен (соответственно, пентагонален и имеет отрицательный тип).

Обратимся к исследованию изометричных подграфов графов полукубов (т. е. ℓ_1 -графов со шкалой 2). Нам потребуется следующее определение. Для целого $k \geq 0$ обозначим через $T_k = (X, d_k)$ пространство расстояний на множестве $X := \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4\}$, заданное соотношениями:

$$\begin{aligned} d_k(a_i, a_j) &= d_k(b_i, b_j) := 1 \quad \text{при всех } 0 \leq i < j \leq 4, \\ d_k(a_0, b_0) &:= k + 2, \\ d_k(a_i, b_i) &:= k \quad \text{при } i = 1, 2, 3, 4, \\ d_k(x, y) &:= k + 1 \quad \text{во всех остальных случаях, т. е. на парах} \\ &\quad (a_0, b_i), (b_0, a_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \text{ и } (a_i, b_j) \quad (i \neq j \in \{1, 2, 3, 4\}). \end{aligned}$$

В случае $k = 0$, пространство T_0 совпадает (с точностью до гейт-0-расширения) с пространством расстояний графа $K_6 \setminus e$, минимальная шкала которого равна 4 (см. раздел 7.4). Так как $d_k = d_0 + k\delta(\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\})$, то каждое пространство T_k вкладывается в гиперкуб со шкалой 4. На самом деле ни одно из T_k не может быть вложено в гиперкуб со шкалой 2, и пространства расстояний T_k оказываются единственными препятствиями для изометричного вложения в граф гиперкуба.

Теорема 21.4.2. *Пусть $G = (V, E)$ — ℓ_1 -граф. G является изометричным подграфом графа некоторого полукуба тогда и только тогда, когда его пространство расстояний (V, d_G) не содержит T_k ($k \geq 0$) в качестве изометричного подпространства.*

¹⁾ То есть надстроенных. — Прим. перев.

Доказательство. Проверим сначала, что пространства расстояний $T_k = (X, d_k)$ ($k \geq 0$) не могут быть вложены в гиперкуб со шкалой 2. Для T_0 это известно. Рассмотрим наименьшее такое $k \geq 1$, что T_k допускает вложение в гиперкуб со шкалой 2. Рассмотрим разложение

$$2d_k = \sum_{\delta(S) \in \mathcal{C}_k} \delta(S),$$

где $\mathcal{C}_k$ — набор (не обязательно различных) разрезных полуметрик на X . По лемме 4.2.8 все разрезные полуметрики из $\mathcal{C}_k$ являются d_k -выпуклыми. Заметим, что единственной d_k -выпуклой разрезной полуметрикой $\delta(S)$, удовлетворяющей условиям $a_1 \in S$ и $b_1 \notin S$, является $\delta(S_0) := \delta(\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\})$. Следовательно, данная разрезная полуметрика встречается в $\mathcal{C}_k$ $2k$ раз. Таким образом, $2d_k - 2\delta(S_0)$ совпадает с $2d_{k-1}$ и имеет разложение в виде суммы разрезных полуметрик (так как $k \geq 1$). Значит, T_{k-1} также допускает вложение в гиперкуб со шкалой 2, что противоречит выбору k .

Обратно, пусть $G = (V, E)$ — ℓ_1 -граф, не допускающий изометричного вложения в граф полукуба. Докажем, что пространство (V, d_G) содержит T_k как изометричное подпространство. В силу следствия 21.1.5 граф G является изометричным подграфом прямого произведения графов $K_{n \times 2}$ и графов полукубов. Это произведение должно содержать граф $K_{m \times 2}$ для $m \geq 5$ (иначе шкала G была бы равна 2). Пусть, например, G — изометричный подграф графа $\Gamma := K_{m \times 2} \times H$, где $m \geq 5$, а H является произведением графов $K_{n \times 2}$ и графов полукубов. Более того, можно считать, что граф $K_{m \times 2}$ содержит такой подграф $K_{m+1} \setminus e$, что для каждой вершины v графа $K_{m+1} \setminus e$ в множестве $\{v\} \times V(H)$ содержится хотя бы одна вершина графа G . (В противном случае можно заменить граф $K_{m \times 2}$ на меньший граф $K_{n \times 2}$ или на полный граф.) Обозначим через K множество вершин графа $K_{m+1} \setminus e$, образующих клику размера m . Для каждой вершины v графа $K_{m+1} \setminus e$ назовем множество $\{v\} \times V(H)$ *слоем* произведения Γ . Легко убедиться, что

- Любое объединение слоев вида $\bigcup_{v \in K_0} \{v\} \times V(H)$, где $K_0 \subseteq K$,
 (а) является выпуклым (относительно метрики кратчайшего пути графа Γ .)

Утверждается, что выполнено также и следующее:

- Множество $V(G) \cap (\bigcup_{v \in K} \{v\} \times V(H))$, содержит клику размера
 (б) m , пересекающую каждый слой $\{v\} \times V(H)$ ($v \in K$) ровно в одной точке.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим клику $C \subseteq V(G) \cap \bigcap (\bigcup_{v \in K} \{v\} \times V(H))$ максимального размера (для которой все эле-

менты имеют одну и ту же H -координату). Предположим, что $C \cap (\{w\} \times V(H)) = \emptyset$ при некотором $w \in K$. Заметим, что каждая вершина $x \in V(G) \cap (\{w\} \times V(H))$ находится на одном и том же расстоянии от всех вершин C ; рассмотрим вершину x , для которой это расстояние минимально. Для каждой вершины $y \in C$ рассмотрим геодезический путь в графе G из x в y . По утверждению (а), такой путь целиком содержится в объединении двух слоев, содержащих x и y . Пусть этот путь имеет вид $(x, \tilde{y}, \dots, y)$. Вершина $\tilde{y}$ не может принадлежать тому же слою, что и x (в силу условия минимальности, наложенного на x). Значит, $\tilde{y}$ принадлежит тому же слою, что и y . Следовательно, вершины x и $\tilde{y}$ для всех $y \in C$ образуют клику большего размера, чем C . Таким образом, утверждение (b) доказано.

Обозначим через $C \subseteq V(G)$ клику размера m , пересекающую каждый слой $\{v\} \times V(H)$, где $v \in K$. Обозначим через w, w' две несмежные вершины графа $K_{m+1} \setminus e$ такие, что $w \in K$, $w' \notin K$. Обозначим через s вершину C , принадлежащую слою $\{w\} \times V(H)$. По предположению, в слое $\{w'\} \times V(H)$ тоже содержится некоторая вершина графа G . Каждая из таких вершин находится на одном и том же расстоянии $k \geq 1$ от всех вершин из $C \setminus \{s\}$; выберем вершину t для которой это расстояние минимально. Тогда $d_G(s, t) = k + 1$ и $d_G(t, y) = k$ при всех $y \in C \setminus \{s\}$. Рассмотрим геодезический путь в графе G из вершины t в вершину $y \in C \setminus \{s\}$. Он имеет вид $(t, y', \dots, y)$, где y' принадлежит тому же слою, что и y (в силу минимальности k). Таким образом, вершины t, y' (для всех $y \in C \setminus \{s\}$) образуют клику и $d_G(y, y') = k - 1$ при $y \in C \setminus \{s\}$. Так как $|C \setminus \{s\}| \geq 4$, то в пространстве $\{s, t\} \cup \{y, y' \mid y \in C \setminus \{s\}\}$ найдено изометричное подпространство пространства (V, d_G) вида T_{k-1} . Теорема доказана. ■

Следствие 21.4.3. Пусть G — ℓ_1 -граф, не содержащий клику из пяти элементов. Тогда G является изометричным подграфом графа полукуба. ■

Объединяя сведения о ℓ_1 -графах, полученные как ранее в этой главе, так и при доказательстве теоремы 21.4.2, можно доказать следующее уточнение следствия 21.4.3.

Предложение 21.4.4. Пусть G — ℓ_1 -граф, не содержащий клику размера четыре. Тогда G является ℓ_1 -жестким графом (и, следовательно, изометричным подграфом графа полукуба).

Доказательство. Пусть G — не ℓ_1 -жесткий ℓ_1 -граф. Следуя обозначениям раздела 21.2, положим

$$G \hookrightarrow \overline{G} = \prod_{h=1}^k \overline{G}_h \hookrightarrow \widehat{G} = \prod_{h=1}^k \widehat{G}_h,$$

где $\prod_{h=1}^k \overline{G}_h$ — каноническое метрическое представление графа G , а каждый сомножитель $\widehat{G}_h$ изоморфен либо полному графу K_m ($m \geq 2$), либо графу $K_{m \times 2}$ ($m \geq 2$), либо графу полукуба $\frac{1}{2}H(m, 2)$ ($m \geq 5$).

По следствию 21.1.6, граф $\widehat{G}$ не является ℓ_1 -жестким. Следовательно, хотя бы один из сомножителей $\widehat{G}_h$ не является ℓ_1 -жестким. Значит, это граф K_m или $K_{m \times 2}$ при $m \geq 4$. Тогда граф $\overline{G}_h$ содержит клику размера $m \geq 4$ (см. доказательство следствия 21.2.8). Таким образом, G является изометричным подграфом $\overline{G}_h \times H$, где $H := \prod_{h' \neq h} \overline{G}_{h'}$. Легко убедиться, что утверждение (b) теоремы 21.4.2 в этих условиях остается верным. Следовательно, в графе G найдена клика размера $m \geq 4$. ■

В частности, мы вновь убедились, что все двудольные ℓ_1 -графы являются ℓ_1 -жесткими. Более того, мы доказали, что, например, все трехдольные графы тоже являются ℓ_1 -жесткими.

Вернемся к общему случаю произвольных ℓ_1 -графов. Представляется интересным вопрос о классификации ℓ_1 -графов внутри каких-либо заданных классов графов. Такая классификация известна, например, для дистанционно-регулярных графов (см. следствие 17.2.9). В ряде работ этот вопрос исследовался для некоторых других классов графов, которые мы сейчас кратко опишем.

Графы G , для которых как G , так и дополнение $\overline{G}$ являются ℓ_1 -графами, исследовались в работе¹⁾ Деза и Хуанга [1996a], а ℓ_1 -вложимость графов, связанных с блок-схемами, рассматривалась в работе Деза и Хуанга [1996b].

Деза и Гришухин [1996a, 1996b, 1997a] описали ℓ_1 -графы в классах графов многих хорошо известных многогранников (т. е. в классах, состоящих из графов 1-остовов этих многогранников), таких как полурегулярные многогранники, многогранники с регулярными гранями, зонотопы, многогранники Делоне размерности ≤ 4 , и некоторые обобщения призм и антипризм.

¹⁾ Шпекторов [1998b] доказал, что для любого $n \geq 21$ существует в точности одна пара дополнительных ℓ_1 -графов на n вершинах. — *Прим. ред.*

Деза, Деза и Гришухин [1998] исследовали класс графов многогранников, возникающих из фулеренов. Фулерены и двойственные к ним имеют многочисленные применения в химии, компьютерной графике, микробиологии, архитектуре и т. д. Например, они появляются как молекулы углерода, сферические возмущения, вирусные капсиды и геодезические своды. Определить их можно следующим образом. Фулереном F_n называется простой 3-мерный многогранник с n вершинами, имеющий 12 пятиугольных и $\frac{n}{2} - 10$ шестиугольных граней. Такие многогранники существуют при всех $n \geq 20$, кроме $n = 22$. Среди прочих результатов в работе Деза, Деза и Гришухин [1998] установлено, что граф любого гиперметрического фулерена ℓ_1 -вложим (со шкалой 2, в силу предложения 21.4.5 ниже) и приведены примеры ℓ_1 -вложимых фулеренов.

К той же тематике относятся и работы Деза и Штогрин [1996, 1997, 1998, 2000a, 2000b, 2000c], в которых исследуется ℓ_1 -вложимость (бесконечных) графов, соответствующих остовам замощений плоскости. В частности, там дается описание всех ℓ_1 -графов, соответствующих полурегулярным и 2-равномерным разбиениям плоскости, двойственных к ним разбиений, и регулярных разбиений гиперболической плоскости.

Несколько авторов исследовали ℓ_1 -графы в классе планарных графов. Применяя следствие 21.4.3, немедленно получаем

Предложение 21.4.5. *Шкала любого планарного ℓ_1 -графа равна 2 (т. е. данный граф изометрично вкладывается в граф полукуба).* ■

Присакару, Солтан и Чепой [1990] показали, что каждый планарный граф, удовлетворяющий следующим ниже условиям (i)–(iv) ℓ_1 -вложим. Зафиксируем изображение графа G на плоскости. Тогда условия на граф G следующие: (i) каждое ребро принадлежит не более, чем двум граням; (ii) каждая внутренняя грань графа G имеет не менее пяти вершин; (iii) любые две внутренние грани пересекаются не более, чем по одному ребру; (iv) степень каждой внутренней вершины ≥ 4 .

Деза и Тума [1996] описали ℓ_1 -графы в классе подразбиений колес. *Колесом* называется граф, полученный из цикла C добавлением новой вершины, смежной со всеми остальными. Например, граф K_4 — колесо; на рисунке 31.3.12 (а) приведено колесо для цикла C длины 6. *Подразбиением колеса* называется граф, полученный из колеса заменой некоторых ребер цикла C путями. На рисунке 21.4.7 пунктирными линиями обозначены пути, и каждая грань помечена, как «четная» или

«нечетная» в зависимости от четности длины окружающего ее цикла. Следующая теорема доказана в Деза и Тума [1996].

Теорема 21.4.6. *Подразбиение колеса является ℓ_1 -графом тогда и только тогда, когда оно не является ни одним из графов (a),(b),(c) рисунка 21.4.7. Более того, подразбиение колеса является ℓ_1 -жестким графом тогда и только тогда, когда оно отлично от K_4 .* ■

Чепой, Деза и Гришухин [1997] провели дальнейшее исследование планарных ℓ_1 -графов G , удовлетворяющих следующим двум условиям: (i) каждая грань графа G ограничена изометричным циклом; (ii) любые две внутренние грани пересекаются не более, чем по одному ребру (для фиксированного вложения графа G в плоскость). В частности, они доказали, что любой внешнепланарный¹⁾ граф является ℓ_1 -графом. Другим примером, когда выполняются условия (i)-(ii) служат *триангуляции*, т. е. графы, допускающие плоское вложение, при котором каждая грань ограничена тремя ребрами. Бандельт и Чепой [1998b] показали, что любая триангуляция, все внутренние вершины которой имеют степень, большую пяти, является ℓ_1 -графом, и притом ℓ_1 -жестким. Более того, по предложению 21.4.4 каждая ℓ_1 -триангуляция, не содержащая в качестве индуцированного подграфа K_4 , является ℓ_1 -жесткой.

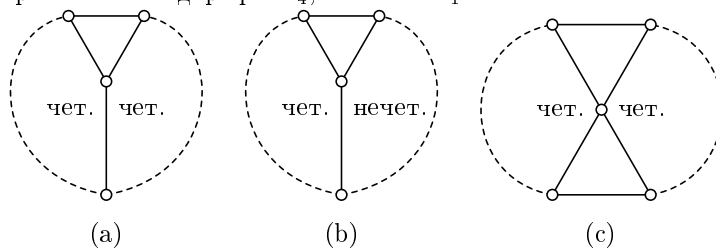


Рис. 21.4.7. Подразбиения колес, не являющиеся ℓ_1 -графами

¹⁾ *Внешнепланарным* называется граф, допускающий такое плоское вложение, что все его вершины принадлежат одной (внешней) грани.

Часть IV.

**Блок-схемы и вложения
в гиперкуб**

Введение

В этой, четвертой, части мы изучаем изометричные вложения полуметрик в гиперкубы, в частности, связь этого вопроса с теорией блок-схем.

Рассмотрим целое число $t \geq 1$. Очень простым примером метрики на n точках служит *эквилистантная* метрика $2t\mathbb{1}_n$, принимающая одно и то же значение $2t$ на каждой паре¹⁾ точек. Очевидно, что метрика $2t\mathbb{1}_n$ вкладывается в гиперкуб. Действительно, вложение $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб можно получить, нумеруя вершины попарно непересекающимися множествами из t элементов. Основным результатом, установленный в главе 22, гласит, что при достаточно больших n (например, при $n \geq t^2 + t + 3$), это вложение по сути является единственным вложением $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб. Более того, при $n \geq t^2$, существование другого вложения $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб зависит исключительно от того, существует ли проективная плоскость порядка t . В дальнейшем, в главе 23, мы исследуем, как различные вложения $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб получаются с помощью блок-схем. В главе 24 мы изучаем некоторые другие классы метрик, для которых мы можем дать описание вложимости в гиперкуб. В основном эти метрики принимают немного значений, так что большую пользу приносит имеющаяся информация об их эквилистантных подметриках. Например, для данных целых a, b можно дать описание вложимых в гиперкуб метрик со значениями в множестве $\{a, 2a\}$ или множестве $\{a, b, a+b\}$ (при условии, что из чисел $a, b, a+b$ — два четных). Более того, это описание предоставляет полиномиальный по времени алгоритм, распознающий вложимость в гиперкуб таких метрик. Напомним, что для произвольных полуметрик задача распознавания вложимости в гиперкуб является NP-трудной. Некоторые дополнительные результаты, относящиеся к вложимости в гиперкуб, приводятся в главе 25, а именно, результаты, связанные с решетками разрезов, квази h -точками и базами Гильберта разрезов метрик.

Напомним некоторые определения и термины, которые потребуются нам в этой главе. Пусть d — метрика на множестве $V_n := \{1, \dots, n\}$. Тогда метрика d называется *вложимой в гиперкуб*, если существуют

¹⁾ Различных. — Прим. перев.

векторы $u_i \in \{0, 1\}^m$ (при $m \geq 1$, $i \in V_n$) такие, что

$$(a) \quad d(i, j) = \|u_i - u_j\|_1$$

при всех $i, j \in V_n$. Обозначим через M матрицу размера $n \times m$, строками которой являются векторы $u_1, \dots, u_m$. Будем говорить, что матрица M *реализует* вложение $u_1, \dots, u_n$ метрики d . Каждый вектор u_i можно рассматривать как вектор инцидентности подмножества A_i множества $\{1, \dots, m\}$. Следовательно,

$$(b) \quad d(i, j) = |A_i \Delta A_j|$$

при всех $i, j \in V_n$. Множества $A_1, \dots, A_n$ будем также называть *h-помечиванием* метрики d .

Ясно, что если матрица M является h -реализацией метрики d , то без потери общности можно считать одну из строк матрицы M нулевым вектором. Таким образом, мы можем полагать, что одна из вершин множества V помечена пустым множеством в соответствующем h -помечивании метрики d .

Обозначим через $\mathcal{B}$ набор подмножеств множества V_n , для которых векторами инцидентности являются столбцы матрицы M ; $\mathcal{B}$ является мультинабором, т. е. может содержать одно и то же множество несколько раз. Тогда (a) можно переписать в виде:

$$(c) \quad d = \sum_{B \in \mathcal{B}} \delta(B).$$

Это вновь доказывает (см. предложение 4.2.4), что в гиперкуб вложимы те, и только те, полуметрики, которые раскладываются в линейную комбинацию разрезных полуметрик с неотрицательными целыми коэффициентами. Если условие (c) выполнено, то мы будем говорить, что $\sum_{B \in \mathcal{B}} \delta(B)$ является $\mathbb{Z}_+$ -реализацией метрики d . Удобно использовать оба представления (a) (или (b)) и (c) для вложимой в гиперкуб метрики d . Итак, мы будем говорить о вложениях в гиперкуб (или h -помечиваниях) метрики d и $\mathbb{Z}_+$ -реализациях метрики d , что сводится к рассмотрению строк или столбцов матрицы M , соответственно.

Напомним, что метрика d называется h -жесткой, если d имеет единственную $\mathbb{Z}_+$ -реализацию, или, что то же самое, если d допускает единственное (с точностью до некоторой эквивалентности) вложение в гиперкуб. Эквивалентность вложений вводилась в разделе 4.3; приведем еще раз это определение. Пусть $\mathcal{B}$ — набор подмножеств множества V_n , удовлетворяющий условию (c). Рассмотрим набор $\mathcal{B}'$, полученный из $\mathcal{B}$ применением следующих операций:

- (i) удаление или прибавление к $\mathcal{B}$ пустого множества или всего множества V_n ,
- (ii) замена элемента $B \in \mathcal{B}$ на его дополнение $V_n \setminus B$.

Тогда набор $\mathcal{B}'$ также удовлетворяет условию (с). Наборы $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{B}$ называются *эквивалентными* (так как они задают одну и ту же $\mathbb{Z}_+$ -реализацию метрики d). В этом случае соответствующие вложения в гиперкуб также называются *эквивалентными*.

Глава 22.

Жесткость эквидистантной метрики

В этой главе мы исследуем жесткость эквидистантной метрики $2t\mathbb{1}_n$ при $n \geq 3, t \geq 1$ (n, t — целые). Как уже было сказано, метрика $2t\mathbb{1}_n$ является вложимой в гиперкуб. Действительно, вложение $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб получается с помощью нумерации вершин попарно непересекающимися множествами из t элементов. Такое вложение метрики $2t\mathbb{1}_n$ называется *звездным*, и соответствующая ему $\mathbb{Z}_+$ -реализация

$$(22.0.1) \quad 2t\mathbb{1}_n = \sum_{1 \leq i \leq n} t\delta(\{i\}),$$

также называется *звездной*. Слово «звезда» выбрано потому, что каждая разрезная полуметрика $\delta(\{i\})$ принимает ненулевые значения на парах (i, j) при $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, т. е. на ребрах звезды. Вложение метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб называется *нетривиальным*, если оно не эквивалентно звездному вложению, т. е. задает $\mathbb{Z}_+$ -реализацию метрики $2t\mathbb{1}_n$, отличную от звездной реализации (22.0.1). Таким образом, метрика $2t\mathbb{1}_n$ является h -жесткой, если у нее нет нетривиальных вложений в гиперкуб.

При $n = 3$ эквидистантная метрика $2t\mathbb{1}_3$ является h -жесткой. В действительности это обусловлено тем, что разрезной конус CUT_3 является симплексом (так как CUT_3 порождается тремя линейно независимыми векторами $\delta(\{i\})$ при $i = 1, 2, 3$). При $n = 4$, метрика $2t\mathbb{1}_4$ не является h -жесткой. Действительно, кроме звездной реализации (22.0.1) метрика $2t\mathbb{1}_4$ допускает следующую реализацию:

$$(22.0.2) \quad 2t\mathbb{1}_4 = t(\delta(\{1, 2\}) + \delta(\{1, 3\}) + \delta(\{1, 4\}));$$

других реализаций у $2t\mathbb{1}_4$ нет. На самом деле, ни при каком $n \geq 4$ метрика $2t\mathbb{1}_n$ не является ℓ_1 -жесткой, так как, например, формула

$$2t\mathbb{1}_n = \frac{t}{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \delta(\{i, j\})$$

задает разложение $2t\mathbb{1}_n$ в сумму разрезных полуметрик с неотрицательными коэффициентами, отличную от (22.0.1). С другой стороны, как мы

убедимся ниже, если n достаточно велико по отношению к t , то метрика $2t\mathbb{1}_n$ — h -жесткая.

Есть простой способ построения нетривиальных вложений метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб с помощью (частичных) проективных плоскостей. Сначала напомним определение.

(Конечной) *проективной плоскостью порядка t* (обозначаемой обычно через $\text{PG}(2, t)$) называется пара $(X, \mathcal{L})$, где X — множество точек, а $\mathcal{L}$ — набор подмножеств из X называемых *прямыми*, причем выполнены условия:

- (i) каждая прямая $L \in \mathcal{L}$ состоит из $t + 1$ точки,
- (ii) каждая точка из X принадлежит $t + 1$ прямой, и
- (iii) через каждые две различные точки из X проходит ровно одна прямая.

Таким образом, в $\text{PG}(2, t)$ одинаковое число $(t^2 + t + 1)$ прямых и точек. Более того,

- (iv) любые две различные прямые из $\mathcal{L}$ пересекаются ровно в одной точке.

В случае $t = 1$ есть три точки и три прямые, соответствующие всем возможным парам точек. Мы будем интересоваться проективными плоскостями при $t \geq 2$. Хорошо известно, что проективные плоскости существуют при любом t , равном степени простого числа¹⁾. Вопрос о том, при каких других значениях t существуют проективные плоскости данного порядка, является открытой проблемой комбинаторики. Известно, что не существует проективных плоскостей порядка 6 и 10; случай $t = 10$ был изучен с помощью компьютера (Лам, Тиль и Свирц [1989]) (см., например, книгу Холла [1977] с более подробной информацией о проективных плоскостях).

Частичной проективной плоскостью порядка t называется пара $P = (X, \mathcal{L})$, удовлетворяющая условиям (i) и (iv) из приведенных выше. Мы предполагаем, что каждая точка лежит хотя бы на одной прямой. Плоскость P называется тривиальной, если все прямые пересекаются в одной точке. Легко убедиться, что для нетривиальной частичной плоскости P имеет место неравенство $|\mathcal{L}| \leq t^2 + t + 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда P является проективной плоскостью (порядка t). Более того, каждая точка принадлежит не более, чем $t + 1$ прямой. Ясно, что на нетривиальной проективной плоскости порядка 1 не более 3 прямых.

¹⁾ Это следует из существования конечных полей из p^n элементов (p — простое). — Прим. перев.

Холл [1977] доказал, что каждую частичную проективную плоскость с достаточно большим числом прямых можно расширить до проективной плоскости. Точнее, имеет место

Теорема 22.0.3. *Рассмотрим нетривиальную частичную проективную плоскость $P = (X, \mathcal{L})$ порядка $t \geq 2$ с $|\mathcal{L}| \geq t^2 - 1$ прямой. Тогда можно расширить P до проективной плоскости $P_1 = (X_1, \mathcal{L}_1)$ порядка t , т. е. $X \subseteq X_1$, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_1$.* ■

Рассмотрим частичную проективную плоскость $P = (X, \mathcal{L})$ порядка t с $n := |\mathcal{L}|$ прямыми. Тогда P задает вложение метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб с помощью нумерации элементов V_n прямыми из $\mathcal{L}$. Заметим, что такое вложение нетривиально в точности, когда нетривиальна плоскость P . Таким образом, из существования частичной проективной плоскости порядка t , следует, что метрика $2t\mathbb{1}_n$ не является h -жесткой. (Напомним, что в этом случае $n \leq t^2 + t + 1$.) Более того, в этом случае и метрика $2t\mathbb{1}_{n+1}$ не является h -жесткой. Действительно, пусть Z — множество из $t - 1$ элемента, непересекающееся с X . Если мы пометим элементы V_n множествами $L \cup Z$ при $L \in \mathcal{L}$, а оставшийся элемент из $V_{n+1} \setminus V_n$ — пустым множеством, то получим нетривиальное вложение в гиперкуб метрики $2t\mathbb{1}_{n+1}$.

На самом деле, для достаточно больших n существование нетривиального вложения в гиперкуб метрики $2t\mathbb{1}_n$ зависит только от существования частичной проективной плоскости порядка t с подходящим числом прямых. Две следующие теоремы были доказаны Холлом [1977].

Теорема 22.0.4. *Пусть $n \geq t^2 \geq 4$. Тогда метрика $2t\mathbb{1}_n$ не является h -жесткой в том, и только том случае, когда $n \leq t^2 + t + 2$ и существует проективная плоскость порядка t .*

Теорема 22.0.5. *Пусть $n \geq \frac{1}{2}(t + 2)^2$, $t \geq 2$. Если метрика $2t\mathbb{1}_n$ не является h -жесткой, то существует частичная проективная плоскость порядка t с $n - 1$ прямой.*

В действительности, как мы покажем ниже, теорема 22.0.4 легко следует из теорем 22.0.3 и 22.0.5. Применяя теорему 22.0.5, получаем следующие теоремы 22.0.6 и 22.0.7, доказанные ранее соответственно Деца [1973b] и ван Линтом [1973]. (Случай $t = 1$ теоремы 22.0.6 не покрывается теоремой 22.0.5, но легко проверяется непосредственно.) Другой случай h -жесткости рассмотрен ниже в следствии 23.2.5.

Теорема 22.0.6. Если $n \geq t^2 + t + 3$ и $t \geq 1$, то метрика $2t\mathbb{1}_n$ — h -жесткая, т. е. единственной $\mathbb{Z}_+$ -реализацией $2t\mathbb{1}_n$ является звездная реализации (22.0.1). ■

Теорема 22.0.7. Пусть $n = t^2 + t + 2$, $t \geq 3$. Если метрика $2t\mathbb{1}_n$ не является h -жесткой, то существует проективная плоскость порядка t . ■

Доказательство теоремы 22.0.4. Пусть $n \geq t^2 \geq 4$ и метрика $2t\mathbb{1}_n$ не является h -жесткой. Докажем, что существует проективная плоскость порядка t . Если $t \geq 5$, то это немедленно следует из теорем 22.0.3 и 22.0.5, так как $t^2 \geq \frac{1}{2}(t+2)^2$; с другой стороны известно, что существуют проективные плоскости порядка $t \in \{2, 3, 4\}$. Проверим теперь, что $n \leq t^2 + t + 2$. Для этого заметим, что из неравенства $n \geq t^2 + t + 3$ следует $n \geq \frac{1}{2}(t+2)^2$, откуда по теореме 22.0.5 следует существование частичной проективной плоскости порядка t с $n - 1$ прямой. В свою очередь, это означает, что $n - 1 \leq t^2 + t + 1$, что приводит к противоречию. Обратно, легкая проверка показывает, что проективная плоскость порядка t определяет нетривиальное вложение метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб при $n \geq t^2$. ■

Обратимся к доказательству теоремы 22.0.5. Мы будем пользоваться следующими обозначениями. Пусть M — двоичная $n \times m$ матрица, h -реализующая вложение метрики $2t\mathbb{1}_n$. Без потери общности можно считать, что первая строка матрицы M — нулевая. Тогда каждая другая строка M содержит $2t$ единиц, и любые две строки (отличные от первой) имеют t общих единиц. Для данной ненулевой строки u_0 матрицы M обозначим через $M \oplus u_0$ матрицу, полученную заменой каждой строки матрицы M на ее сумму (по модулю 2) со строкой u_0 . Ясно, что матрица $M \oplus u_0$ тоже является h -реализующей матрицей метрики $2t\mathbb{1}_n$ с одной нулевой строкой. Более того, матрица $M \oplus u_0$ задает нетривиальное вложение метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб тогда и только тогда, когда матрица M задает нетривиальное вложение. Начнем с предварительного результата о числе единиц r в столбцах матрицы M ; неравенство $r(n - r) \leq nt$ леммы 22.0.8 было доказано Деза [1973b], а случай равенства исследован Холлом [1977].

Лемма 22.0.8. Обозначим через r число единиц в столбце матрицы M . Тогда выполнено неравенство $r(n - r) \leq nt$, откуда следует, что

$$\min(r, n - r) \leq \frac{1}{2}(n - \sqrt{n^2 - 4nt}).$$

Более того, $r = \frac{n}{2}$, если $r(n-r) = nt$.

Доказательство. Пусть w — столбец матрицы M , и r — число единиц в нем. Обозначим через ρ число столбцов матрицы M , равных w , а через M' обозначим $n \times (m - \rho)$ матрицу, полученную из M удалением этих ρ столбцов. Пусть d' — расстояние на n точках, где d'_{ij} полагается равным расстоянию Хэмминга между строками i и j матрицы M' . Можно считать, что первые $n - r$ элементов столбца w — нулевые, а последние r элементов равны единице. Тогда

$$\begin{cases} d'_{ij} = 2t & \text{при } 1 \leq i < j \leq n - r \text{ или } n - r + 1 \leq i < j \leq n; \\ d'_{ij} = 2t - \rho & \text{при } 1 \leq i \leq n - r < j \leq n. \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство отрицательного типа:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad Q_n(-r, \dots, -r, n-r, \dots, n-r)^T x &:= \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n-r} r^2 x_{ij} + \sum_{n-r+1 \leq i < j \leq n} (n-r)^2 x_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq n-r < j \leq n} r(n-r) x_{ij} \leq 0. \end{aligned}$$

Так как d' вложимо в гиперкуб по построению, то d' удовлетворяет данному неравенству (см. раздел 6.1). Отсюда заключаем, что $\rho r(n-r) \leq nt$, следовательно

$$r(n-r) \leq nt.$$

Из последнего соотношения немедленно вытекает неравенство

$$\min(r, n-r) \leq \frac{1}{2}(n - \sqrt{n^2 - 4nt}).$$

Предположим теперь, что $r(n-r) = nt$. Тогда $\rho = 1$. Для каждого отличного от w столбца v матрицы M обозначим через a_v (соответственно, b_v) число единиц среди первых его $n - r$ элементов (среди последних r элементов, соответственно). Так как для d' выполнено неравенство (а), заключаем, что

$$ra_v = (n-r)b_v.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_v a_v(n-r-a_v) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n-r} d'_{ij} = 2t \binom{n-r}{2}, \\ \sum_v b_v(r-b_v) &= \sum_{n-r+1 \leq i < j \leq n} d'_{ij} = 2t \binom{r}{2}, \end{aligned}$$

где суммы берутся по всем столбцам v матрицы M , отличным от w . Так как

$$\sum_v \frac{a_v}{n-r} \left(1 - \frac{a_v}{n-r}\right) = \sum_v \frac{b_v}{r} \left(1 - \frac{b_v}{r}\right),$$

то $\frac{2t}{(n-r)^2} \binom{n-r}{2} = \frac{2t}{r^2} \binom{r}{2}$, откуда $r = \frac{n}{2}$. Итак, $r(n-r) = \frac{n^2}{4} = nt$, следовательно $n = 4t$. ■

Доказательство теоремы 22.0.5. Сразу отметим, что можно считать неравенство $n \geq \frac{1}{2}(t+2)^2$ выполненным при $t = 2$ (так как существует проективная плоскость порядка 2). Рассмотрим матрицу M , h -реализующую нетривиальное вложение метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб. Будем считать, что первая строка матрицы M — нулевая. Обозначим через τ максимальное значение, которое может принимать выражение $\min(r, n-r)$, где r — число единиц в столбце матрицы M . Таким образом, в каждом столбце матрицы M либо $\leq \tau$ либо $\geq n - \tau$ единиц. Назовем столбец *тяжелым*, если в нем $\geq n - \tau$ единиц и *легким*, в противном случае. Из леммы 22.0.8 известно, что $\tau(n - \tau) \leq nt$, т. е. $\tau \leq \frac{1}{2}(n - \sqrt{n^2 - 4nt})$. Заметим, что

$$(a) \quad \frac{1}{2}(n - \sqrt{n^2 - 4nt}) < t + 2 \iff n > \frac{1}{2}(t + 2)^2,$$

и равенство в левой и правой части достигается одновременно. Этот факт потребуется в дальнейшем в доказательстве.

Предположим, от противного, что не существует частичной проективной плоскости порядка t с $n - 1$ прямой. Утверждается, что выполнено следующее:

$$(22.0.9) \quad \text{если } \tau \leq t + 1, \text{ то } n \leq \frac{1}{2}(t^2 + 3t + 4), \text{ и}$$

$$(22.0.10) \quad n \leq \frac{1}{2}(t + 2)^2.$$

Докажем сначала (22.0.9). Предположим, что $\tau \leq t + 1$ и $n > \frac{1}{2}(t^2 + 3t + 4)$. Тогда

$$(c) \quad \text{существует не более } t + 1 \text{ тяжелого столбца.}$$

Действительно, предположим, что в M найдется хотя бы $t + 2$ тяжелых столбцов. Рассмотрим матрицу Y , состоящую из $t + 2$ тяжелых столбцов матрицы M . Тогда общее число единиц f в матрице Y удовлетворяет неравенству $f \geq (t + 2)(n - \tau) \geq (t + 2)(n - t - 1)$

(считая единички по столбцам). Сосчитаем теперь число единиц в Y по строкам. Если в матрице Y есть строка из одних единиц, то в любой другой ненулевой строке не более t единиц, и, следовательно, $f \leq t + 2 + t(n - 2) = (t + 2)(t + 1) + t(n - t - 4)$. В противном случае не более $t + 2$ строк матрицы Y имеют $t + 1$ единицу, и, следовательно, $f \leq (t + 2)(t + 1) + t(n - t - 3)$. В обоих случаях должно быть выполнено неравенство $(t + 2)(n - t - 1) \leq (t + 2)(t + 1) + t(n - t - 3)$, что противоречит условию $n > \frac{1}{2}(t^2 + 3t + 4)$. Тем самым утверждение (с) доказано.

Докажем теперь, что

- (d) каждая ненулевая строка матрицы M содержит не менее $t - 1$ единиц на пересечениях с тяжелыми столбцами.

Действительно, предположим, что ненулевая строка u_0 матрицы M содержит не более $t - 2$ единиц на пересечении с тяжелыми столбцами. Тогда матрица $M \oplus u_0$ (определенная, как сказано выше, заменой каждой строки матрицы M на ее сумму по модулю 2 со строкой u_0) h -реализует вложение метрики $2t\mathbb{1}_n$ и содержит $t + 2$ тяжелых столбца, что противоречит утверждению (с).

Таким образом, матрица M может иметь $t - 1$, t или $t + 1$ тяжелый столбец. Предположим сначала, что в матрице M содержится $t - 1$ тяжелый столбец. Тогда по утверждению (d) получаем, что каждая ненулевая строка матрицы M содержит единицы на всех пересечениях с тяжелыми столбцами. Следовательно матрица, состоящая из легких столбцов матрицы M и не содержащая нулевой строки, является матрицей инцидентности нетривиальной частичной проективной плоскости порядка t с n прямыми, что противоречит нашему предположению. Предположим теперь, что у матрицы M ровно t тяжелых столбцов. Тогда найдется строка u_0 матрицы M , содержащая ровно $t - 1$ единицу на пересечениях с тяжелыми столбцами (иначе M отвечала бы звездному вложению метрики $2t\mathbb{1}_n$). Но в этом случае у матрицы $M \oplus u_0$ есть $t + 2$ тяжелых столбца, что противоречит утверждению (с). Наконец, допустим, что у матрицы M $t + 1$ тяжелый столбец. Если какая-то строка u_0 матрицы M содержит $t + 1$ $(t - 1)$ единицу на пересечении с тяжелыми столбцами, то матрица $M \oplus u_0$ содержит $t - 1$ $(t + 3)$, соответственно) тяжелый столбец. Первый случай, как только что было показано, невозможен; второй случай противоречит утверждению (с). Следовательно, в каждой ненулевой строке матрицы M содержится ровно t единиц на пересечениях с тяжелыми столбцами. Обозначим через x двоичный вектор, координаты которого соответствуют столбцам матрицы M , а единицы стоят в точности на местах, отвечающих

тяжелым столбцам. Тогда матрица $M \oplus x$ является матрицей инцидентности нетривиальной частичной проективной плоскости порядка t с $n - 1$ прямой, что опять противоречит нашему предположению. Таким образом, утверждение (22.0.9) доказано.

Проверим неравенство (22.0.10). Действительно, если $n > \frac{1}{2}(t+2)^2$, то, по утверждению (а), $\tau \leq t+1$ и с помощью (22.0.9) получаем неравенство $n \leq \frac{1}{2}(t^2+3t+4) < \frac{1}{2}(t+2)^2$, что приводит к противоречию.

Итак, доказано, что $n = \frac{1}{2}(t+2)^2$ и $t \geq 3$. Из этого с помощью утверждения (22.0.9) заключаем, что $\tau \geq t+2$. С другой стороны, по утверждению (а) $\tau \leq t+2$. Следовательно $\tau = t+2$. Тогда $\tau(n-\tau) = nt$, откуда по лемме 22.0.8 заключаем, что $\tau = \frac{n}{2} = 2t$. Следовательно $t = 2$, но по нашему предположению $t \geq 3$. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Рассмотрим для примера случай $t = 6$. По теореме 22.0.4 метрика $12\mathbb{1}_n$ при $n \geq 36$ является h -жесткой (так как не существует проективной плоскости порядка 6). В действительности данная метрика является h -жесткой при $n \geq 33$, как утверждает следующее предположение, доказанное Холлом, Янсенем, Коленом и ван Линтом [1977].

Предложение 22.0.11. *Эквидистантная метрика $12\mathbb{1}_n$ является h -жесткой при всех $n \geq 33$.* ■

Утверждение о h -жесткости из теоремы 22.0.6 было обобщено Деза, Эрдешем и Франклом [1978] на класс метрик вида $\sum_{1 \leq i \leq n} t_i \delta(\{i\})$ (при $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}_+$); случай $t_1 = \dots = t_n = t$ соответствует эквидистантной метрике $2t\mathbb{1}_n$.

Теорема 22.0.12. *Пусть $t_1, \dots, t_n$ — положительные целые числа. Если число n достаточно велико по сравнению с $\max(t_1, \dots, t_n)$, то метрика $\sum_{1 \leq i \leq n} t_i \delta(\{i\})$ является h -жесткой.* ■

Глава 23.

Вложения эквидистантной метрики в гиперкуб

В этой главе мы занимаемся построением различных вложений в гиперкуб эквидистантной метрики $2t\mathbb{1}_n$ с помощью блок-схем. $\mathbb{Z}_+$ -реализация метрики $2t\mathbb{1}_n$ состоит из семейства $\mathcal{B}$ (не обязательно различных) подмножеств V_n таких, что

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \delta(B) = 2t\mathbb{1}_n.$$

Для фиксированного $i_0 \in V_n$ можно без потери общности считать, что $i_0 \notin B$ при всех $B \in \mathcal{B}$ (заменяя, если потребуется, B на $V_n \setminus B$). Тогда $\mathcal{B}$ является набором подмножеств V_{n-1} , удовлетворяющих условиям:

- (i) каждая точка V_{n-1} принадлежит $2t$ элементам $\mathcal{B}$, и
- (ii) любые две различные точки V_{n-1} принадлежат t общим элементам $\mathcal{B}$.

Такое семейство $\mathcal{B}$ является $(2t, t, n-1)$ -блок-схемой. Таким образом, вложения метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб есть просто частный случай блок-схем. В разделе 23.1 мы делаем обзор некоторых известных результатов о блок-схемах, а в разделе 23.2 мы конкретизируем связь между вложениями в гиперкуб эквидистантных метрик и блок-схемами. Результаты, относящиеся к минимальному h -размеру эквидистантных метрик приведены в разделе 23.3. В разделе 23.4 мы даем описание всех вложений метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб при малых n или t . Изложение материала в этой главе во многом следует работе Деза, Лоран [1993с].

23.1. Предварительные замечания о блок-схемах

23.1.1. (r, λ, n) -схемы и ВВ-схемы

Пусть $\mathcal{B}$ — набор (не обязательно различных) подмножеств V_n . Множества $B \in \mathcal{B}$ будем называть *блоками*. При натуральных r, k, λ рассмотрим следующие свойства:

- (i) каждая точка V_n принадлежит r блокам;
- (ii) любые две различные точки V_n принадлежат λ общим блокам;
- (iii) каждый блок состоит из k элементов.

Ясно, что если выполнены условия (ii), (iii), то выполнено и (i), причем

$$(23.1.1) \quad r = \lambda \frac{n-1}{k-1},$$

а общее число b блоков в $\mathcal{B}$ (с учетом кратности) определяется формулой

$$(23.1.2) \quad b = \frac{rn}{k} = \lambda \frac{n(n-1)}{k(k-1)}.$$

Мультимножество $\mathcal{B}$ называется (r, λ, n) -схемой (или *блок-схемой*), если выполнены условия (i),(ii) при $0 < \lambda < r$. Семейство $\mathcal{B}$ называется *тривиальным*, если $\mathcal{B}$ состоит из следующих блоков: множество V_n , входящее с кратностью λ ; блок $\{i\}$, входящий с кратностью $r - \lambda$ (для всех $i \in V_n$). В действительности, если n велико по сравнению с r и λ , то каждая (r, n, λ) -схема является тривиальной (это следует, например, из результатов о жесткости главы 22).

Мультимножество $\mathcal{B}$ называется (n, k, λ) -BIB-схемой, если выполнены условия (i),(ii),(iii) при $\lambda > 0$, $1 < k < n - 1$.¹⁾ (r, n, λ) -BIB-схема называется *симметричной*, если $r = k$, или, что то же самое, число блоков b совпадает с числом точек n .

Пусть $\mathcal{B}$ — (n, k, λ) -BIB-схема. Тогда набор

$$\mathcal{B}^* := \{V_n \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

является $(n, k' := n - k, \lambda' := b - 2r + \lambda)$ -BIB-схемой; эта блок-схема называется *двойственной* к $\mathcal{B}$. (Заметим, что $1 < k' < n - 1$ и $(n - 1) \times (b - 2r + \lambda) = (b - r)(n - k - 1)$, откуда, как несложно убедиться, следует, что $\lambda' > 0$.) Если блок-схема $\mathcal{B}$ симметрична, то $\mathcal{B}^*$ также симметрична. Например, двойственной к $\text{PG}(2, t)$ является симметричная $(t^2 + t + 1, t^2, t^2 - t)$ -BIB-схема.

Следующий результат принадлежит Райзер [1966].

Теорема 23.1.3. *Рассмотрим (r, λ, n) -схему $\mathcal{B}$ с b блоками. Тогда $b \geq n$, причем равенство достигается в том, и только том случае, когда $\mathcal{B}$ является симметричной (n, r, λ) -BIB-схемой.*

¹⁾ BIB — сокращение от английского термина «уравновешенная неполная блок-схема». BIBD — balanced incomplete block design. — *Прим. перев.*

Доказательство. Обозначим через A матрицу инцидентности $\mathcal{B}$, т. е. $n \times b$ матрицу с элементами $a_{i,B} = 1$ при $i \in B$ и $a_{i,B} = 0$ при $i \notin B$ ($i \in V_n$, $B \in \mathcal{B}$). Предположим, что $b < n$. Обозначим через M матрицу размера $n \times n$, полученную из A приписыванием $n - b$ нулевых столбцов. Тогда

$$MM^T = \lambda J + (r - \lambda)I,$$

где J — матрица из одних единиц, а I — единичная матрица. Можно проверить, что собственными значениями матрицы MM^T являются числа $r + (n - 1)\lambda$ и $r - \lambda$ (кратности $n - 1$), откуда следует невырожденность матрицы M . Но это невозможно, так как матрица M содержит нулевой столбец. Следовательно $b \geq n$. Теперь, пусть $b = n$. Докажем, что каждый блок в $\mathcal{B}$ состоит из r элементов. Те же рассуждения показывают, что A является $n \times n$ матрицей, удовлетворяющей условию

$$(a) \quad AA^T = \lambda J + (r - \lambda)I, \quad \text{и} \quad AJ = rJ.$$

Следовательно,

$$A^{-1}J = r^{-1}J \quad \text{и} \quad AA^TJ = (\lambda n + r - \lambda)J,$$

откуда

$$(b) \quad A^TJ = (\lambda n + r - \lambda)r^{-1}J, \quad \text{т. е.,} \quad JA = (\lambda n + r - \lambda)r^{-1}J.$$

Таким образом,

$$JAJ = (\lambda n + r - \lambda)r^{-1}nJ.$$

Однако из (a) следует, что $JAJ = rnJ$, значит и

$$(c) \quad r - \lambda = r^2 - \lambda n.$$

Подставляя равенство (c) в (b) получаем, что $JA = rJ$. Таким образом каждый блок в $\mathcal{B}$ имеет размер r , следовательно $\mathcal{B}$ является симметричной (n, r, λ) -BIB-схемой. ■

Из соотношения 23.1.2 очевидно следует, что необходимым условием существования (n, k, λ) -BIB-схемы является следующее условие делимости:

$$(23.1.4) \quad \lambda(n - 1) \text{ делится на } k - 1 \text{ и } \lambda n(n - 1) \text{ делится на } k(k - 1).$$

В свою очередь, это условие является в некоторых случаях достаточным для существования (n, k, λ) -BIB-схемы. Несколько таких примеров приводится в теореме 23.1.5 ниже: утверждение (i) доказано в работе Вильсона [1975], (ii) — в работе Ханани [1975], (iii) — в работе Миллса [1990].

Теорема 23.1.5.

- (i) *Предположим, что условие (23.1.4) выполнено и n велико по сравнению с k и λ . Тогда существует (n, k, λ) -BIB-схема.*
- (ii) *При $k \leq 5$ всегда существует (n, k, λ) -BIB-схема, как только выполнено условие (23.1.4), за единственным исключением: $n = 15$, $k = 5$, $\lambda = 2$. При $k = 6$, $\lambda \geq 2$ и выполненном условии (23.1.4) $(n, 6, \lambda)$ -BIB существует, за единственным исключением: $n = 21$, $\lambda = 2$.*
- (iii) *При $k = 6$, $\lambda = 1$ и выполненном условии (23.1.4) $(n, 6, 1)$ -BIB-схема существует, возможно за исключением каких-либо из 95 невыясненных случаев (в том числе $n = 46, 51, 61, 81, 141, \dots, 5391, 5901$).*

Есть два важных набора параметров для симметричной BIB-схемы:

- (i) $(t^2 + t + 1, t + 1, 1)$ -BIB-схема, что является просто проективной плоскостью порядка t , обозначаемой через $\text{PG}(2, t)$.
- (ii) $(4t - 1, 2t, t)$ -BIB-схема, что называется также *Адамаровой схемой* порядка $4t - 1$.

Напомним, что Адамаровы схемы находятся во взаимно-однозначном соответствии с матрицами Адамара. Точнее, *матрицей Адамара* называется целочисленная $n \times (n \pm 1)$ матрица A , такая что $A^T A = nI$. Ее порядок n может принимать значения 1, 2 или $4t$ при некоторых $t \geq 1$. Без потери общности можно считать, что первый столбец и первая строка матрицы A состоят из одних единиц. Обнулим каждый равный -1 элемент матрицы A и удалим ее первый столбец и первую строку. Получим $(4t - 1) \times (4t - 1)$ двоичную матрицу, столбцы которой являются векторами инцидентности Адамаровой схемы порядка $4t - 1$.

Есть гипотеза, что для любого $t \geq 1$ существует матрица Адамара порядка $4t$. Это было проверено до $t \leq 106$. (За более подробной информацией о матрицах Адамара можно обратиться, например, к Герамита и Себерри [1979] и Уоллису [1988].)

Замечание 23.1.6. Параметры (k, λ) при $3 \leq k \leq 15$ для которых существует симметричная (n, k, λ) -BIB-схема (в этом случае $n = 1 + \frac{k(k-1)}{\lambda}$ по равенству 23.1.1) были полностью описаны (кроме случая $k = 13$, $\lambda = 1$, отвечающего существованию $\text{PG}(2, 12)$) — см. Биггс и Ито [1981]. За исключением параметров, отвечающих проективным плоскостям, Адамаровым схемам и двойственным к ним, симметричные (n, k, λ) -BIB-схемы существуют тогда и только тогда, когда набор (n, k, λ) принадлежит следующему списку: $(16, 6, 2)$,

$(37, 9, 2)$, $(25, 9, 3)$, $(16, 10, 6)$ (набор, двойственный к $(16, 6, 2)$), $(56, 11, 2)$, $(31, 10, 3)$, $(45, 12, 3)$, $(79, 13, 2)$, $(40, 13, 4)$, $(71, 15, 3)$ и $(36, 15, 6)$. ■

Полезным является понятие расширения блок-схемы. Пусть $\mathcal{B}$ — набор подмножеств V_n и $i_0 \notin V_n$. Для данного целого s , s -расширением $\mathcal{B}$ называется набор $\mathcal{B}'$, содержащий все блоки из $\mathcal{B}$ и блок $\{i_0\}$, взятый с кратностью s .

23.1.2. Пересекающиеся системы

Пусть $\mathcal{A}$ — набор подмножеств некоторого конечного множества, а r, λ — натуральные числа. $\mathcal{A}$ называется (r, λ) -пересекающейся системой, если $|A| = r$ при всех $A \in \mathcal{A}$ и $|A \cap B| = \lambda$ при различных $A, B \in \mathcal{A}$. Максимальное число элементов (r, λ) -пересекающейся системы подмножеств из V_b обозначается через $f(r, \lambda; b)$.

$\mathcal{A}$ называется Δ -системой с центром K и параметрами (r, λ) , если $|K| = \lambda$, $|A| = r$ при всех $A \in \mathcal{A}$ и $|A \cap B| = K$ при различных $A, B \in \mathcal{A}$. Ясно, что если система $\mathcal{A}$ состоит из подмножеств V_b , то $|\mathcal{A}| \leq \frac{b-\lambda}{r-\lambda}$.

Замечание 23.1.7. (r, λ, n) -схемы и (r, λ) -пересекающиеся системы являются по сути одними и теми же объектами. Действительно, рассмотрим двоичную $n \times b$ матрицу M и семейство $\mathcal{B}$ подмножеств множества V_n , векторами инцидентности которых являются строки M . Тогда $\mathcal{B}$ является (r, λ, n) -схемой в том, и только том случае, когда $\mathcal{A}$ является (r, λ) -пересекающейся системой из n элементов. Более того, $\mathcal{B}$ — тривиальная блок-схема тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ — Δ -система. Переформулировав теорему 23.1.3, получаем неравенство $f(r, \lambda; b) \leq b$. В литературе широко употребляется и язык (r, λ, n) -схем и язык (r, λ) -пересекающихся систем, поэтому мы привели обе терминологии. Более того, мы воспользуемся пересекающимися системами в разделе 24.3.

Заметим также, что частичные проективные плоскости порядка t (с n прямыми) в точности то же самое, что $(t+1, 1)$ -пересекающиеся системы из n элементов; им соответствуют $(t+1, 1, n)$ -блок-схемы (тривиальные частичные проективные плоскости или тривиальные блок-схемы отвечают Δ -системам). ■

Как только что было замечено, пересекающиеся системы появляются, как h -помечивания эквидистантных метрик. Точнее, имеет место

Предложение 23.1.8. *Существует взаимно-однозначное соответствие между h -помечиваниями эквидистантной метрики $2t\mathbb{1}_n$ и $(2t, t)$ -пересекающимися системами из $n - 1$ элемента.*

Доказательство. Действительно, для любого h -помечивания метрики $2t\mathbb{1}_n$ можно считать, что одна из вершин помечена пустым множеством, тогда множества, соответствующие остальным $n - 1$ вершинам, принадлежат $(2t, t)$ -пересекающейся системе. ■

Таким образом, теорема 23.1.9 ниже (из работы Деза [1973b]) получается переформулировкой теоремы 22.0.6.

Теорема 23.1.9. *Рассмотрим натуральное число t и $(2t, t)$ -пересекающуюся систему $\mathcal{A}$. Если $|\mathcal{A}| \geq t^2 + t + 2$, то $\mathcal{A}$ является Δ -системой.* ■

В качестве приложения теоремы 23.1.9 в работе Деза [1974] был доказан следующий результат, разрешающий гипотезу Эрдеш и Ловаса.

Теорема 23.1.10. *Рассмотрим натуральное число t и такой набор $\mathcal{A}$ подмножеств конечного множества, что $|A \cap B| = t$ при всех $A \neq B \in \mathcal{A}$. Положим $k := \max(|A| : A \in \mathcal{A})$. Если $|\mathcal{A}| \geq k^2 - k + 2$, то $\mathcal{A}$ является Δ -системой.* ■

В заключение приведем простое приложение доказанных теорем, которое потребуется нам в дальнейшем.

Лемма 23.1.11. *Рассмотрим натуральные k, t такие, что $t < k^2 + k + 1$ и $(k + t, t)$ -пересекающуюся систему $\mathcal{A}$. Если $|\mathcal{A}| \geq k^2 + k + 3$, то $\mathcal{A}$ является Δ -системой.*

Доказательство.

Для $A_1 \in \mathcal{A}$ положим $\mathcal{A}' := \{A \Delta A_1 \mid A \in \mathcal{A} \setminus \{A_1\}\}$. Легко проверяется, что $\mathcal{A}'$ является $(2k, k)$ -пересекающейся системой, причем $|\mathcal{A}'| \geq k^2 + k + 2$. По теореме 23.1.9 $\mathcal{A}'$ является Δ -системой. Обозначим через K ее центр; $|K| = k$. Пусть $A \in \mathcal{A}$, $A \neq A_1$. Положим $\alpha := |A_1 \cap K|$, тогда $|A_1 \cap ((A \Delta A_1) \setminus K)| = k - \alpha$, так как множество $A_1 \cap (A \Delta A_1) = A_1 \setminus A$ состоит из k элементов. Если $\alpha \leq k - 1$, то

$$k + t = |A_1| \geq \alpha + |\mathcal{A}'|(k - \alpha) \geq \alpha + (k^2 + k + 2)(k - \alpha),$$

откуда $t \geq (k - \alpha)(k^2 + k + 1)$, что противоречит ограничениям на t из условия. Значит $\alpha = k$, т. е. $A_1 \setminus A = K$ и, следовательно, $A_1 \cap A = A_1 \setminus K$. Тем самым доказано, что $\mathcal{A}$ является Δ -системой. ■

23.2. Вложения метрики $2t\mathbb{1}_n$ и блок-схемы

Каждая $\mathbb{Z}_+$ -реализация метрики $2t\mathbb{1}_n$ (t, n — некоторые натуральные числа) имеет вид

$$(23.2.1) \quad 2t\mathbb{1}_n = \sum_{B \in \mathcal{B}} \delta(B),$$

где $\mathcal{B}$ — набор (не обязательно различных) подмножеств из V_n . Пусть k — натуральное число. Реализация (23.2.1) называется k -однородной, если $|B| = k, n - k$ при всех $B \in \mathcal{B}$. Очень легко построить $\mathbb{Z}_+$ -реализацию эквидистантной метрики с помощью блок-схем.

Например, пусть $\mathcal{B}$ — (r, λ, n) -схема. Тогда

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \delta(B) = 2(r - \lambda)\mathbb{1}_n.$$

Более того, если $r \geq 2\lambda$, то $(r - 2\lambda)$ -расширение блок-схемы $\mathcal{B}$ задает $\mathbb{Z}_+$ -реализацию метрики $2(r - \lambda)\mathbb{1}_n$:

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \delta(B) + (r - 2\lambda)\delta(\{i_0\}) = 2(r - \lambda)\mathbb{1}_{n+1},$$

где $V_{n+1} \setminus V_n = \{i_0\}$. В частности, каждая $(t + 1, 1, n)$ -схема задает $\mathbb{Z}_+$ -реализацию метрики $2t\mathbb{1}_n$, а ее $(t - 1)$ -расширение задает реализацию $2t\mathbb{1}_{n+1}$. 0-расширение $(2t, t, n - 1)$ -схемы также задает $\mathbb{Z}_+$ -реализацию метрики $2t\mathbb{1}_n$.

Если $\mathcal{B}$ является (n, k, λ) -ВВВ-схемой, то формула (23.2.1) определяет $\mathbb{Z}_+$ -реализацию эквидистантной метрики $2\lambda \frac{n - k}{k - 1} \mathbb{1}_n$. В частности, если $\mathcal{B}$ — Адамарова схема порядка $4t - 1$, то формула (23.2.1) определяет $\mathbb{Z}_+$ -реализацию $2t\mathbb{1}_{4t-1}$, а 0-расширение блок-схемы $\mathcal{B}$ задает реализацию $2t\mathbb{1}_{4t}$. Если $\mathcal{B}$ есть $\text{PG}(2, t)$, то формула (23.2.1) определяет $\mathbb{Z}_+$ -реализацию метрики $2t\mathbb{1}_{t^2+t+1}$, а ее $(t - 1)$ -расширение задает $\mathbb{Z}_+$ -реализацию $2t\mathbb{1}_{t^2+t+2}$.

Следующий результат уточняет свойства соответствия между $\mathbb{Z}_+$ -реализациями эквидистантных метрик и блок-схемами. Утверждение (i) является просто переформулировкой предложения 23.1.8 (учитывая связь между пересекающимися системами и блок-схемами из замечания 23.1.7.

Предложение 23.2.2.

- (i) Существует взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{Z}_+$ -реализациями метрики $2t\mathbb{1}_n$ и $(2t, t, n-1)$ -схемами.
- (ii) При $k \neq \frac{n}{2}$ существует взаимно-однозначное соответствие между k -однородными $\mathbb{Z}_+$ -реализациями метрики $2t\mathbb{1}_n$ и множеством $(n, k, \frac{t(k-1)}{n-k})$ -BIB-схем.

Доказательство. Можно считать (заменяя, если потребуется, B на $V_n \setminus B$), что все блоки $B \in \mathcal{B}$ не содержат фиксированную точку $i_0 \in V_n$, откуда и следует утверждение (i).

(ii) Непосредственная проверка показывает, что если блок-схема $\mathcal{B}$ является $(n, k, \frac{t(k-1)}{n-k})$ -BIB-схемой, то условие (23.2.1) выполнено.

Пусть теперь $k \neq \frac{n}{2}$ и для блок-схемы $\mathcal{B}$ с $|B| = k$ при всех $B \in \mathcal{B}$ имеет место (23.2.1). Скалярно умножая обе части равенства (23.2.1) на вектор из одних единиц, получаем, что число блоков b имеет вид

$$b = \frac{tn(n-1)}{k(n-k)}.$$

Докажем, что каждая точка принадлежит одному и тому же числу блоков. Для этого обозначим через r число блоков, содержащих точку 1, и через a_i — число блоков, содержащих обе точки 1 и i ($i = 2, \dots, n$). Тогда $\sum_{2 \leq i \leq n} a_i = r(k-1)$. Посчитав общее число единиц в матрице инцидентности блок-схемы $\mathcal{B}$ двумя способами (по строкам и по столбцам), получаем равенство

$$bk = r + \sum_{2 \leq i \leq n} (2t - r + 2a_i),$$

откуда $r = t \frac{n-1}{n-k}$. Таким образом, любые две точки из V_n принадлежат $r - t = t \frac{k-1}{n-k}$ общим блокам. Следовательно блок-схема $\mathcal{B}$ является $(n, k, \frac{t(k-1)}{n-k})$ -BIB-схемой. ■

Для удобства дальнейших ссылок, переформулируем теорему 22.0.5 в терминах блок-схем. Легко убедиться, что данное ранее доказательство теоремы 22.0.5 позволяет сформулировать более точное утверждение.

Теорема 23.2.3. *Предположим, что либо $n \geq \frac{1}{2}(t+2)^2$ и $t \geq 3$, либо $n > \frac{1}{2}(t+2)^2$ и $t = 2$. Пусть $\mathcal{B}$ — семейство подмножеств множества V_n , для которого выполнено равенство (23.2.1), и которое определяет нетривиально вложение метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб. Тогда семейство $\mathcal{B}$ эквивалентно либо нетривиальной $(t+1, 1, n)$ -схеме, либо $(t-1)$ -расширению нетривиальной $(t+1, 1, n-1)$ -схемы. ■*

Рассмотрим, например, случай $t = 3$ и $n = 12 (< \frac{1}{2}(t+2)^2)$. Тогда метрика $6\mathbb{1}_{12}$ имеет $\mathbb{Z}_+$ -реализацию, *отличную* от указанных в теореме 23.2.3; такая реализация может быть получена из 1-расширения $(5, 2, 11)$ -схемы. Следующий результат Мак Карти и Ванстоуна [1977] приводит к еще одному случаю h -жесткости для эквидистантных метрик.

Теорема 23.2.4. *Рассмотрим натуральные α, t такие, что $t > 2\alpha^2 + 3\alpha + 2$ (т. е. $\alpha < \frac{\sqrt{8t-7}-3}{4}$). Предположим, что не существует проективной плоскости порядка t . Тогда при $n \geq t^2 - \alpha$ все $(t+1, 1, n)$ -схемы тривиальны. ■*

Следствие 23.2.5. *Предположим, что не существует проективной плоскости порядка t . Если $n > t^2 + 1 - \frac{\sqrt{8t-7}-3}{4}$, то метрика $2t\mathbb{1}_n$ является h -жесткой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — семейство подмножеств множества V_n , для которого выполнено равенство (23.2.1), и которое определяет нетривиально вложение метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб. По теореме 23.2.3 $\mathcal{B}$ эквивалентно либо нетривиальной $(t+1, 1, n)$ -схеме, либо $(t-1)$ -расширению нетривиальной $(t+1, 1, n-1)$ -схемы (так как $n \geq \frac{1}{2}(t+2)^2$). По теореме 23.2.4 такие блок-схемы тривиальны. Следовательно, $\mathcal{B}$ определяет звездную реализацию $2t\mathbb{1}_n$. Противоречие. ■

23.3. Минимальный h -размер метрики $2t\mathbb{1}_n$

Напомним, что минимальный h -размер метрики $2t\mathbb{1}_n$ определяется как наименьшее возможное число элементов мультимножества

$\mathcal{B} \subseteq 2^{V_n}$, удовлетворяющего условию (23.2.1), и обозначается через $s_h(2t\mathbb{1}_n)$. (Понятие минимального h -размера было введено в разделе 4.3.) Следующая теорема является переформулировкой результата Райзера о числе блоков $(2t, t, n-1)$ -схемы.

Теорема 23.3.1.

- (i) $s_h(2t\mathbb{1}_n) \geq n-1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $n = 4t$ и существует матрица Адамара порядка $4t$.
- (ii) Предположим, что $n \neq 4t$. Если $n = 2t + \lambda + \frac{t(t-1)}{\lambda}$ при некотором натуральном λ и существует симметрическая $(n, \lambda + t, \lambda)$ -BIB-схема, то $s_h(2t\mathbb{1}_n) = n$.

Доказательство. (i) По предложению 23.2.2 минимальный h -размер метрики $2t\mathbb{1}_n$ равен максимальному числу блоков $(2t, t, n-1)$ -блок-схемы, которое, по теореме 23.1.3, не меньше числа $n-1$. Если $s_h(2t\mathbb{1}_n) = n-1$, то существует $(2t, t, n-1)$ -схема $\mathcal{B}$ с $n-1$ блоком. Снова применяя теорему 23.1.3, заключаем, что $\mathcal{B}$ является симметричной $(4t-1, 2t, t)$ -схемой, т. е. Адамаровой схемой порядка $4t-1$. Легко убедиться, что выполнено и утверждение (ii). ■

Воспользовавшись теоремой 23.3.1 и замечанием 23.1.6, можно сделать вывод, что равенство $s_h(2t\mathbb{1}_n) = n$ имеет место для следующих параметров (t, n) : (7, 37), (6, 25), (9, 56), (7, 31), (9, 45), (11, 79), (9, 40), (12, 71). Отметим также, что равенство $s_h(2t\mathbb{1}_n) = n-1$ выполняется при $(t, n) = (9, 36), (4, 16)$.

Импликация (ii) теоремы 23.3.1 является, на самом деле, эквивалентностью при $\lambda = 1$ (т. е. при $n = t^2 + t + 1$) и $\lambda = t$ (т. е. при $n = 4t-1$).

Предложение 23.3.2.

- (i) $s_h(2t\mathbb{1}_{t^2+t+1}) = t^2 + t + 1$ тогда и только тогда, когда существует проективная плоскость порядка t .
- (ii) $s_h(2t\mathbb{1}_{4t-1}) = 4t-1$ (или, что то же самое, $s_h(2t\mathbb{1}_{4t}) = 4t-1$) тогда и только тогда, когда существует матрица Адамара порядка $4t-1$.
- (iii) Предположим, что существует проективная плоскость порядка t . Тогда $s_h(2t\mathbb{1}_{t^2+t+2}) = t^2 + 2t$ при $t \geq 3$ и $s_h(2t\mathbb{1}_{t^2+t+2}) = t^2 + t + 1$ при $t = 1, 2$.
- (iv) Предположим, что не существует проективной плоскости порядка t . Если $n > t^2 + 1 - \frac{\sqrt{8t-7}-3}{4}$, то $s_h(2t\mathbb{1}_n) = nt$.

Доказательство. (i) следует из теорем 22.0.4 и 23.3.1.

(ii) Пусть $\mathcal{B}$ — семейство блоков, задающее $\mathbb{Z}_+$ -реализацию $2t\mathbb{1}_{4t-1}$, и $|\mathcal{B}| = 4t - 1$. Тогда $|\mathcal{B}| = \frac{n(n-1)t}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ ($n = 4t - 1$), откуда следует, что все блоки из $\mathcal{B}$ имеют размер $2t$. Таким образом, $\mathcal{B}$ является Адамаровой схемой порядка $4t - 1$. Оставшаяся часть утверждения (ii) следует из теоремы 23.3.1.

(iii) В случаях $t = 1, 2$ воспользуемся теоремой 23.3.1. Пусть $t \geq 3$. Положим $n := t^2 + t + 2$. $(t - 1)$ -расширение плоскости $\text{PG}(2, t)$ задает $\mathbb{Z}_+$ -реализацию метрики $2t\mathbb{1}_n$ размера $t^2 + t$, следовательно $s_h(2t\mathbb{1}_n) \leq t^2 + 2t$. Пусть $\mathcal{B}$ — семейство блоков, задающее $\mathbb{Z}_+$ -реализацию метрики $2t\mathbb{1}_n$. Докажем, что $|\mathcal{B}| \geq t^2 + 2t$. Это очевидно, если $\mathcal{B}$ отвечает звездной реализации. В противном случае, воспользуемся теоремой 23.2.3. Либо $\mathcal{B}$ является нетривиальной $(t + 1, 1, n)$ -блок-схемой, тогда соответствующее $(t - 1)$ -расширение задает $\mathbb{Z}_+$ -реализацию метрики $2t\mathbb{1}_{t^2+t+3}$, отличную от звездной, что противоречит теореме 22.0.6. Либо семейство $\mathcal{B}$ эквивалентно $(t - 1)$ -расширению $(t + 1, 1, n - 1)$ -схемы, тогда $|\mathcal{B}| \geq n - 1 + t - 1 = t^2 + 2t$. Тем самым доказано, что $s_h(2t\mathbb{1}_n) = t^2 + 2t$. Наконец, утверждение (iv) является переформулировкой следствия 23.2.5. $\blacksquare$

Положим

$$a_n^t := \left\lfloor \frac{n(n-1)t}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil} \right\rfloor = \left\lfloor 4t - \frac{2t}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor.$$

Скалярно умножая обе части равенства (23.2.1) на вектор из одних единиц, получаем следующие оценки:

$$a_n^t \leq s_h(2t\mathbb{1}_n) \leq nt.$$

Равенство

$$s_h(2t\mathbb{1}_n) = nt$$

имеет место тогда и только тогда, когда единственной $\mathbb{Z}_+$ -реализацией метрики $2t\mathbb{1}_n$ является звездная реализация (22.0.1), т. е., когда метрика $2t\mathbb{1}_n$ является h -жесткой. Это выполнено, например, в случае $n > t^2 + t + 3$ (по теореме 22.0.6). В главе 22 было приведено несколько других результатов о классах параметров (n, t) , для которых метрика $2t\mathbb{1}_n$ является h -жесткой. Возникает естественный вопрос, при каких значениях параметров (n, t) выполнено равенство

$$s_h(2t\mathbb{1}_n) = a_n^t.$$

Если метрика $2t\mathbb{1}_n$ допускает $\mathbb{Z}_+$ -реализацию вида $\sum_S \lambda_S \delta(S)$ при $\lambda_S > 0$ только при условии, что $\delta(S)$ — равноразрезная полуметрика (т. е. $|S| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$), то равенство $s_h(2t\mathbb{1}_n) = a_n^t$ выполнено. Например, $s_h(4\mathbb{1}_7) = a_7^2 = 7$ и $s_h(4\mathbb{1}_8) = a_8^2 = 7$, так как в $\mathbb{Z}_+$ -реализациях $s_h(4\mathbb{1}_7)$ и $s_h(4\mathbb{1}_8)$ используются только равноразрезные полуметрики. (см. предложение 23.4.4).

Из теоремы 23.3.1 очевидно следует, что равенство $s_h(2t\mathbb{1}_n) = a_n^t$ возможно только при $n \leq 4t$. Случай $n = 4t$ хорошо изучен: данное равенство имеет место тогда и только тогда, когда существует матрица Адамара порядка $4t$. Следующие гипотезы были выдвинуты Деза и Лоран [1993с].

Гипотеза 23.3.3. Пусть $n \leq 4t$ и существует матрица Адамара порядка $4t$. Тогда $s_h(2t\mathbb{1}_n) = a_n^t$.

Гипотеза 23.3.4. Пусть $n \leq 4t$ и существуют матрицы Адамара подходящих порядков. Тогда $s_h(2t\mathbb{1}_n) = a_n^t$.

Ясно, что гипотеза 23.3.4 слабее, чем гипотеза 23.3.3 (остается еще правильно определить «подходящие порядки» матриц). В работе Деза и Лоран [1993с] можно найти частичные результаты, относящиеся к этим гипотезам. В частности, там были установлены следующие результаты.

Предложение 23.3.5.

- (i) Гипотеза 23.3.3 выполнена для всех параметров n, t таких, что $n \leq 4t$ и либо $\frac{2t}{3} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ либо $\min(n, t) \leq 20$.
- (ii) Гипотеза 23.3.4 выполнена для всех параметров n, t таких, что n — чётно и удовлетворяет неравенству $2\sqrt{2t} \leq n \leq 4t$. (Достаточно проверить существование матриц Адамара порядков $2n, 4n$ и n (если $\frac{n}{2}$ чётно) или $n+2$ (если $\frac{n}{2}$ нечётно).) ■

Следствие 23.3.6. Если $n \leq 4t \leq 80$, то $s_h(2t\mathbb{1}_n) = a_n^t$. ■

Пример 23.3.7. В качестве примера рассмотрим минимальный h -размер метрики $2t\mathbb{1}_n$ при $t = 6$ и $n \geq 31$. Получаем, что:

- (i) $s_h(12\mathbb{1}_n) = 6n$ при всех $n \geq 33$ (по предложению 22.0.11);
- (ii) $s_h(12\mathbb{1}_{32}) = 67$ и $s_h(12\mathbb{1}_{31}) \leq 62$.

Действительно, пусть $\mathcal{B}$ — блок-схема на V_{32} , для которой равенство (23.2.1) выполнено и определяет нетривиальное вложение метрики $12\mathbb{1}_{32}$ в гиперкуб. По теореме 23.2.3, блок-схема $\mathcal{B}$ эквивалентна либо $(7, 1, 32)$ -схеме, либо 5-расширению $(7, 1, 31)$ -схемы. Каждая $(7, 1, 32)$ -схема тривиальна (так как ее 5-расширение задает $\mathbb{Z}_+$ -реализацию

h -жесткой метрики $12\mathbb{1}_{33}$). В работах Мак Карти, Муллина, Шелленберга, Стэнтона и Ванстоуна [1976, 1977] доказано, что единственной нетривиальной $(7, 1, 31)$ -схемой является семейство, образованное блоками из $\text{PG}(2, 5)$ и 31 синглетом; это семейство задает $\mathbb{Z}_+$ -реализацию $12\mathbb{1}_{31}$ размера $31 + 31 = 62$. 5-расширение данной блок-схемы задает $\mathbb{Z}_+$ -реализацию $12\mathbb{1}_{32}$ размера $62 + 5 = 67$. Тем самым доказано, что $s_h(12\mathbb{1}_{32}) = 67$. ■

23.4. Все вложения метрики $2t\mathbb{1}_n$ в гиперкуб при малых n, t

Дадим полный перечень всех $\mathbb{Z}_+$ -реализаций эквидистантной метрики $2t\mathbb{1}_n$ в случаях $t = 1$, $t = 2$, $n = 4$ и частичную информацию о случае $n = 5$. Результаты приводятся по работе Деза и Лоран [1993c].

Пусть t, n — некоторые натуральные числа. Для каждого параметра s , отвечающего условию $t - \left\lfloor \frac{t}{n-3} \right\rfloor \leq s \leq t$ имеется следующая $\mathbb{Z}_+$ -реализация метрики $2t\mathbb{1}_n$:

$$(23.4.1) \quad 2t\mathbb{1}_n = (t - (n-3)(t-s))\delta(\{n\}) + \sum_{1 \leq i \leq n-1} ((t-s)\delta(\{i, n\}) + s\delta(\{i\})).$$

Ее размер равен $(n-3)s + 3t$, а реализация (23.4.1) совпадает со звездной реализацией (22.0.1) при $s = t$.

Предложение 23.4.2. (Случай $n = 4$) Метрика $2t\mathbb{1}_4$ имеет $t + 1$ $\mathbb{Z}_+$ -реализацию, каждая из которых имеет вид (23.4.1) при $0 \leq s \leq t$.

Доказательство. Предложение следует из того, что ограничение любой $\mathbb{Z}_+$ -реализации метрики $2t\mathbb{1}_4$ на V_3 совпадает со звездной реализацией метрики $2t\mathbb{1}_3$. ■

Предложение 23.4.3. (Случай $t = 1$) При $n \neq 4$ реализация (22.0.1) является единственной $\mathbb{Z}_+$ -реализацией метрики $2\mathbb{1}_n$; при $n = 4$ метрика $2\mathbb{1}_4$ имеет две $\mathbb{Z}_+$ -реализации: звездную (22.0.1) и (23.4.1) при $s = 0$, а именно,

$$2\mathbb{1}_4 = \sum_{1 \leq i \leq 4} \delta(\{i\}) = \delta(\{1, 4\}) + \delta(\{2, 4\}) + \delta(\{3, 4\}). \quad \blacksquare$$

Предложение 23.4.4. (Случай $t = 2$)

- (i) При $n \geq 9$ реализация (22.0.1) является единственной $\mathbb{Z}_+$ -реализацией метрики $4\mathbb{1}_n$.
- (ii) При $n = 4$ метрика $4\mathbb{1}_4$ имеет три $\mathbb{Z}_+$ -реализации: (22.0.1) и (23.4.1) при $s = 1, 2$, а именно,

$$4\mathbb{1}_4 = 2 \left(\sum_{1 \leq i \leq 4} \delta(\{i\}) \right) = 2 \left(\sum_{1 \leq i \leq 3} \delta(\{i, 4\}) \right) = \sum_{1 \leq i \leq 4} \delta(\{i\}) + \sum_{1 \leq i \leq 3} \delta(\{i, 4\}).$$

- (iii) При $n = 5$ метрика $4\mathbb{1}_5$ имеет (с точностью до перестановки) три $\mathbb{Z}_+$ -реализации: звездную (22.0.1), (23.4.1) при $s = 1$, т. е.

$$4\mathbb{1}_5 = \sum_{1 \leq i \leq 4} \delta(\{i, 5\}) + \delta(\{i\})$$

$$\text{и } 4\mathbb{1}_5 = \delta(\{5\}) + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \delta(\{i, j\}).$$

- (iv) При $n = 6$ метрика $4\mathbb{1}_6$ имеет (с точностью до перестановки) три $\mathbb{Z}_+$ -реализации: звездную реализацию (22.0.1),

$$4\mathbb{1}_6 = \delta(\{2\}) + \delta(\{3\}) + \delta(\{4, 6\}) + \delta(\{5, 6\}) + \delta(\{1, 4\}) + \\ + \delta(\{1, 5\}) + \delta(\{1, 2, 6\}) + \delta(\{1, 3, 6\}) \quad \text{и}$$

$$4\mathbb{1}_6 = \delta(\{1, 2\}) + \delta(\{3, 4\}) + \delta(\{5, 6\}) + \delta(\{1, 3, 6\}) + \\ + \delta(\{2, 4, 6\}) + \delta(\{1, 4, 5\}) + \delta(\{2, 3, 5\}) + \delta(\{1, 3, 6\}).$$

- (v) При $n = 7$ метрика $4\mathbb{1}_7$ имеет (с точностью до перестановки) три $\mathbb{Z}_+$ -реализации: звездную реализацию (22.0.1),

$$4\mathbb{1}_7 = \delta(\{7\}) + \delta(\{1, 2\}) + \delta(\{3, 4\}) + \delta(\{5, 6\}) + \\ + \delta(\{1, 3, 6\}) + \delta(\{2, 4, 6\}) + \delta(\{1, 4, 5\}) + \delta(\{2, 3, 5\}) \quad \text{и}$$

$$4\mathbb{1}_7 = \delta(\{1, 2, 7\}) + \delta(\{3, 4, 7\}) + \delta(\{5, 6, 7\}) + \delta(\{1, 3, 6\}) + \\ + \delta(\{2, 4, 6\}) + \delta(\{1, 4, 5\}) + \delta(\{2, 3, 5\}).$$

- (vi) При $n = 8$ метрика $4\mathbb{1}_8$ имеет (с точностью до перестановки) три $\mathbb{Z}_+$ -реализации: звездную реализацию (22.0.1),

$$4\mathbb{1}_8 = \delta(\{8\}) + \delta(\{1, 2, 7\}) + \delta(\{3, 4, 7\}) + \delta(\{5, 6, 7\}) + \\ + \delta(\{1, 3, 6\}) + \delta(\{2, 4, 6\}) + \delta(\{1, 4, 5\}) + \delta(\{2, 3, 5\}) \quad \text{и}$$

$$4\mathbb{1}_8 = \delta(\{1, 2, 7, 8\}) + \delta(\{3, 4, 7, 8\}) + \delta(\{5, 6, 7, 8\}) + \delta(\{1, 3, 6, 8\}) + \\ + \delta(\{2, 4, 6, 8\}) + \delta(\{1, 4, 5, 8\}) + \delta(\{2, 3, 5, 8\})$$

(последняя из которых отвечает блок-схеме Адамара). ■

Задача описания всех $\mathbb{Z}_+$ -реализаций метрики $2t\mathbb{1}_n$ при $n = 5$ по-видимости является довольно сложной задачей. Заметим, что у нас уже есть реализация (23.4.1) для $t - \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \leq s \leq t$. При t — нечетном, $t \geq 3$ также имеется реализация

$$(23.4.5) \quad 2t\mathbb{1}_5 = \frac{t-1}{2}(\delta(\{5\}) + \delta(\{1, 2\}) + \delta(\{1, 3\}) + \delta(\{2, 4\}) + \delta(\{3, 4\})) + \\ + \delta(\{1, 5\}) + \delta(\{2\}) + \delta(\{3\}) + \delta(\{4, 5\}) + \\ + \frac{t+1}{2}\delta(\{1, 4\}) + \frac{t-3}{2}\delta(\{2, 3\}).$$

Еще одна $\mathbb{Z}_+$ -реализация метрики $2t\mathbb{1}_5$ определяется следующей формулой:

$$(23.4.6) \quad 2t\mathbb{1}_5 = p\delta(\{5\}) + q\delta(\{1\}) + (s - q)\delta(\{1, 5\}) + \alpha \sum_{2 \leq i \leq 4} \delta(\{i, 5\}) + \\ + (s - \alpha) \sum_{2 \leq i \leq 4} \delta(\{i\}) + \beta \sum_{2 \leq i \leq 4} \delta(\{1, i\}) + \\ + (t - s - \beta) \sum_{2 \leq i \leq 4} \delta(\{1, i, 5\}),$$

где α, β, p, q, s — целые числа, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} 0 \leq s \leq t, \\ 0 \leq \alpha \leq \min\left(s, \frac{t}{2}\right), \\ \max\left(0, s - 2\alpha, \frac{t - 3\alpha}{2}\right) \leq p \leq \min\left(t - 2\alpha, \frac{t - 3\alpha + s}{2}\right), \\ \beta = t - 2\alpha - p, \\ q = 3\alpha + 2p - t. \end{cases}$$

Обозначим через $\lambda(s, t, \alpha, p)$ реализацию (23.4.6).

При $t = 3$ допустимыми¹⁾ параметрами для (23.4.6) являются следующие: $(s, \alpha, p) = (1, 0, 2), (1, 1, 0), (2, 0, 2), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (3, 0, 3)$ и $(3, 1, 1)$. Заметим, однако, что $\lambda(3, 3, 0, 3)$ совпадает со звездной реализацией (22.0.1); $\lambda(3, 3, 1, 1)$ имеет вид

$$(23.4.7) \quad 6\mathbb{1}_5 = \delta(\{5\}) + \sum_{1 \leq i \leq 4} (\delta(\{i, 5\}) + 2\delta(\{i\})),$$

что совпадает с формулой (23.4.1) при $t = 3, n = 5, s = 2$; $\lambda(2, 3, 0, 2)$ получается перестановкой $1 \leftrightarrow 5$ из (23.4.7), а $\lambda(2, 3, 1, 1)$ совпадает (с точностью до той же перестановки) с $\lambda(1, 3, 0, 2)$.

¹⁾ Параметры s, t, α, β называются допустимыми, если они удовлетворяют выше-указанным условиям при целом p и $q \geq 0$. — *Прим. ред.*

Предложение 23.4.8. (Случай $t = 3$, $n = 5$) Метрика $6\mathbb{1}_5$ имеет 5 различных (с точностью до перестановки) $\mathbb{Z}_+$ -реализаций: звездную (22.0.1) и реализации (23.4.7), (23.4.5) при $t = 3$, и (23.4.6) при следующих значениях параметров: $(s, \alpha, p) = (2, 1, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$. Последние три реализации имеют (соответственно) вид:

$$6\mathbb{1}_5 = \delta(\{5\}) + 2\delta(\{1\}) + \sum_{2 \leq i \leq 4} (\delta(\{i, 5\}) + \delta(\{i\}) + \delta(\{1, i, 5\})),$$

$$6\mathbb{1}_5 = 2\delta(\{1, 5\}) + \sum_{2 \leq i \leq 4} (\delta(\{i, 5\}) + \delta(\{i\}) + \delta(\{1, i\})),$$

$$6\mathbb{1}_5 = \delta(\{1, 5\}) + \sum_{2 \leq i \leq 4} (\delta(\{i, 5\}) + \delta(\{1, i\}) + \delta(\{1, i, 5\})). \quad \blacksquare$$

Глава 24.

Распознавание вложимых в гиперкуб метрик

В этой главе мы исследуем следующую проблему, которая называется *задачей о вложении в гиперкуб*:

Определить, является ли данное расстояние d на V_n вложимым в гиперкуб.

Ограничившись классом метрик кратчайшего пути на связных графах, получим задачу об определении вложимости данного графа в гиперкуб. Вложимые в гиперкуб графы имеют хорошее описание и распознаются за полиномиальное время. Подробно эта тема разобрана в главе 19.

Для произвольных расстояний задача о вложении в гиперкуб является NP-трудной, и NP-полной для класса расстояний со значениями в множестве $\{2, 3, 4, 6\}$ (см. теорему 24.1.8).

Оказывается, однако, что для нескольких классов метрик задача о вложении в гиперкуб решается за полиномиальное время. Обычно это имеет место, если метрика имеет узкий диапазон значений. Например, задача о вложении в гиперкуб разрешима за полиномиальное время в классе расстояний со значениями $\{1, 2, 3\}$ или $\{3, 5, 8\}$, или в более общей ситуации, когда множество значений имеет вид $\{x, y, x + y\}$, где x, y — натуральные числа, не одновременно четные. Этот случай исследуется в разделе 24.3. В разделе 24.4 мы рассматриваем расстояния, принимающие два значения вида $a, 2a$ (a — натуральное). Заметим, что такие расстояния можно рассматривать, как кратные усеченных метрик на графах. Для этого класса расстояний условие вложимости в гиперкуб может быть выражено с помощью конечного числа точек, и, следовательно, вложимость определяется за полиномиальное время.

Рассматриваются также обобщенные двудольные метрики, т. е. метрики d на V_n , для которых найдется такое подмножество $S \subseteq V_n$, что $d(i, j) = 2$ при всех $i \neq j \in S$ и всех $i \neq j \in V_n \setminus S$. Вложимость в гиперкуб обобщенных двудольных метрик также определяется за полиномиальное время (см. раздел 24.2).

Описания вложимых в гиперкуб метрик в данных классах основаны на существовании эквидистантных подметрик, которые являются h -жесткими, если определены на достаточно большом количестве точек (согласно результатам главы 22).

В разделе 24.5 мы приводим следующий результат Карзанова [1985]. Пусть d — метрика, экстремальным графом которой является либо K_4 , либо C_5 , либо объединение двух звезд. Тогда метрика d вложима в гиперкуб в том, и только том случае, когда d удовлетворяет условию четности (24.1.1).

Отметим, что, в противоположность результатам раздела 24.3, неизвестно никакого описания вложимых в гиперкуб метрик, принимающих три значения, каждое из которых четно. Например, неизвестна сложность задачи о вложении в гиперкуб для расстояний с множеством значений $\{2, 4, 6\}$. Не до конца исследован также и случай метрик, принимающих два четных значения a, b ; в разделе 24.3 рассматривается только случай $b = 2a$.

Приведем сначала некоторые предварительные результаты.

24.1. Предварительные результаты

Пусть d — расстояние на множестве V_n . Первое простое наблюдение состоит в том, что можно считать расстояние между различными точками не равным нулю. Действительно, если $d(i, j) = 0$ для некоторых различных $i, j \in V_n$, то расстояние d вложимо в гиперкуб тогда, и только тогда, когда вложимо в гиперкуб пространство $V_n \setminus \{j\}$ (так точкам i и j необходимо соответствует одно и то же множество при любом вложении расстояния d в гиперкуб).

Если расстояние d вложимо в гиперкуб, то

$$(24.1.1) \quad d(i, j) + d(i, k) + d(j, k) \in 2\mathbb{Z} \quad \text{при всех } i, j, k \in V_n$$

(Действительно, если множества $A_1, \dots, A_n$ образуют h -помечивание расстояния d , то

$$\begin{aligned} d(i, j) + d(i, k) + d(j, k) &= \\ &= 2(|A_i| + |A_j| + |A_k| - |A_i \cap A_j| - |A_i \cap A_k| - |A_j \cap A_k|) \in 2\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Условие (24.1.1) называется *условием четности*, и впервые было введено в работе Деза [1960]. Это условие выражает то, что любое вложимое в гиперкуб расстояние d на V_n может быть представлено в виде

целочисленной комбинации разрезных полуметрик, т. е. принадлежит разрезной решетке $\mathcal{L}_n$ (действительно, условие (24.1.1) определяет принадлежность решетке $\mathcal{L}_n$; см. предложение (25.1.1)). В качестве приложения получаем, что любое вложимое в гиперкуб расстояние d обладает некоторой двудольной структурой: множество пар точек, находящихся на нечетном расстоянии, образует полный двудольный граф.

Лемма 24.1.2. *Пусть d — расстояние на V_n . Если d удовлетворяет условию четности (24.1.1), то V_n допускает такое разбиение $V_n = S \cup T$, что $d(i, j)$ четно при $i, j \in S$ или $i, j \in T$, и $d(i, j)$ нечетно при $i \in S, j \in T$.* ■

Этот простой факт занимает центральное место в нашем исследовании. Например, для обобщенных двудольных метрик, рассмотренных в разделе 24.2, единственное четное расстояние равно двум, т. е. такие метрики удовлетворяют условию $d(i, j) = 2$ при $i \neq j \in S, i \neq j \in T$ для некоторого разбиения (S, T) множества V_n .

Очевидно, что каждое вложимое в гиперкуб расстояния d на V_n является ℓ_1 -вложимым, т. е. принадлежит разрезному конусу CUT_n . Другими словами, d раскладывается в неотрицательную комбинацию разрезных полуметрик. Таким образом, имеется импликация:

$$\begin{array}{c} \text{расстояние } d \text{ вложимо в гиперкуб} \\ \Downarrow \\ d \in \text{CUT}_n \text{ и } d \text{ удовлетворяет условию (24.1.1).} \end{array}$$

Эта импликация, вообще говоря, не является строгой. Но для некоторых классов расстояний данная импликация является эквивалентностью. Это имеет место, например, для метрик с множеством значений $\{1, 2\}$ или с множеством значений $\{1, 2\alpha, 2\alpha + 1\}$ ($\alpha \geq 2$) (см. предложения (24.1.9) и (24.1.10)), а также для расстояний, рассмотренных в предложении (24.3.27) или теореме 24.5.1. То же верно и для расстояний на множествах не более, чем из пяти точек, как показывает следующий результат Деза [1960, 1982].

Теорема 24.1.3. *Пусть d — расстояние на множестве не более, чем из пяти точек. Тогда d вложимо в гиперкуб в том, и только том случае, когда $d \in \text{CUT}_n$ и d удовлетворяет условию четности (24.1.1).* ■

Условие четности (24.1.1) также является достаточным признаком вложимости в гиперкуб для расстояний, лежащих на специальных фасетах конуса CUT_n , в частности, на симплицальных фасетах некоторых классов; см. соотношение (31.8.3). В главе 25 будут рассмотрены квази h -точки, т. е. расстояния d , принадлежащие конусу CUT_n и удовлетворяющие условию (24.1.1), но не допускающие вложения в гиперкуб.

Таким образом, каждое неравенство, выполненное для разрезного конуса, дает необходимое условие вложимости в гиперкуб. Оказывается, что гиперметрические неравенства играют основную роль при описании некоторых классов вложимых в гиперкуб расстояний (см. предложения 24.1.9, 24.3.10, 24.3.11, 24.3.27). Гиперметрические неравенства были введены в разделе 6.1 и подробно изучались во второй главе. Чтобы сделать изложение главы замкнутым, напомним основные определения. Пусть d — расстояние на множестве V_n , k — натуральное число. Тогда d называется $(2k+1)$ -гональным, если для всех (необязательно различных) точек $i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, j_1, \dots, j_k \in V_n$ выполнено следующее неравенство:

$$(24.1.4) \quad \sum_{1 \leq r < s \leq k+1} d(i_r, i_s) + \sum_{1 \leq r < s \leq k} d(j_r, j_s) - \sum_{\substack{1 \leq r \leq k+1 \\ 1 \leq s \leq k}} d(i_r, i_s) \leq 0.$$

Эквивалентно, расстояние d является $(2k+1)$ -гональным, если для всех векторов $b \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $\sum_{1 \leq i \leq n} b_i = 1$ и $\sum_{1 \leq i \leq n} |b_i| = 2k+1$, верно неравенство

$$(24.1.5) \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} b_i b_j d(i, j) \leq 0.$$

Более того, расстояние d называется *гиперметрикой*, если d является $(2k+1)$ -гональным для всех $k \geq 1$. Неравенство (24.1.4) называется $(2k+1)$ -гональным неравенством.

Напомним теперь связь между расстояниями, вложимыми в гиперкуб, и схемами пересечений. Вектор $p \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$ называется *схемой пересечений*, если существует такое множество Ω и такие n его подмножеств $A_1, \dots, A_n$, что

$$(24.1.6) \quad p_{ij} = |A_i \cap A_j| \quad \text{при всех } 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Ковариантное отображение задает взаимно-однозначное соответствие между расстояниями, вложимыми в гиперкуб, и схемами пересечений (см. разделы 5.2 и 5.3, в частности предложение 5.3.5). Точнее, расстояние d на множестве V_{n+1} вложимо в гиперкуб в том, и только том случае, когда его образ $p = \xi(d)$ под действием ковариантного отображения

есть схема пересечений. (Действительно, множества $A_1, \dots, A_n, A_{n+1} = \emptyset$ образуют h -помечивание расстояния d тогда и только тогда, когда множества $A_1, \dots, A_n$ удовлетворяют условию (24.1.6). Напомним, что $p = \xi(d)$ определяется как

$$\begin{cases} p_{ii} = d(i, n+1) & \text{при } 1 \leq i \leq n; \\ p_{ij} = \frac{1}{2}(d(i, n+1) + d(j, n+1) - d(i, j)) & \text{при } 1 \leq i \leq j \leq n. \end{cases}$$

Ранним исследованием по схемам пересечений является работа Келли [1968]. В частности, Келли описал все схемы пересечений порядка $n \leq 4$, предоставив таким образом другое доказательство теоремы 24.1.3. Указанное выше соответствие позволяет, например, вывести следующий результат Хватала [1980] (который также следует из исследований раздела 24.4).

Предложение 24.1.7. *Задача о вложении в гиперкуб имеет полиномиальное по времени решение в классе расстояний с множеством значений $\{2, 4\}$, имеющих точку, отстоящую от остальных на расстояние 2.*

Доказательство. Рассмотрим такое расстояние d на множестве V_{n+1} , что $d(i, n+1) = 2$ при всех $i \in V_n$ и $d(i, j) \in \{2, 4\}$ при всех $i \neq j \in V_n$. Его образ $p = \xi(d)$ удовлетворяет условиям: $p_{ii} = 2$ при всех $i \in V_n$, и $p_{ij} \in \{0, 1\}$ при всех $i \neq j \in V_n$. Обозначим через H граф на V_n , ребрами которого служат те пары (i, j) , для которых $p_{ij} = 1$. Тогда расстояние d вложимо в гиперкуб в том, и только том случае, когда p есть схема пересечений, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что граф H — реберный. Тем самым предложение доказано, так как реберные графы распознаются за полиномиальное время (Байнеке [1970]). ■

Для произвольных метрик задача о вложении в гиперкуб трудна; это было доказано Хваталом [1980] при исследовании схем пересечений.

Теорема 24.1.8. *Задача о вложении в гиперкуб является NP-полной в классе расстояний с множеством значений $\{2, 4, 6\}$, имеющих точку, отстоящую от остальных на расстояние 3.*

Доказательство. Дадим набросок доказательства. Рассмотрим расстояние d , удовлетворяющее условиям теоремы. Его образ $p = \xi(d)$ удовлетворяет условиям: $p_{ii} = 3$ при всех $i \in V_n$, и $p_{ij} \in \{0, 1, 2\}$ при всех $i \neq j \in V_n$. Обозначим через H мультиграф на множестве V_n , вершины i и j которого соединены ребром кратности p_{ij} . Легко видеть,

что расстояние d вложимо в гиперкуб в том, и только том случае, когда p есть схема пересечений, т. е., когда можно разбить множество ребер H на клики так, чтобы каждая вершина принадлежала не более, чем трем кликам. Хватал [1980] доказал, что задача раскраски 4-регулярного графа в три цвета (которая является NP-полной) полиномиально сводится к задаче нахождения данного разбиения ребер графа H . ■

Есть некоторые классы расстояний, для которых очень просто описать вложимость в гиперкуб. Ниже приведено два примера из работ Ассуада и Деза [1980] и Деза и Лоран [1995], соответственно. Первый пример содержится в предложении (24.3.10).

Предложение 24.1.9. Пусть d — расстояние на множестве V_n со значениями в множестве $\{1, 2\}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) d вложимо в гиперкуб.
- (ii) d пентагонально и удовлетворяет условию четности (24.1.1).
- (iii) Либо d является метрикой кратчайшего пути полных двудольных графов $K_{1,n-1}$ или $K_{2,2}$, либо $d = 2d(K_n)$. ■

Предложение 24.1.10. Пусть d — метрика на V_n с множеством значений $\{1, 2\alpha, 2\alpha + 1\}$ при некотором целом $\alpha \geq 2$. Тогда метрика d вложима в гиперкуб в том, и только том случае, когда d удовлетворяет условию четности (24.1.1).

Доказательство. Пусть метрика d удовлетворяет условию (24.1.1). Тогда множество пар точек, находящихся на нечетном расстоянии, образует полный двудольный граф $K_{S,T}$ для некоторого биразбиения (S, T) множества V_n . Так как $\alpha \geq 2$, то пары точек, находящихся на расстоянии 1, образуют паросочетания, скажем, $d(i_1, j_1) = \dots = d(i_k, j_k) = 1$ при $i_1, \dots, i_k \in S$ и $j_1, \dots, j_k \in T$. Тогда

$$d = \delta(S) + \sum_{1 \leq h \leq k} \alpha \delta(\{i_h, j_h\}) + \sum_{\substack{i \in S \setminus \{i_1, \dots, i_k\} \\ j \in T \setminus \{j_1, \dots, j_k\}}} \alpha \delta(\{i\}),$$

откуда следует, что метрика d вложима в гиперкуб. ■

Случай $\alpha = 1$, т. е. случай расстояний с множеством значений $\{1, 2, 3\}$ значительно более сложен и рассматривается в разделе 24.3.

Завершим раздел результатом о числе различных вложений в гиперкуб данного расстояния. Для заданного вложимого в гиперкуб расстояния d на V_n и целого $s \geq 0$ обозначим через $N_n(d, s)$ число

различных $\mathbb{Z}_+$ -реализаций $d = \sum_S \lambda_S \delta(S)$ (где $\lambda_S \in \mathbb{Z}_+$) расстояния d размера $\sum_S \lambda_S = s$. Положим

$$M_n(x) := \sum N(d, s),$$

где сумма берется по всем $s \in \mathbb{Z}_+$ и всем расстояниям d на V_n , удовлетворяющим условию $\sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j) = x$. В работе Деза, Рой-Чаудхури и Синги [1990] доказано, что функция $x \in \mathbb{Z}_+ \rightarrow M_n(x)$ является квазиполиномом. Другими словами, существует натуральное число t и существуют многочлены $f_0, f_1, \dots, f_{t-1}$ такие, что

$$M_n(x) = f_i(x) \quad \text{при } x \equiv i \pmod{t}, \quad (0 \leq i \leq t-1).$$

В частности, $M_n(x)$ ограничено многочленом от x . Следовательно число различных $\mathbb{Z}_+$ -реализаций расстояния d также ограничено многочленом от $x = \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j)$.

24.2. Обобщенные двудольные метрики

Пусть d — метрика на V_n такая, что $d(i, j) = 2$ при всех $i \neq j \in S$ и всех $i \neq j \in T$ для некоторого биразбиения (S, T) множества V_n . Метрики, обладающие этим свойством, называются *обобщенными двудольными метриками*. $|S| \times |T|$ матрица D с элементами $d(i, j)$ при $i \in S, j \in T$ называется (S, T) -*матрицей расстояний* метрики d . Например, метрика кратчайшего пути на полном двудольном графе является обобщенной двудольной метрикой. В этом разделе будет доказан следующий результат Деза и Лоран [1995].

Теорема 24.2.1. *Задача о вложении в гиперкуб имеет полиномиальное по времени решение в классе обобщенных двудольных метрик.*

Начнем с простого наблюдения.

Лемма 24.2.2. *Пусть d — обобщенная двудольная метрика с биразбиением (S, T) . Если метрика d вложима в гиперкуб, то существует такое целое число α , что $d(i, j) \in \{\alpha, \alpha + 2, \alpha + 4\}$ при всех $i \in S, j \in T$.*

Доказательство. Обозначим через α и β наименьшее и наибольшее значение, принимаемое $d(i, j)$ при $i \in S, j \in T$. Пусть, например, $\alpha = d(i, j)$, $\beta = d(i', j')$ при $i, i' \in S, j, j' \in T$. С помощью неравенства треугольника получаем, что $\beta = d(i', j') \leq d(i', i) + d(i, j) + d(j, j') = 4 + \alpha$. Более того, из условия (24.1.1) следует, что α и β имеют одинаковую четность. ■

Ниже мы увидим, какие возможны конфигурации для пар с расстояниями $\alpha, \alpha + 2, \alpha + 4$.

Положим $s := |S|$ и $t := |T|$. Обозначим через d_S (соответственно, через d_T) ограничение d на S (соответственно, на T). Тогда $d_S = 2\mathbb{1}_s$ и $d_T = 2\mathbb{1}_t$ — эквидистантные метрики. Напомним, что по предложению 23.4.3 эквидистантная метрика $2\mathbb{1}_n$ является h -жесткой при $n \neq 4$, и что метрика $2\mathbb{1}_4$ имеет ровно две $\mathbb{Z}_+$ -реализации: звездную реализацию $2\mathbb{1}_4 = \sum_{1 \leq i \leq 4} \delta(\{i\})$ и дополнительную реализацию

$$2\mathbb{1}_4 = \delta(\{1, 2\}) + \delta(\{1, 3\}) + \delta(\{1, 4\}),$$

которую мы здесь будем называть *специальной реализацией*.

Доказательство теоремы 24.2.1 основано на следующем простом замечании. Пусть

$$d = \sum_{A \subseteq V_n} \lambda_A \delta(A)$$

— $\mathbb{Z}_+$ -реализация d . Тогда соответствующая проекция на S :

$$\sum_{A \subseteq V_n} \lambda_A \delta(A \cap S)$$

является $\mathbb{Z}_+$ -реализацией d_S . Таким образом, при $s \neq 4$ данное разложение должно совпадать со звездной реализацией $2\mathbb{1}_s$, а при $s = 4$ — совпадать либо со звездной, либо со специальной реализацией $2\mathbb{1}_4$. То же верно и для d_T .

	A'	B'	C'	D'
A	$(f+2)J_a - 2I_a$	$f + 2$	f	f
B	$f + 2$	$f + 2$	f	f
C	f	f	$(f-2)J_b + 2I_b$	$f - 2$
D	f	f	$f - 2$	$f - 2$

Рис. 24.2.3

В дальнейшем нам потребуется следующее определение. $\mathbb{Z}_+$ -реализация метрики d называется *дважды звездной*, если обе ее проекции на S и T являются звездными реализациями $2\mathbb{1}_s$ и $2\mathbb{1}_t$ соответственно. Реализация метрики d называется *звездно-специальной*, если ее проекция на S есть звездная реализация $2\mathbb{1}_s$, а $t = 4$ и проекция на T есть специальная реализация $2\mathbb{1}_4$. Наконец, $\mathbb{Z}_+$ -реализация метрики d

называется *дважды специальной*, если $s = t = 4$ и обе проекции на S и T являются специальными реализациями $2\mathbb{1}_4$.

Займемся теперь исследованием структуры вложимых в гиперкуб обобщенных двудольных метрик, допускающих дважды звездную реализацию.

Предложение 24.2.4. Пусть d — обобщенная двудольная метрика с биразбиением (S, T) . Тогда d допускает дважды звездную реализацию в том, и только том случае, когда существуют разбиения $\{A, B, C, D\}$ множества S и $\{A', B', C', D'\}$ множества T (возможно, с пустыми элементами), для которых $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$, и существуют взаимно-однозначные соответствия $\sigma: A \rightarrow A'$ и $\tau: B \rightarrow B'$ и целое $f \geq |B| + |D| + |D'|$ такие, что все значения $d(i, j)$ задаются формулой: (24.2.5)

$$d(i, j) = \begin{cases} f & \text{при } (i, j) \in ((A \cup C) \times (B' \cup D')) \cup \\ & \quad \cup ((B \cup D) \times (A' \cup C')) \cup \{(k, \sigma(k)) \mid k \in A\} \\ & \quad \cup \{(k, \tau(k)) \mid k \in B\}; \\ f + 2 & \text{при } (i, j) \in ((A \cup C) \times (A' \cup C')) \setminus \{(k, \sigma(k)) \mid k \in A\}; \\ f - 2 & \text{при } (i, j) \in ((B \cup D) \times (B' \cup D')) \setminus \{(k, \tau(k)) \mid k \in B\}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть d — обобщенная двудольная метрика, допускающая дважды звездную реализацию $d = \sum_{U \in \mathcal{U}} \delta(U)$, где $\mathcal{U}$ — набор (допускающий повторения) непустых подмножеств множества V . Тогда $|U \cap S| \in \{0, s, 1, s-1\}$ и $|U \cap T| \in \{0, t, 1, t-1\}$ при всех $U \in \mathcal{U}$. Без потери общности можно считать, что $|U \cap S| \in \{0, 1\}$ при всех $U \in \mathcal{U}$. Обозначим через M матрицу, столбцами которой служат векторы инцидентности элементов из $\mathcal{U}$. Сопоставляя две указанные возможности для $U \cap S$ с четырьмя возможностями для $U \cap T$ получаем, что матрица M имеет вид, приведенный на рисунке 24.2.6. Следовательно множества A, B, C, D и A', B', C', D' образуют требуемые разбиения S и T . Теперь можно вычислить величины $d(i, j)$ для $(i, j) \in S \times T$ и проверим, что они удовлетворяют условию (24.2.5), полагая $f := |B| + |D| + |D'| + m$.

Обратно, пусть метрика d определяется формулами (24.2.5). Положим $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $B = \{y_1, \dots, y_n\}$. Легко проверить, что для d имеет место разложение:

$$d = \sum_{1 \leq i \leq |A|} \delta(\{x_i, \sigma(x_i)\}) + \sum_{1 \leq i \leq |B|} \delta(T \setminus \{\tau(y_i)\} \cup \{y_i\}) + \sum_{x \in C \cup C'} \delta(\{x\}) + \\ + \sum_{x \in D} \delta(T \cup \{x\}) + \sum_{x \in D'} \delta(T \setminus \{x\}) + (f - |B| - |D| - |D'|) \delta(T).$$

Ясно, что эта реализация является дважды звездной. ■

На рисунке 24.2.3 изображена (S, T) -матрица расстояний метрики d , заданной формулами (24.2.5). На рисунках 24.2.3 и 24.2.6 приняты следующие обозначения: I_a — единичная $a \times a$ матрица, J_a — $a \times a$ матрица из одних единиц, и все элементы блока, обозначенного, например, через f , равны f . Как правило, мощность множества обозначается соответствующей строчной буквой; например, $a = |A|$, $a' = |A'|$, и т. д.

	a	b	c	d	c'	d'	m
A	I_a	0	0	0	0	0	0
B	0	I_b	0	0	0	0	0
C	0	0	I_c	0	0	0	0
D	0	0	0	I_d	0	0	0
A'	I_a	1	0	1	0	1	1
B'	0	$J_b - I_b$	0	1	0	1	1
C'	0	1	0	1	$I_{c'}$	1	1
D'	0	1	0	1	0	$J_{d'} - I_{d'}$	1

Рис. 24.2.6

Совершенно очевидно, что критерий из предложения 24.2.4 дает возможность за полиномиальное время определить, имеет ли данная обобщенная двудольная метрика дважды звездную реализацию и найти эту реализацию, если она существует (для более подробной информации см. работу Деца и Лоран [1995]). В действительности, для метрики на n точках это может быть сделано за время $O(n^2)$.

Проверить, имеет ли данная обобщенная двудольная метрика звездно-специальную реализацию можно следующим образом. Пусть $|T| = 4$. Для $z' \in T$ обозначим через d' ограничение метрики d на множество $V \setminus \{z'\}$. Если у d есть звездно-специальная реализация, то у метрики d' есть дважды звездная реализация. Легко заметить, что для метрики d' существует $O(1)$ возможных дважды звездных реализаций и все они вычисляются за полиномиальное время. Далее для каждой из них проверяется, продолжается ли данная реализация до звездно-специальной реализации метрики d . (Если дважды звездная реализация метрики d' имеет вид, как на рисунке 24.2.6, то существует единственное ее продолжение до звездно-специальной реализации метрики d , которое получается приписыванием указанной ниже строки в качестве последней к матрице рисунка 24.2.6.)

	a	b	c	d	c'	d'	m
z'	1	0	0	1	1	0	1

Наконец, обобщенная двудольная метрика d имеет дважды специальную реализацию тогда и только тогда, когда для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$ (S, T) -матрица расстояний полуметрики $d - m\delta(T)$ совпадает с одной из девяти матриц рисунка 24.2.7 (с точностью до перестановки S и T). Этот факт можно проверить, используя описание обобщенных двудольных метрик, допускающих дважды специальную реализацию, аналогичное предложению 24.2.4 (см. Деза и Лоран [1995]).

3 1 1 1 1 3 1 1 1 1 3 1 1 1 1 3	0 2 2 2 2 0 2 2 2 2 0 2 2 2 2 0	1 1 1 3 1 3 3 3 1 3 3 3 3 3 3 5
4 4 4 2 4 2 2 2 4 2 2 2 2 2 2 0	3 1 1 1 1 3 1 1 3 3 3 1 3 3 1 3	0 2 2 2 2 0 2 2 2 2 2 4 2 2 4 2
2 2 2 4 2 2 2 4 2 2 2 4 4 4 4 6	4 4 4 2 4 4 4 2 4 4 4 2 2 2 2 0	3 3 3 1 3 3 3 1 3 3 3 1 5 5 5 3

Рис. 24.2.7

Пример 24.2.8. Для целого $k \geq 5$ обозначим через d_{2k} метрику, следующим образом определенную на $2k$ точках: $d_{2k}(i, i + k) = 4$ при всех $1 \leq i \leq k$ и $d_{2k}(i, j) = 2$ для всех остальных пар (i, j) , $1 \leq i \neq j \leq 2k$. Тогда d_{2k} является обобщенной двудольной метрикой с биразбиением $(\{1, 2, \dots, k\}, \{k + 1, k + 2, \dots, 2k\})$. Заметим, что $\frac{1}{2}d_{2k}$ есть метрика кратчайшего пути графа $K_{k \times 2}$. Метрика d_{2k} может быть получена из эквидистантной метрики с помощью полной антиподальной надстройки, так как $d_{2k} = \text{Ant}_n(2\mathbb{1}_k)$. В качестве легкого упражнения можно проверить (например, только что описанным методом), что метрика d_{2k} не вложима в гиперкуб (иное доказательство этого факта

было дано в разделе 7.2, см. пример 7.2.7). С другой стороны, легко убедиться, что метрика d_{2k} принадлежит разрезному конусу CUT_{2k} и разрезной решетке $\mathcal{L}_{2k}$ (см. также пример 7.2.7). ■

Та же техника может быть использована для определения вложимости в гиперкуб и других, не обязательно обобщенных двудольных, метрик. Пусть d — полуметрика на V_n . Предположим, что существует такое биразбиение (S, T) множества V , что проекции d_S и d_T полуметрики d на S и T имеют вид:

$$(24.2.9) \quad d_S = \sum_{x \in S} \alpha_x \delta(\{x\}), \quad d_T = \sum_{x \in T} \beta_x \delta(\{x\}),$$

для некоторых натуральных α_x, β_x . Из теоремы 22.0.12 известно, что если мощности $|S|$ и $|T|$ достаточно велики по сравнению с $\max_{x \in S} \alpha_x$ и $\max_{x \in T} \beta_x$ соответственно, то d_S и d_T — h -жесткие. Поэтому, теоретически, ничто не мешает воспользоваться теми же приемами, что и в предложении 24.2.4, для изучения вложимости в гиперкуб этих метрик. Однако точное исследование структуры матрицы расстояний таких метрик, по-видимости, технически гораздо более сложно, чем в только что рассмотренном случае, где все α_x, β_x были равны 1.

Следующим простейшим случаем после обобщенных двудольных метрик служит класс метрик d для которых $d(x, y) = 4$ при $x \neq y \in S$ и $d(x, y) = 2$ при $x \neq y \in T$ (т. е. все α_x равны 2, а все β_x равны 1). Для таких метрик можно описать h -вложимость с помощью рассуждений, схожих с примененными к обобщенным двудольным метрикам, и, как следствие, получить алгоритм, распознающий их за полиномиальное время. Действительно, метрика $4\mathbb{1}_n$ является h -жесткой для $n = 3$ и $n \geq 9$, и имеет ровно три реализации (звездную и две специальные) для каждого $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ (см. предложение 23.4.4).

Другой относительно простой случай возникает, когда одно из множеств S или T мало. Деца и Лоран [1995] приводят полное описание вложимых в гиперкуб метрик, удовлетворяющих условию (24.2.9) при $|T| \leq 2$.

24.3. Метрики, принимающие мало значений

В этом разделе мы рассмотрим расстояния, принимающие два значения различной четности, и расстояния, принимающие три значения, не все из которых четные, а одно является суммой двух других. Точнее, для данных $a, b \in \mathbb{Z}_+$ мы рассмотрим следующие классы расстояний d :

- (а) d принимает значения $2a, b$, причем b нечетно;
- (б) d принимает значения $a, b, a + b$, причем a и b нечетны;
- (с) d принимает значения $2a, b, 2a + b$, причем b нечетно и $b < 2a$;
- (д) d принимает значения $2a, b, 2a + b$, причем b нечетно и $2a < b$.

Лоран [1994] показала, что в каждом из этих классов задача о вложении в гиперкуб решается за полиномиальное время.

Теорема 24.3.1. *Для фиксированных a и b задача о вложении в гиперкуб решается за полиномиальное время в каждом из классов (а), (б), (с), (д).*

В оставшейся части данного раздела мы дадим набросок доказательства теоремы 24.3.1. Оказывается, что каждый из классов (а), (б), (с), (д) необходимо рассматривать отдельно. Случай $a = b = 1$ из класса (с) был исследован Ависом [1990], который доказал, что вложимые в гиперкуб расстояния со значениями в множестве $\{1, 2, 3\}$ распознаются за полиномиальное время. Доказательство для класса (с) по сути такое же, как и в частном случае $a = b = 1$.

Основные шаги доказательства следующие. Пусть d — расстояние на V_n , принадлежащее одному из классов (а), (б), (с), (д). Сначала проверяем, выполнено ли для d условие четности (24.1.1). Если не выполнено, то расстояние d не вложимо в гиперкуб. В противном случае, пусть (S, T) — разбиение множества V_n из леммы 24.1.2. Пусть, например, $|S| \geq |T|$. Положим $n(a, b) := a^2 + a + 3$, если d принадлежит классам (а), (с) или (д), и $n(a, b) := \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{a+b}{2} + 4$, если d принадлежит классу (б).

Если $n < 2n(a, b) - 1$, то вложимость расстояния d в гиперкуб проверяется непосредственно, например, прямым перебором (число операций на этом шаге зависит только от a и b и может быть экспоненциальным от этих параметров).

Если $n \geq 2n(a, b) - 1$, то $|S| \geq n(a, b)$. Следовательно, ограничение d на множество S является h -жесткой эквидистантной метрикой. Таким образом, точки S должны быть помечены посредством звездного вложения (или эквивалентного ему) при любом h -помечивании расстояния d . Для классов (а), (б), (с), (д) эта информация уже позволяет дать полное описание всех вложимых в гиперкуб расстояний на $n \geq 2n(a, b) - 1$ точках с помощью набора условий, проверяемых за полиномиальное время.

Ниже мы приводим эти описания для классов (а), (б) и (с); см. предложения 24.3.8, 24.3.16, 24.3.18 и 24.3.27. Случай вложимости в

гиперкуб для класса (d) здесь не рассматривается, так как при этом потребуются множество технических подробностей.

Приводятся также некоторые частичные результаты, относящиеся к описанию вложимости в гиперкуб расстояний на n точках при произвольном n (см. предложения 24.3.9, 24.3.10, 24.3.11 и 24.3.17).

Как уже было упомянуто выше, исследование класса (d) можно найти в работе Лоран [1994]. Описание вложимости в гиперкуб в классе (d) требует множества технических условий. В некоторых частных случаях необходимые условия включают в себя существование некоторых блок-схем, в частности, систем пересечения с заданными параметрами. Рассмотрим, например, расстояние d из рисунка 24.3.2. Можно проверить, что при $|S| \geq a^2 + a + 3$ расстояние d вложимо в гиперкуб тогда и только тогда, когда $|U| \leq f(2a, a; a + b)$, т. е., когда существует $(2a, a)$ -система пересечений на V_{a+b} из $|U|$ элементов.

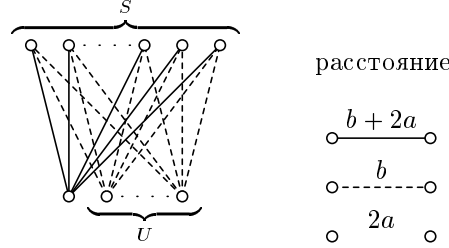


Рис. 24.3.2

24.3.1. Расстояния со значениями $2a, b$ (b нечетно)

Пусть a, b — натуральные числа, причем b — нечетно. Рассмотрим расстояние d на V_n с множеством значений $\{2a, b\}$. Предположим, что d — полуметрика, удовлетворяющая условию четности (24.1.1). Тогда $b \geq a$. Обозначим через (S, T) разбиение множества V_n , определенное леммой 24.1.2. Тогда h -помечивание расстояния d состоит из двух семейств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ таких, что

$$(24.3.3) \quad \begin{cases} \mathcal{A} — (b, b-a)\text{-пересекающаяся система;} \\ \mathcal{B} — (2a, a)\text{-пересекающаяся система;} \\ |A \cap B| = a \text{ при всех } A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}; \\ |\mathcal{A}| = |S|, |\mathcal{B}| = |T| - 1. \end{cases}$$

Действительно, пометим точку $j_0 \in T$ пустым множеством, оставшиеся точки T — элементами $\mathcal{B}$, а точки S — элементами $\mathcal{A}$.

Лемма 24.3.4.

- (i) Если $|T| = 1$, то расстояние d вложимо в гиперкуб.
- (ii) Если $b \geq 2a$, то расстояние d вложимо в гиперкуб.
- (iii) Если $b < 2a$ и $2 \leq |T| \leq |S| \leq \frac{a}{2a-b} + 1$, то расстояние d вложимо в гиперкуб.
- (iv) Если $b < 2a$ и расстояние d вложимо в гиперкуб, то $\min(|T|, |S| - 1) \leq \left\lfloor \frac{b}{2a-b} \right\rfloor$.

Доказательство. Для случаев (i), (ii), (iii) построим два семейства $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, удовлетворяющих условию (24.3.3). Во всех этих случаях за $\mathcal{A}$ мы примем Δ -систему с параметрами $(b, b-a)$ и центром A_0 , $|A_0| = b-a$.

В случае (i) положим просто $\mathcal{B} = \emptyset$. В случае (ii) $b \geq 2a$ и можно найти такое подмножество B_0 в A_0 , что $|B_0| = a$. Тогда за $\mathcal{B}$ примем такую Δ -систему с параметрами $(2a, a)$ и центром B_0 , что $(A \setminus A_0) \cap (B \setminus B_0) = \emptyset$ при всех $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

В случае (iii) $a \geq (s-1)(2a-b)$ (полагая $s := |S|$), т. е. для каждого $A \in \mathcal{A}$ можно найти $s-1$ непересекающихся подмножеств $A^{(1)}, \dots, A^{(s-1)}$ множества $A \setminus A_0$ мощности $2a-b$. Заметим, что $x := b-a + s(2a-b) \leq 2a$. Пусть $X^{(1)}, \dots, X^{(s-1)}$ — непересекающиеся подмножества мощности $(2a-x)$, не имеющие общих элементов с $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Для данного $A_1 \in \mathcal{A}$ положим $\mathcal{B} := \{B^{(1)}, \dots, B^{(s-1)}\}$, где

$$B^{(j)} = A_0 \cup A_1^{(1)} \cup \bigcup_{A \in \mathcal{A} \setminus \{A_1\}} A^{(j)} \cup X^{(j)},$$

при $1 \leq j \leq s-1$. Тогда $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ удовлетворяют (24.3.3).

Случай (iv). Предположим, что $\min(|T|, |S|-1) \geq \left\lfloor \frac{b}{2a-b} \right\rfloor + 1$. Пусть k — такое целое число, что

$$\min(|T|, |S|-1) \geq k \geq \left\lfloor \frac{b}{2a-b} \right\rfloor + 1.$$

Положим $b_i = 1$ для $k+1$ точки из S , $b_i = -1$ для k точек из T , и $b_i = 0$ для оставшихся точек из V_n . Тогда

$$\sum_{i,j \in V_n} b_i b_j d(i, j) = 2k(k(2a-b) - b) > 0.$$

Таким образом, для расстояния d нарушается $(2k+1)$ -гональное неравенство и, следовательно, d не может быть вложено в гиперкуб. ■

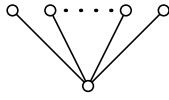


Рис. 24.3.5

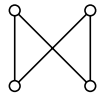


Рис. 24.3.6

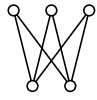
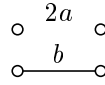


Рис. 24.3.7

расстояние



Предложение 24.3.8. Пусть $a \leq b$ — натуральные числа, b — нечетно. Рассмотрим расстояние d на n точках с множеством значений $\{2a, b\}$. Если $n \geq 2a^2 + 2a + 5$, то расстояние d вложимо в гиперкуб тогда и только тогда, когда: (i) d удовлетворяет условию (24.1.1) и $b \geq 2a$, или (ii) d одно из расстояний, приведенных на рисунке (24.3.5).

Доказательство. Остается доказать утверждение «только тогда». Предположим, что расстояние d вложимо в гиперкуб и $b < 2a$. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ удовлетворяют условиям (24.3.3). По предположению, $|S| \geq a^2 + a + 3$. Следовательно $\mathcal{A}$ есть $(b, b-a)$ -пресекающаяся система, причем $|\mathcal{A}| \geq a^2 + a + 3$. По лемме (23.1.11), $\mathcal{A}$ является Δ -системой; обозначим ее центр через A_0 , $|A_0| = b - a$. Если $|T| \geq 2$, то $|\mathcal{B}| \geq 1$. Рассмотрим $B \in \mathcal{B}$ и положим $\alpha := |B \cap A_0|$. Тогда $|B \cap (A \setminus A_0)| = a - \alpha$ при всех $A \in \mathcal{A}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} 2a = |B| &\geq \alpha + |\mathcal{A}|(a - \alpha) = a|\mathcal{A}| - \alpha(|\mathcal{A}| - 1) \geq \\ &\geq a|\mathcal{A}| - (b - a)(|\mathcal{A}| - 1) = (2a - b)|\mathcal{A}| + b - a, \end{aligned}$$

откуда

$$|\mathcal{A}| \leq \frac{3a - b}{2a - b} = \frac{a}{2a - b} + 1.$$

Но это противоречит неравенству $|\mathcal{A}| = |S| \geq a^2 + a + 3$. Следовательно $|T| = 1$, т. е. d одно из расстояний, приведенных на рисунке (24.3.5). ■

Предложение 24.3.9. Пусть $a \leq b$ — натуральные числа, b — нечетно, $b \geq 2a$, а d — расстояние на n точках с множеством значений $\{2a, b\}$. Тогда d вложимо в гиперкуб в том, и только том случае, когда d удовлетворяет условию (24.1.1). ■

Предложение 24.3.10. Пусть $a \leq b$ — натуральные числа, b — нечетно, $b < \frac{4}{3}a$, а d — расстояние на n точках с множеством значений $\{2a, b\}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) d вложимо в гиперкуб.
- (ii) d удовлетворяет условию четности (24.1.1) и пентагональному неравенству (т. е. в d не содержится подпространства расстояний из рисунка 24.3.7).
- (iii) d является одним из расстояний, приведенных на рисунках 24.3.5 и 24.3.6.

Доказательство. Импликация (ii) $\implies$ (iii) следует из утверждения (i) леммы 24.3.4, так как $\left\lfloor \frac{b}{2a-b} \right\rfloor = 1$ при $b < \frac{4}{3}a$. Расстояние, приведенное на рисунке 24.3.6 (соответствующее случаю $|S| = |T| = 2$) действительно вложимо в гиперкуб; пометим две вершины T множествами $\emptyset$ и $A \cup A'$, а две вершины S — множествами $A_0 \cup A$ и $A_0 \cup A'$, где A_0, A, A' — попарно непересекающиеся множества, состоящие из $b-a, a, a$ элементов соответственно. ■

Заметим, что предложение 24.1.9 отвечает случаю $a = b = 1$ предложения 24.1.10. Таким образом получено полное описание вложимых в гиперкуб расстояний со значениями в множестве $\{2a, b\}$ (b — нечетно), за исключением тех параметров a, b , для которых $\frac{4}{3}a \leq b < 2a$.

24.3.2. Расстояния со значениями $a, b, a+b$ (a и b — нечетны)

Пусть $a < b$ — нечетные натуральные числа. Рассмотрим расстояние d на V_n с множеством значений $\{a, b, a+b\}$. Предположим, что d — полуметрика, удовлетворяющая условию четности (24.1.1). Пусть (S, T) — разбиение множества V_n из леммы 24.1.2. Тогда $d(i, j) = a+b$ при $i \neq j \in S, i \neq j \in T$ и $d(i, j) \in \{a, b\}$ при $i \in S, j \in T$. Более того, при $d(i, j) = a$ пары ij образуют паросочетания.

Предложение 24.3.11. *Если найдется хотя бы две различные пары точек на расстоянии a , то следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) расстояние d вложимо в гиперкуб.
- (ii) расстояние d удовлетворяет условию четности (24.1.1) и пентагональному неравенству.
- (iii) d — расстояние, приведенное на рисунке 24.3.12.

Доказательство. Рассмотрим такие точки $i, i' \in S, j, j' \in T$, что $d(i, j) = d(i', j') = a$. Если найдется $k \in V_n \setminus \{i, i', j, j'\}$, то положим $b_i = b_{i'} = b_k = 1$, $b_j = b_{j'} = -1$ и $b_h = 0$ для остальных точек. Тогда

$$\sum_{i, j \in V_n} b_i b_j d(i, j) = 4a > 0,$$

т. е. для расстояния d нарушается пентагональное неравенство. Тем самым доказана импликация (ii) $\implies$ (iii). Если $V_n = \{i, i', j, j'\}$, то расстояние d действительно вложимо в гиперкуб; для непересекающихся множеств A и B таких, что $|A| = a$ и $|B| = b$ можно сопоставить точке i множество A , точке i' — множество B , точке j — $\emptyset$ и точке j' — $A \cup B$. Тем самым доказана импликация (iii) $\implies$ (i). ■

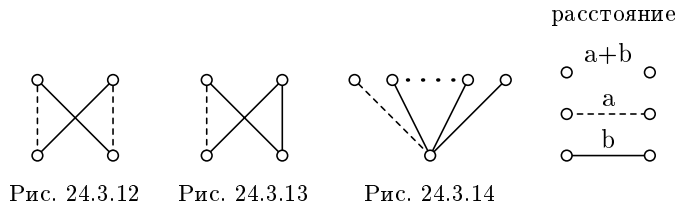


Рис. 24.3.12

Рис. 24.3.13

Рис. 24.3.14

Теперь мы можем считать, что есть ровно одна пара (i_0, j_0) точек на расстоянии a , где $i_0 \in S, j_0 \in T$. Можно считать, что j_0 помечена пустым множеством в h -помечивании d , тогда i_0 помечена некоторым множеством A_0 из a элементов. Таким образом, h -помечивание расстояния d существует тогда и только тогда, когда найдутся два таких семейства множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, что

$$(24.3.15) \quad \begin{cases} \mathcal{A}, \mathcal{B} - \left(b, \frac{b-a}{2}\right)\text{-пересекающиеся системы}; \\ |A \cap B| = \frac{a+b}{2} \text{ при всех } A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}; \\ A \cap A_0 = B \cap A_0 = \emptyset \text{ при всех } A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}; \\ |\mathcal{A}| = |S| - 1, |\mathcal{B}| = |T| - 1. \end{cases}$$

Действительно, пометим точки $S \setminus \{j_0\}$ элементами $\mathcal{A}$, а точки $T \setminus \{j_0\}$ — множествами $A_0 \cap B$, где $B \in \mathcal{B}$.

Предложение 24.3.16. Пусть $a < b$ — нечетные натуральные числа. Рассмотрим расстояние d на $n \geq 2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + a+b+7$ точках с множеством значений $\{a, b, a+b\}$, не совпадающее с расстоянием на рисунке 24.3.12. Тогда расстояние d вложимо в гиперкуб в том, и только том случае, когда d является расстоянием на рисунке 24.3.14.

Доказательство. Расстояние из рисунка (24.3.14) действительно вкладывается в гиперкуб — за $\mathcal{A}$ можно принять Δ -систему. Обратно, предположим, что расстояние d вложимо в гиперкуб. По предположению,

$$|S| \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right) + 4.$$

Следовательно $\mathcal{A}$ является $\left(b, \frac{b-a}{2}\right)$ -пересекающейся системой, причем

$$|\mathcal{A}| \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{a+b}{2} + 3.$$

По лемме 23.1.11, $\mathcal{A}$ является Δ -системой; пусть A_1 — ее центр, $|A_1| = \frac{b-a}{2}$. Предположим, что $|T| \geq 2$ и рассмотрим $B \in \mathcal{B}$. Тогда $|B \cap (A \setminus A_1)| \geq a$

при всех $A \in \mathcal{A}$, откуда $b = |B| \geq a|A|$, что противоречит наложенным на $|A|$ условиям. Следовательно $|T| = 1$, т. е. d является расстоянием рисунка 24.3.14. ■

Предложение 24.3.17. Пусть a, b — такие нечетные числа, что $a < b < 2a$; пусть d — расстояние на n точках с множеством значений $\{a, b, a+b\}$. Тогда расстояние d вложимо в гиперкуб в том, и только том случае, когда d является одним из расстояний, приведенных на рисунках 24.3.12, 24.3.13 и 24.3.14.

Доказательство. Предположим, что расстояние d вложимо в гиперкуб и не является расстоянием на рисунке 24.3.12. Положим $k := \min(|T|, |S| - 1)$. Если $k \geq 2$, то $k \leq \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor$ (в противном случае для d нарушается $(2k+1)$ -гональное неравенство). Таким образом, $k = 1$, откуда следует, что d является одним из расстояний приведенных на рисунках 24.3.13 и 24.3.14. ■

24.3.3. Расстояния со значениями $b, 2a, b+2a$ (b — нечетно, $b < 2a$)

Предложение 24.3.18. Пусть a, b — натуральные числа, b — нечетно, $b < 2a$. Рассмотрим расстояние d на $n \geq 2a^2 + 2a + 5$ точках с множеством значений $\{2a, b, 2a+b\}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) Расстояние d вложимо в гиперкуб.
- (ii) Расстояние d является полуметрикой, удовлетворяет условию четности (24.1.1) и не содержит в качестве подпространства ни одного из пространств расстояний, приведенных на рисунках 24.3.19–24.3.26.

В частности, при $b < a$ расстояние d вложимо в гиперкуб тогда и только тогда, когда d является полуметрикой и удовлетворяет условию четности (24.1.1).

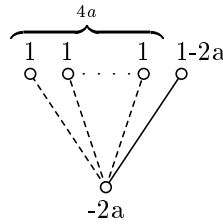


Рис. 24.3.19

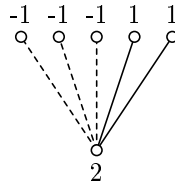


Рис. 24.3.20

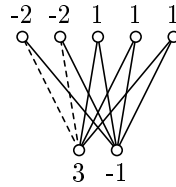


Рис. 24.3.21

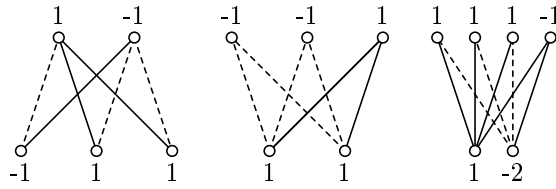


Рис. 24.3.22

Рис. 24.3.23

Рис. 24.3.24

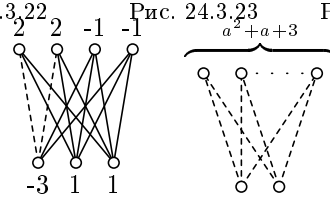


Рис. 24.3.25

Рис. 24.3.26

На рисунках 24.3.19–24.3.26 обычным ребром соединены точки на расстоянии $2a + b$, пунктирным — на расстоянии b , а точки, не соединенные ребром, находятся на расстоянии $2a$.

Доказательство. Для доказательства импликации (i) $\implies$ (ii) проверим, что ни одно из расстояний, приведенных на рисунках 24.3.19–24.3.26, не вложимо в гиперкуб. Действительно, расстояния из рисунков 24.3.19–24.3.25 нарушают некоторые гиперметрические неравенства. Числа, приписанные вершинам на рисунках 24.3.19–24.3.25 указывают набор коэффициентов b_i , для которых гиперметрическое неравенство (24.1.5) не будет выполнено. Например, для расстояния из рисунка 24.3.19 получаем

$$\sum_{i,j \in V_n} b_i b_j d(i, j) = 4a(2a(2a - b) - b) \geq 4a > 0,$$

так как $2a - b \geq 1$. Расстояние, приведенное на рисунке 24.3.26, не является вложимым в гиперкуб по предложению 24.3.8 (и его доказательству).

Докажем теперь импликацию (ii) $\implies$ (i). Так как d удовлетворяет условию четности, то V_n имеет разбиение вида $S \cup T$, где $|S| \geq |T|$, $d(i, j) = 2a$ при $(i, j) \in S^2 \cup T^2$, $d(i, j) \in \{b, b + 2a\}$ при $(i, j) \in S \times T$. Положим $s := |S|$. Для $j \in T$ определим

$$N_b(j) := \{i \in S \mid d(i, j) = b\}.$$

Для $v \in \{0, 1, 2, \dots, s - 1, s\}$ определим

$$T_v := \{j \in T \mid |N_b(j)| = v\}.$$

Соберем вместе некоторые свойства множеств T_v .

- (i) $T_{s-1} = \emptyset$ (так как d не содержит конфигурации из рисунка 24.3.19).
- (ii) $|T_s| \leq 1$ (так как d не содержит конфигурации из рисунка 24.3.26).

- (iii) Все множества T_v — пустые, за исключением, быть может, T_0, T_1, T_2, T_s (действительно, $|N_b(j)| \leq 2$ или $|N_b(j)| \geq s - 1$ при всех $j \in T$, так как d не содержит подпространства из рисунка 24.3.20).
- (iv) Хотя бы одно из множеств T_0 и T_2 пусто (так как d не содержит подпространства из рисунка 24.3.21).
- (v) Если $|T| \geq 2$, то
 - (v1) либо все $N_b(j)$ ($j \in T_1$) равны,
 - (v2) либо все $N_b(j)$ ($j \in T_1$) различны
 (так как d не содержит подпространства из рисунка 24.3.22).
- (vi) Если $j \neq j' \in T_2$, то $|N_b(j) \cap N_b(j')| = 1$ (см. рисунки 24.3.22 и 24.3.23).
- (vii) Если $j \in T_1$ и $j' \in T_2$, то $N_b(j) \cap N_b(j') \neq \emptyset$ (в соответствии с рисунком 24.3.22).
- (viii) Если $b < a$, то $T_2 = T_s = \emptyset$ (по неравенству треугольника).

Покажем теперь, как построить h -помечивание расстояния d . Пусть A_i ($i \in S$) — непересекающиеся множества из a элементов. Положим $A := \bigcup_{i \in S} A_i$. Пометим элементы S множествами A_i .

Предположим, сначала, что $b < a$. Тогда по свойству (viii), $d(i_1, j_1) = \dots = d(i_r, j_r) = b$ для некоторых $i_1, \dots, i_r \in S$, $j_1, \dots, j_r \in T$, $1 \leq r \leq |T|$. Пусть X, B_j ($j \in T \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$) — попарно непересекающиеся множества, не имеющие общих элементов с A и удовлетворяющие условиям: $|X| = b$, $|B_j| = a$. Сопоставим точкам $j_1, \dots, j_r$ множества $A_{i_1} \cup X, \dots, A_{i_r} \cup X$ соответственно, а точкам $j \in T \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$ — множества $X \cup B_j$. Тем самым получено h -помечивание расстояния d .

Рассмотрим теперь случай, когда $b \geq a$. Пусть X — множество из $b - a$ элементов, непересекающееся с A .

- Если $T_s \neq \emptyset$, то $T_s = \{x\}$ (в соответствии с (i)); сопоставим точке x множество X .
- Каждому элементу $j \in T_2$ сопоставим $\bigcup_{i \in N_b(j)} A_i \cup X$ (тем самым, в соответствии с (vi), получено h -помечивание проекции d на $S \cup T_s \cup T_2$).
- В случае (v1) будем считать, что все $N_b(j)$ ($j \in T_1$) равны, например, $\{i_0\}$. Пусть Y_j — попарно непересекающиеся множества мощности a , не имеющие общих элементов с A и X . Тогда точке $j \in T_1$ сопоставим множество $A_{i_0} \cup X \cup Y_j$.
В случае (v2), когда все множества $N_b(j)$ ($j \in T_1$) различны, поставим в соответствие точке $j \in T_1$ множество $\bigcup_{i \in N_b(j)} A_i \cup X \cup Y$, где Y — множество из a элементов, не пересекающееся ни с A , ни с X .
(В обоих случаях, в соответствии с (vii), получено h -помечивание проекции d на $S \cup T_s \cup T_2 \cup T_1$).
- Предположим, что $T_0 \neq \emptyset$. Тогда $T_2 = \emptyset$ (по свойству (iv)). Обозначим через Z_k ($k \in T_0$) попарно непересекающиеся множества мощности a , не имеющие общих элементов с построенными ранее множествами.
В случае (v1) $|T_1| \leq 1$ или $(|T_1| \leq 2 \text{ или } |T_0| = 1)$. (Действительно, если

$|T_1|, |T_2| \geq 2$, то d содержит подпространство из рисунка 24.3.25, а если $|T_1| \geq 3$, $|T_0| = 1$, то d содержит подпространство из рисунка 24.3.24) Если $|T_1| = 1$, $T_1 = \{j\}$, то точке $k \in T_0$ сопоставим $X \cup Y_j \cup Z_k$. Если $|T_1| = 2$, $T_1 = \{j, j'\}$, то единственному элементу $k \in T_0$ сопоставим $X \cup Y_j \cup Y_{j'}$.

В противном случае имеет место (v2). Тогда точке $k \in T_0$ сопоставим множество $X \cup Y \cup Z_k$.

В обоих случаях получено h -помечивание расстояния d . ■

Отметим, что исключить из рассмотрения расстояние, приведенное на рисунке 24.3.26, потребовалось только для доказательства неравенства $|T_s| \leq 1$, т. е. для доказательства того, что не более одной точки находится на расстоянии a от всех точек из S . Рассмотрим расстояние d_s на $s + 2$ точках, которое имеет конфигурацию, как на рисунке 24.3.26, но на верхнем уровне которой расположено s вершин вместо $a^2 + a + 3$. Обозначим через $s(a, b)$ наибольшее такое целое s , что расстояние d_s вложимо в гиперкуб. Тогда предложение 24.3.18 останется верным, если вместо расстояния d_{a^2+a+3} из рисунка 24.3.26 исключить расстояние $d_{s(a,b)+1}$. Заметим, что имеют место неравенства:

$$2 \leq \frac{a}{2a-b} + 1 \leq s(a, b) \leq a^2 + a + 2,$$

причем (по предложению 24.3.10) $s(a, b) = 2$, если $b < \frac{4}{3}a$. Таким образом получаем следующий результат.

Предложение 24.3.27. Пусть a, b — натуральные числа, b — нечетно, $b < \frac{4}{3}a$. Рассмотрим расстояние d на $n \geq 2a^2 + a + 5$ точках с множеством значений $\{2a, b, 2a + b\}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) d вложимо в гиперкуб.
- (ii) d — ℓ_1 -вложимо и удовлетворяет условию (24.1.1).
- (iii) d — гиперметрично и удовлетворяет условию (24.1.1).
- (iv) d удовлетворяет условию (24.1.1) и $(2k + 1)$ -гональным неравенствам при $2k + 1 = 5, 7, 11, 8a - 1$.
- (v) d — полуметрика, d удовлетворяет условию (24.1.1), и d не содержит в себе ни одного подпространства из рисунков 24.3.7 и 24.3.19–24.3.25. ■

Заметим, что предложение 24.3.27 является прямым обобщением результата, приведенного в работе Ависа [1990], для частного случая $a = b = 1$.

24.4. Усеченные расстояния на графах

В этом разделе мы исследуем задачу о вложении в гиперкуб расстояний, принимающих два значения вида $a, 2a$, где a — натуральное

число. Такие расстояния можно рассматривать как кратные усеченных расстояний на графах. Действительно, для данного расстояния d на V со значениями $a, 2a$ обозначим через $G = (V, E)$ граф, где ребрами соединены пары точек, находящиеся на расстоянии a . Тогда расстояние d совпадает с ad_G^* , где d_G^* — усеченное расстояние на графе G (принимающее значение 1 на парах, соединенных ребром, и 2 — в противном случае). Усеченные метрики уже рассматривались в главе 17.

Как мы убедимся ниже, задача о вложении в гиперкуб имеет полиномиальное по времени решение в классе расстояний со значениями $a, 2a$. Случай нечетного a уже был исследован в предыдущем разделе (ср. предложение 24.3.10). А именно, такие расстояния вложимы в гиперкуб в том, и только том случае, когда они удовлетворяют условию четности (24.1.1) и пентагональным неравенствам. Таким образом, достаточно проверить, что каждое пятиэлементное подпространство вложимо в гиперкуб, чтобы установить, что все расстояние d вложимо в гиперкуб. Похожий критерий, использующий конечное число точек, был обнаружен Ассуадом и Делормом [1980, 1982] для случая четного a . Основным приемом также является h -жесткость некоторых эквидистантных подметрик, но технически доказательство более сложно.

Теорема 24.4.1. Пусть (X, d) — конечное пространство расстояний с множеством значений $\{2k, 4k\}$, где k — некоторое натуральное число. Положим $N_k := (3M^2R + R + 2M^2)(M + 1) + 8k + 4$, где $M := 4k^2 + 4k + 3$, а R — число Рамсея¹⁾ $r(M, M)$. Тогда пространство (X, d) вложимо в гиперкуб в том и только том случае, когда вложимы в гиперкуб все пространства (Y, d) при любых $Y \subseteq X$, $|Y| \leq N_k$.

Значение N_k , приведенное в теореме, при внимательном изучении может быть несколько улучшено. Например, Ассуад и Делорм [1980] доказали, что в случае $k = 1$ за N_1 можно принять число 120. Впрочем, приведенное выше значение уже достаточно для доказательства существования полиномиального по времени решения.

Остальная часть раздела посвящена доказательству теоремы 24.4.1. Дадим некоторые определения. Для удобства будем считать, что расстояние d на V со значениями $2k, 4k$ реализовано как $d = 2kd_G^*$,

¹⁾ Напомним, что для данных натуральных чисел $r(s, t)$ числом Рамсея $r(s, t)$ называется наименьшее такое целое n , что любой граф из n вершин содержит или клику размера s или независимое множество размера t . Известны некоторые оценки чисел $r(s, s)$; например, $2^{\frac{s}{2}} \leq r(s, s) \leq \binom{2s-2}{s-1}$. (Сравните, например, Бонди и Мурти [1976].)

где $G = (V, E)$ — граф, где ребрами соединены точки, находящиеся на расстоянии $2k$. В таком случае изометричные подпространства пространства (V, d) соответствуют индуцированным подграфам графа G . Рассмотрим класс $\mathcal{F}_k$, состоящий из тех графов G , для которых расстояние $2kd_G^*$ вложимо в гиперкуб. Наша задача состоит в том, чтобы доказать, что граф G тогда и только тогда принадлежит классу $\mathcal{F}_k$, когда все его индуцированные подграфы из не более чем N_k вершин принадлежат классу $\mathcal{F}_k$. Удобно формализовать соответствующее понятие. А именно, будем говорить, что класс $\mathcal{C}$ имеет *порядок конгруэнтности*²⁾ p , если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно операции выбора индуцированного подграфа, и если граф принадлежит $\mathcal{C}$ как только все его индуцированные подграфы порядка p принадлежат $\mathcal{C}$, причем p — наименьшее из таких целых чисел. Таким образом, необходимо доказать, что класс $\mathcal{F}_k$ имеет порядок конгруэнтности $\leq N_k$. Для этого разложим класс $\mathcal{F}_k$ на два подсемейства $\mathcal{G}_k$ и $\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{G}_k$, для каждого из которых легко определить порядок конгруэнтности. А именно, обозначим через $\mathcal{G}_k$ класс, состоящий из графов G , для которых либо (i) $\nabla G \in \mathcal{F}_k$, либо (ii) $G \in \mathcal{F}_k$ и G — надстроенный граф (т. е. одна из его вершин смежна со всеми остальными). Мы рассмотрим также такой класс $\mathcal{H}_k$ (описанный ниже), что $\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{G}_k \subseteq \mathcal{H}_k \subseteq \mathcal{F}_k$. Тогда основные шаги нашего доказательства состоят в проверке того, что

- (i) класс $\mathcal{G}_k$ имеет порядок конгруэнтности $\leq 8k + 4$, а
- (ii) класс $\mathcal{H}_k$ имеет порядок конгруэнтности $\leq (3M^2R + R + 2M^2) \times (M + 1)$.

Теорема 24.4.1 легко следует отсюда ввиду следующей (простой) леммы.

Лемма 24.4.2. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — семейства графов с порядками конгруэнтности a и b соответственно. Тогда семейство $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ имеет порядок конгруэнтности $\leq a + b$. ■

Вычислим теперь порядок конгруэнтности класса $\mathcal{G}_k$, а в следующем подразделе исследуем порядок конгруэнтности класса $\mathcal{H}_k$.

Предложение 24.4.3. Порядок конгруэнтности класса $\mathcal{G}_k$ не превосходит $8k + 4$.

Доказательство. Определим $\mathcal{I}_k$ как подсемейство класса $\mathcal{G}_k$, состоящие из тех графов G , надстройка ∇G которых принадлежит классу $\mathcal{F}_k$.

²⁾ Понятие порядка конгруэнтности уже было введено ранее, но здесь мы используем его в более узком смысле.

Докажем сначала, что

(а) Порядок конгруэнтности класса $\mathcal{I}_k$ не превосходит $4k + 2$

Для этого рассмотрим такой граф $G = (V, E)$, что $G[X] \in \mathcal{I}_k$ при всех $X \subseteq V$, для которых $|X| \leq 4k + 2$. Докажем, что $G \in \mathcal{I}_k$, т. е., что надстроенный граф ∇G вложим в гиперкуб со шкалой $2k$. Без потери общности можно считать, что граф G связен. По предположению, граф ∇G является ℓ_1 -вложимым (так как $4k + 2 \geq 6$, а семейство графов с ℓ_1 -вложимой надстройкой имеет порядок конгруэнтности 6 по теореме 17.1.8). Следовательно, по той же теореме 17.1.8, граф G либо реберный, либо является подграфом графа $K_{n \times 2}$. Если G — реберный граф, то все доказано, так как расстояние $2d_{\nabla G}^*$ вложимо в гиперкуб. Пусть G содержится в графе $K_{n \times 2}$. Без потери общности можно считать, что граф G содержит ровно одну пару противоположных вершин. Другими словами, $G = K_{n+1} \setminus e$ и $2kd_{\nabla G}^* = \text{ant}_{4k}(2k\mathbb{1}_{n+1})$. Обозначим через $c(k)$ наибольшее целое число, для которого расстояние $\text{ant}_{4k}(2k\mathbb{1}_{c(k)})$ вложимо в гиперкуб. Тогда, по утверждению (i) теоремы 23.3.1¹⁾, $c(k) \leq 4k + 1$. Следовательно, $G \in \mathcal{I}_k$ при $n + 1 < c(k)$. С другой стороны, если $n \geq c(k)$, то $G \notin \mathcal{I}_k$ и можно выбрать в V подмножество X из $c(k) + 1$ элементов, содержащее оба конца удаленного ребра e . Тогда $|X| \leq 4k + 2$, и расстояние $2kd_{\nabla G[X]}^* = \text{ant}_{4k}(2k\mathbb{1}_{c(k)+1})$ не вложимо в гиперкуб, т. е. $G[X] \notin \mathcal{I}_k$. Таким образом, утверждение (а) доказано.

Продолжим доказательство. Обозначим через $G = (V, E)$ такой граф, что $G[X] \in \mathcal{G}_k$ при всех X , для которых $|X| \leq 8k + 4$. Докажем, что $G \in \mathcal{G}_k$. Можно считать, что $G \notin \mathcal{I}_k$ (в противном случае все доказано). По утверждению (а) существует такое множество $Y \subseteq V$, $|Y| \leq 4k + 2$, что $G[Y] \notin \mathcal{I}_k$, т. е. $\nabla G[Y] \notin \mathcal{F}_k$. Для каждого множества $Z \subseteq V$ такого, что $|Z| \leq 4k + 2$ необходимо $G[Y \cup Z] \in \mathcal{G}_k$, следовательно граф $G[Y \cup Z]$ — надстроенный, с отмеченной вершиной $z \in Y$. Тогда и граф G — надстроенный, с отмеченной вершиной $y \in Y$. (Действительно, если бы для каждой вершины $y \in Y$ существовала бы вершина $z_y \in V$ не смежная с y , мы бы пришли к противоречию, рассмотрев множество $Z := \{z_y \mid y \in Y\}$.) С помощью утверждения (а) теперь можно убедиться, что граф $G[V \setminus \{y\}]$ принадлежит классу $\mathcal{I}_k$. Тем самым доказано, что $G \in \mathcal{F}_k$ и, следовательно, $G \in \mathcal{G}_k$. ■

Теперь рассмотрим класс $\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{G}_k$. Нам потребуется еще несколько определений. Напомним, что $M := 4k^2 + 4k + 3$, а $R = r(s, t)$ число Рамсея.

¹⁾ И утверждению (ii) предложения 7.2.6. — *Прим. ред.*

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф. M -кликой (соответственно, M -независимым множеством) будем называть любую максимальную клику (соответственно, любое независимое множество) размера $\geq M$. Обозначим через V_0 объединение всех M -клик, а через V_1 — объединение их попарных пересечений. Подмножество $L \subseteq V_0$ называется *трансверсалью*, если граф $G[L]$ связан, а L пересекает каждую M -клику не более, чем в одной точке. Наконец, через V_2 обозначим объединение трансверсалей, имеющих хотя бы одну вершину смежной с какой-либо вершиной $V \setminus V_0$.

Определим класс $\mathcal{H}_k$ как множество графов $G \in \mathcal{F}_k$, удовлетворяющих следующим условиям (i)–(vi):

- (i) G не содержит M -независимых множеств.
- (ii) G содержит не более M различных M -клик.
- (iii) Любые две различные M -клики пересекаются не более, чем в двух точках.
- (iv) Вершина, смежная к четырем вершинам M -клики K , принадлежит K .
- (v) $G[L]$ — полный граф для любой трансверсали L .
- (vi) Максимальные трансверсали попарно не пересекаются.

Заметим, что для графов, удовлетворяющих условиям (i)–(vi), $|V \setminus V_0| \leq R$ (по определению V_0 и R), $|V_1| \leq M^2$, и $|V_2| \leq 3M^2R$.

В следующем подразделе мы докажем, что $\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{G}_k$ содержится в $\mathcal{H}_k$ и исследуем порядок конгруэнтности класса $\mathcal{H}_k$.

24.4.1. Класс графов $\mathcal{H}_k$

Наша цель состоит в доказательстве вложения $\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{G}_k \subseteq \mathcal{H}_k$ и нахождении порядка конгруэнтности класса $\mathcal{H}_k$. В дальнейшем, $G = (V, E)$ обозначает граф из $\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{G}_k$. Тогда расстояние $2kd_G^*$ изометрично вкладывается в гиперкуб $H(\Omega)$. То есть, существует такое отображение

$$x \in V \mapsto X \subseteq \Omega,$$

что $|X \Delta Y| = 2k$, если xy — ребро, и $|X \Delta Y| = 4k$ в противном случае. (Ниже мы будем использовать прописные и строчные буквы x и X для обозначения вершины графа G и соответствующего подмножества гиперкуба; иногда мы не будем различать эти обозначения и говорить о вершине X .)

Воспользуемся следующим фактом (ср. теорему 22.0.6 или 23.1.9): множества Y , соответствующие вершинам y M -клики K , образуют

Δ -систему (так как $M = 4k^2 + 4k + 3$). То есть, существует такое множество $C \subseteq Y$, что $|Y \setminus C| = k$ при всех $y \in K$ и множества $Y \setminus C$ попарно не пересекаются. Такое множество C называется *центром* M -клик K . Аналогичный результат имеет место и для M -независимых множеств (так как $M \geq k^2 + k + 3$).

Лемма 24.4.4. *G не содержит M -независимых множеств.*

Доказательство. Предположим, от противного, что S — M -независимое множество. Без потери общности можно считать, что вершины $y \in S$ помечены попарно различными множествами по $2k$ элементов. Утверждается, что:

(а) Каждая вершина $x \in V \setminus S$ не смежна некоторой вершине S .

Действительно, предположим, что вершина $x \in V \setminus S$ смежна с каждой вершиной из S . Тогда вершина x помечена пустым множеством, так как в противном случае для вершин $Y_1, Y_2, Y_3 \in S$, X и $\emptyset$ нарушается пентагональное неравенство. Отсюда следует, что x смежна со всеми вершинами графа G , что противоречит условию $G \notin \mathcal{G}_k$. Действительно, пусть вершина $x' \in V \setminus S$ ($x' \neq x$) помечена множеством X' ; если $|X'| = 4k$, то $|S| \leq 4$ (так как из $|X' \Delta Y| \leq 4k$ следует, что $|X' \cap Y| \geq k$ при всех $y \in S$). Значит утверждение (а) выполнено.

Рассмотрим вершину $x \in V \setminus S$, помеченную множеством X и вершину $y \in S$, не смежную с x . Тогда $|X \Delta Y| = 4k$ и, следовательно, по неравенству треугольника, примененному к $\emptyset, X, Y$, $2k \leq |X| \leq 6k$. Если $|X| > 2k$, то $|X \cap Y| = \frac{1}{2}(|X| - 2k) > 0$ для всех вершин $y \in S$, не смежных с x . Следовательно $|X| \geq |S| - 2 > 6k$, так как вершина x может быть соединена не более, чем с двумя вершинами S (по пентагональному неравенству). Следовательно, $|X| = 2k$. Итак, найдено вложение расстояния $2kd_G^*$ в гиперкуб (причем выделенная вершина надстройки помечена пустым множеством). Это противоречит предположению о том, что $G \notin \mathcal{G}_k$. ■

Лемма 24.4.5. *Пусть K — M -клика с центром C , а вершина $x \in V \setminus K$ помечена множеством X . Тогда $|X \Delta C| = 3k$.*

Доказательство. Из максимальной K следует, что существует вершина $y \in K$, не смежная с x , так что $|X \Delta Y| = 4k$. Значит $3k \leq |X \Delta C| \leq 5k$ (по неравенству треугольника, примененному к X, Y, C). Ясно, что $|X \Delta C| = 3k$, если вершина x смежна с какой-либо вершиной $y \in K$. Предположим, что вершина x не смежна ни с одной вершиной $y \in K$. Тогда при $y \in K$ получаем, что $4k = |X \Delta Y| = |(X \Delta C) \Delta (C \Delta Y)|$

и, следовательно, $|X \triangle C| - 3k = 2|(X \setminus C) \cap (Y \setminus C)|$. Тем самым доказано, что $|X \triangle C| = 3k$ (в противном случае $|X \setminus C| \geq M$). ■

Лемма 24.4.6. *Две различные M -клики пересекаются не более, чем в двух точках.*

Доказательство. Предположим, что y_1, y_2, y_3 — различные элементы двух различных клик K, K' с центрами C, C' соответственно. Из пентагонального неравенства $Q(1, 1, 1, -1, -1)^T x \leq 0$, примененного к расстоянию на точках Y_1, Y_2, Y_3, C, C' (где значение 1 присвоено Y_1, Y_2, Y_3 , а значение -1 присвоено C, C'), следует, что $C = C'$. Это противоречит неравенству треугольника, примененному к $C = C'$, $Y \in K \setminus K'$ и $Y' \in K' \setminus K$, где y и y' не смежны. ■

Лемма 24.4.7. *Пусть K и K' — различные клики с центрами C и C' соответственно. Тогда $|C \triangle C'| = 2k$.*

Доказательство. Пусть вершина $y' \in K' \setminus K$ помечена множеством Y' . Тогда по лемме 24.4.5 и неравенству треугольника, примененному к C, C', Y , получаем, что $2k \leq |C \triangle C'| \leq 4k$. Более того, $3k = |C \triangle Y'| = |(C \triangle C') \triangle (C' \triangle Y)|$, откуда $2|(Y' \setminus C') \cap (C \setminus C')| = |C \triangle C'| - 2k$. Следовательно, $|C \triangle C'| = 2k$; так как в противном случае $|C \setminus C'| \geq |K' \setminus K|$, откуда вытекало бы, что $M \leq |K'| = |K \cap K'| + |K' \setminus K| \leq 4k + 2$. ■

Лемма 24.4.8. *Существует не более M различных M -клик.*

Доказательство. Пусть $K_1, \dots, K_N$ — различные M -клики с центрами $C_1, \dots, C_N$ соответственно; предположим, что $N > M$. Тогда существует такое множество C , что $|C \triangle C_i| = k$ при всех $i = 1, \dots, N$ (так как, по лемме 24.4.7, у нас имеется $2k$ значная эквидистантная метрика на $C_1, \dots, C_N$). Утверждается, что $|C \triangle X| = 2k$ при всех $x \in V$; откуда следует, что расстояние $2kd_{\nabla G}^*$ вкладывается в гиперкуб, что в свою очередь противоречит предположению $G \notin \mathcal{G}_k$. Рассмотрим сначала случай, когда вершина x принадлежит некоторой M -клике K_i . Тогда $|C \triangle X| \leq |C \triangle C_i| + |C_i \triangle X| = 2k$ и $3k = |X \triangle C_j| \leq |X \triangle C| + |C \triangle C_j| = |X \triangle C| + k$, чем доказано равенство $|C \triangle X| = 2k$. Теперь предположим, что $x \notin \bigcup_{i=1}^N K_i$. Тогда $|X \triangle C| \leq |X \triangle C_i| + |C_i \triangle C| = 4k$. С другой стороны, $3k = |X \triangle C_i| = |(X \triangle C) \triangle (C \triangle C_i)|$, откуда $2|(X \setminus C) \cap (C_i \setminus C)| = |X \triangle C| - 2k$. В силу этого $|X \triangle C| = 2k$, так как в противном случае $|X \setminus C| \geq M$. ■

Лемма 24.4.9. *Пусть K — M -клика и $x \in V \setminus K$. Тогда вершина x смежна не более, чем с тремя точками из K .*

Доказательство. Если вершина x смежна с четырьмя точками из K , то метящие их множества вместе с центром C клики K задают вложение в гиперкуб метрики $\text{ant}_{3k}(2k\mathbb{1}_5)$. Но это невозможно, так как $3k < s_h(2k\mathbb{1}_5)$ (действительно, $s_h(2k\mathbb{1}_5) \geq \frac{2k}{6} \binom{5}{2} = \frac{10}{3}k > 3k$; см. предложение 7.2.6). ■

Лемма 24.4.10. *Каждая трансверсаль является кликой, и максимальные трансверсали попарно не пересекаются.*

Доказательство. Предположим, что x, y, z — такие различные точки трансверсали L , что вершина y смежна с x и z , а вершины x, z — не смежные. Пусть $K \neq K'$ — M -клики с центрами C и C' , содержащие x и y соответственно. Применяя пентагональное неравенство к X, Z, C', Y, C (где значение 1 присвоено X, Z, C' , а значение -1 присвоено Y, C) получаем противоречие.

Предположим теперь, что L_1 и L_2 — пересекающиеся максимальные трансверсали. Пусть $x \in L_1 \cap L_2, y \in L_1 \setminus L_2$ и $z \in L_2 \setminus L_1$, а K, K' — M -клики с центрами C и C' , содержащие x и y соответственно. Применяя пентагональное неравенство к Y, Z, C, X, C' (где значение 1 присвоено Y, Z, C , а значение -1 присвоено X, C'), получаем противоречие. ■

Предложение 24.4.11. *Порядок конгруэнтности класса $\mathcal{H}_k$ не превосходит $(3M^2R + R + 2M^2)(M + 1)$.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — такой граф, что $G[U] \in \mathcal{H}_k$ при всех тех $U \subseteq V$, для которых $|U| \leq N(M + 1)$, где $N := 3M^2R + R + 2M^2$. Докажем, что $G \in \mathcal{H}_k$. Осталось проверить только, что $G \in \mathcal{F}_k$, так как граф G очевидно удовлетворяет условиям (i)–(vi) (так как число $N(M + 1)$ достаточно велико). В частности, выполнены неравенства: $|V \setminus V_0| \leq R$, $|V_1| \leq M^2$ и $|V_2| \leq 3M^2R$.

Обозначим через $L_1, \dots, L_p$ максимальные трансверсали, непересекающиеся с V_2 (т. е. не имеющие вершин смежных с вершинами из $V \setminus V_0$). Будем считать, что $p \geq 1$, так как в противном случае $V_0 \subseteq V_2$, а значит и $|V| \leq N(M + 1)$ и предложение доказано. Обозначим через V^* подмножество V , содержащее $(V \setminus V_0) \cup V_1 \cup V_2$ и пересекающее каждую M -клику графа G в M точках. Тогда $|V^*| \leq N$. Наконец, положим $V^{**} := V^* \cup \bigcup_{i \in I} L_i$, где I состоит из тех индексов $i \in [1, p]$, для которых $L_i \cap V^* \neq \emptyset$ и $L_i \not\subseteq V^*$. Ясно, что $|I| \leq |V^*|$, откуда следует, что $|V^{**}| \leq N(M + 1)$.

Таким образом, $G[V^{**}] \in \mathcal{H}_k$ и, следовательно, нами построено вложение $x \in V^{**} \rightarrow X \subseteq \Omega^*$ расстояния $2kd_{G[V^{**}]}$ в некоторый гиперкуб $H(\Omega^*)$. Покажем теперь, как продлить это вложение на весь граф G .

Пусть Ω_i ($i \in [1, p] \setminus I$) — непересекающиеся множества мощности k , не имеющие общих элементов с Ω^* . Для каждой M -клики $K \cap V^{**}$ графа $G[V^{**}]$ обозначим через C_K ее центр. Осталось пометить вершины из $V \setminus V^{**}$. Вершина $x \in V \setminus V^{**}$ принадлежит единственной M -клике K и (единственной) максимальной трансверсали L_i , где $i \in [1, p] \setminus I$. Пометим вершину x множеством $X := C_K \cup \Omega_i$. Необходимо проверить, что получено правильное помечивание, т. е., что для вершины $y \in V$, помеченной Y , $|X \Delta Y| = 2k$, если вершины x и y смежны, и $|X \Delta Y| = 4k$ в противном случае.

Предположим сначала, что вершины x и y не смежны. Если $y \in V^{**}$, то (по лемме 24.4.5) $|C_K \Delta Y| = 3k$, откуда $|X \Delta Y| = 4k$. Если $y \in V \setminus V^{**}$, то вершина y помечена множеством $C_{K'} \cup \Omega_{j'}$, где $K \neq K'$ и $i \neq j'$, откуда опять следует, что $|X \Delta Y| = 4k$, так как $|C_K \Delta C_{K'}| = 2k$ (по лемме 24.4.7).

Теперь рассмотрим случай, когда вершины x и y смежны. Если $y \in K \cap V^{**}$, то $|Y \Delta C_K| = k$, и, таким образом, $|X \Delta Y| = 2k$. Если $y \in K \setminus V^{**}$, то $Y = C_k \cup \Omega_j$, причем $i \neq j$ (иначе $x, y \in L_i \cap K$), откуда опять следует, что $|X \Delta Y| = 2k$. Если же $y \notin K$, то $y \in L_i$, так как $\{x, y\}$ — трансверсаль. Значит $y \notin V^{**}$ (так как $i \notin [1, p]$). Обозначим через K' M -клику, содержащую y . Тогда $Y = C_{K'} \cup \Omega_i$ и, следовательно, $|X \Delta Y| = |C_K \Delta C_{K'}| = 2k$. ■

24.5. Метрики с ограниченным экстремальным графом

Пусть d — метрика на V_n . Для данных различных $i, j \in V_n$ пара ij называется *экстремальной* для метрики d , если не существует таких точек $k \in V_n \setminus \{i, j\}$, что

$$d(i, k) = d(i, j) + d(j, k) \quad \text{или} \quad d(j, k) = d(i, j) + d(i, k).$$

Соответственно *экстремальный граф* метрики d определяется, как подграф K_n , образованный множеством экстремальных ребер метрики d . Понятие экстремального графа оказывается очень удобным при исследовании метрик, допускающих разложение в сумму разрезных

полуметрик с (целыми) неотрицательными коэффициентами. Утверждение (i) теоремы 24.5.1 было доказано Паперновым [1976], а утверждение (ii) — Карзановым [1985].

Теорема 24.5.1. Пусть d — метрика на V_n , экстремальным графом которой является либо K_4 , либо C_5 , либо объединение двух звезд¹⁾. Тогда выполнены следующие утверждения:

- (i) Метрика d ℓ_1 -вложима, т. е. $d \in \text{CUT}_n$.
- (ii) Метрика d вложима в гиперкуб тогда и только тогда, когда d удовлетворяет условию четности (24.1.1).

Заметим, что достаточно доказать утверждение (ii) теоремы 24.5.1, так как из него вытекает утверждение (i). Доказательство, приведенное ниже, было дано Скрайвером [1991b]. Оно короче, чем первоначальное доказательство Карзанова, но не конструктивно. Доказательство Карзанова предоставляет алгоритм, строящий $\mathbb{Z}_+$ -реализацию метрики d за время $O(n^3)$ (если такая существует). Скрайвер доказал следующий результат, из которого просто вывести теорему 24.5.1.

Теорема 24.5.2. Пусть $G = (V, E)$ — связный двудольный граф, $W \subseteq V$, и граф $H = (W, F)$ является либо графом K_4 , либо C_5 , либо объединение двух звезд. Тогда существуют такие попарно реберно непересекающиеся разрез $\delta_G(S_1), \dots, \delta_G(S_t)$ в G , что для каждой пары $(r, s) \in F$ число разрезов $\delta_G(S_h)$ ($1 \leq h \leq t$), разделяющих r и s , равно расстоянию $d_G(r, s)$ между r и s в графе G . Здесь через $\delta_G(S)$ обозначен разрез в G , состоящий из тех ребер графа G , один конец которых принадлежит S , а другой — $V \setminus S$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть G — контрпример с наименьшим значением $|E|$. Покажем, что

$$(24.5.3) \quad \begin{aligned} &\text{для каждого } \emptyset \neq S \subset V \text{ существует пара } (r, s) \in F \text{ и} \\ &\text{путь } P, \text{ соединяющий вершины } r \text{ и } s \text{ в графе } G \text{ такие, что} \\ &|P \setminus \delta_G(S)| \leq d_G(r, s) - 2 \end{aligned}$$

(где через P обозначено множество ребер соответствующего пути). Пусть существует такое подмножество S множества V , для которого утверждение (24.5.3) не выполнено. Тогда для каждой пары $(r, s) \in F$ и каждого кратчайшего rs -пути P $|P \cap \delta_G(S)| = 1$ (соответственно, 0), если $\delta_G(S)$ разделяет (соответственно, не разделяет) вершины r и s . Обозначим через G' связный двудольный граф, полученный из

¹⁾ Граф называется *объединением двух звезд*, если в нем найдутся две такие вершины, что каждое ребро содержит хотя бы одну из них.

графа G стягиванием ребер из $\delta_G(S)$. Тогда при $(r, s) \in F$ $d_{G'}(r, s) = d_G(r, s) - 1$, если $\delta_G(S)$ разделяет вершины r и s , и $d_{G'}(r, s) = d_G(r, s)$ в противном случае. Так как в графе G' меньше ребер, чем в G , то по теореме 24.5.2 можно найти такие попарно реберно непересекающиеся разрезы $\delta_{G'}(S'_1), \dots, \delta_{G'}(S'_t)$ в G , что расстояние $d_{G'}(r, s)$ равняется числу разрезов $\delta_{G'}(S_h)$, разделяющих r и s . Эти t разрезов порождают t разрезов $\delta_G(S_h)$ в графе G , которые вместе с разрезом $\delta_G(S)$ образуют попарно непересекающееся семейство, удовлетворяющее условию: для пары $(r, s) \in F$ число разрезов, разделяющих r и s , равно $d_G(r, s)$. Это противоречит нашему предположению, что граф G — контрпример к данной теореме.

Утверждение 24.5.4. Для всех $i \neq j \in V$ найдется такая пара $(r, s) \in F$, что $\{i, j\} \cap \{r, s\} = \emptyset$ и

$$d_G(i, j) + d_G(r, s) \geq \max(d_G(i, r) + d_G(j, s), d_G(i, s) + d_G(j, r)).$$

Доказательство утверждения 24.5.4. Пусть $i \neq j \in V$. Определим $X := \{k \in V \mid d_G(i, j) = d_G(i, k) + d_G(j, k)\}$; тогда $i, j \in X$.

Предположим сначала, что $X = V$. Применяя (24.5.3) к $\{i\}$ найдем такую пару $(r, s) \in F$ и такой rs -путь P , что $|P \setminus \delta_G(\{i\})| \leq d_G(r, s) - 2$. Следовательно, P — кратчайший rs -путь, i — внутренняя вершина P и, следовательно, $i \notin \{r, s\}$. Воспользовавшись равенством $X = V$ получаем, что $j \notin \{r, s\}$ и $d_G(i, j) + d_G(r, s) = d_G(i, r) + d_G(j, r) + d_G(r, s) \geq d_G(r, i) + d_G(s, j)$; другое неравенство утверждения 24.5.4 получается точно так же.

Теперь рассмотрим случай, когда $X \neq V$. Обозначим через G' граф, полученный из графа G стягиванием ребер из $\delta_G(X)$. Применяя (24.5.3) к множеству X , находим такую пару $(r, s) \in F$, что

$$d_{G'}(r, s) \leq d_G(r, s) - 2.$$

Более того, утверждается, что

$$(24.5.5) \quad \begin{cases} d_{G'}(i, s) \geq d_G(i, s) - 1, & d_{G'}(r, j) \geq d_G(r, j) - 1, \\ d_{G'}(j, s) \geq d_G(j, s) - 1, & d_{G'}(r, i) \geq d_G(r, i) - 1. \end{cases}$$

Докажем, что $d_{G'}(i, s) \geq d_G(i, s) - 1$; остальные неравенства из (24.5.5) могут быть получены тем же способом. Обозначим через P путь, соединяющий i и s в графе G , удовлетворяющий условию $|P \setminus \delta_G(X)| = d_{G'}(i, s)$ и отвечающий наименьшему значению $|P \cap \delta_G(X)|$. Предположим, что $|P \cap \delta_G(X)| \geq 2$. Обозначим через P' такой наименьший, начинающийся в вершине i , подпуть в P , что $|P' \cap \delta_G(X)| = 2$. Обозначим через k конец пути P' (так что $k \in X$), и положим $P'' := P \setminus P'$. Так как путь

P' не лежит полностью в X , то $d_G(i, k) \leq |P'| - 1$ и, в силу двудольности графа G , $d_G(i, k) \leq |P'| - 2$. Обозначим через Q' кратчайший путь из i в k в графе G . Тогда

$$|P'| - 2 = d_{G'}(i, k) \leq |Q' \setminus \delta_G(X)| \leq |P'| - 2 - |Q' \cap \delta_G(X)|,$$

откуда

$$Q' \cap \delta_G(X) = \emptyset, \quad \text{и} \quad |Q'| = d_G(i, k) = |P'| - 2.$$

Рассмотрим путь Q из i в s , полученный конкатенацией путей Q' и P'' . Тогда

$$|Q \setminus \delta_G(X)| = |P \setminus \delta_G(X)| \quad \text{и} \quad |Q \cap \delta_G(X)| = |P \cap \delta_G(X)| - 2,$$

что противоречит выбору P . Таким образом, $|P \cap \delta_G(X)| \leq 1$. Следовательно,

$$d_{G'}(i, s) = |P \setminus \delta_G(X)| \geq |P| - 1 \geq d_G(i, s) - 1.$$

Итак, неравенства (24.5.5) доказаны.

Из неравенств $d_{G'}(r, s) \leq d_G(r, s) - 2$ и (24.5.5) заключаем, что $\{i, j\} \cap \{r, s\} = \emptyset$. Более того, существует такой rs -путь P , что $|P \setminus \delta_G(X)| = d_{G'}(r, s)$, причем P содержит вершину $k \in X$. Следовательно,

$$\begin{aligned} d_G(r, s) + d_G(i, j) &\geq d_{G'}(r, s) + 2 + d_G(i, j) = \\ &= d_{G'}(r, k) + d_{G'}(s, k) + 2 + d_G(i, k) + d_G(j, k) \geq \\ &\geq d_{G'}(r, i) + d_{G'}(s, j) + 2 \geq d_G(r, i) + d_G(s, j) \end{aligned}$$

(в последней строке используются неравенства (24.5.5)). Остальные неравенства утверждения 24.5.4 доказываются аналогично. $\blacksquare$

Из утверждения 24.5.4, в частности, следует, что граф H не является объединением двух звезд. Таким образом, H равен либо K_4 , либо C_5 .

Предположим сначала, что $H = K_4$. Из утверждения 24.5.4 заключаем, что

$$(24.5.6) \quad \begin{aligned} d_G(i, j) + d_G(h, k) &= d_G(i, h) + d_G(j, k) \\ \text{при всех различных } i, j, h, k &\in W. \end{aligned}$$

Для $i \in W$ определим

$$f(i) := \frac{1}{2}(d_G(i, h) + d_G(i, k) - d_G(h, k)),$$

где $h \neq k \in W \setminus \{i\}$; из равенства (24.5.6) следует, что данное определение не зависит от выбора h, k . Тогда $d_G(i, j) = f(i) + f(j)$ при $i \neq j \in W$. Предположим, что $f(i) > 0$. Применяя (24.5.3) к $\{i\}$, находим

такую пару $(r, s) \in F$ и такой rs -путь P , что $|P \setminus \delta_G(\{i\})| \leq d_G(r, s) - 2$. Следовательно, P — кратчайший rs -путь через i . Таким образом, $|P| = d_G(r, s) = f(r) + f(s)$ и $|P| = d_G(i, r) + d_G(i, s) = f(r) + f(s) + 2f(i)$, откуда $f(i) = 0$. Мы пришли к противоречию.

Пусть теперь $H = C_5$. Положим W равным, например, $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ и $F := \{(r_i, r_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq 5\}$, где все индексы рассматриваются по модулю 5. Применяя утверждение 24.5.4 к r_i, r_{i+2} получаем, что

$$\begin{aligned} d_G(r_i, r_{i+2}) + d_G(r_{i+3}, r_{i+4}) &\geq d_G(r_i, r_{i+3}) + d_G(r_{i+2}, r_{i+4}), \\ d_G(r_i, r_{i+2}) + d_G(r_{i+3}, r_{i+4}) &\geq d_G(r_i, r_{i+4}) + d_G(r_{i+2}, r_{i+3}) \end{aligned}$$

при $1 \leq i \leq 5$ (так как (r_{i+3}, r_{i+4}) — единственное ребро графа C_5 , не содержащее r_i и r_{i+2}). Складывая десять таких неравенств, получаем одно и то же выражение с обеих сторон неравенства. Следовательно, каждое из рассмотренных неравенств на самом деле является равенством. Следовательно, опять имеет место равенство (24.5.6), и, как и выше, мы приходим к противоречию. Таким образом, не существует контрпримеров G к нашему утверждению. ■

Доказательство теоремы 24.5.1. Пусть d — целочисленная метрика на V_n , удовлетворяющая условию четности (24.1.1), экстремальным графом $H = (W, F)$ которой является либо K_4 , либо C_5 , либо объединение двух звезд. Докажем, что d раскладывается в сумму разрезных полуметрик с (целыми) неотрицательными коэффициентами. Рассмотрим полный граф K_n на множестве V_n . Построим связный двудольный граф G , подразделяя ребра графа K_n следующим образом: для различных вершин $i, j \in V_n$ заменим ребро ij путем P_{ij} из $d(i, j)$ ребер. То, что получившийся граф G двудолен, следует из условия четности. По теореме 24.5.2 существуют такие попарно реберно непересекающиеся разрезы $\delta_G(S_h)$ ($1 \leq h \leq t$) в графе G , что для каждой пары $(r, s) \in F$ расстояние $d_G(r, s)$ равно числу разрезов $\delta_G(S_h)$, разделяющих r и s . Полагая $T_h := S_h \cap V_n$, получаем, что для каждой пары $(r, s) \in F$ верно равенство:

$$(24.5.7) \quad d(r, s) = d_G(r, s) = \sum_{1 \leq h \leq k} \delta(T_h)(r, s).$$

Более того, для всех $i \neq j \in V_n$ выполнено неравенство

$$(24.5.8) \quad d(i, j) \geq \sum_{1 \leq h \leq t} \delta(T_h)(i, j).$$

Действительно, число разрезов $\delta_G(S_h)$, разделяющих r и s , не превосходит числа разрезов $\delta_G(S_h)$, пересекающих путь P_{ij} , что в свою очередь

не превосходит длины $d(i, j)$ пути P_{ij} , так как разрезы $\delta_G(S_h)$ попарно реберно не пересекаются. На самом деле, в (24.5.8) имеет место равенство. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим $i \neq j \in V_n$ и d -геодезический путь $P := (i_0, \dots, i_k)$ в графе K_n , содержащий ребро (i, j) (другими словами, путь P является кратчайшим (по отношению к функции длины d) из всех путей с концами i_0 и i_k ; т. е. $d(i_0, i_k) = \sum_{0 \leq m \leq k-1} d(i_m, i_{m+1})$). Выберем такой путь P с максимальным числом ребер. Тогда пара (i_0, i_k) — экстремальная для d , так как в противном случае найдется такая точка $x \in V \setminus \{i_0, i_k\}$, что, например, $d(i_0, x) = d(i_0, i_k) + d(x, i_k)$, но в этом случае путь $(i_0, \dots, i_k, x)$ — геодезический, содержит (i, j) и длиннее P . Тогда, из неравенства (24.5.8) заключаем, что

$$d(i_0, i_k) = \sum_{m=0}^{k-1} d(i_m, i_{m+1}) \geq \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{h=1}^t \delta(T_h)(i_m, i_{m+1}).$$

Однако

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{h=1}^t \delta(T_h)(i_m, i_{m+1}) &= \sum_{h=1}^t \sum_{m=0}^{k-1} \delta(T_h)(i_m, i_{m+1}) \geq \\ &\geq \sum_{h=1}^t \delta(T_h)(i_0, i_k) = d(i_0, i_k), \end{aligned}$$

где последнее неравенство получается с помощью (24.5.7), так как ребро (i_0, i_k) принадлежит F . Следовательно, в (24.5.8) для каждого ребра (i_m, i_{m+1}) пути P имеет место равенство, в том числе и для ребра (i, j) . Тем самым доказано, что в (24.5.8) выполнено равенство для всех $i \neq j \in V_n$. Таким образом $d = \sum_{h=1}^t \delta(T_h)$ и, следовательно, метрика d вложима в гиперкуб. $\blacksquare$

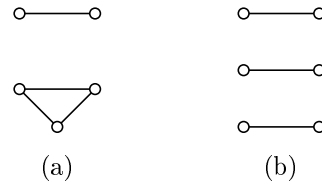


Рис. 24.5.9

Замечание 24.5.10. Можно проверить, что граф H без изолированных вершин является графом K_4 , C_5 или объединением двух звезд в том, и только том случае, когда ни один из двух графов рисунка 24.5.9 не является подграфом H . Исключить эти два графа необходимо для выполнения теоремы 24.5.1. Действительно, пусть d_1 —

метрика кратчайшего пути на полном двудольном графе $K_{2,3}$; тогда метрика d_1 не вложима в гиперкуб (так как для d_1 не выполнено пентагональное неравенство), а ее экстремальным графом является граф (а) из рисунка 24.5.9. Обозначим через d_2 метрику кратчайшего пути на графе $K_{3,3} \setminus e$. Тогда ее экстремальным графом является граф (б) из рисунка 24.5.9, и метрика d_2 не вложима в гиперкуб (так как d_1 является ее подметрикой). (В действительности, обе метрики d_1 и d_2 лежат на крайних лучах метрического конуса). ■

Глава 25.

Решетки разрезов, квази h -расстояния и базисы Гильберта

В этой главе мы рассмотрим несколько дополнительных вопросов, связанных с понятием вложимости в гиперкуб. Одним из способов ослабления этого понятия является нахождение *целочисленных* комбинаций разрезных полуметрик, вместо *целочисленных неотрицательных* таких комбинаций. Другими словами, исследуется решетка $\mathcal{L}_n$, порожденная всеми разрезными полуметриками на V_n . В разделе 25.1 мы приведем описание $\mathcal{L}_n$. Как несложно убедиться, решетка $\mathcal{L}_n$ состоит из целочисленных расстояний, удовлетворяющих условию четности. Мы приводим также и описания некоторых подрешеток в $\mathcal{L}_n$, а именно подрешетки, порожденной всеми четными T -разрезными полуметриками и подрешетки, порожденной всеми k -однородными разрезными полуметриками.

Ясно, что для расстояния d на V_n выполняется импликация

$$(25.0.1) \quad d \text{ вложимо в гиперкуб} \implies d \in \text{CUT}_n \cap \mathcal{L}_n.$$

В разделе 25.2 рассматриваются квази h -расстояния, т. е. расстояния d , принадлежащие $\text{CUT}_n \cap \mathcal{L}_n$, но не вложимые в гиперкуб. Как уже было упомянуто в теореме 24.1.3, импликация (25.0.1) является эквивалентностью для расстояний d на пространствах не более, чем из пяти точек. Этот факт можно переформулировать, сказав, что при $n \leq 5$ семейство разрезных полуметрик на V_n является базисом Гильберта. В разделе 25.3 рассматривается более общий вопрос об описании графов, чье семейство разрезов образует базис Гильберта.

25.1. Решетки разрезов

Очевидно, что множество

$$\mathcal{L}_n := \left\{ \sum_{S \subseteq V_n} \lambda_S \delta(S) \mid \lambda_S \in \mathbb{Z} \text{ при всех } S \subseteq V_n \right\}$$

является решеткой в $\mathbb{Z}^{\binom{n}{2}}$, которую мы будем называть *решеткой разрезов*. Следующий результат из работы Ассуада [1982] дает описание множества $\mathcal{L}_n$.

Предложение 25.1.1. Пусть $d \in \mathbb{Z}^{E_n}$. Тогда $d \in \mathcal{L}_n$ в том, и только в том случае, когда d удовлетворяет условию четности (24.4.1).

Доказательство. Ясно, что условие четности является необходимым для принадлежности $\mathcal{L}_n$. Обратно, предположим, что расстояние d целочисленно и удовлетворяет условию четности. Тогда множество V_n допускает такое разбиение $V_n = S \cup T$, что расстояние $d(i, j)$ нечетно при $i \in S, j \in T$, и четно в остальных случаях. Положим $d' := d + \delta(S)$. Тогда все компоненты d' четны. Из равенства

$$d' = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{d'(i, j)}{2} (\delta(\{i\}) + \delta(\{j\}) - \delta(\{i, j\}))$$

заключаем, что $d' \in \mathcal{L}_n$, и, следовательно, расстояние $d = d' - \delta(S)$ также принадлежит $\mathcal{L}_n$. $\blacksquare$

Базисом решетки разрезов $\mathcal{L}_n$ служит множество

$$\{\delta(i) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\delta(\{i, j\}) \mid 1 \leq i < j \leq n-1\}.$$

(Действительно, каждый вектор $d \in \mathcal{L}_n$ имеет разложение вида

$$d = \sum_{1 \leq i \leq n-1} \alpha_i \delta(i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \beta_{ij} \delta(\{i, j\}),$$

где $\alpha_i = d_{in} - \sum_{1 \leq h \leq n-1, h \neq i} \beta_{ih}$ ($1 \leq i \leq n-1$), а $\beta_{ij} := \frac{1}{2}(d_{in} + d_{jn} - d_{ij})$ ($1 \leq i < j \leq n-1$.) Отметим также, что образ решетки разрезов $\mathcal{L}_n$ под действием ковариантного отображения ξ есть ни что иное, как целочисленная решетка $\mathbb{Z}^{\binom{n}{2}}$. При малых значениях n решетка разрезов $\mathcal{L}_n$ совпадает с классическими решетками; например, $\mathcal{L}_3 = A_3 = D_3$ (см. пример 13.2.5).

Для некоторых подрешеток решетки разрезов $\mathcal{L}_n$ также даны исчерпывающие описания. Ниже мы рассмотрим подрешетки, порожденные k -однородными разрезными полуметриками, четными разрезными полуметриками (или, более общо, четными T -разрезными полуметриками) и нечетными разрезными полуметриками на шести точках. Для множества $S \subseteq V_n$ разрезная полуметрика $\delta(S)$ называется *k -однородной*, если $|S| \in \{k, n-k\}$. Обозначим через $\mathcal{K}_n^k$ множество всех k -однородных разрезных полуметрик на V_n . Следующее описание

решетки k -однородных разрезов $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^k)$, основанное на результате Вильсона [1973], приведено в работе Деза и Лоран [1992e].

Предложение 25.1.2. Пусть k — такое целое число, что $2 \leq k \leq n$, $k \neq \frac{n}{2}$, и $d \in \mathbb{Z}^{E_n}$. Тогда $d \in \mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^k)$ в том, и только том случае, когда d удовлетворяет следующим условиям:

- (i) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j) \equiv 0 \pmod{k(n-k)}$,
- (ii) $D_i := \frac{1}{n-2k} \left(\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} d(i, j) - \frac{1}{n-k} \sum_{1 \leq r < s \leq n} d(r, s) \right) \in \mathbb{Z}$ при всех $i \in V_n$,
- (iii) $D_i + D_j + d(i, j) \equiv 0 \pmod{2}$ при всех $i, j \in V_n$.

В случае $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ получаем следующий результат.

Предложение 25.1.3. Пусть $d \in \mathbb{Z}^{E_n}$.

- (i) Если $n = 2k + 1$, то $d \in \mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^k)$ тогда и только тогда, когда d удовлетворяет сравнению: $\sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j) \equiv 0 \pmod{k(n-k)}$.
- (ii) Если $n = 2k$, то $d \in \mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^k)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (iia) и (iib):
 - (iia) $\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} d(i, j) = \frac{1}{k} \sum_{1 \leq r < s \leq n} d(r, s)$ при всех $1 \leq i \leq n$;
 - (iib) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j) \equiv 0 \pmod{k^2}$.

Доказательство. (i) Заметим, что условия (ii),(iii) предложения 25.1.2 следуют из условия (i) данного предложения.

(ii) Ясно, что условия (iia) и (iib) являются необходимыми для принадлежности решетке $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^k)$. Обратно, предположим, что d удовлетворяет условиям (iia),(iib), и обозначим через d' проекцию d на множество $\{1, \dots, n-1\}$. Из условия (iia) получаем, что

$$(25.1.4) \quad \sum_{1 \leq r < s \leq n-1} d'(r, s) = (k-1) \sum_{1 \leq i \leq n-1} d(i, n).$$

Следовательно, $\sum_{1 \leq r < s \leq n-1} d'(r, s) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}$, так как $\sum_{1 \leq i \leq n-1} d(i, n) \equiv 0 \pmod{k}$ по условиям (iia),(iib). Воспользовавшись (i), заключаем, что $d' \in \mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^k)$. Таким образом,

$$d' = \sum_{S \subseteq \{1, \dots, n-1\}, |S|=k} \lambda_S \delta(S),$$

где $\lambda_S \in \mathbb{Z}$ при всех S . Докажем, что $d = \sum_S \lambda_S \delta(S)$. Так как

$$\sum_{1 \leq r < s \leq n-1} d'(r, s) = k(k-1) \left(\sum_S \lambda_S \right),$$

с помощью (25.1.4) получаем, что

$$\sum_{1 \leq i \leq n-1} d(i, n) = k \left(\sum_S \lambda_S \right).$$

Далее, из условия (ia) следует, что

$$\sum_{1 \leq r < s \leq n} d(r, s) = k^2 \left(\sum_S \lambda_S \right) \quad \text{и} \quad \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} d(i, j) = k \left(\sum_S \lambda_S \right)$$

при всех $i = 1, \dots, n$. Вычислим, например, $d(1, n)$. Из предыдущих соотношений получаем равенство:

$$d(1, n) = k \left(\sum_S \lambda_S \right) - \sum_{2 \leq j \leq n-1} d(1, j).$$

Воспользовавшись значением $d(1, j) = d'(1, j)$ из разложения d' , выводим, что $d(1, n) = \sum_{S|1 \in S} \lambda_S$. Тем самым доказано, что $d = \sum_S \lambda_S \delta(S)$, т. е., что $d \in \mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^k)$. ■

Предположим, что n четно. Разрезная полуметрика $\delta(S)$ на V_n называется *четной*, если число $|S|$ четно. Аналогично, $\delta(S)$ называется *нечетной*, если $|S|$ нечетно. Более общо, рассмотрим подмножество $T \subseteq V_n$ из четного числа элементов. Тогда $\delta(S)$ называется *четной T -разрезной полуметрикой*, если число $|S \cap T|$ нечетно. Обозначим через $\mathcal{K}_n^T$ множество всех четных T -разрезных полуметрик на V_n . Таким образом, $\mathcal{K}_n^{V_n}$ есть множество четных разрезных полуметрик. Обозначим также через $\mathcal{K}_n^{odd}$ множество нечетных разрезных полуметрик. Дадим описание решетки четных разрезов $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^{V_n})$, доказательство которого можно найти в работе Деза, Лоран и Поляка [1992].

Предложение 25.1.5. Пусть $n \geq 6$ — четное целое число, и $d \in \mathbb{Z}^{E_n}$. Тогда d принадлежит четной решетке разрезов $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^{V_n})$ в том, и только в том случае, когда d удовлетворяет условию четности (24.1.1) и следующим условиям:

- (i) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j) \equiv 0 \pmod{4}$.
- (ii) $\sum_{i < j, i, j \in V_n \setminus \{k\}} d(i, j) - \sum_{i \in V_n \setminus \{k\}} d(i, k) \equiv 0 \pmod{8}$ для всех $k \in V_n$ при $n \equiv 0 \pmod{4}$.
- (iii) $d(h, k) + \sum_{i < j, i, j \in V_n \setminus \{h, k\}} d(i, j) - \sum_{i \in V_n \setminus \{h, k\}} (d(i, h) + d(i, k)) \equiv 0 \pmod{8}$ для всех $h \neq k \in V_n$ при $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Несложно обобщить этот результат на четные T -разрезы. Имеет место

Предложение 25.1.6. Пусть $T \subseteq V_n$, $|T|$ — четно, $2 \leq |T| \leq n-1$. Рассмотрим $d \in \mathbb{Z}^{E_n}$. Предположим, сначала, что $|T| = 2$, $T := \{s, t\}$. Тогда $d \in \mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^T)$ в том, и только том случае, когда d удовлетворяет условию четности (24.1.1) и условиям: $d_{rs} = 0$, $d_{ri} = d_{si}$ при всех $i \in V_n \setminus T$. Предположим теперь, что $|T| \geq 4$. Тогда $d \in \mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^T)$ в том, и только том случае, когда d удовлетворяет условию четности (24.1.1) и следующим условиям:

- (i) $\sum_{i < j, i, j \in T} d_{ij} \equiv 0 \pmod{4}$.
- (ii) $Q_n(\underbrace{1, \dots, 1}_{T}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{V_n \setminus T}, 2, 0, \dots, 0)^T d \equiv 0 \pmod{8}$, где ровно α коэффициентов равно 1, β коэффициентов равно 2, а величины α и β имеют следующие значения:
 - (iia) $(\alpha = 1, \beta = 0)$ и $(\alpha = 2, \beta = 1)$ при $|T| \equiv 0 \pmod{4}$;
 - (iib) $(\alpha = 2, \beta = 0)$ и $(\alpha = 1, \beta = 1)$ при $|T| \equiv 2 \pmod{4}$.

Описание решетки $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_n^{odd})$ нечетных разрезов известно только для $n = 6$. Итак, $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_6^{odd})$ есть решетка в $\mathbb{R}^{15}$, порожденная 16 разрезами полуметриками $\delta(\{i\})$ ($1 \leq i \leq 6$) и $\delta(\{1, i, j\})$ ($2 \leq i < j \leq 6$). Нам потребуется следующее обозначение. Для данных различных точек $a, b, c \in V_6$ определим вектор $v^{a, bc} \in \mathbb{R}^{E_6}$ условиями

$$\begin{cases} v_{ab}^{a, bc} = v_{ac}^{a, bc} = 1, v_{bc}^{a, bc} = 2; \\ v_{ij}^{a, bc} = 2 & \text{при } i \neq j \in V_6 \setminus \{a, b, c\}; \\ v_{ai}^{a, bc} = -2, v_{bi}^{a, bc} = v_{ci}^{a, bc} = -1 & \text{при } i \in V_6 \setminus \{a, b, c\}; \end{cases}$$

Запишем следующие условия:

$$(25.1.7) \quad (v^{a, bc})^T x \leq 0 \quad \text{при всех различных } a, b, c \in V_6,$$

$$(25.1.8) \quad (v^{a, bc})^T x \equiv 0 \pmod{4}$$

при всех различных $a, b, c \in V_6$,

$$(25.1.9) \quad (v^{1, bc})^T x - (v^{1, b'c'})^T x \equiv 0 \pmod{12}$$

при $2 \leq b < c \leq 6$, $2 \leq b' < c' \leq 6$.

Следующий результат из работы Деза и Лоран [1993a] дает описание решетки нечетных разрезов $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_6^{odd})$, а также конуса $\mathbb{R}_+(\mathcal{K}_6^{odd})$ и целочисленного конуса $\mathbb{Z}_+(\mathcal{K}_6^{odd})$.

Предложение 25.1.10.

- (i) Пусть $d \in \mathbb{R}_+^{E_6}$. Тогда $d \in \mathbb{R}_+(\mathcal{K}_6^{odd})$ в том, и только том случае, когда d удовлетворяет условию (25.1.7).
- (ii) Пусть $d \in \mathbb{Z}^{E_6}$. Тогда $d \in \mathbb{Z}(\mathcal{K}_6^{odd})$ в том, и только том случае, когда d удовлетворяет условиям (25.1.8) и (25.1.9).

(iii) Пусть $d \in \mathbb{Z}_+^{E_6}$. Тогда $d \in \mathbb{Z}_+(K_6^{odd})$ в том, и только том случае, когда d удовлетворяет условиям (25.1.7), (25.1.8) и (25.1.9).

Из предложения 25.1.10 немедленно следует, что семейство нечетных разрезных полуметрик на V_6 образует базис Гильберта; см. раздел 25.3.

Дальнейшие сведения о подрешетках решетки разрезов $\mathcal{L}_n$ можно найти в работе Деза и Гришухина [1996а].

25.2. Квази h -расстояния

Пусть d — расстояние на V_n . Тогда d называется *квази h -расстоянием*, если $d \in \text{CUT}_n \cap \mathcal{L}_n$ и d не допускает вложения в гиперкуб. Другими словами, d разлагается как в *неотрицательную* комбинацию разрезных полуметрик, так и в *целочисленную* комбинацию разрезных полуметрик, но не разлагается в комбинацию разрезных полуметрик с *целыми неотрицательными* коэффициентами. Напомним, что минимальное целое число η , при котором расстояние ηd вложимо в гиперкуб, называется шкалой d и обозначается через $\eta(d)$.

Как было доказано в теореме 24.1.3, не существует квази h -расстояний на $n \leq 5$ точках. Нам уже известно несколько способов построения квази h -расстояний, Квази h -расстояния, например, могут быть получены с помощью антиподального расширения (описанного в разделе 7.2). Действительно, пусть d — вложимое в гиперкуб расстояние на V_n и $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, причем $s_{\ell_1}(d) \leq \alpha < s_h(d)$. Тогда $\text{ant}_\alpha(d)$ является квази h -расстоянием. Напомним, что $\text{ant}_\alpha(d)$ есть расстояние на V_{n+1} , заданное формулами: $\text{ant}_\alpha(d)(1, n+1) = \alpha$, $\text{ant}_\alpha(d)(i, n+1) = \alpha - d(1, i)$ (при $1 \leq i \leq n$) и $\text{ant}_\alpha(d)(i, j) = d(i, j)$ (при $1 \leq i < j \leq n$). Например, при $n \geq 6$ расстояние

$$d_n^* := 2d(K_n \setminus e)$$

(принимаяющее значение 2 на всех парах, кроме пары, соответствующей ребру e , на которой принимается значение 4) является квази h -расстоянием (так как $d_n^* = \text{ant}_4(2\mathbb{1}_{n-1})$; см. пример 7.2.7).

Описанная в разделе 7.1 операция гейт-расширения также позволяет строить квази h -расстояния. Если d — расстояние на V_n , а $\alpha \in \mathbb{R}_+$, то гейт расширение $\text{gat}_\alpha(d)$ расстояния d есть расстояние на V_{n+1} , заданное формулами: $\text{gat}_\alpha(d)(1, n+1) = \alpha$, $\text{gat}_\alpha(d)(i, n+1) = \alpha + d(1, i)$

(при $1 \leq i \leq n$) и $\text{gat}_\alpha(d)(i, j) = d(i, j)$ (при $1 \leq i < j \leq n$). Тогда при $\alpha \in \mathbb{R}_+$ расширение gat_α является квази h -расстоянием в том, и только том случае, когда d является квази h -расстоянием. Отсюда, в частности, следует, что существует бесконечно много квази h -расстояний на n точках при всех $n \geq 7$. Действительно, все гейт-расширения расстояния $d_6^* = 2d(K_6 \setminus e)$ являются квази h -расстояниями.

Как показывает следующий результат Лаурта [1994], можно привести другие примеры квази h -расстояний на 6 точках. Более того, из данного результата следует, что и на 6 точках существует бесконечно много квази h -расстояний.

Лемма 25.2.1. Пусть e — ребро графа K_6 , а v — вершина того же графа, не инцидентная e . Тогда расстояние $2d(K_6 \setminus e) + m\delta(\{v\})$ является квази h -расстоянием при всех целых $m \geq 0$.

Доказательство. Пусть K_6 — полный граф на $V_6 = \{1, \dots, 6\}$, e — ребро $(1, 6)$, v — вершина 2. Положим $d := 2d(K_6 \setminus e) + m\delta(\{v\})$. Рассмотрим $\mathbb{Z}_+$ -реализацию $d = \sum_S \alpha_S \delta(S)$ расстояния d , где $\alpha_S \in \mathbb{Z}_+$. Так как d удовлетворяет неравенству треугольника $d_{16} = d_{1i} + d_{i6}$ при $i = 3, 4, 5$, заключаем, что $\alpha_S = 0$, если S одно из следующих множеств: 3, 4, 5, 16, 16, 23, 24, 25, 34, 45, 126, 136, 146, 156. Следовательно, $d = \sum_{S \in \mathcal{S}} \alpha_S \delta(S)$, где $\mathcal{S}$ может содержать следующие множества: 1, 2, 6, 12, 13, 14, 15, 26, 36, 46, 56, 123, 124, 125, 134, 135, 145. Вычисляя d_{12} , d_{26} и d_{16} , получаем, соответственно, что

$$\begin{aligned} m + 2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{26} + \alpha_{134} + \alpha_{135} + \alpha_{145}, \\ m + 2 &= \alpha_2 + \alpha_6 + \alpha_{12} + \alpha_{36} + \alpha_{46} + \alpha_{56} + \alpha_{123} + \alpha_{124} + \alpha_{125}, \\ 4 &= \sum_{S \in \mathcal{S}} \alpha_S \delta(S) - \alpha_2. \end{aligned}$$

Складывая первые два равенства и вычитая третье, получаем, что $\alpha_2 = m$. Таким образом, если в гиперкуб вкладывается расстояние d , то вкладывается и расстояние $d - m\delta(\{2\})$. Это противоречит тому, что $2d(K_6 \setminus e)$ является квази h -расстоянием. $\blacksquare$

В действительности, из теоремы 25.2.2 ниже следует, что на расстояниях из шести точек нет других квази h -расстояний, кроме указанных в лемме 25.2.1. Теорема 25.2.2 и следствие 25.2.3 были доказаны Лауртом [1994, 1995]. Доказательство теоремы 25.2.2 требует множества технических подробностей, поэтому мы его здесь не приводим. (Информацию, относящуюся к полному доказательству, можно найти также в работе Лаурта, Деза и Лоран [1995].)

Теорема 25.2.2. *Каждое квази h -расстояние на V_6 является целочисленной неотрицательной комбинацией разрезов и расстояний $2d(K_6 \setminus e)$, где e — ребро K_6 .* ■

Следствие 25.2.3. *Все квази h -расстояния на V_6 имеют вид $2d(K_6 \setminus e) + t\delta(\{v\})$, где e — ребро графа K_6 , v — вершина того же графа, не инцидентная e , и $t \in \mathbb{Z}_+$.*

Доказательство следствия 25.2.3 использует приведенные ниже тождества (a)–(i), которые показывают, что все возмущения расстояния $2d(K_6 \setminus e)$ (полученные добавлением разрезной полуметрики), отличные от рассмотренных в лемме 25.2.1, вложимы в гиперкуб. Обозначим через e_{ij} ребро ij графа K_6 ($1 \leq i < j \leq 6$). Тогда имеют место равенства:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & 2d(K_6 \setminus e_{12}) + \delta(\{1\}) = \delta(\{2\}) + \delta(\{1, 3\}) + \delta(\{1, 4\}) + \\
& \quad + \delta(\{1, 5\}) + \delta(\{1, 6\}), \\
(b) \quad & 2d(K_6 \setminus e_{12}) + \delta(\{1, 2\}) = 2\delta(\{1\}) + 2\delta(\{2\}) + \delta(\{3\}) + \\
& \quad + \delta(\{4\}) + \delta(\{5\}) + \delta(\{6\}), \\
(c) \quad & 2d(K_6 \setminus e_{12}) + \delta(\{1, 3\}) = \delta(\{2\}) + \delta(\{1, 3\}) + \delta(\{3, 4, 5\}) + \\
& \quad + \delta(\{3, 4, 6\}) + \delta(\{4, 5, 6\}), \\
(d) \quad & 2d(K_6 \setminus e_{12}) + \delta(\{3, 4\}) = \delta(\{1\}) + \delta(\{3\}) + \delta(\{4\}) + \delta(\{2, 5\}) + \\
& \quad + \delta(\{2, 6\}) + \delta(\{2, 3, 4\}), \\
(e) \quad & 2d(K_6 \setminus e_{12}) + \delta(\{1, 2, 3\}) = \delta(\{1\}) + \delta(\{2\}) + \delta(\{4\}) + \delta(\{5\}) + \\
& \quad + \delta(\{6\}) + \delta(\{1, 3\}) + \delta(\{2, 3\}), \\
(f) \quad & 2d(K_6 \setminus e_{12}) + \delta(\{1, 3, 4\}) = \delta(\{1, 3\}) + \delta(\{1, 4\}) + \delta(\{2, 5\}) + \\
& \quad + \delta(\{2, 6\}) + \delta(\{1, 5, 6\}), \\
(g) \quad & 2d(K_6 \setminus e_{12}) + 2d(K_6 \setminus e_{23}) = \delta(\{1\}) + \delta(\{2, 3\}) + \delta(\{2, 4\}) + \\
& \quad + \delta(\{2, 5\}) + \delta(\{3, 6\}) + \\
& \quad + \delta(\{1, 2, 6\}) + \delta(\{1, 3, 4\}) + \delta(\{1, 3, 5\}), \\
(h) \quad & 2d(K_6 \setminus e_{12}) + 2d(K_6 \setminus e_{34}) = \delta(\{1\}) + \delta(\{2, 3\}) + \delta(\{2, 4\}) + \\
& \quad + \delta(\{3, 5\}) + \delta(\{4, 6\}) \\
& \quad + \delta(\{1, 3, 4\}) + \delta(\{1, 3, 6\}) + \delta(\{1, 4, 5\}), \\
(i) \quad & 2d(K_6 \setminus e_{12}) + \delta(\{3\}) + \delta(\{4\}) = \delta(\{1, 3\}) + \delta(\{2, 4\}) + \delta(\{3, 4\}) + \\
& \quad + \delta(\{1, 4, 5\}) + \delta(\{1, 4, 6\}).
\end{aligned}$$

Доказательство следствия 25.2.3. Пусть d — квази h -расстояние на V_6 . Тогда, по теореме 25.2.2, d можно представить в виде

$$d = \sum_S \alpha_S \delta(S) + \sum_{1 \leq i < j \leq 6} \beta_{ij} 2d(K_6 \setminus e_{ij}),$$

где $\alpha_S, \beta_{ij} \in \mathbb{Z}_+$. Так как расстояние $4d(K_6 \setminus e_{ij})$ вложимо в гиперкуб, можно считать, что $\beta_{ij} \in \{0, 1\}$ при всех i, j . Воспользовавшись равенствами (g) и (h), можно переписать выражение для d в виде

$$d = \sum_S \alpha'_S \delta(S) + 2d(K_6 \setminus e),$$

где $\alpha'_S \in \mathbb{Z}_+$, а e — например, ребро $(1, 2)$. Из соотношений (a)–(f) заключаем, что $\alpha_S = 0$, если $S = \{1\}$ или $\{2\}$, или когда $|S| = 2$ или 3. Таким образом, из равенства (i) получаем, что $d = 2d(K_6 \setminus e_{1,2}) + m\delta(\{i\})$, где $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$. ■

Как мы только что убедились, при каждом $n \geq 6$ на V_n существует бесконечно много квази h -расстояний. Тем не менее, из леммы 4.3.9 следует, что для всех квази h -расстояний d на V_n существует общая целая шкала η_n , т. е. такое целое число η_n , что расстояние $\eta_n d$ вложимо в гиперкуб для любого квази h -расстояния d . Применяя следствие 25.2.3, получаем

Следствие 25.2.4. $\eta_6 = 2$. Другими словами, расстояние $2d$ вложимо в гиперкуб для любого целочисленного ℓ_1 -вложимого расстояния d на 6 точках, удовлетворяющего условию четности 24.1.1.

Для класса расстояний на графах в главе 21 был доказан следующий результат: минимальная шкала метрики кратчайшего расстояния на связном графе равна 1, или является целым четным числом, не большим $n - 2$. Более того, для ℓ_1 жестких графов минимальная шкала не превосходит 1 или 2.

Большая часть материала главы 23 может быть переформулирована в терминах минимальных шкал. Действительно, рассмотрим метрику $d_n := \text{ant}_2(\mathbb{1}_n)$ (т. е. метрику кратчайшего пути на графе $K_{n+1} \setminus e$). Тогда расстояние

$$2td_n = 2t \text{ant}_2(\mathbb{1}_n) = \text{ant}_{4t}(2t\mathbb{1}_n)$$

вкладывается в гиперкуб в том, и только том случае, когда $4t \geq s_h(2t\mathbb{1}_n)$. Следовательно, минимальную шкалу $\eta(d_n)$ можно представить в виде

$$\eta(d_n) = 2 \min(t \in \mathbb{Z}_+ \mid 4t \geq s_h(2t\mathbb{1}_n)).$$

В частности, из утверждения (i) теоремы 23.3.1 следует, что

- (i) $\eta(d_{4t}) \geq 2t$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда существует матрица Адамара порядка $4t$.

Сравните (i) со следующим утверждением (ii), которое следует из теорем 22.0.6 и 22.0.7.

- (ii) $\eta^1(\mathbb{1}_{t^2+t+2}) \geq 2t$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда существует проективная плоскость порядка t (здесь через $\eta^1(d)$ для вложимого в гиперкуб расстояния d обозначено наименьшее из тех целых λ (если такие вообще найдутся), для которых расстояние λd не является ℓ_1 -жестким, т. е. имеет по меньшей мере две различные $\mathbb{Z}_+$ -реализации).

Некоторые квази h -расстояния могут быть построены с помощью операции сферического расширения, описанной в разделе 7.3. Соответствующие примеры в леммах 25.2.5 и 25.2.6 ниже взяты из работы Деза и Гришукина [1994]. Напомним, что если d — расстояние на V_n , а $t \in \mathbb{R}_+$, то сферическим t -расширением расстояния d называется расстояние $\text{sph}_t(d)$ на V_{n+1} , заданное формулами: $\text{sph}_t(d)(i, n+1) = t$ при всех $1 \leq i \leq n$, и $\text{sph}_t(d)(i, j) = d(i, j)$ при всех $1 \leq i < j \leq n$. Если $d \in \text{CUT}_n$ и $2t \geq s_{\ell_1}(d)$, то $\text{sph}_t(d) \in \text{CUT}_{n+1}$. В качестве первого примера рассмотрим расстояние

$$\theta_n^t := \text{ant}_{2t}(\text{sph}_t(2\mathbb{1}_{n-2})),$$

где n, t — натуральные числа; т. е. θ_n^t есть расстояние на V_n , заданное формулами:

$$\begin{cases} \theta_n^t(n-1, n) = 2t; \\ \theta_n^t(i, n-1) = \theta_n^t(i, n) = t & \text{при } 1 \leq i \leq n-2; \\ \theta_n^t(i, j) = 2 & \text{при } 1 \leq i < j \leq n-2. \end{cases}$$

Ясно, что расстояние θ_n^t допускает следующие разложения:

$$\begin{aligned} \theta_n^t &= \sum_{1 \leq i \leq n-2} \delta(\{i, n\}) + (t-1)\delta(\{n-1\}) + (t-n+3)\delta(\{n\}), \\ \theta_n^t &= \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i \leq n-2} (\delta(\{i, n-1\}) + \delta(\{i, n\})) \right) + \\ &\quad + (2t-n+2)(\delta(\{n-1\}) + \delta(\{n\})). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что расстояние θ_n^t вложимо в гиперкуб при $t \geq n-3$, а расстояние $2\theta_n^t$ вложимо в гиперкуб при $t \geq \frac{n-2}{2}$.

Лемма 25.2.5. Пусть t — натуральное число.

- (i) Если $n \neq 6$, то расстояние θ_n^t вложимо в гиперкуб тогда и только тогда, когда $t \geq n - 3$.
- (ii) При $n \geq 6$ расстояние θ_n^t является квази h -расстоянием, если $\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \leq t \leq n - 4$.

Доказательство. (i) Предположим, что расстояние θ_n^t вложимо в гиперкуб. Тогда можно считать, что при любом вложении расстояния θ_n^t в гиперкуб, каждая точка $i \in \{1, \dots, n-2\}$ помечена синглетоном $\{i\}$ (в силу того, что метрика $2\mathbb{1}_{n-2}$ является h -жесткой при $n \neq 6$). Отсюда следует, что одна из точек $n-1, n$ должна быть помечена множеством A , содержащим $\{1, \dots, n-2\}$, и, следовательно, $|A| - 1 = t \geq n - 3$.

- (ii) Если $t \geq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$, то расстояние θ_n^t является ℓ_1 -вложимым.

Таким образом, при $n \neq 6$ и $\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \leq t \leq n - 4$ расстояние θ_n^t является квази h -расстоянием. Если $n = 6$ и $t = 2$, то расстояние θ_n совпадает с расстоянием d_6^* , про которое известно, что оно является квази h -расстоянием. ■

Для данного $n \geq 6$ обозначим через μ_n расстояние на V_n , определенное как

$$\mu_n := \delta(\{1\}) + \delta(\{2\}) + \sum_{3 \leq i < j \leq n-1} \delta(\{1, 2, i, j\}), \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} \mu_n(1, 2) = 2; \\ \mu_n(1, n) = \mu_n(2, n) = 1 + \binom{n-3}{2}; \\ \mu_n(1, i) = \mu_n(2, i) = 1 + \binom{n-4}{2} & \text{при } 3 \leq i \leq n-1 \\ \mu_n(i, n) = n-4 & \text{при } 3 \leq i \leq n-1 \\ \mu_n(i, j) = 2(n-5) & \text{при } 3 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Например, при $n = 6$ расстояние μ_6 совпадает с метрикой кратчайшего пути на графе $K_6 \setminus P$, где $P := \{1, 6, 2\}$ — путь из трех вершин.

Лемма 25.2.6. Пусть n, t — такие целые числа, что $n \geq 6$, $n \equiv 2 \pmod{4}$ и $2t \geq 2 + \binom{n-3}{2}$. Тогда $\text{sph}_t(\mu_n)$ является квази h -расстоянием.

Доказательство. Легко видеть, что условие $n \equiv 2 \pmod{4}$ отвечает за то, что все компоненты расстояния μ_n — целые четные числа, откуда следует, что $\text{sph}_t(\mu_n) \in \mathcal{L}_{n+1}$. Обозначим через F грань конуса CUT_n , заданную гиперметрическим неравенством $Q(b)^T x := \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} \leq 0$, где $b := (1, 1, -1, \dots, -1, n-4) \in \mathbb{R}^n$ ($n-3$

компоненты равны -1). Положим

$$\mathcal{S} := \{1, 2, 1i, 2i, 12i \mid (3 \leq i \leq n-1), 12ij \mid (3 \leq i < j \leq n-1)\},$$

где выражения $1, 1i$ и т. п. обозначают множества $\{1\}, \{1, i\}, \dots$. Ненулевые разрезные полуметрики, удовлетворяющие уравнению $Q(b)^T x = 0$ суть полуметрики $\delta(S)$ при $S \in \mathcal{S}$, которые линейно независимы. Таким образом, F — симплицальная грань конуса CUT_n . Так как расстояние μ_n принадлежит F , получаем, что расстояние μ_n ℓ_1 -жестко и $s_{\ell_1}(\mu_n) = 2 + \binom{n-3}{2}$. Обозначим через G грань конуса CUT_{n+1} , заданную гиперметрическим неравенством $Q(b, 0)^T x \leq 0$; Ненулевые разрезные полуметрики принадлежащие грани G суть $\delta(S)$, $\delta(S \cup \{n+1\})$ при $S \in \mathcal{S}$ и $\delta(\{n+1\})$. Так как $2t \geq s_{\ell_1}(\mu_n)$, то расстояние $\text{sph}_t(\mu_n)$ ℓ_1 -вложимо, и, в действительности, расстояние $\text{sph}_t(\mu_n)$ принадлежит грани G . Предположим, что расстояние $\text{sph}_t(\mu_n)$ вложимо в гиперкуб. Тогда существуют такие неотрицательные целые числа $\gamma, \alpha_S, \beta_S$ ($S \in \mathcal{S}$), что

$$\text{sph}_t(\mu_n) = \gamma \delta(\{n+1\}) + \sum_{S \in \mathcal{S}} \alpha_S \delta(S) + \beta_S \delta(S \cup \{n+1\}).$$

Тогда $\sum_{S \in \mathcal{S}} (\alpha_S + \beta_S) \delta(S) = \mu_n$, откуда следует, что $\alpha_S = \beta_S = 0$, если S не является ни одним из множеств $\{1\}, \{2\}, \{1, 2, i, j\}$, и

$$\begin{cases} \alpha_i + \beta_i = 1 & \text{при } i = 1, 2; \\ \alpha_{ij} + \beta_{ij} = 1 & \text{при } 3 \leq i < j \leq n-1. \end{cases}$$

(полагая $\alpha_{ij} = \alpha_{12ij}$ и $\beta_{ij} = \beta_{12ij}$). Рассматривая компоненту расстояния $\text{sph}_t(\mu_n)$, соответствующую парам $(1, n+1)$ и $(2, n+1)$, получаем, что

$$\alpha_1 + \beta_2 + \sum_{i,j} \alpha_{ij} + \gamma = t, \quad \alpha_2 + \beta_1 + \sum_{i,j} \alpha_{ij} + \gamma = t,$$

откуда

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma = t - \sum_{i,j} \alpha_{ij} - 1.$$

Рассматривая компоненту расстояния $\text{sph}_t(\mu_n)$, соответствующую парам $(i, n+1)$ ($3 \leq i \leq n-1$), получаем, что

$$\sum_j \alpha_{ij} + \beta_1 + \beta_2 + \sum_{i,j} \beta_{ij} - \sum_j \beta_{ij} + \gamma = t.$$

Таким образом,

$$2 \sum_j \alpha_{ij} + 2\beta_1 - 2 \sum_{i,j} \alpha_{ij} + \binom{n-3}{2} - n + 3 = 0.$$

Суммируя по i от 3 до $n-1$, заключаем, что

$$4(n-5) \sum_{i,j} \alpha_{ij} = (n-3)(4\beta_1 + (n-3)(n-6)).$$

Наконец, рассмотрев компоненту соответствующую паре $(n, n+1)$, имеем:

$$\beta_1 + \beta_2 + \sum_{i,j} \beta_{ij} + \gamma = t,$$

и, таким образом,

$$2 \sum_{i,j} \alpha_{ij} - 2\beta_1 - \binom{n-3}{2} + 1 = 0.$$

С помощью равенства

$$2 \sum_{i,j} \alpha_{ij} = \frac{n-3}{2(n-5)} (4\beta_1 + (n-3)(n-6))$$

заключаем, что $2\beta_1 = 1$, что противоречит целочисленности β_1 . Значит расстояние $\text{sph}_t(\mu_n)$ не вложимо в гиперкуб, и, следовательно, является квази h -расстоянием. $\blacksquare$

25.3. Базисы Гильберта решеток

Пусть X — конечное множество векторов в $\mathbb{Z}^k$. Напомним, что $\mathbb{Z}(X)$, $\mathbb{R}_+(X)$ и $\mathbb{Z}_+(X)$ обозначают соответственно решетку, конус и целочисленный конус, порожденные X . Ясно, что имеет место следующее вложение:

$$\mathbb{Z}_+(X) \subseteq \mathbb{R}_+(X) \cap \mathbb{Z}(X).$$

Множество X называется *базисом Гильберта*, если достигается равенство

$$\mathbb{Z}_+(X) = \mathbb{R}_+(X) \cap \mathbb{Z}(X).$$

Ясно, что если векторы из X линейно независимы, то X — базис Гильберта. Здесь мы исследуем вопрос, когда семейство разрезов данного графа является базисом Гильберта.

Для данного графа G и $S \subseteq V$ разрез $\delta_G(S)$ состоит из тех ребер $e \in E$, один конец которых принадлежит S , а другой — $V \setminus S$. Обозначим через $\mathcal{K}_G \subseteq \{0,1\}^E$ семейство векторов инцидентности разрезов из G . Тогда $\mathbb{R}_+(\mathcal{K}_G)$ называется *разрезным конусом* графа

G и обозначается через $\text{CUT}(G)$. Таким образом, если G — полный граф K_n с n вершинами, то $\mathbb{R}_+(\mathcal{K}_{K_n}) = \text{CUT}(K_n)$ совпадает с конусом CUT_n . Более того, целочисленный конус $\mathbb{Z}_+(\mathcal{K}_{K_n})$ состоит в точности из вложимых в гиперкуб расстояний на V_n (напомним предложение 4.2.4).

Нас интересует следующая проблема

Проблема 25.3.1. *Обозначим через $\mathcal{H}$ класс, состоящий из тех графов G , множество разрезов $\mathcal{K}_G$ которых является базисом Гильберта. Требуется описать графы G , принадлежащие классу $\mathcal{H}$.*

Посмотрим теперь, что известно о классе $\mathcal{H}$. К этой проблеме мы еще вернемся в разделе 27.4.3 в более общем случае бинарных матроидов.

По теореме 24.1.3 графы K_3, K_4, K_5 принадлежат классу $\mathcal{H}$. С другой стороны, граф K_6 не принадлежит $\mathcal{H}$ (так как расстояние $2dK_6 \setminus e$ принадлежит $\mathbb{R}_+(\mathcal{K}_{K_6}) \cap \mathbb{Z}(\mathcal{K}_{K_6})$, но не $\mathbb{Z}_+(\mathcal{K}_{K_6})$). Более того, имеет место

Предложение 25.3.2.

- (i) *Каждый граф, не содержащий подграфа K_5 , принадлежит $\mathcal{H}$.*
- (ii) *Каждый граф, содержащий не менее шести вершин и отличный от K_6 , принадлежит $\mathcal{H}$.*
- (iii) *Если граф G принадлежит $\mathcal{H}$, то G не содержит подграфа K_6 .*

Утверждение (i) предложения 25.3.2 было доказано в работе Фу и Годдина [1999], а утверждения (ii), (iii) — в работе Лоран [1996b]. Доказательство этих результатов использует, в частности, замкнутость класса $\mathcal{H}$ относительно некоторых операций. А именно,

- (i) Класс $\mathcal{H}$ замкнут относительно кликовой k -суммы графов ($k = 0, 1, 2, 3$).
- (ii) Если $G \in \mathcal{H}$, а e — ребро графа G , то граф G/e (полученный стягиванием ребра e), принадлежит классу $\mathcal{H}$.
- (iii) Если $G \in \mathcal{H}$, а e — такое ребро графа G , что для каждого неравенства $v^T x \leq 0$, задающего фасету разрезного конуса $\text{CUT}(G)$ имеет место:

$$v_e \in \{0, 1, -1\}, \quad \sum_{f \in \delta_G(S)} v_f \in 2\mathbb{Z} \quad \text{для всех разрезов } \delta_G(S),$$

то граф $G \setminus e$ (полученный удалением ребра e), принадлежит классу $\mathcal{H}$.

Например, проверить утверждение (iii) предложения 25.3.2 можно следующим образом. Предположим, что граф K_6 является подграфом G .

Определим $x \in \mathbb{R}^E$ условиями: $x_e = 2$ для всех ребер графа G кроме одного, принадлежащего K_6 , для которого $x_e = 4$. Тогда $x \in \mathbb{R}_+(\mathcal{K}_G) \cap \mathbb{Z}(\mathcal{K}_G)$ (так как x продолжается на некоторую точку из $\text{CUT}_n \cap \mathcal{L}_n$) и $x \notin \mathbb{Z}_+(\mathcal{K}_G)$ (так как проекция x на K_6 не принадлежит $\mathbb{Z}_+(\mathcal{K}_{K_6})$). Значит ни один граф $G \in \mathcal{H}$ не содержит граф K_6 качестве подграфа. Отсюда следует утверждение (iii) предложения 25.3.2, в силу замкнутости класса $\mathcal{H}$ относительно стягивания ребер.

Дать полное описание класса $\mathcal{H}$ является, по-видимости, сложной задачей. Отчасти это связано с тем, что для произвольных графов не известно линейного описания разрезного конуса. Есть еще много нерешенных вопросов.

Например, является ли класс $\mathcal{H}$ замкнутым относительно ΔY -операции¹⁾? В качестве первого примера необходимо проверить, принадлежит ли граф из рисунка 25.3.3 классу $\mathcal{H}$ (этот граф получен однократным применением ΔY -операции к графу K_6 , т. е. заменой треугольника на лапу $K_{1,3}$).

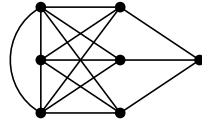


Рис. 25.3.3. ΔY -преобразование графа K_6

Замнут ли класс $\mathcal{H}$ относительно удаления ребер? (Как уже было упомянуто выше, это может быть доказано только при некоторых технических условиях на фасеты разрезного конуса.)

В разделе 27.4.3 мы увидим, что вопрос об описании графов G , множество разрезов $\mathcal{K}_G$ которых является базисом Гильберта, можно поставить в более широких рамках, а именно для бинарных матроидов.

Другим интересным вопросом является нахождение базиса Гильберта для разрезного конуса на шести точках; это первый из случаев, когда разрезы не образуют базиса Гильберта. В действительности, имеет место следующая теорема, эквивалентная теореме 25.2.2.

Теорема 25.3.4. *31 ненулевая разрезная полуметрика на V_6 вместе с 15 метриками $2d(K_6 \setminus e)$ (при $e \in E(K_6)$) образуют базис Гильберта.*

¹⁾ Пусть G — граф с кликой на вершинах u, v и w . Применение ΔY -операции к данной клике состоит в удалении трех ребер uv, uw, vw и добавлении новой вершины к графу G , соединенной ребрами со всеми тремя вершинами u, v и w .

Наконец, напомним предложение 25.1.10, из которого вытекает, что 16 нечетных разрезов K_6 образуют базис Гильберта.

Часть V.

Фасеты разрезного конуса и разрезного многогранника

Введение

В этой последней части мы рассматриваем результаты, которые известны о структуре граней разрезного конуса и разрезного многогранника. Известно, что все фасеты разрезного многогранника могут быть получены из фасет разрезного конуса операцией переключения (см. раздел 26.3). Следовательно, практически все наше внимание мы сконцентрируем на фасетах разрезного конуса. С другой стороны, (почти) любой результат о структуре граней разрезного полиэдра имеет прямой аналог для корреляционного полиэдра, так как они находятся во взаимно-однозначном линейном соответствии (см. раздел 26.1).

Как было определено в части 1, элементами разрезного конуса CUT_n являются полуметрики на $V_n = \{1, \dots, n\}$, которые могут быть изометрически вложены в некоторое ℓ_1 -пространство. Следовательно, фасеты CUT_n соответствуют линейным неравенствам, характеризующим ℓ_1 -пространства. С другой стороны, разрезной многогранник играет важную роль в комбинаторной оптимизации, так как позволяет переформулировать задачу о максимальном разрезе: $\max(c^T \delta(S) \mid S \subseteq V_n)$ (где $c \in \mathbb{R}^{E_n}$) в виде

$$\max_{x \in \text{CUT}_n^\square} c^T x$$

(Напомним разделы 4.1 и 5.1, в которых упомянуты эти приложения и связи.) В разделе 31.2 мы увидим, что фасеты разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ имеют следующее любопытное приложение: они дают допустимые неравенства для попарных углов между n единичных векторов.

Полное описание всех фасет разрезного конуса CUT_n (или разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$) является, по-видимому, безнадежной задачей. Действительно, так как задача о максимальном разрезе является NP-трудной, из результата Карпа и Пападимитриу [1982] следует, что если $\text{NP} \neq \text{co-NP}$, то нет полиномиального способа получения списка неравенств, достаточных для определения $\text{CUT}_n^\square$.

Несмотря на свою ограниченность, сведения о некоторых классах фасет остаются важными с многих точек зрения. Например, когда применим метод отделяющей плоскости, эти классы фасет могут быть использованы в алгоритмах отсечения для решения практических

примеров задачи о максимальном разрезе. (Читатель может обратиться к обзору Юнгера, Райнелта и Тинеля [1995] за более полной информацией о решении задач оптимизации с использованием процедуры отсечения.) Кроме того, некоторые классы фасет оказываются иногда достаточными для конусов специальных классов ℓ_1 -метрик (см. замечание 6.3.5, где указаны несколько таких классов), или для полного описания разрезных полиэдров некоторых классов графов (см. раздел 27.3).

Полное описание всех разрезных полиэдров CUT_n и $\text{CUT}_n^\square$ известно для $n \leq 8$; мы приводим список фасет для разрезных полиэдров на $n \geq 7$ точках в разделе 30.6. Например, CUT_7 имеет 38780 фасет, в то время как $\text{CUT}_7^\square$ имеет 116764 фасет. Для $n = 8$ число фасет огромно: более чем 217 миллионов, подразделенных в 147 орбит!

Часть 5 организована следующим образом. В главе 26 мы рассматриваем некоторые средства и операции для построения фасет, и в главах 27–30 даем известные классы допустимых неравенств и фасет для разрезного конуса и разрезного многогранника. В главе 31 мы группируем некоторые геометрические свойства разрезного многогранника и родственных объектов.

Основное внимание в части 5 уделяется структуре граней разрезных полиэдров. Однако мы рассматриваем и ряд других тем, к которым разрезные и полуметрические полиэдры имеют непосредственное отношение, а именно, циклические полиэдры произвольных бинарных матроидов в разделе 27.4, положительно полуопределенную аппроксимацию разрезного многогранника в разделе 28.4.1, и проблемы пополнения до положительно полуопределенных матриц и матриц евклидовых расстояний в разделах 31.3 и 31.4.

Многие неравенства, рассматриваемые в этой части, имеют вид:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} - \sum_{ij \in E(G)} x_{ij} \leq 0,$$

где $b_1, \dots, b_n$ являются целыми числами и G есть подграф (возможно, с весами на ребрах) графа K_n . При $\sum_{1 \leq i \leq n} b_i = 1$ и пустом графе G мы получаем гиперметрические неравенства. Если сумма $\sum_{1 \leq i \leq n} b_i$ нечетна и граф G есть антипаутина (или, соответственно, подвешенное дерево), то мы получаем неравенства клики-паутины (соответственно, неравенства подвешенного дерева), рассмотренные в главе 29 и разделе 30.1. Однако три класса фасет, представленных в разделах 30.2–30.4, имеют иной вид.

Гиперметрические неравенства, возможно, представляют собой наиболее важный класс из всех известных допустимых неравенств

разрезного конуса. Они уже были рассмотрены в части 1 в связи с изучением ℓ_1 -метрик; в замечании 6.3.5 мы рассмотрели несколько классов метрик, для которых уже гиперметрические неравенства достаточны для характеристики ℓ_1 -вложимости. Они интенсивно изучались также в части 2, в связи с многогранниками Делоне точечных решеток. В главе 28 мы фокусируем внимание на изучении гиперметрических неравенств как фасет разрезных полиэдров. Заметим, что все фасеты разрезного конуса на $n \leq 6$ точках — гиперметрические.

Неравенства треугольника, которые являются специальным случаем гиперметрических неравенств, детально исследуются в главе 27. В главе 29 мы рассматриваем неравенства клики-паутины, являющиеся обобщением гиперметрических неравенств. Другие классы фасет, не входящие в вышеперечисленные классы, рассмотрены в главе 30.

В главе 31 мы описываем некоторые геометрические свойства разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ и родственных объектов. В разделах 31.6–31.8 мы изучаем следующие темы: условия смежности, грани малых размерностей, «форма» $\text{CUT}_n^\square$, в терминах расстояний его фасет от бароцентра, симплициальные фасеты $\text{CUT}_n^\square$. В разделе 31.2 мы описываем любопытное применение линейного описания разрезного конуса к нахождению допустимых неравенств для попарных углов между n векторами в $\mathbb{R}^n$. В разделе 31.1 показано, как разрезы могут быть использованы для опровержения гипотезы Борсука. Наконец, разделы 31.3 и 31.4 посвящены рассмотрению проблем пополнения частично положительно полуопределенных матриц и частично определенных матриц евклидовых расстояний. Дело в том, что некоторые полиэдры, изучаемые в этой книге, в том числе разрезной многогранник, полуметрический многогранник и конус отрицательного типа, играют важную роль при решении этих двух проблем.

Символ $\delta(S)$, который был назван «разрезной полуметрикой» в начале книги, в части 5 чаще будет называться «разрезным вектором». Это подчеркивает тот факт, что в этой части мы имеем дело не с изучением полуметрик, а с изучением разрезных полиэдров CUT_n и $\text{CUT}_n^\square$ как геометрических объектов. Напомним, что символ $\delta_{K_n}(S)$ обозначает разрез в K_n , определенный множеством S , т. е. множество ребер из K_n , имеющих в S ровно один конец. Таким образом, характеристический вектор множества ребер $\delta_{K_n}(S)$ совпадает с разрезным вектором $\delta(S)$. Иногда мы используем понятия $\delta(S)$ и $\delta_{K_n}(S)$ как синонимы и, например, говорим о «разрезе $\delta(S)$ ».

В соответствующих случаях мы будем рассматривать некоторые другие конусы и многогранники, получающиеся из более узких семейств

разрезов, таких как эквиразрезы, четные разрезы, и так далее. Понятия четного T -разреза, k -однородного разреза и нечетного разреза уже были введены в разделе 25.1, где мы изучали соответствующие решетки. Для удобства, напомним здесь эти определения. Пусть S есть подмножество множества V_n . Тогда $\delta(S)$ называется *четно разрезным вектором* (или четно разрезной полуметрикой), если $|S|$ и $|V_n \setminus S|$ являются четными; $\delta(S)$ называется *эквиразрезным вектором* (соответственно, *неэквиразрезным вектором*), если $|S| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ (соответственно, $|S| \neq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$). Для данного целого $k \leq n$, $\delta(S)$ называется *k -однородным разрезным вектором*, если $|S| = k, n - k$. Мы обозначаем через ECUT_n (соответственно, $\text{ICUT}_n, \text{UCUT}_n$) конус в $\mathbb{R}^{E_n}$, порожденный всеми четно разрезными векторами (соответственно, неэквиразрезными векторами, k -однородными разрезными векторами); $\text{EQCUT}_n^\square$ обозначает многогранник в $\mathbb{R}^{E_n}$, определенный как выпуклая оболочка всех эквиразрезных векторов в K_n . Эти полиэдры называются соответствующим образом, т. е., $\text{EQCUT}_n^\square$ называется *эквиразрезным многогранником*, ECUT_n *четно разрезным конусом*, ICUT_n *неэквиразрезным конусом* и UCUT_n *k -однородно разрезным конусом*. Заметим, что $\text{EQCUT}_n^\square$ совпадает с гранью $\text{CUT}_n^\square$, определенной неравенством:

$$(a) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Если n нечетно, $n = 2p + 1$, то $\text{EQCUT}_{2p+1}^\square$ является фасетой $\text{CUT}_{2p+1}^\square$ (так как неравенство (a) является переключением чистого гиперметрического неравенства, которое является фасетой, определенной следствием 28.2.5 (i)). Если n четно, $n = 2p$, то $\text{EQCUT}_{2p}^\square$ является гранью $\text{CUT}_{2p}^\square$ размерности $\binom{2p}{2} - p$.

Мы рассмотрим также *мультиразрезный многогранник* $\text{MC}_n^\square$, который определен как выпуклая оболочка мультиразрезных векторов $\delta(S_1, \dots, S_p)$ (для любого разбиения V_n на произвольное число частей). (Заметим, что конус, порожденный всеми мультиразрезами, совпадает с разрезным конусом CUT_n , так как $\delta(S_1, \dots, S_p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \delta(S_i)$ для любого разбиения V_n на $S_1 \cup \dots \cup S_p$).

Мы даем очень ограниченные сведения об указанных полиэдрах. Для более детальной информации об эквиразрезном многограннике читатель может обратиться к Конфорти, Рао и Сассано [1990a, 1990b], Деза, Фукуда и Лоран [1993], Де Суза [1993], Де Суза и Лоран [1995]; информацию о мультиразрезном многограннике можно найти в Деза,

Грётшель и Лоран [1991, 1992], Чопра и Рао [1995] и в библиографии этих работ; неэквивариантный конус, четно разрезный конус k -однородно разрезный конус были рассмотрены, соответственно, в Деза, Фукуда и Лоран [1993] и Деза и Лоран [1993b, 1992e].

Мы используем определения из раздела 2.2, относящиеся к полиэдрам (грани, фасеты, допустимые неравенства, и так далее), из раздела 2.2. Мы используем также следующие дополнительные определения для корней, чистых неравенств и реберно-весовых векторов. Для данного неравенства $v^T x \leq v_0$, которое является допустимым для разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$, где $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ и $v_0 \in \mathbb{R}$, разрезной вектор $\delta(S)$ называется *корнем* неравенства $v^T x \leq v_0$, если он удовлетворяет ему как равенству, т. е., если $v^T \delta(S) = v_0$. Аналогично, разрезные векторы, принадлежащие грани F для CUT_n или для $\text{CUT}_n^\square$, называются корнями этой грани. Мы обозначаем множество корней грани F через $R(F)$.

Для данного $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ и $v_0 \in \mathbb{R}$, неравенство $v^T x \leq v_0$ называется *чистым*, если $v_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ для всех $ij \in E_n$. Для каждого разрезного вектора $\delta(S)$ мы используем обозначение:

$$v(\delta(S)) := v^T \delta(S) = \sum_{ij \in \delta(S)} v_{ij}.$$

Для данного $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ мы можем определить соответствующий весовой граф G_v с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$, ребра которого есть пары ij , для которых $v_{ij} \neq 0$; ребру ij мы приписываем вес v_{ij} . Граф G_v называется *графом-носителем* для v . Обратно, если $G = (V, E)$ есть реберно-весовой граф, т. е. граф G с некоторыми весами v_{ij} ($ij \in E$) на его ребрах, мы определим его *реберно-весовой вектор* как вектор $v \in \mathbb{R}^{E_n}$, компоненты которого есть веса v_{ij} для ребер $ij \in E$ и $v_{ij} := 0$, если ij не является ребром G .

Пусть $v^T x \leq 0$ есть допустимое неравенство для разрезного конуса CUT_n . Так как CUT_n является полномерным конусом в пространстве $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$, неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету CUT_n , если оно имеет $\binom{n}{2} - 1$ линейно независимых корней, т. е., если существует $\binom{n}{2} - 1$ линейно независимых разрезных векторов $\delta(S)$, таких что $v^T \delta(S) = 0$. Следовательно, для того, чтобы показать, что неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету для CUT_n , достаточно найти соответствующее множество разрезных векторов. Этот прямой метод может быть применен, например, для малых значений n , где линейная независимость может быть проверена вручную или на компьютере.

Точно так же можно показать, что неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету для CUT_n . Пусть $a \in \mathbb{R}^{E_n}$ есть вектор, такой что

$$\{x \in \text{CUT}_n^\square \mid v^T x = 0\} \subseteq \{x \in \text{CUT}_n \mid a^T x = 0\},$$

или, что эквивалентно, такой что $a(\delta(S)) = 0$, если $v(\delta(S)) = 0$ для $S \subseteq V_n$. Если для любого такого вектора a найдется число α , такое что $a = \alpha v$, то неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету для CUT_n . (Заметим, что мы можем ограничиться проверкой этого свойства для тех $a \in \mathbb{R}^{E_n}$, для которых неравенство $a^T x \leq 0$ является допустимым для CUT_n .) В разделе 26.5 мы встретимся с некоторой техникой подъема, позволяющей строить итерационным способом новые фасеты из уже имеющихся.

Операции на допустимых неравенствах и фасетах

В этой главе мы рассмотрим некоторые операции на допустимых неравенствах и фасетах разрезного многогранника. Одним из основных свойств многогранника разрезов $\text{CUT}_n^\square$ является то, что все его фасеты могут быть получены из фасет разрезного конуса CUT_n с помощью так называемой операции переключения. Именно, переключения и перестановки образуют полную группу симметрий разрезного многогранника (см. раздел 26.3.3). Основной техникой построения новых фасет конуса CUT_{n+1} из данных фасет конуса CUT_n является применение так называемой операции подъема; мы описываем условия применения этой техники в разделе 26.5, и обратную операцию, стягивание, в разделе 26.4. Другая техника построения фасет (рассмотрение проекций) упомянута в разделе 26.6.

26.1. Разрезные и корреляционные векторы

Как уже было показано в разделе 5.2, разрезные векторы находятся во взаимно-однозначном линейном соответствии с корреляционными векторами при ковариантном отображении. Так как этот факт будет очень часто использоваться в этой главе, мы напомним некоторые детали.

Пусть $V_n = \{1, \dots, n\}$, $V_{n+1} = V_n \cup \{n+1\}$, и пусть E_n , E_{n+1} — множества неупорядоченных пар элементов из V_n , V_{n+1} , соответственно. Тогда *ковариантное отображение*

$$\xi: \mathbb{R}^{E_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$$

определяется следующим образом. Для $x = (x_{ij})_{1 \leq i < j \leq n+1} \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ и $p = (p_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$ пусть $p = \xi(x)$ определено как

$$\begin{aligned} p_{ii} &= x_{i,n+1} \quad \text{для } 1 \leq i \leq n, \\ p_{ij} &= \frac{1}{2}(x_{i,n+1} + x_{j,n+1} - x_{ij}) \quad \text{для } 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Для данного подмножества $S \subseteq V_n$ вектор $\pi(S) := \xi(\delta(S))$ называется *корреляционным вектором* множества S , *отмеченным на позиции $n+1$* . Поэтому $\pi(S)_{ij} = 1$, если $i, j \in S$, и $\pi(S)_{ij} = 0$ в противном случае, для $1 \leq i \leq j \leq n$. В приведенном выше определении мы особо выделяем позицию $n+1$. Мы также обозначаем ковариантное отображение ξ как ξ_{n+1} , если хотим подчеркнуть этот факт. Конечно, аналогичным образом может быть выделена любая другая позиция $i \in V_{n+1}$, при использовании ковариантного отображения ξ_i , определенного аналогично.

Ковариантное отображение ξ является, очевидно, линейным и биективным. Следовательно, для данных подмножеств $S_1, \dots, S_k \subseteq V_n$, множество разрезных векторов $\{\delta(S_1), \dots, \delta(S_k)\}$ является линейно независимым тогда и только тогда, когда соответствующее множество корреляционных векторов $\{\pi(S_1), \dots, \pi(S_k)\}$ является линейно независимым. Часто для проверки линейной независимости множества разрезных векторов мы будем работать с соответствующими корреляционными векторами, преобразования которых обычно проще.

Напомним, что корреляционный конус COR_n и корреляционный многогранник $\text{COR}_n^\square$ определяются, соответственно, как коническая оболочка и как выпуклая оболочка множества корреляционных векторов $\pi(S)$ для $S \subseteq V_n$. Таким образом,

$$\text{COR}_n = \xi(\text{CUT}_{n+1}) \quad \text{и} \quad \text{COR}_n^\square = \xi(\text{CUT}_{n+1}^\square).$$

Как следствие, любой результат о структуре граней разрезного многогранника может быть сформулирован как результат о структуре граней корреляционного многогранника, и наоборот. Мы напомним следующий результат, который уже был сформулирован в предложении 5.2.7.

Предложение 26.1.1. Пусть $c \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ и $a \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$ определяется как

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \sum_{1 \leq j \leq n+1, j \neq i} c_{ij} \quad \text{для } 1 \leq i \leq n, \\ a_{ij} &= -2c_{ij} \quad \text{для } 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Тогда неравенство:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} c_{ij} x_{ij} \leq \alpha$$

определяет допустимое неравенство (соответственно, фасету) разрезного многогранника $\text{CUT}_{n+1}^\square$ тогда и только тогда, когда неравенство:

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii} x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_{ij} \leq \alpha$$

определяет допустимое неравенство (соответственно, фасету) корреляционного многогранника $\text{COR}_n^\square$.

Мы предпочитаем рассматривать большинство наших результатов в контексте разрезов. Соответствующие результаты для корреляционного полиэдра могут быть легко получены при использовании предложения 26.1.1. Две формы, взятые для нескольких классов неравенств (неравенств треугольника, гиперметрических неравенств, неравенств отрицательного типа) и в контексте разрезов и в корреляционном контексте, показаны в таблице 5.2.6. Наш выбор представления неравенств для разрезного полиэдра основан на том, что они часто имеют гораздо более простую форму. Например, рассматривать неравенство треугольника:

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} \leq 2$$

легче, чем соответствующее неравенство:

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} - p_{12} - p_{13} - p_{23} \leq 1.$$

Однако, из этого правила есть ряд исключений. Существуют несколько результатов, формулировка которых легче в контексте корреляционного полиэдра, чем в контексте разрезов. Мы рассмотрим один из таких результатов в разделе 26.6.

26.2. Операция перестановки

Так как мы работаем с полным графом K_n , все грани CUT_n или $\text{CUT}_n^\square$ очевидным образом сохраняются при любой перестановке вершин. Пусть $\text{Sym}(n)$ есть группа перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$, называемая симметрической группой множества $\{1, \dots, n\}$. Данная перестановка $\sigma \in \text{Sym}(n)$ и вектор $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ определяют вектор

$\sigma(v) \in \mathbb{R}^{E_n}$ следующим образом:

$$\sigma(v)_{ij} := v_{\sigma(i)\sigma(j)} \quad \text{для } ij \in E_n.$$

Следующий результат является тривиальным.

Лемма 26.2.1. *Пусть $v \in \mathbb{R}^{E_n}$, $v_0 \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in \text{Sym}(n)$. Тогда следующие утверждения являются эквивалентными.*

- (i) *Неравенство $v^T \leq v_0$ является допустимым (соответственно, определяет фасету) для $\text{CUT}_n^\square$.*
- (ii) *Неравенство $\sigma(v)^T x \leq v_0$ является допустимым (соответственно, определяет фасету) для $\text{CUT}_n^\square$.* ■

Мы получим аналогичное утверждение о разрезном конусе CUT_n , если применим лемму 26.2.1 к однородным неравенствам, т. е. неравенствам вида $v^T x \leq 0$. Пусть F — грань $\text{CUT}_n^\square$, порожденная допустимым неравенством $v^T x \leq v_0$. Тогда

$$\sigma(F) := \{\sigma(x) \mid x \in F\}$$

является гранью $\text{CUT}_n^\square$, порожденной неравенством $\sigma(v)^T x \leq v_0$. Мы говорим, что грани F и $\sigma(F)$ *перестановочно эквивалентны*. Две грани F и $\sigma(F)$ имеют, очевидно, одну и ту же размерность.

26.3. Операция переключения

Разрезной многогранник имеет важное свойство: если для некоторой вершины все фасеты, содержащие эту вершину, известны, то все фасеты многогранника можно легко получить, используя так называемую операцию переключения. Это является следствием того простого факта, что симметрическая разность двух разрезов опять является разрезом. Обычно это свойство применяется к семействам множеств, замкнутым относительно взятия симметрической разности. Сначала мы рассмотрим операцию переключения для общего случая семейств множеств, что будет полезно в применении к нескольким примерам полиэдров, а затем используем ее для разрезного полиэдра. В разделе 26.3.3 мы опишем полную группу симметрий разрезного многогранника.

26.3.1. Переключение: Общее определение

Пусть $\mathcal{A}$ есть семейство подмножеств данного конечного множества E , пусть $B \subseteq E$, и пусть

$$\mathcal{A}_B := \{A \triangle B \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Пусть $P(\mathcal{A})$ (соответственно, $P(\mathcal{A}_B)$) обозначает многогранник в $\mathbb{R}^E$, который определен как выпуклая оболочка векторов инцидентности членов $\mathcal{A}$ (соответственно, $\mathcal{A}_B$). Линейное описание многогранника $P(\mathcal{A}_B)$ может быть легко получено, если известно линейное описание многогранника $P(\mathcal{A})$ (см. следствия 26.3.4 и 26.3.5).

Для вектора $v \in \mathbb{R}^E$ определим вектор $v^B \in \mathbb{R}^E$ как

$$(26.3.1) \quad v_e^B := \begin{cases} -v_e, & \text{если } e \in B, \\ v_e, & \text{если } e \in E \setminus B. \end{cases}$$

Рассмотрим отображение $r_B: \mathbb{R}^E \mapsto \mathbb{R}^E$, определенное как $r_B(x) := x^B + \chi^B$ для $x \in \mathbb{R}^E$, т. е.,

$$(26.3.2) \quad (r_B(x))_e = \begin{cases} 1 - x_e, & \text{если } e \in B, \\ x_e, & \text{если } e \in E \setminus B. \end{cases}$$

Отображение r_B является аффинной биекцией пространства $\mathbb{R}^E$, называемой *отображением переключения*. Может быть легко проверена следующая

Лемма 26.3.3. Пусть $A, B, A_1, \dots, A_k$ — подмножества E и пусть $v \in \mathbb{R}^E$. Тогда

- (i) $r_B(\chi^A) = \chi^{A \triangle B}$.
- (ii) $v^B(A) = v(A \triangle B) - v(B)$.
- (iii) $\{\chi^{A_1}, \dots, \chi^{A_k}\}$ являются аффинно независимыми тогда и только тогда, когда $\{\chi^{A_1 \triangle B}, \dots, \chi^{A_k \triangle B}\}$ являются аффинно независимыми. ■

Следствие 26.3.4. $P(\mathcal{A}_B) = r_B(P(\mathcal{A}))$. ■

Следствие 26.3.5. Пусть $v \in \mathbb{R}^E$, $v_0 \in \mathbb{R}$ и $B \subseteq E$. Тогда следующие утверждения являются эквивалентными.

- (i) Неравенство $v^T x \leq v_0$ является допустимым или порождающим фасету для многогранника $P(\mathcal{A})$, соответственно.
- (ii) Неравенство $(v^B)^T x \leq v_0 - v(B)$ является допустимым или порождающим фасету для многогранника $P(\mathcal{A}_B)$, соответственно. ■

Мы будем говорить, что неравенство

$$(v^B)^T x \leq v_0 - v(B)$$

получено *переключением* неравенства $v^T x \leq v_0$ относительно множества B . Следовательно, список неравенств, определяющих $P(\mathcal{A}_B)$, может быть получен из списка неравенств, определяющих $P(\mathcal{A})$, переключением каждого из этих неравенств относительно множества B .

Если $v_0 = 0$, и если множество B определяет корень неравенства $v^T x \leq v_0$, т. е. если $v(B) = 0$, то неравенство, полученное при помощи переключения, имеет вид $(v^B)^T x \leq 0$. Другими словами, «*переключение относительно корней*» сохраняет однородные неравенства.

Пусть F есть грань $P(\mathcal{A})$, порожденная допустимым неравенством $v^T x \leq v_0$, тогда

$$r_B(F) = \{r_B(x) \mid x \in F\}$$

является гранью $P(\mathcal{A}_B)$, порожденной неравенством переключения $(v^B)^T x \leq v_0 - v(B)$. По лемме 26.3.3, обе грани, F и $r_B(F)$, имеют одинаковую размерность и корни $r_B(F)$ (т. е. члены $C \in \mathcal{A}_B$, для которых $\chi^C \in r_B(F)$) — это векторы $\chi^{A \Delta B}$ для $\chi^A \in F$. Следовательно, отображение переключения представляет собой взаимно-однозначное соответствие между решетками граней многогранников $P(\mathcal{A})$ и $P(\mathcal{A}_B)$.

Предположим теперь, что семейство $\mathcal{A}$ замкнуто относительно взятия симметрической разности, т. е. что для всех $A, B \in \mathcal{A}$ $A \Delta B \in \mathcal{A}$; следовательно, $\emptyset \in \mathcal{A}$. Тогда класс допустимых неравенств для $P(\mathcal{A})$ замкнут относительно переключения. Кроме того, полный список фасет $P(\mathcal{A})$ может быть получен из списка фасет, содержащих любую данную точку χ^A (где $A \in \mathcal{A}$). В частности, полная структура граней многогранника $P(\mathcal{A})$ может быть получена из структуры граней конуса $C(\mathcal{A})$, который определяется как конус, порожденный векторами χ^A для $A \in \mathcal{A}$. Следующее предложение суммирует эти факты.

Предложение 26.3.6. *Пусть $\mathcal{A}$ — семейство подмножеств множества E , замкнутое относительно взятия симметрической разности. Предположим, что*

$$C(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid v_i^T x \leq 0 \text{ для } i = 1, \dots, t\}.$$

Тогда

$$P(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid (v_i^B)^T x \leq -v_i(B) \text{ для } i = 1, \dots, t, \text{ и } B \in \mathcal{A}\}. \quad \blacksquare$$

Типичным примером семейства множеств, замкнутого относительно взятия симметрической разности, является множество разрезов в некотором графе, или множество циклов в некотором графе. Именно,

семейства множеств, замкнутые относительно взятия симметрической разности, являются в точности пространствами циклов бинарных матроидов. Операция переключения была определена в этом общем смысле Барахоной и Грётшелем [1986]. Мы вернемся к пространствам циклов и бинарным матроидам в разделе 27.4.

Операция переключения была открыта независимо несколькими авторами. В частности, Мак Раэ и Дэвидсоном [1972] и Питовским [1989, 1991] в контексте корреляционного многогранника $\text{COR}_n^\square$, Деза [1973a] в контексте разрезного конуса CUT_n , Барахона и Маджубом [1986] в контексте разрезного многогранника произвольного графа.

26.3.2. Переключение: получение разрезного многогранника из разрезного конуса

Все свойства операции переключения, описанные выше, можно применить к специальному случаю разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ и разрезного конуса CUT_n , так как множество разрезов замкнуто относительно взятия симметрической разности; следствие 26.3.5 и предложение 26.3.6 можно переформулировать следующим образом.¹⁾

Следствие 26.3.7. *Для данных $v \in \mathbb{R}^{E_n}$, $v_0 \in \mathbb{R}$ и разрезного вектора $\delta(A)$ следующие утверждения являются эквивалентными.*

- (i) *Неравенство $v^T x \leq v_0$ является допустимым или порождающим фасетой для $\text{CUT}_n^\square$, соответственно.*
- (ii) *Неравенство $(v^{\delta(A)})^T x \leq v_0 - v^T \delta(A)$ является допустимым или порождающим фасетой для CUT_n , соответственно.* ■

Следствие 26.3.8. *Предположим, что*

$$\text{CUT}_n = \{x \in \mathbb{R}^{E_n} \mid v_i^T x \leq 0 \text{ для } i = 1, \dots, m\}.$$

Тогда

$$\text{CUT}_n^\square = \{x \in \mathbb{R}^{E_n} \mid (v_i^{\delta(A)})^T x \leq -v_i^T \delta(A) \text{ для } i = 1, \dots, m, \text{ и } A \subseteq V_n\}.$$

Легко построить аналог переключения для корреляционного многогранника $\text{COR}_n^\square$, так как этот многогранник связан линейной биекцией с разрезным многогранником $\text{CUT}_{n+1}^\square$. В следующем замечании мы

¹⁾ Для данного вектора $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ и разрезного вектора $\delta(A)$ в K_n вектор $v^{\delta(A)}$ определяется как в (26.3.1) по формуле $v_{ij}^{\delta(A)} = -v_{ij}$, если $\delta(A) = 1$; $v_{ij}^{\delta(A)} = v_{ij}$, если $\delta(A) = 0$. Другими словами, $v^{\delta(A)} = v^{\delta_{K_n}(A)}$.

точно определим, как переключение применяется к корреляционному многограннику.

Замечание 26.3.9. Аналог переключения для корреляционного многогранника. Для данного множества A из V_n рассмотрим отображение

$$(26.3.10) \quad \rho_{\delta(A)} := \xi_{\delta(A)}^r \xi^{-1}.$$

Это отображение действует следующим образом:

$$\text{COR}_n^\square \xrightarrow{\xi^{-1}} \text{CUT}_{n+1}^\square \xrightarrow{r_{\delta(A)}} \text{CUT}_{n+1}^\square \xrightarrow{\xi} \text{COR}_n^\square.$$

Здесь $\delta(A)$ рассматривается как характеристический вектор разреза в K_{n+1} ; $r_{\delta(A)}$ есть соответствующее переключательное отображение пространства $\mathbb{R}^{E_{n+1}}$, а ξ — ковариантное отображение. Следовательно, отображение $\rho_{\delta(A)}$ сохраняет многогранник $\text{COR}_n^\square$, т. е.

$$\rho_{\delta(A)}(\text{COR}_n^\square) = \text{COR}_n^\square.$$

Легко проверить, что

$$p' := \rho_{\delta(A)}(p)$$

определяется как

$$p'_{ii} = \begin{cases} 1 - p_{ii}, & \text{если } i \in A, \\ p_{ii}, & \text{если } i \notin A, \end{cases}$$

для $i \in V_n$ и

$$p'_{ij} = \begin{cases} 1 - p_{ii} - p_{jj} + p_{ij}, & \text{если } i, j \in A, \\ p_{ii} - p_{ij}, & \text{если } i \notin A, j \in A, \\ p_{jj} - p_{ij} & \text{если } i \in A, j \notin A, \\ p_{ij} & \text{если } i, j \notin A \end{cases}$$

для $i \neq j \in V_n$. Заметим, следовательно, что переключение имеет гораздо более простую форму, когда применяется в контексте разрезного полиэдра, а не в контексте корреляционного полиэдра. ■

И переключения, и перестановки отображают грани $\text{CUT}_n^\square$ в грани $\text{CUT}_n^\square$; более точно, они являются симметриями $\text{CUT}_n^\square$, т. е. ортогональными линейными преобразованиями $\mathbb{R}^{E_n}$, отображающими $\text{CUT}_n^\square$ в себя. В разделе 26.3.3 мы увидим, что группа симметрий $\text{CUT}_n^\square$ ($n \neq 4$) порождается этими двумя операциями.

Очевидно, если полное описание CUT_n в следствии 26.3.8 не избыточно, то все неравенства, описывающие $\text{CUT}_n^\square$, определяют фасеты. Однако, многие из определяющих фасеты неравенств могут появиться повторно. Тем не менее, как было замечено Грётшелем [1994], теоретически имеется легкий путь получения числа фасет $\text{CUT}_n^\square$ из числа фасет CUT_n , и обратно (см. лемму 26.3.11).

Для данной грани F многогранника $\text{CUT}_n^\square$ назовем множество всех граней $\text{CUT}_n^\square$, которые можно получить из F с помощью операций перестановки и переключения, *орбитой* $\Omega^\square(F)$ грани F . Аналогично определим орбиту $\Omega(F)$ грани F конуса CUT_n , где, вместо произвольного переключения, мы допускаем только переключение относительно корней F . Напомним, что $R(F)$ обозначает множество корней грани F .

Лемма 26.3.11. *Пусть $v^T x \leq 0$ — допустимое неравенство для CUT_n , определяющее грань F конуса CUT_n и грань $F^\square$ многогранника $\text{CUT}_n^\square$. Тогда*

$$|\Omega^\square(F^\square)| |R(F^\square)| = |\Omega(F)| 2^{n-1}.$$

Доказательство. Определим $|\Omega^\square(F^\square)| \times |2^{V_{n-1}}|$ матрицу $B = (b_{HS})$, положив $b_{HS} = 1$, если разрезной вектор $\delta(S)$ является корнем грани H , и $b_{HS} = 0$ в противном случае. Тогда, считая по строкам и столбцам, мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{H \in \Omega^\square(F^\square)} \sum_{S \subseteq V_{n-1}} b_{HS} &= \sum_{H \in \Omega^\square(F^\square)} \left(\sum_{S \subseteq V_{n-1}} b_{HS} \right) = |\Omega^\square(F^\square)| |R(F^\square)|, \\ \sum_{H \in \Omega^\square(F^\square)} \sum_{S \subseteq V_{n-1}} b_{HS} &= \sum_{S \subseteq V_{n-1}} \left(\sum_{H \in \Omega^\square(F^\square)} b_{HS} \right) = 2^{n-1} |\Omega(F)|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Следовательно, $|\Omega^\square(F^\square)|$ можно получить, зная $|\Omega(F)|$ и число корней $F^\square$. Конечно, ни вычисление величины орбиты, ни определение числа корней грани не являются тривиальными задачами. Мы будем точно описывать корни допустимых неравенств, рассматриваемых в этой части, везде, где это возможно. (Смотрите, к примеру, раздел 30.4, где мы представляем парашютное неравенство, число корней которого связано с последовательностью Фибоначчи.) Теперь мы установим верхнюю границу числа корней, данную в Деа и Деа [1994a].

Предложение 26.3.12. *Для любой фасеты F разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ мы имеем*

$$|R(F)| \leq 3 \cdot 2^{n-3},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда F определяется неравенством треугольника.

Доказательство. Пусть F — фасета $\text{CUT}_n^\square$, определяемая, скажем, неравенством $v^T x \leq \alpha$. Применяя переключение, мы можем предположить, что $\alpha = 0$. Пусть v_{ij} — ненулевая компонента v . Если S —

произвольное подмножество множества $V_n \setminus \{i, j\}$, то

$$v^T \delta(S \cup \{i\}) + v^T \delta(S \cup \{j\}) - v^T \delta(S) - v^T \delta(S \cup \{i, j\}) = 2v_{ij}.$$

Из этого следует, что не более трех из этих четырех разрезных векторов являются корнями F . Следовательно, F имеет не более чем $\frac{3}{4}2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-3}$ корней. Предположим теперь, что F имеет точно $3 \cdot 2^{n-3}$ корней. Покажем, что F определяется неравенством треугольника. Нетрудно проверить, что v имеет по меньшей мере три ненулевых координаты, скажем, $v_{ij}, v_{hk}, v_{st} \neq 0$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} (a) \quad & v^T \delta(A \cup \{i\}) + v^T \delta(A \cup \{j\}) - v^T \delta(A) - v^T \delta(A \cup \{i, j\}) = 2v_{ij}, \\ (b) \quad & v^T \delta(B \cup \{h\}) + v^T \delta(B \cup \{k\}) - v^T \delta(B) - v^T \delta(B \cup \{h, k\}) = 2v_{hk}, \\ (c) \quad & v^T \delta(C \cup \{s\}) + v^T \delta(C \cup \{t\}) - v^T \delta(C) - v^T \delta(C \cup \{s, t\}) = 2v_{st}, \end{aligned}$$

где $A \subseteq V_n \setminus \{i, j\}$, $B \subseteq V_n \setminus \{h, k\}$, и $C \subseteq V_n \setminus \{s, t\}$. Так как F содержит $3/4$ общего числа разрезов, точно три члена в левой стороне равенств (a), (b), (c) равны нулю. Мы можем предположить, что v_{ij} и v_{hk} имеют один и тот же знак. Предположим сначала, что $|\{i, j, h, k, s, t\}| = 6$. Тогда $v^T \delta(\{i\}) = 0$ (в противном случае, рассматривая равенство (a) с $A = \emptyset$ и равенство (b) с $B = \{i\}$, получим $v^T \delta(\{i\}) = 2v_{ij}$ и $-v^T \delta(\{i\}) = 2v_{hk}$, что противоречит предположению о том, что v_{ij} и v_{hk} имеют один и тот же знак). Аналогично, $v^T \delta(\{i, s\}) = 0$, $v^T \delta(\{i, t\}) = 0$, $v^T \delta(\{i, s, t\}) = 0$. Следовательно, равенство (c) с $C = \{i\}$ влечет $v_{st} = 0$, что приводит к противоречию. Аналогичные аргументы ведут к противоречию, если $|\{i, j, h, k, s, t\}| = 5$ или 4. Следовательно, v имеет ровно три ненулевых координаты v_{ij} , v_{ik} и v_{jk} . Используя формулы (a) при $A = \emptyset$ и (b) (заменяя h на i) при $B = \{i\}$, мы получаем, что $v^T \delta(\{j\}) = 0$, т. е. $v_{ij} = -v_{jk}$. Аналогично, $v^T \delta(\{k\}) = 0$, т. е. $v_{ik} = -v_{jk}$. Следовательно, $v^T x \leq 0$ является кратным неравенства треугольника $x_{jk} - x_{ik} - x_{ij} \leq 0$. ■

Подсчет числа элементов в орбите $\Omega(F)$ грани F конуса CUT_n может быть произведен следующим образом (см. Деза, Гришухин и Лоран [1991] и Деза и Лоран [1992c]). Пусть

$$\Omega_p(F) := \{\sigma(F) \mid \sigma \in \text{Sym}(n)\}$$

обозначает множество граней, которые перестановочно эквивалентны F ; определим множество

$$\text{Aut}(F) := \{\sigma \in \text{Sym}(n) \mid \sigma(F) = F\};$$

элементы $\text{Aut}(F)$ называются *автоморфизмами* F . Тогда легко проверить, что

$$|\Omega_p(F)| = \frac{n!}{|\text{Aut}(F)|}.$$

Пусть k — число различных переключений (относительно корней) F , которые не являются попарно перестановочно эквивалентными, и пусть $F_0 := F, F_1, \dots, F_{k-1}$ — эти k переключений. Тогда

$$|\Omega(F)| = \sum_{0 \leq i \leq k-1} \frac{n!}{|\text{Aut}(F_i)|}.$$

Следовательно, искомое число элементов в орбите $\Omega(F)$ равно подсчитанному числу автоморфизмов произвольного переключения. Это было проделано в работе Деза и Лоран [1992с] для нескольких классов граней и, в частности, для всех граней разрезного конуса CUT_n при $n \leq 7$. В качестве приложения, читатель может вычислить точное число граней CUT_n и $\text{CUT}_n^\square$ для $n \leq 7$; см. раздел 30.6.

Хотя мы ввели орбиты только как средство подсчета граней, хотелось бы заметить, что эта концепция заслуживает большего внимания. К примеру, если мы докажем, что некоторое неравенство определяет фасету, мы автоматически получим, что все грани в ее орбите являются, конечно, фасетами. Соответствующие неравенства получаются из первоначального с помощью перестановок и переключений. Доказательство того, что некоторое неравенство определяет фасету, часто является трудоемкой работой, использующей явные структуры и симметрии данного неравенства, и очень важно выбрать среди всех неравенств, определяющих фасеты в орбите, то, которое имеет «удобные для исследования очертания» или некоторую «приятную и легко понимаемую форму». Конечно, это дело вкуса, однако, как мы могли видеть в нашей работе, нахождение удобного неравенства — представителя орбиты — удобно не только для достижения технических целей, но и для дальнейших обобщений и вклада в другие исследования.

26.3.3. Группа симметрий разрезного многогранника

Мы опишем здесь группу симметрий разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$. Эти результаты взяты из работы Деза, Гришухин, Лоран [1991].

Отображение $f: \mathbb{R}^{E_n} \mapsto \mathbb{R}^{E_n}$ называется *симметрией* $\text{CUT}_n^\square$, если оно является изометрией, удовлетворяющей условию: $f(\text{CUT}_n^\square) = \text{CUT}_n^\square$; изометрией $\mathbb{R}^{E_n}$ называется линейное отображение, сохраняющее евклидово расстояние. Пусть $\text{Is}(\text{CUT}_n^\square)$ обозначает множество симметрий $\text{CUT}_n^\square$. Пусть

$$G_n := \{\sigma r_{\delta(A)} \mid \sigma \in \text{Sym}(n), A \subseteq V_n\}$$

обозначает группу, порожденную всеми перестановками и переключениями. Правила коммутирования в G_n имеют вид:

$$r_{\delta(A)} r_{\delta(B)} = r_{\delta(A \triangle B)}, \quad r_{\delta(A)} \sigma = \sigma r_{\delta(\sigma(A))}.$$

(В действительности, G_n является ни чем иным, как фактор-группой группы симметрий n -мерного гиперкуба по подгруппе порядка 2.) Следовательно, $|G_n| = 2^{n-1}n!$. Как мы видели ранее,

$$G_n \subseteq \text{Is}(\text{CUT}_n^\square).$$

Пусть $H(n)$ обозначает граф, вершинами которого являются разрезные векторы $\delta(A)$ для $A \subseteq V_n$, и два разрезных вектора $\delta(A), \delta(B)$ соединены ребром, если $(|\delta(A) - \delta(B)|_2)^2 = n - 1$, т. е. если $(|\delta(A \triangle B)|_2)^2 = n - 1$ или, что то же, если $|A \triangle B| = 1, n - 1$. Очевидно, каждая симметрия $\text{CUT}_n^\square$ порождает автоморфизм графа $H(n)$. Следовательно,

$$\text{Is}(\text{CUT}_n^\square) \subseteq \text{Aut}(H(n)).$$

Граф $H(n)$ известен как *свернутый n -куб-граф*. Его группа автоморфизмов для $n > 4$ есть G_n , $(\text{Sym}(4) \times \text{Sym}(4)) \text{Sym}(2)$ для $n = 4$, и $\text{Sym}(4)$ для $n = 3$ (см. Броуэр, Козн и Ноймайер [1989] или Деза, Гришухин и Лоран [1991]). Таким образом, мы имеем следующий результат (только пункт (ii) нуждается в доказательстве):

Теорема 26.3.13.

- (i) Для $n \neq 4$, $\text{Is}(\text{CUT}_n^\square) = G_n$, порядка $2^{n-1}n!$.
 - (ii) Для $n = 4$, $\text{Is}(\text{CUT}_n^\square) \approx (\text{Sym}(4) \times \text{Sym}(4)) \text{Sym}(2)$, порядка $2(4!)^2$.
- Следовательно, $\text{Is}(\text{CUT}_n^\square) \approx \text{Aut}(H(n))$ для $n \geq 3$. ■

Другими словами, для $n \neq 4$ переключения и перестановки являются единственными симметриями $\text{CUT}_n^\square$. Для $n = 4$ существуют некоторые дополнительные симметрии. Заметим, что $H(4)$ является полным двудольным графом $K_{4,4}$ с разбиением множества его вершин (X_1, X_2) , где $X_1 := \{\delta(i) \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ и $X_2 := \{\delta(\emptyset), \delta(\{1, i\}) \mid i = 2, 3, 4\}$. Каждый автоморфизм $H(4)$ действует следующим образом: переставляем элементы из X_1 , переставляем элементы из X_2 и меняем

элементы из X_1 и X_2 . Легко проверить, что такая операция порождает симметрию $\text{CUT}_4^\square$.

Аналогично можно спросить, как найти все симметрии корреляционного многогранника $\text{COR}_n^\square$. Оказывается, единственными симметриями $\text{COR}_n^\square$ являются перестановки, т. е.

$$\text{Is}(\text{COR}_n^\square) \approx \text{Sym}(n) \quad \text{для всех } n.$$

В самом деле, хотя отображение $\rho_{\delta(A)}$ ($= \xi r_{\delta(A)} \xi^{-1}$) (аналог переключения) сохраняет многогранник $\text{COR}_n^\square$, оно не является его симметрией, потому что отображение $\rho_{\delta(A)}$ не является изометрией. Как показано в работе Лоран [1996c], многогранник полуметрик $\text{MET}_n^\square$ имеет ту же самую группу симметрий, что и $\text{CUT}_n^\square$. Описание групп симметрий других разрезных полиэдров (таких, как многогранник эквиразрезов, многогранник мультиразрезов) можно найти в Деза, Гришухин и Лоран [1991].

26.4. Операция стягивания

В этом разделе мы опишем операцию стягивания, которая позволяет построить допустимые неравенства для $\text{CUT}_m^\square$ (или CUT_m) из допустимых неравенств для $\text{CUT}_n^\square$ (или CUT_n), при $m < n$. Операция стягивания была введена в Де Симоне, Деза и Лоран [1994] и Деза и Лоран [1992b].

Пусть $\pi = (I_1, \dots, I_p)$ — разбиение $V_n = \{1, \dots, n\}$ на p частей, т. е. $I_1, \dots, I_p$ являются непустыми попарно непересекающимися подмножествами, такими что $I_1 \cup \dots \cup I_p = V_n$. Для $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ мы определим его π -*коллапс* $v_\pi \in \mathbb{R}^{E_p}$ как

$$(v_\pi)_{hk} := \sum_{i \in I_h, j \in I_k} v_{ij} \quad \text{для } hk \in E_p.$$

Если разбиение π состоит только из единичных множеств, исключая одну пару $\{i, j\}$ (где $i \neq j$), т. е. если $\pi = \{\{i, j\}, \{k\} \text{ для } 1 \leq k \leq n, i \neq k \neq j \neq i\}$, то $v_\pi \in \mathbb{R}^{E_{n-1}}$, и мы говорим, что v_π получен из v *стягиванием двух вершин i, j в одну*.

Если G — реберно-взвешенный граф на V_n с весовым вектором v , то π -*коллапсом* G является граф G_π на V_p , весовой вектор которого равен v_π . Другими словами, мы получаем G_π из G стягиванием всех вершин

из одного класса разбиения в единственную вершину, и добавляем соответствующие реберные веса.

Если S — подмножество множества $V_p = \{1, 2, \dots, p\}$, определим подмножество $S^\pi := \cup_{h \in S} I_h$ множества V_n . Соотношение

$$v_\pi^T \delta(S) = v^T \delta(S^\pi) \quad \text{для } S \subseteq \{1, \dots, p\},$$

которое легко проверить, позволяет немедленно сформулировать следующую лемму.

Лемма 26.4.1. *Для данных $v \in \mathbb{R}^{E_n}$, $v \in \mathbb{R}$ и разбиения $\pi = (I_1, \dots, I_p)$ множества V_n на p частей имеют место следующие утверждения.*

- (i) *Если неравенство $v^T x \leq v_0$ является допустимым для $\text{CUT}_n^\square$, то неравенство $v_\pi^T x \leq v_0$ является допустимым для $\text{CUT}_p^\square$.*
- (ii) *Корнями неравенства $v_\pi^T x \leq v_0$ являются разрезные векторы $\delta(S)$, такие что $S \subseteq \{1, \dots, p\}$ и $\delta(S^\pi)$ есть корень неравенства $v^T x \leq v_0$.* ■

В следующем утверждении мы рассматриваем случай, когда операции стягивания и переключения коммутируют.

Лемма 26.4.2. *Пусть $\pi = (I_1, \dots, I_p)$ есть разбиение множества $\{1, \dots, n\}$, S есть подмножество V_p , и $v \in \mathbb{R}^{E_n}$. Тогда*

$$(v_\pi)^{\delta(S)} = (v^{\delta(S^\pi)})_\pi.$$

Заметим, что операция стягивания сохраняет допустимость, но не всегда сохраняет фасеты. Обратно, возможны случаи, когда стягивание допустимого неравенства, не индуцирующего фасету, порождает допустимое неравенство, индуцирующее фасету. Например, для $n \geq 3$ неравенство треугольника $x_{23} - x_{12} - x_{13} \leq 0$ индуцирует фасету для CUT_n , но неравенство $-2x_{12} \leq 0$, получаемое стягиванием двух вершин 2, 3 в одну вершину 2, является допустимым, но не индуцирует фасету. Для $n \geq 5$ неравенство $(x_{23} - x_{12} - x_{13}) + (x_{45} - x_{14} - x_{15}) \leq 0$ является допустимым, но не индуцирует фасету, в то время как неравенство $x_{23} - x_{12} - x_{13} \leq 0$, полученное стягиванием двух вершин 1, 5 в вершину 1, является фасетой для CUT_n .

Тем не менее, стягивание может быть полезным средством для построения граней; теоремы 26.4.3 и 26.4.4, приведенные ниже, содержат результаты вида: «Возьмем допустимое неравенство, предположим, что некоторые его стягивания индуцируют фасеты и ..., тогда это неравенство определяет фасету». Следующий результат приведен в работе Де Симоне, Деа и Лоран [1994].

Теорема 26.4.3. Пусть $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ и i_1, i_2, i_3 есть различные элементы множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Предположим, что имеют место следующие условия.

- (i) Неравенство $v^T x \leq 0$ допустимо для CUT_n .
- (ii) $v^T \delta(\{i\}) = 0$.
- (iii) Два неравенства, полученные из $v^T x \leq 0$ стягиванием вершин $\{i_1, i_2\}$ и вершин $\{i_1, i_3\}$, соответственно, индуцируют фасеты для CUT_{n-1} .
- (iv) Для некоторых различных $r, s \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, i_3\}$, $v_{rs} \neq 0$.
Тогда неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету для CUT_n .

Доказательство. Для простоты обозначений мы можем предположить, что $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3$. Обозначим через $v^{1,2}$ и $v^{1,3}$ векторы, полученные из v стягиванием вершин $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$, соответственно. Возьмем допустимое неравенство $a^T x \leq 0$ для CUT_n , такое что

$$\{x \in \text{CUT}_n \mid v^T x = 0\} \subseteq \{x \in \text{CUT}_n \mid a^T x = 0\}.$$

Для доказательства того, что неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету, мы покажем, что $v = \alpha a$ для некоторой константы $\alpha > 0$. Обозначим через $a^{1,2}$ и $a^{1,3}$ векторы, получаемые из a стягиванием вершин $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$, соответственно. Легко видеть, что

$$\{x \in \text{CUT}_n \mid (v^{1,i})^T x = 0\} \subseteq \{x \in \text{CUT}_n \mid (a^{1,i})^T x = 0\}$$

для $i = 2, 3$. Так как $(v^{1,i})^T x \leq 0$ определяет фасету по предположению (iii), то существует константа $\alpha_i > 0$, такая что $v^{1,i} = \alpha_i a^{1,i}$, для $i = 2, 3$. Из предположения (iv) мы получаем, что $\alpha_1 = \alpha_2 := \alpha$. Следовательно, $v_{rs} = \alpha a_{rs}$ для $3 \leq r < s \leq n$, или $r = 2$ и $4 \leq s \leq n$, а также

- (a) $v_{1i} + v_{2i} = \alpha(a_{1i} + a_{2i})$ для $i \geq 3$,
- (b) $v_{1i} + v_{3i} = \alpha(a_{1i} + a_{3i})$ для $i = 2, i \geq 4$.

Следовательно, $v_{1i} = a_{1i}$ для $i \geq 4$. Для доказательства того, что $v = \alpha a$ требуется проверить, что $v_{12} = \alpha a_{12}$, и $v_{23} = \alpha a_{23}$. По предположению (ii), $v^T \delta(\{1\}) = 0$, откуда

$$v_{12} + v_{13} = - \sum_{4 \leq i \leq n} v_{1i} = - \sum_{4 \leq i \leq n} \alpha a_{1i} = \alpha(a_{12} + a_{13}).$$

Это отношение, вместе с (a), (b) для $i = 3$, дает, что $v_{23} = \alpha a_{23}$ и, следовательно, $v_{13} = \alpha a_{13}$, $v_{12} = \alpha a_{12}$. ■

Следующий результат был доказан в работе Деза, Грётшель и Лоран [1992] в более общем контексте мультиразрезов.

Теорема 26.4.4. Пусть $v \in \mathbb{R}^{E_n}$, $v \in \mathbb{R}$, и i_1, i_2, i_3, i_4 — различные элементы множества $\{1, \dots, n\}$. Предположим, что имеют место следующие условия.

- (i) Неравенство $v^T x \leq v_0$ является допустимым для $\text{CUT}_n^\square$.
- (ii) $v_0 \neq 0$, или существуют различные $r, s \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$, такие что $v_{rs} \neq 0$.
- (iii) Три неравенства, полученные из неравенства $v^T x \leq v_0$ стягиванием вершин $\{i_1, i_2\}$, вершин $\{i_1, i_3\}$ и вершин $\{i_1, i_4\}$, соответственно, индуцируют фасеты для $\text{CUT}_{n-1}^\square$.

Тогда неравенство $v^T x \leq v_0$ определяет фасету для $\text{CUT}_n^\square$.

Доказательство. Предположим, что $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = 4$. Пусть $a^T x \leq a_0$ является допустимым неравенством для $\text{CUT}_n^\square$, таким что

$$\{x \in \text{CUT}_n^\square \mid v^T x = v_0\} \subseteq \{x \in \text{CUT}_n^\square \mid a^T x = a_0\}.$$

Мы покажем, что существует константа $\alpha > 0$, такая что $v = \alpha a$, $v_0 = \alpha a_0$. Для $i = 2, 3, 4$ обозначим через $v^{1,i}$ (соответственно, через $a^{1,i}$) вектор, полученный из v (соответственно, из a) стягиванием вершин $\{1, i\}$. Очевидно, каждый корень неравенства $(v^{1,i})^T x \leq v_0$ является корнем неравенства $(a^{1,i})^T x \leq a_0$. Следовательно, существует константа $\alpha_i > 0$, такая что $v^{1,i} = \alpha_i a^{1,i}$ и $v_0 = \alpha_i a_0$ для $i = 2, 3, 4$. По предположению (ii) мы получаем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 := \alpha$. Мы уже имеем, что $v_{rs} = \alpha a_{rs}$ для $3 \leq r < s \leq n$, или $r = 2$ и $4 \leq s \leq n$, или $\{r, s\} = \{2, 3\}$. Итак, $v_{1i} + v_{2i} = \alpha(a_{1i} + a_{2i})$ для $i \geq 3$, откуда мы получаем, что $v_{1i} = \alpha a_{1i}$ для $3 \leq i \leq n$. Наконец, $v_{1i} + v_{4i} = \alpha(a_{1i} + a_{4i})$ для $i = 2, 3, 5, \dots, n$, что влечет равенство $v_{12} = \alpha a_{12}$. Следовательно, $v = \alpha a$ и, значит, неравенство $v^T x \leq v_0$ определяет фасету. ■

26.5. Операция подъема

Операция стягивания, которая была описана в предыдущем разделе, позволяет получать некоторые допустимые неравенства для CUT_{n-1} из данных допустимых неравенств для CUT_n . Обратно, под подъемом мы подразумеваем любую общую процедуру построения допустимого неравенства для CUT_{n+1} (желательно, индуцирующего фасету) из данного допустимого неравенства (или фасеты) для CUT_n .

Простейшим случаем подъема является 0-подъем. Именно, для $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ определим его 0-подъем $v' \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ как

$$\begin{aligned} v'_{ij} &= v_{ij} \text{ для } ij \in E_n, \\ v'_{i,n+1} &= 0 \text{ для } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

При этом мы говорим, что неравенство $(v')^T x \leq v_0$ получено 0-подъемом неравенства $v^T x \leq v_0$. Сразу можно заметить, что 0-подъем сохраняет допустимость; важным свойством 0-подъема является то, что он также сохраняет фасеты.

Теорема 26.5.1. *Для данных $v_0 \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ и его 0-подъема $v' \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ следующие утверждения являются эквивалентными.*

- (i) *Неравенство $v^T x \leq v_0$ определяет фасету для $\text{CUT}_n^\square$.*
- (ii) *Неравенство $(v')^T x \leq v_0$ определяет фасету для $\text{CUT}_{n+1}^\square$.*

Доказательство теоремы 26.5.1 основано на нижеследующей лемме 26.5.2. Оба результата были получены в работе Деза [1973a] (см. также Деза и Лоран [1992a] для полных доказательств). Для данного подмножества F множества E_n положим $\overline{F} := E_n \setminus F$. Если $x \in \mathbb{R}^{E_n}$, пусть

$$x_F := (x_e)_{e \in F}$$

обозначает проекцию x на подпространство $\mathbb{R}^F$, индексированное с помощью F ; если X есть подмножество $\mathbb{R}^{E_n}$, положим

$$X_F := \{x_F \mid x \in X\}, \quad X^F := \{x \in X \mid x_F = 0\}.$$

Лемма 26.5.2. *Пусть $v^T x \leq 0$ является допустимым неравенством для CUT_n , и пусть $R(v)$ есть его множество корней. Пусть F — некоторое подмножество E_n .*

- (i) *Если $\text{rank}(R(v)_F) = |F|$ и $\text{rank}(R(v)^F) = |\overline{F}| - 1$, то неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету.*
- (ii) *Если неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету и $v_{\overline{F}} \neq 0$ (соответственно, $v_{\overline{F}} = 0$), то $\text{rank}(R(v)_F) = |F|$ (соответственно, $\text{rank}(R(v)_F) = |F| - 1$).*

Доказательство. (i) По предположению, мы можем найти множество $A \subseteq R(v)$ из $|F|$ векторов, проекции которых на F линейно независимы, и множество $B \subseteq R(v)$ из $|\overline{F}| - 1$ линейно независимых векторов, проекции которых на F равны нулю. Легко видеть, что множество $A \cup B$ является линейно независимым. Отсюда следует, что неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету.

(ii) Так как $v^T x \leq 0$ определяет фасету, мы можем найти множество $A \subseteq R(v)$ из $\binom{n}{2} - 1$ линейно независимых корней. Пусть M обозначает $((\binom{n}{2} - 1) \times \binom{n}{2})$ матрицу, строки которой есть векторы из A . Следовательно, все столбцы M , кроме одного, линейно независимы. Мы рассмотрим отдельно два случая:

- (a) все столбцы M , индексированные с помощью F , линейно независимы и, следовательно, $\text{rank}(A_F) = |F|$,
- (b) $\text{rank}(A_F) = |F| - 1$, откуда следует, что $\text{rank}(R(v)_F) = |F| - 1$.

Предположим сначала, что мы находимся в условиях случая (b). Пусть $T_1 \subseteq A$ есть подмножество из $|F| - 1$ векторов, проекции которых на F линейно независимы, пусть $T_2 := A^F$ и $T_3 := A \setminus (T_1 \cup T_2)$. Следовательно, $|T_2 \cup T_3| = |\overline{F}|$. Для $x \in T_3$ его проекция x_F на F может быть записана как линейная комбинация проекций на F векторов из T_1 , скажем,

$$x_F = \sum_{a \in T_1} \lambda_a^x a_F.$$

Пусть

$$x' := x - \sum_{a \in T_1} \lambda_a^x a$$

и $T'_3 := \{x' \mid x \in T_3\}$. Легко проверить, что множество $T_2 \cup T'_3$ является линейно независимым. Заметим, что для любого $x \in T_2 \cup T'_3$ выполняются равенства $x_F = 0$ и $v^T x = 0$; отсюда следует, что $v_{\overline{F}} = 0$. Предположим теперь, что мы находимся в условиях случая (a). Тогда $\text{rank}(R(v)_{\overline{F}}) = |\overline{F}| - 1$ и, следуя вышеприведенным рассуждениям, $v_F = 0$, откуда $v_{\overline{F}} \neq 0$. ■

Доказательство теоремы 26.5.1. Без ограничения общности мы можем предположить, что $v_0 = 0$; в противном случае достаточно применить переключение относительно корня и применить результат для полученного в результате переключения неравенства.

Предположим сначала, что неравенство $(v')^T x \leq 0$ определяет фасету для CUT_{n+1} . Рассмотрим множество $F := \{(i, n+1) \mid 1 \leq i \leq n\}$, и пусть $\overline{F} := E_n$ обозначает его дополнение в множестве E_{n+1} . По построению, $v'_F = 0$. Следовательно, из леммы 26.5.2 (ii) следует, что $\text{rank}(R(v')_{\overline{F}}) = |\overline{F}| - 1 = \binom{n}{2} - 1$. Следовательно, неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету для CUT_n .

Предположим теперь, что неравенство $v^T x \leq 0$ является индуцирующим фасету для CUT_n . Так как $v \neq 0$, без ограничения общности можно предположить, что $v_{\overline{F}} \neq 0$, где $F := \{12, 13, \dots, 1n\}$ и $\overline{F} := E_n \setminus F$.

По лемме 26.5.2 (ii) $\text{rank}(R(v)_F) = |F|$. Следовательно, мы можем найти $n-1$ корней $\delta(T_k)$ ($1 \leq k \leq n-1$) неравенства $v^T x \leq 0$, проекции которых на F линейно независимы. Так как неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету, мы можем также найти $\binom{n}{2} - 1$ линейно независимых корней $\delta(S_j)$ ($1 \leq j \leq \binom{n}{2} - 1$) неравенства $v^T x \leq 0$. Без ограничения общности мы можем предположить, что элемент 1 не принадлежит ни одному из множеств T_k и S_j . Таким образом, мы имеем множество

$$\mathcal{C} := \left\{ \delta(S_j) \mid 1 \leq j \leq \binom{n}{2} - 1 \right\} \cup \bigcup \{ \delta(T_k \cup \{n+1\}) \mid 1 \leq k \leq n-1 \} \cup \{ \delta(\{n+1\}) \}$$

из $\binom{n+1}{2} - 1$ разрезных векторов (в K_{n+1}), которые являются корнями неравенства $(v')^T \leq 0$. Мы покажем, что множество $\mathcal{C}$ линейно независимо. Для этого мы проверим, что корреляционные векторы (отмеченные на позиции 1), ассоциированные с разрежными векторами из $\mathcal{C}$, линейно независимы. Рассмотрим квадратную матрицу M порядка $\binom{n+1}{2} - 1$, строками которой являются, во-первых, $\binom{n}{2} - 1$ векторов $\pi(S_j)$; затем, $n-1$ векторов $\pi(T_k \cup \{n+1\})$ и, наконец, вектор $\pi(\{n+1\})$. Столбцы M индексированы с помощью множества $I \cup J \cup K$, где $I := \{(i, j) \mid 2 \leq i \leq j \leq n\}$, $J := \{(i, n+1) \mid 2 \leq i \leq n\}$ и $K := \{(n+1, n+1)\}$. Матрица M имеет форму

$$M = \begin{pmatrix} I & J & K \\ X & 0 & 0 \\ Z & Y & e^T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(где e обозначает вектор, состоящий из одних единиц). Матрица X имеет полный строчный ранг, так как векторы $\pi(S_j)$ линейно независимы. Матрица Y имеет полный ранг, так как ее строками являются векторы $\pi(T_k \cup \{n+1\})_J = \delta(T_k)_F$, которые линейно независимы. Следовательно, матрица M имеет полный ранг, откуда следует, что неравенство $(v')^T x \leq 0$ определяет фасету. ■

Подъем является очень общей методологией для построения фасет полиэдров, которая может быть описана следующим образом. Предположим, что мы имеем вектор $v \in \mathbb{R}^{E_n}$, для которого неравенство $v^T x \leq 0$ является допустимым для CUT_n . Тогда подъем неравенства $v^T x \leq 0$ означает нахождение вектора $v' \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ (получаемого добавлением новых координат к v , возможно, после изменения некоторых его координат), так что неравенство $(v')^T x \leq 0$ является допустимым для CUT_{n+1} .

Конечно, желательно получать таким путем новую фасету CUT_{n+1} , начиная с данной фасеты CUT_n . Следующая лемма содержит условия, достаточные для достижения этой цели.

Лемма 26.5.3 (лемма подъема). Пусть $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ и $v' \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$. Предположим, что имеют место следующие утверждения.

- (i) Неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету для CUT_n и неравенство $(v')^T x \leq 0$ является допустимым для CUT_{n+1} .
- (ii) Существует $\binom{n}{2} - 1$ подмножеств S_j множества $\{2, 3, \dots, n\}$, таких что разрезные векторы $\delta(S_j)$ (в K_n) являются линейно независимыми корнями $v^T x \leq 0$, и разрезные векторы $\delta(S_j)$ (в K_{n+1}) являются корнями $(v')^T x \leq 0$.
- (iii) Существует n подмножеств множества $\{2, 3, \dots, n, n+1\}$ с $n+1 \in T_k$, таких, что разрезные векторы $\delta(T_k)$ (в K_{n+1}) являются корнями $(v')^T x \leq 0$, и характеристические векторы множеств T_k линейно независимы.

Тогда неравенство $(v')^T x \leq 0$ определяет фасету для CUT_{n+1} .

Доказательство. Достаточно проверить, что $\binom{n+1}{2} - 1$ разрезных векторов $\delta(S_j)$ и $\delta(T_k)$ линейно независимы. Это может быть сделано так же, как в доказательстве теоремы 26.5.1. ■

В заключение мы рассмотрим специальный случай подъема, известный как *расщепление вершины*. Операция расщепления вершины является, очевидно, обратной для операции стягивания из раздела 26.4; она определяется следующим образом. Пусть $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ и $v' \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} v_{ij} &= v'_{ij} \quad \text{для } 2 \leq i < j \leq n, \\ v_{1i} &= v'_{1i} + v'_{in+1} \quad \text{для } 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Тогда v' получается из v с помощью расщепления вершины 1 на две вершины 1, $n+1$, и соответствующего расщепления реберного веса v_{1i} на v'_{1i} и v'_{in+1} , и сохранения неизменными других компонент. Другими словами, v получается из v' с помощью стягивания вершин 1 и $n+1$ в одну вершину 1. В этом случае, если неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету, то условие (ii) леммы 26.5.3 имеет место автоматически. Для наших конкретных приложений леммы подъема 26.5.3, условие (i) будет иметь место при построении v' и, следовательно, основным моментом будет проверка условия (iii), т. е. нахождение n добавочных «хороших» корней.

В нижеследующих разделах мы увидим много приложений леммы подъема 26.5.3 и теорем стягивания 26.4.3 и 26.4.4.

26.6. Фасеты из проекции

Здесь мы рассматриваем другое средство проверки того, что данное допустимое неравенство определяет фасету. Этот метод работает, когда некоторые проекции данного неравенства имеют некоторые предписанные свойства; он описан в работе Буассен [1994]. Этот результат имеет более простую формулировку в контексте корреляционного полиэдра. Таким образом, мы сначала получим его для корреляционного полиэдра и затем переформулируем для разрезного полиэдра.

Сначала заметим, что если неравенство

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} p_{ij} \leq \alpha$$

является допустимым для $\text{COR}_n^\square$, то его проекция

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n-1} a_{ij} p_{ij} \leq \alpha$$

на множество (из пар, включая диагональные пары) $V_n \setminus \{n\}$ является, очевидно, допустимым для $\text{COR}_{n-1}^\square$. Однако возможно, что спроектированное неравенство определяет фасету для $\text{COR}_{n-1}^\square$, хотя первоначальное неравенство фасету не определяло. Например, для (не определяющего фасету) неравенства $p_{11} + p_{22} \geq 0$ его проекция $p_{11} \geq 0$ определяет фасету. Нижеприведенный результат показывает, однако, следующее: если мы предположим, что несколько проекций определяют фасеты вместе с некоторыми дополнительными условиями, то мы можем заключить, что первоначальное неравенство также определяет фасету.

Предложение 26.6.1. Пусть $W_1, \dots, W_k \subseteq V_n$, так что $V_n = W_1 \cup \dots \cup W_k$ и каждая пара элементов V_n принадлежит некоторому W_r ($1 \leq r \leq k$). Пусть $a \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Предположим, что имеют место следующие условия.

- (i) Неравенство $a^T p := \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} p_{ij} \leq \alpha$ является допустимым для корреляционного многогранника $\text{COR}_n^\square$.
- (ii) Граф с множеством вершин $\{1, \dots, k\}$, ребрами которого являются пары rs , для которых существуют такие $i, j \in W_r \cap W_s$, что $a_{ij} \neq 0$, является связным.
- (iii) Для каждого $r = 1, \dots, k$ неравенство $\sum_{i \leq j | i, j \in W_r} a_{ij} p_{ij} \leq \alpha$ (полученное как проекция $a^T p \leq \alpha$ на W_r) определяет фасету для $\text{COR}^\square(W_r)$.

Тогда неравенство $a^T p \leq \alpha$ определяет фасету для $\text{COR}_n^\square$.

Доказательство. Пусть $b \in R^{V_n \cup E_n}$, $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\{p \in \text{COR}_n^\square \mid a^T p = \alpha\} \subseteq \{p \in \text{COR}_n^\square \mid b^T p = \beta\}.$$

Мы покажем, что $b = \lambda a$ и $\beta = \lambda \alpha$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Так как каждый вектор $q \in \text{COR}_n^\square(W_r)$ можно расширить до вектора $p := (q, 0, \dots, 0)$ из $\text{COR}_n^\square$, то мы получаем, что

$$\begin{aligned} \left\{ q \in \text{COR}_n^\square(W_r) \mid \sum_{i \leq j \mid i, j \in W_r} a_{ij} q_{ij} = \alpha \right\} &\subseteq \\ &\subseteq \left\{ q \in \text{COR}_n^\square(W_r) \mid \sum_{i \leq j \mid i, j \in W_r} b_{ij} q_{ij} = \beta \right\}. \end{aligned}$$

Из (iii) мы получаем, что существует такое $\lambda_r \in \mathbb{R}$, что $b_{ij} = \lambda_r a_{ij}$ для $i, j \in W_r$ и $\beta = \lambda_r \alpha$. Из (ii) следует, что все λ_r равны. ■

Следующее утверждение является переформулировкой предложения 26.6.1 в контексте разрезного полиэдра.

Следствие 26.6.2. Пусть $W_1, \dots, W_k \subseteq V_n$ такие, что $V_n = W_1 \cup \dots \cup W_k$, и каждая пара элементов из V_n принадлежит некоторому W_r ($1 \leq r \leq k$). Пусть $c \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Предположим, что имеют место следующие условия.

- (i) Неравенство $c^T x := \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} c_{ij} x_{ij} \leq \alpha$ является допустимым для разрезного многогранника $\text{CUT}_{n+1}^\square$.
- (ii) Граф с множеством вершин $\{1, \dots, k\}$, ребрами которого являются пары rs , для которых либо существует $i \neq j \in W_r \cap W_s$ такие, что $c_{ij} \neq 0$, или существует такое $i \in W_r \cap W_s$, что $c^T \delta(\{i\}) \neq 0$, является связным.
- (iii) Неравенство

$$\sum_{i \in W_r} \left(c_{i, n+1} + \sum_{j \in V_n \setminus W_r} c_{ij} \right) x_{i, n+1} + \sum_{i < j \mid i, j \in W_r} c_{ij} x_{ij} \leq \alpha$$

определяет фасету $\text{CUT}_{|W_r|+1}^\square$ для каждого $r = 1, \dots, k$.

Тогда неравенство $c^T x \leq \alpha$ определяет фасету для $\text{CUT}_{n+1}^\square$. ■

Например, следствие 26.6.2 позволяет установить, что пентагональное неравенство:

$$Q(1, 1, 1, -1, -1)^T x \leq 0$$

определяет фасету CUT_5 , так как неравенства треугольника определяют фасеты CUT_4 . Действительно, рассмотрим подмножества $W_1 := \{1, 2, 4\}$, $W_2 := \{1, 3, 4\}$ и $W_3 := \{2, 3, 4\}$ множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Тогда неравенства следствия 26.6.2 (iii) являются, соответственно, неравенствами треугольника $x_{12} - x_{14} - x_{24} \leq 0$, $x_{13} - x_{14} - x_{34} \leq 0$ и $x_{23} - x_{24} - x_{34} \leq 0$. В общем случае, следствие 26.6.2 позволяет установить, что любое чисто гиперметрическое неравенство $Q(1, 1, 1, \dots, -1, -1)^T x \leq 0$ определяет фасету, так как определяющими фасету являются неравенства треугольника.

Простая модификация предложения 26.6.1 дает следующую конструкцию для фасет кореляционного многогранника. Для данных $a \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ предположим, что неравенство $a^T p := \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} p_{ij} \leq \alpha$ определяет фасету $\text{COR}_n^\square$. Рассмотрим $\beta \in \mathbb{R}$ и два элемента $i^* \in V_n$ и $j^* \notin V_n$; положим $V_{n+1} = V_n \cup \{j^*\}$ и определим вектор $b \in \mathbb{R}^{V_{n+1} \cup E_{n+1}}$ как

$$(26.6.3) \quad \begin{cases} b_{ij} = a_{ij}, & \text{если } i, j \in V_n, \\ b_{i,j^*} = a_{i,i^*}, & \text{если } i \in V_n \setminus \{i^*\}, \\ b_{i^*,j^*} = \beta, \\ b_{j^*,j^*} = a_{i^*,i^*}. \end{cases}$$

Мы будем говорить, что неравенство $b^T p \leq \alpha$ получено из неравенства $a^T p \leq \alpha$ *копированием вершины i^* в вершине j^** . Заметим, что эта операция может быть рассмотрена как специальный случай подъема. Следующий результат показывает, каким образом нужно задать величину β , чтобы неравенство $b^T p \leq \alpha$ определяло фасету для $\text{COR}_{n+1}^\square$.

Предложение 26.6.4. *Предположим, что неравенство $a^T p \leq \alpha$ определяет фасету для $\text{COR}_n^\square$, и пусть вектор $b \in \mathbb{R}^{V_{n+1} \cup E_{n+1}}$ определен по формуле (26.6.3). Тогда неравенство $b^T p \leq \alpha$ определяет фасету $\text{COR}_{n+1}^\square$ тогда и только тогда, когда*

$$\beta = \alpha - \max_{S \subseteq V_n \setminus \{i^*\}} \left(a^T \pi(S \cup \{i^*\}) + \sum_{i \in S \cup \{i^*\}} a_{i,i^*} \right).$$

Доказательство. Пусть β_0 обозначает правую часть в равенстве, определяющим β . Сначала мы проверим, что $b^T p \leq \alpha$ является допустимым для $\text{COR}_{n+1}^\square$ тогда и только тогда, когда $\beta \leq \beta_0$. Действительно, пусть T есть подмножество V_{n+1} . Если $j^* \notin T$ или если $j^* \in T$ и $i^* \notin T$, то, по построению b , $b^T \pi(T) = a^T \pi(T) \leq \alpha$. Если $i^*, j^* \in T$, то, положив

$S := T \setminus \{i^*, j^*\}$, мы имеем

$$b^T \pi(T) = a^T \pi(S \cup \{i^*\}) + \sum_{i \in S \cup \{i^*\}} a_{i, i^*} + \beta.$$

Следовательно, $b^T \pi(T) \leq \alpha$ имеет место для $T \subseteq V_{n+1}$ тогда и только тогда, когда $\beta \leq \beta_0$. Если $\beta < \beta_0$, то любой корень $b^T p = \alpha$ удовлетворяет равенству $p_{i^*, j^*} = 0$; это показывает, что $b^T p \leq \alpha$ не определяет фасету для $\text{COR}_{n+1}^\square$. Предположим теперь, что $\beta = \beta_0$. Мы покажем, что $b^T p \leq \alpha$ определяет фасету для $\text{COR}_{n+1}^\square$. Для этого предположим, что $(b')^T p \leq \alpha'$ — другое неравенство, такое что

$$\{p \in \text{COR}_{n+1}^\square \mid b^T p = \alpha\} \subseteq \{p \in \text{COR}_{n+1}^\square \mid (b')^T p = \alpha'\}.$$

По предложению 26.6.1, существует константа λ такая, что $\alpha' = \lambda\alpha$, $b'_{ij} = \lambda b_{ij}$ для всех $i, j \in V_{n+1}$, исключая, может быть, пару i^*, j^* . Так как $\beta = \beta_0$, мы можем найти корень $\pi(T)$ для $b^T p = \alpha$, такой, что $i^*, j^* \in T$. Так как $(b')^T \pi(T) = \alpha'$, мы получаем, что $(b')_{i^*, j^*} = \lambda b_{i^*, j^*}$. Это показывает, что $b' = \lambda b$. ■

Например, неравенство:

$$p_{i^*, i^*} + p_{ii} - p_{i, i^*} \leq 1$$

определяет фасету для $\text{COR}_3^\square$. Применяя предложение 26.6.4, мы получим, что неравенство:

$$p_{i^*, i^*} + p_{ii} + p_{j, j^*} - p_{i, i^*} - p_{i, j^*} - p_{i^*, j^*} \leq 1$$

определяет фасету для $\text{COR}_4^\square$. (Заметим, что два этих неравенства соответствуют неравенствам треугольника для разрезного многогранника; напомним таблицу на Рис. 5.2.6.) Мы предлагаем читателю самостоятельно переформулировать предложение 26.6.4 для разрезного многогранника. Смотрите раздел 30.4 для применения предложения 26.6.4 к парашютной фасете.

Неравенства треугольника

Как мы увидим в части 5, разрезный многогранник $\text{CUT}_n^\square$ имеет много различных типов фасет, большинство из которых имеет достаточно сложную структуру. Среди них самыми простыми являются треугольные фасеты, т. е. те, которые определяются следующими неравенствами треугольника:

$$(27.0.1) \quad x_{ij} - x_{ik} - x_{jk} \leq 0,$$

$$(27.0.2) \quad x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} \leq 2,$$

для различных $i, j, k \in V_n$. Неравенство (27.0.1) является однородным неравенством треугольника, в то время как (27.0.2) неоднородно. Однородные неравенства треугольника уже были рассмотрены в предыдущих главах. Заметим, что (27.0.2) возникает из (27.0.1) с помощью переключения, именно, переключения относительно разреза $\delta(\{i\})$; следовательно, класс неравенств треугольника замкнут относительно переключения. Конус в $\mathbb{R}^{E_n}$, определяемый однородными неравенствами треугольника, является полуметрическим конусом MET_n , уже рассмотренным ранее. Многогранник в $\mathbb{R}^{E_n}$, определяемый неравенствами треугольника (27.0.1) и (27.0.2), называется *полуметрическим многогранником* и обозначается $\text{MET}_n^\square$. Следовательно,

$$\text{CUT}_n \subseteq \text{MET}_n \subseteq \mathbb{R}_+^{E_n} \quad \text{и} \quad \text{CUT}_n^\square \subseteq \text{MET}_n^\square \subseteq [0, 1]^{E_n}.$$

Терминология, используемая для полиэдров MET_n и $\text{MET}_n^\square$, исходит из того факта, что расстояния на V_n , удовлетворяющие неравенствам треугольника, есть в точности полуметрики.

Очевидно, полуметрический многогранник $\text{MET}_n^\square$ сохраняется при перестановках и переключениях (так как класс неравенств треугольника замкнут относительно переключений), свойство, которым обладает также и разрезный многогранник $\text{CUT}_n^\square$. А именно, как показано в работе Лоран [1996с], оба многогранника $\text{MET}_n^\square$ и $\text{CUT}_n^\square$ имеют одну и ту же группу симметрий; т. е.

$$\text{Is}(\text{MET}_n^\square) = \text{Is}(\text{CUT}_n^\square).$$

Группа $\text{Is}(\text{CUT}_n^\square)$ была описана в разделе 26.3.3.

Каждое неравенство треугольника определяет фасету разрезного многогранника. Чтобы это увидеть, достаточно (учитывая результаты предыдущих разделов о перестановках, переключениях и 0-подъеме) показать, что неравенство:

$$x_{12} - x_{13} - x_{23} \leq 0$$

определяет фасету CUT_3 . Действительно, в этом случае разрезные векторы $\delta(\{1\})$ и $\delta(\{2\})$ являются двумя ($= \binom{3}{2} - 1$) линейно независимыми корнями этого неравенства. Следовательно, имеется $3\binom{n}{2}$ треугольных фасет для CUT_n и $4\binom{n}{3}$ треугольных фасет для $\text{CUT}_n^\square$.

Неравенств треугольника достаточно для описания разрезных полээдров для $n \leq 4$, т. е.

$$\text{CUT}_n = \text{MET}_n \quad \text{и} \quad \text{CUT}_n^\square = \text{MET}_n^\square \quad \text{для } n = 3, 4,$$

но $\text{CUT}_n \subset \text{MET}_n$, $\text{CUT}_n^\square \subset \text{MET}_n^\square$ для $n \geq 5$. Чтобы показать это, заметим, что вектор $(\frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3}) \in \mathbb{R}^{E_n}$ принадлежит $\text{MET}_n^\square$, но не $\text{CUT}_n^\square$, если $n \geq 5$. С другой стороны, пентагональное неравенство (6.1.9) определяет (не треугольную) фасету разрезного многогранника на ≥ 5 элементах. В некотором смысле, K_5 является единственным «минимальным контрпримером» для следующего свойства: неравенства треугольника дают линейное описание разрезного многогранника. Действительно, неравенства треугольника (точнее, их проекции) дают полное линейное описание разрезного многогранника графа G тогда и только тогда, когда G не имеет K_5 -минора; см. теорему 27.3.6.

Каждый разрезный вектор является вершиной многогранника полуметрик; кроме того, разрезные векторы являются единственными целочисленными векторами из $\text{MET}_n^\square$ (см. предложение 27.2.1). Однако, для $n \geq 5$, $\text{MET}_n^\square$ имеет множество дополнительных вершин, все они имеют некоторые дробные компоненты. Следовательно, линейное описание $\text{CUT}_n^\square$ получается из линейного описания $\text{MET}_n^\square$ при добавлении ограничений, отсекающих все дробные вершины. Вершины $\text{MET}_n^\square$ были исследованы, в частности, в работах Лоран [1996с] и Лоран и Поляк [1992].

С другой стороны, конус полуметрик MET_n содержит целочисленные точки, не являющиеся разрезными векторами. Действительно, при данном разбиении $(S_1, \dots, S_k)$ множества V_n , мультиразрезный вектор $\delta(S_1, \dots, S_k)$ является элементом MET_n с координатами 0, 1. С другой стороны, легко проверить, что единственными целочисленными точками в MET_n являются мультиразрезные полуметрики. Заметим,

что

$$\delta(S_1, \dots, S_k) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq h \leq k} \delta(S_h).$$

Следовательно, единственными целочисленными точками MET_n , лежащими на экстремальных лучах MET_n , являются обычные разрезные векторы $\delta(S)$ для $S \subseteq V_n$. Экстремальные лучи MET_n изучались, в частности, Ависом [1977, 1980a, 1980b], Ломоносовым [1978, 1985], Хоувом, Джонсоном и Лоуренсом [1986], Гришухиным [1992a]. Порядок величины числа экстремальных лучей MET_n известен; Авис [1980b] дал нижнюю границу $2^{n^2/2 - O(n^{3/2})}$, а Грэхем, Яо и Яо [1980] доказали, что верхняя граница равна $2^{2.72n^2}$. Одним из важных мотивов для изучения конуса полуметрик является их роль в проблеме допустимости для многопродуктовых потоков (Ири [1971]; см. также Ломоносов [1985], Авис и Деа [1991]).

Хотя треугольные фасеты представляют, в общем, только малую часть всех фасет разрезного многогранника, они играют, тем не менее, важную роль. Это определяется их многочисленными геометрическими свойствами. Мы обсудим здесь некоторые из них. Другие геометрические свойства будут рассмотрены в главе 31.

27.1. Неравенства треугольника для корреляционного многогранника

Напомним, какую форму имеют неравенства треугольника, когда они применяются в контексте корреляционных полиэдров. Будем называть эти преобразованные неравенства *корреляционными неравенствами треугольника*. Эта информация уже была представлена в таблице 5.2.6; для удобства мы воспроизведем часть этой таблицы еще раз. (Напомним, что неравенства «стороны разрезов» определяются в пространстве $\mathbb{R}^{E_{n+1}}$, в то время как неравенства «корреляционной стороны» рассматриваются в пространстве $\mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$.)

Корневыми неравенствами треугольника являются неравенства, которые используют элемент $n + 1$; они будут детально рассмотрены в следующем подразделе.

Корреляционные неравенства треугольника имеют интересную интерпретацию в терминах теории вероятностей. Именно, из

«сторона разрезов»	«корреляционная сторона»
$d \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ $\delta(S)$ (for $S \subset V_n$) CUT_{n+1} $\text{CUT}_{n+1}^\square$	$p \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$ $\pi(S)$ COR_n $\text{COR}_n^\square$
(корневые) неравенства треугольника: $d(i, j) - d(i, n+1) - d(j, n+1) \leq 0$ $d(i, n+1) - d(j, n+1) - d(i, j) \leq 0$ $d(j, n+1) - d(i, n+1) - d(i, j) \leq 0$ $d(i, n+1) + d(j, n+1) + d(i, j) \leq 2$ $(i, j \in V_n)$	(корневые) корреляционные неравенства треугольника: $0 \leq p_{ij}$ $p_{ij} \leq p_{ii}$ $p_{ij} \leq p_{jj}$ $p_{ii} + p_{jj} - p_{ij} \leq 1$
(некорневые) неравенства треугольника $d(i, j) - d(i, k) - d(j, k) \leq 0$ $d(i, j) + d(i, k) + d(j, k) \leq 2$ $(i, j, k \in V_n)$	(некорневые) корреляционные неравенства треугольника $-p_{kk} - p_{ij} + p_{ik} + p_{jk} \leq 0$ $p_{ii} + p_{jj} + p_{kk} - p_{ij} - p_{ik} - p_{jk} \leq 1$

Рис. 27.1.1. Неравенства треугольника для корреляционного полиэдра и разрезного полиэдра

предложения 5.3.4 следует, что каждый вектор $p \in \text{COR}_n^\square$ представляет собой совместные корреляции $\mu(A_i \cap A_j)$ ($1 \leq i \leq n$) n событий $A_1, \dots, A_n$ в некотором вероятностном пространстве. Тогда корневые корреляционные неравенства треугольника просто выражают следующие основные свойства:

- Вероятность пересечения $\mu(A_i \cap A_j)$ двух событий неотрицательна и меньше или равна вероятности каждого из двух событий, и
- вероятность $\mu(A_i \cup A_j)$ ($= \mu(A_i) + \mu(A_j) - \mu(A_i \cap A_j)$) их объединения меньше или равна единице.

Некорневые неравенства могут быть выражены следующим образом:

- $-\mu(A_k) - \mu(A_i \cap A_j) + \mu(A_i \cap A_k) + \mu(A_j \cap A_k) = -\mu(A_k) - \mu(A_i \cap A_j) + \mu(A_k \cap (A_i \cup A_j)) + \mu(A_k \cap A_i \cap A_j)$, что, очевидно, ≤ 0 , и
- $\mu(A_i) + \mu(A_j) + \mu(A_k) - \mu(A_i \cap A_j) - \mu(A_i \cap A_k) - \mu(A_j \cap A_k) = \mu(A_i \cup A_j \cup A_k) - \mu(A_i \cap A_j \cap A_k)$, что, очевидно, ≤ 1 .

Это снова доказывает допустимость корреляционных неравенств треугольника для $\text{COR}_n^\square$.

Имеется другой естественный путь получения корреляционных неравенств треугольника. Вспомним, что многогранник $\text{COR}_n^\square$ может быть представлен в виде

$$\text{COR}_n^\square = \text{Conv}\{(x_i, x_j)_{1 \leq i \leq j \leq n} \mid x \in \{0, 1\}^n\}.$$

Следовательно, допустимые неравенства для $\text{COR}_n^\square$ могут быть получены следующим образом. Предположим, что

$$a^T x \geq \alpha \quad \text{и} \quad b^T x \geq \beta$$

имеют место для каждого $x \in \{0, 1\}^n$. Тогда неравенство

$$(a^T x - \alpha)(b^T x - \beta) \geq 0$$

также имеет место для каждого $x \in \{0, 1\}^n$. Если мы раскроем скобки в $(a^T x - \alpha)(b^T x - \beta)$ и линеализируем его, т. е. заменим каждое $x_i x_j$ ($i \neq j$) на p_{ij} , и каждое $x_i x_i$ на p_{ii} , то мы получим неравенство, которое, очевидно, допустимо для $\text{COR}_n^\square$.

Мы проиллюстрируем этот метод, начав с неравенств:

$$x_i \geq 0, \quad 1 - x_i \geq 0, \quad x_j \geq 0, \quad 1 - x_j \geq 0,$$

которые тривиально верны для $x \in \{0, 1\}^n$. При их попарном перемножении мы получим неравенства

$$x_i x_j \geq 0, \quad \text{т. е. } p_{ij} \geq 0,$$

$$x_i(1 - x_j) \geq 0, \quad \text{т. е. } p_{ii} \geq p_{ij},$$

$$x_j(1 - x_i) \geq 0, \quad \text{т. е. } p_{jj} \geq p_{ij},$$

$$(1 - x_i)(1 - x_j) \geq 0, \quad \text{т. е. } p_{ii} + p_{jj} - p_{ij} \leq 1.$$

Таким образом, мы получили корневые корреляционные неравенства треугольника. Этот метод описан в работах Ловас и Скрайвер [1991] и Балаш, Сериа и Корнеуэлс [1993] как способ получения более тесной релаксации из данной линейной релаксации 01-многогранника.

27.2. Корневые неравенства треугольника

В этом разделе мы будем рассматривать неравенства треугольника для многогранника $\text{CUT}_{n+1}^\square$, которые определены на $n + 1$

элементах множества $V_{n+1} = \{1, \dots, n, n+1\}$. Неравенство треугольника называется *корневым*, если оно использует элемент $n+1$, т. е. имеет форму $x_{ij} - x_{ik} - x_{jk} \leq 0$ или $x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} \leq 2$ для некоторых $i, j, k \in V_{n+1}$, таких, что $n+1 \in \{i, j, k\}$.

Корневые неравенства треугольника определяют многогранник, называемый *корневым полуметрическим многогранником*, и обозначаемый $\text{RMET}_{n+1}^\square$. Следовательно,

$$\text{CUT}_{n+1}^\square \subseteq \text{MET}_{n+1}^\square \subseteq \text{RMET}_{n+1}^\square.$$

Хотя корневой многогранник $\text{RMET}_{n+1}^\square$ является более слабой релаксацией $\text{CUT}_{n+1}^\square$, чем $\text{MET}_{n+1}^\square$, он уже содержит много информации. В частности, как утверждается в нижеследующем предложении 27.2.1, он дает описание разрезного многогранника в виде решений задачи целочисленного программирования.

На самом деле, корневой полуметрический многогранник обладает рядом удобных свойств, которые не выполняются для многогранника полуметрик. Например, Падберг [1989] показал, что каждая вершина $\text{RMET}_{n+1}^\square$ является полуцелой, т. е. имеет компоненты $0, 1, \frac{1}{2}$. Напротив, $\text{MET}_{n+1}^\square$ имеет очень сложные вершины, с произвольно большим знаменателем. На самом деле, некорневых неравенств треугольника уже достаточно для отсеечения дробных вершин $\text{RMET}_{n+1}^\square$, так как ни одна из вершин $\text{MET}_{n+1}^\square$ не является полуцелой.

Ниже мы рассмотрим несколько свойств корневого полуметрического многогранника. Некоторые из них для удобства будут даны в контексте корреляций, т. е. для многогранника $\xi(\text{MET}_{n+1}^\square)$, определяемого корневыми корреляционными неравенствами треугольника (см. таблицу 27.1.1).

27.2.1. Задача о максимальном разрезе как задача целочисленного программирования

Предложение 27.2.1. *Единственными целочисленными векторами многогранника $\text{RMET}_n^\square$ являются разрезные векторы $\delta(S)$ для $S \subseteq V_n$. Кроме того, каждый разрезный вектор есть вершина многогранника $\text{RMET}_n^\square$.*

Доказательство. Пусть $x \in \text{RMET}_n^\square \cap \{0, 1\}^{E_n}$. Пусть $I := \{i \in V_n \mid x_{i,n+1} = 0\}$ и $J := \{i \in V_n \mid x_{i,n+1} = 1\}$. Так как x удовлетворяет корневому неравенству треугольника, мы получаем, что $x_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$ таких, что $i, j \in I$ или $i, j \in J$, и $x_{ij} = 1$ для всех $i \in I, j \in J$. Это показывает, что x равен разрезному вектору $\delta(J)$. Теперь мы покажем, что каждый разрезный вектор является вершиной многогранника $\text{RMET}_n^\square$. Учитывая свойства симметрии, достаточно показать, что начало координат есть вершина $\text{RMET}_n^\square$. Это следует из того факта, что однородные корневые неравенства треугольника (которые содержат начало координат) имеют полный ранг $\binom{n}{2}$. ■

Следовательно, система, состоящая из корневых неравенств треугольника вместе с ограничением целочисленности:

$$x_{ij} = 0, 1 \quad \text{для всех } ij,$$

дает формулировку задачи о максимальном разрезе в виде задачи целочисленного программирования. Другими словами, для данной весовой функции $c \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ задача о максимальном разрезе:

$$\max (c^T \delta(S) \mid S \subseteq V_{n+1})$$

может быть переформулирована в виде задачи:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & x \in \text{RMET}_{n+1}^\square \\ & x \in \{0, 1\}^{E_{n+1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, если мы хотим решить задачу о максимальном разрезе, используя технику линейного программирования, перед нами встает задача нахождения дополнительных ограничений, которые необходимо добавить к вышеуказанной формулировке для исключения целочисленности. Это есть вопрос нахождения для разрезного многогранника неравенств, определяющих фасеты, вопрос, который составляет основную тему пятой части.

27.2.2. Объем корневого полуметрического многогранника

Вычисление точного объема многогранника является, в общем, трудной проблемой. Важным свойством корневых неравенств треугольника является то, что объем корневого полуметрического многогранника можно вычислить точно. Это было сделано Чун-Ва Ко, Ли и

Штейнгримссоном [1997], которые, используя симметрии переключений, показали, как эта проблема может быть сведена к вычислению объема другого многогранника.

Теорема 27.2.2. Пусть $d := \binom{n+1}{2}$. Тогда d -мерный объем корневого полуметрического многогранника $\text{RMET}_{n+1}^\square$ равен

$$\text{vol RMET}_{n+1}^\square = \frac{n!}{(2n)!} 2^n.$$

d -мерный объем его образа при ковариантном отображении равен

$$\text{vol } \xi(\text{RMET}_{n+1}^\square) = \frac{n!}{(2n)!} 2^{2n-d}.$$

Доказательство. Для упрощения обозначений, пусть $Q_n := \xi(\text{RMET}_{n+1}^\square)$. Сначала вычислим d -мерный объем Q_n . Многогранник Q_n определен корневыми неравенствами треугольника, именно,

$$(i) \quad p_{ij} \geq 0, p_{ij} \leq p_{ii}, p_{ij} \leq p_{jj},$$

$$(ii) \quad p_{ii} + p_{jj} \leq 1 + p_{ij}$$

для всех $1 \leq i < j \leq n$. Для $a \in \{0, 1\}^n$ положим

$$C_a := \{p \in Q_n \mid a_i \leq p_{ii} \leq a_i + \frac{1}{2} \ (i = 1, \dots, n)\}.$$

Тогда для различных $a, b \in \{0, 1\}^n$ d -мерный объем $C_a \cap C_b$ равен нулю (так как $C_a \cap C_b$ имеет размерность меньше d). Очевидно, Q_n есть объединение многогранников C_a (для $a \in \{0, 1\}^n$). Следовательно,

$$\text{vol } Q_n = \sum_{a \in \{0, 1\}^n} \text{vol } C_a.$$

С другой стороны, все C_a имеют один и тот же объем. Действительно, если A обозначает множество позиций, в которых координаты a и b различны, то C_b является образом C_a при отображении $\rho_{\delta(A)}$ (аналог переключения, определенный в (26.3.10)). Отсюда следует, что $\text{vol } C_a = \text{vol } C_b$, так как отображение $\rho_{\delta(A)}$ является унимодулярным (т. е. его матрица имеет определитель ± 1). Следовательно,

$$\text{vol } Q_n = 2^n \text{vol } C_0.$$

Ниже мы покажем, что

$$\text{vol } C_0 = \frac{n!}{(2n)!} 2^{n-d}.$$

Из этого мы сразу получаем величину объема Q_n . Наконец, так как $\text{RMET}_{n+1}^\square = \xi^{-1}(Q_n)$, и так как определитель матрицы линейного

отображения равен $2^{\binom{n}{2}}$ (по абсолютной величине), то мы имеем

$$\text{vol RMET}_{n+1}^{\square} = \frac{n!}{(2n)!} 2^n.$$

Теперь мы проведем вычисление объема C_0 . Пусть C'_0 обозначает многогранник C_0 , увеличенный в два раза. Тогда, так как неравенство (ii) становится излишним в описании C_0 , многогранник C'_0 определяется неравенствами (i) и $0 \leq p_{ii} \leq 1$ (для всех i). Пусть $(S_n, \prec)$ обозначает частично упорядоченное множество на

$$S_n := \{p_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

с частичным порядком $p_{ij} \prec p_{ii}$ и $p_{ij} \prec p_{jj}$. Тогда C'_0 будет порядковым многогранником¹⁾ частично упорядоченного множества $(S_n, \prec)$. Пусть $e(S_n, \prec)$ обозначает число линейных расширений²⁾ для $(S_n, \prec)$. Тогда

$$\text{vol } C'_0 = \frac{e(S_n, \prec)}{d!}.$$

Определим *упорядоченное расширение* как линейное расширение $(S_n, \prec)$, в котором $p_{11}, \dots, p_{nn}$ расположены в указанном порядке. Следовательно, упорядоченное расширение является перестановкой элементов p_{ij} , в которой $p_{11}, \dots, p_{nn}$ стоят в таком порядке, и p_{ij} стоит справа и от p_{ii} , и от p_{jj} . Число упорядоченных расширений может быть вычислено следующим образом. Предположим, что $p_{i,k+1}$ ($i \leq k$), $\dots$, p_{in} ($i \leq n-1$) уже поставлены. Теперь мы попробуем расположить $p_{1k}, \dots, p_{k-1,k}$. Первый элемент p_{1k} должен быть расположен справа от p_{kk} . Так как уже есть

$$f_k := (n-k+1) + k + (k+1) + \dots + (n-1) = n-k+1 + \binom{n}{2} - \binom{k}{2}$$

элементов из S_n , расположенных справа от p_{kk} (включая p_{kk}), то имеется f_k возможностей выбрать позицию для p_{1k} . Тогда остается $f_k + 1$ возможностей для расположения p_{2k} , и $f_k + k - 2$ возможностей для

¹⁾ *Порядковым многогранником* P частично упорядоченного множества $(E, \prec)$ называется многогранник в пространстве $\mathbb{R}^E$, определенный неравенствами: $0 \leq x_e \leq 1$ ($e \in E$) и $x_e \leq x_f$ при $e \prec f$ ($e, f \in E$).

²⁾ *Линейным расширением* частично упорядоченного множества $(E, \prec)$ называется любой полный порядок на E , расширяющий частичный порядок $\prec$. Стэнли [1986] доказал, что $\text{vol } P = \frac{e(E, \prec)}{|E|!}$, где $e(E, \prec)$ — число линейных расширений $(E, \prec)$, а P — порядковый многогранник для $(E, \prec)$.

расположения $p_{k-1,k}$. В общем, число упорядоченных расширений равно

$$\prod_{k=2}^n \prod_{i=0}^{k-2} (f_k + i) = \prod_{k=2}^n \frac{(f_k + k - 2)!}{(f_k - 1)!} = \prod_{k=2}^n \frac{\left(\binom{n+1}{2} - \binom{k}{2} - 1\right)!}{\left(\binom{n+1}{2} - \binom{k+1}{2}\right)!},$$

что, в свою очередь, равно $\frac{d!}{(2n)!} 2^n$. Следовательно, $e(S_n, \prec) = \frac{n!d!}{(2n)!} 2^n$, так как число линейных расширений равно числу упорядоченных расширений, взятому $n!$ раз. Следовательно, $\text{vol } C'_0 = \frac{n!}{(2n)!} 2^n$ и $\text{vol } C_0 = 2^{-d} \text{vol } C'_0 = \frac{n!}{(2n)!} 2^{n-d}$. $\blacksquare$

27.2.3. Дополнительные замечания

Отсечения Хватала корневых неравенств треугольника. Бо-рош, Грама и Хаммер [1992] показали, что замыкание Хватала многогранника $\xi(\text{RMET}_{n+1}^\square)$ совпадает с многогранником $\xi(\text{MET}_{n+1}^\square)$; мы упоминаем этот результат (без доказательства) в теореме 27.2.3, приведенной ниже. Напомним определение понятия замыкания Хватала.

Пусть P есть многогранник в $\mathbb{R}^k$ и пусть P_I означает выпуклую оболочку целых точек P ; таким образом, $P_I \subseteq P$. При данных $a \in \mathbb{Z}^k$ и $\alpha \in \mathbb{Z}$, если неравенство

$$a^T x < \alpha + 1$$

является допустимым для P , то неравенство

$$a^T x \leq \alpha$$

является допустимым для P_I . Это второе неравенство называется *отсечением Хватала* для P . Тогда P' означает многогранник, который определен всеми возможными отсечениями Хватала; он называется *замыканием Хватала* для P . Положив $P^{(0)} := P$ и $P^{(k+1)} := (P^{(k)})'$ для $k \geq 0$, мы получим невозрастающую последовательность многогранников:

$$P^{(0)} \supseteq P^{(1)} \supseteq \dots \supseteq P_I.$$

Хватал [1973] (см. также Скрайвер [1991a]) показал, что существует конечный индекс k такой, что $P^{(k)} = P_I$. Наименьшее такое k называется *рангом Хватала* для P .

Теорема 27.2.3. *Замыканием Хватала корневого корреляционного полуметрического многогранника $\xi(\text{RMET}_{n+1}^\square)$ является корреляционный полуметрический многогранник $\xi(\text{MET}_{n+1}^\square)$, т. е. $(\xi(\text{RMET}_{n+1}^\square))' = \xi(\text{MET}_{n+1}^\square)$.* ■

В качестве примера мы покажем, как получить некорневое корреляционное неравенство треугольника

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} - p_{12} - p_{13} - p_{23} \leq 1$$

как отсечение Хватала. Рассмотрим следующие корневые неравенства треугольника:

$$p_{11} + p_{22} - p_{12} \leq 1,$$

$$p_{11} + p_{33} - p_{13} \leq 1,$$

$$p_{22} + p_{33} - p_{23} \leq 1,$$

$$-p_{12} \leq 0,$$

$$-p_{13} \leq 0,$$

$$-p_{23} \leq 0.$$

Суммируя их и деля на два, получим:

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} - p_{12} - p_{13} - p_{23} \leq \frac{3}{2} < 2,$$

что дает отсечение Хватала:

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} - p_{12} - p_{13} - p_{23} \leq 1.$$

Аналогично, неравенство $-p_{11} + p_{12} + p_{13} - p_{23} \leq 0$ возникает как отсечение Хватала из следующих неравенств:

$$-p_{11} + p_{12} \leq 0,$$

$$-p_{22} + p_{12} \leq 0,$$

$$-p_{11} + p_{13} \leq 0,$$

$$-p_{33} + p_{13} \leq 0,$$

$$p_{22} + p_{33} - p_{23} \leq 1,$$

$$-p_{23} \leq 0.$$

Заметим, что теорема 27.2.3 не имеет места в «стороне разрезов» (см. таблицу 27.1.1), т. е. замыкание Хватала корневого полуметрического многогранника $\text{RMET}_{n+1}^\square$ не совпадает с полуметрическим многогранником $\text{MET}_{n+1}^\square$. Например, неравенство

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} \leq 2$$

не является отсечением Хватала для $\text{RMET}_{n+1}^\square$. Действительно, неравенство

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} < 3$$

не является допустимым для $\text{RMET}_{n+1}^\square$, так как нарушается для точки $x \in \text{RMET}_{n+1}^\square$, определенной как $x_{i,n+1} = \frac{1}{2}$ ($1 \leq i \leq n$) и $x_{ij} = 1$ ($1 \leq i < j \leq n$).

Следующая нижняя граница ранга Хватала для полуметрического многогранника дана в Хватал, Кук и Хартман [1989].

Теорема 27.2.4. *Ранг Хватала полуметрического многогранника $\text{MET}_{n+1}^\square$ больше или равен $\frac{1}{4}(n-4)$.* ■

«Кровельная» двойственная оценка. Для данных весов $c \in \mathbb{R}^{V_n \cup E_n}$ рассмотрим задачу квадратичного 0-1 программирования без ограничений:

$$(27.2.5) \quad C_n := \max_{x \in \{0,1\}^n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} x_i x_j = \max_{p \in \text{COR}_n^\square} c^T p.$$

Так как $\text{COR}_n^\square \subseteq \xi(\text{RMET}_{n+1}^\square)$, то задача

$$C_2 := \max(c^T p \mid p \in \xi(\text{RMET}_{n+1}^\square))$$

дает верхнюю оценку оптимального значения C_n из задачи (27.2.5). Оценка C_2 известна как «кровельная» двойственная оценка. Несколько эквивалентных определений C_2 даны в Хаммер, Хансен и Симеон [1984]. А именно, они определили последовательность границ C_k ($k = 2, \dots, n-1$), удовлетворяющих условию

$$C_n \leq C_{n-1} \leq \dots \leq C_3 \leq C_2$$

и имеющую несколько эквивалентных формулировок; см. Борош, Грама и Хаммер [1990], а также Адамс и Дириг [1994]. В частности, C_3 является оптимальным значением, полученным при оптимизации над многогранником $\xi(\text{MET}_{n+1}^\square)$. Следовательно, C_3 и C_4 могут быть вычислены в полиномиальное (по n) время. В общем, C_k может быть вычислено при решении задачи линейного программирования, размер которой полиномиален по n , но экспоненциален по k .

За деталями мы отсылаем, например, к Борошу и Хаммеру [1991], Борошу, Грама и Хаммеру [1992] и к литературе, цитируемой в этих работах.

27.3. Проецирование неравенств треугольника

Пусть $G = (V_n, E)$ — граф на n вершинах. Пусть $\text{MET}(G)$ обозначает проекцию полуметрического конуса MET_n на подпространство $\mathbb{R}^E$, индексированное реберным множеством G ; $\text{MET}(G)$ называется *полуметрическим конусом* для G . Аналогично, пусть $\text{MET}^\square(G)$ обозначает проекцию $\text{MET}_n^\square$ на $\mathbb{R}^E$; она называется *полуметрическим многогранником* для G . Таким же образом, $\text{CUT}(G)$ (соответственно, $\text{CUT}^\square(G)$) обозначает проекцию CUT_n (соответственно, $\text{CUT}_n^\square$) на $\mathbb{R}^E$. По определению,

$$(27.3.1) \quad \text{CUT}(G) \subseteq \text{MET}(G) \quad \text{и} \quad \text{CUT}^\square(G) \subseteq \text{MET}^\square(G).$$

Напомним, что $\delta_G(S)$ для $S \subseteq V_n$ обозначает разрез в G , который является подмножеством E , состоящим из ребер $e \in E$, имеющих точно один конец в S . Следовательно, *разрезный конус* $\text{CUT}(G)$ для G совпадает с конусом в $\mathbb{R}^E$, порожденным векторами $\chi^{\delta_G(S)}$ (для $S \subseteq V_n$), и *разрезный многогранник* $\text{CUT}^\square(G)$ совпадает с выпуклой оболочкой векторов $\chi^{\delta_G(S)}$ (для $S \subseteq V_n$).

Так как множество разрезов в G замкнуто относительно симметрической разности, то, следуя результатам раздела 26.3, мы можем утверждать, что операция переключения применима к разрезному многограннику $\text{CUT}^\square(G)$ на произвольном графе G ; она применима также к полуметрическому многограннику $\text{MET}^\square(G)$. Именно, для любого $S \subseteq V_n$ имеем

$$r_{\delta_G(S)}(\text{CUT}^\square(G)) = \text{CUT}^\square(G) \quad \text{и} \quad r_{\delta_G(S)}(\text{MET}^\square(G)) = \text{MET}^\square(G).$$

Заметим, что $\text{MET}^\square(G)$ не содержит других целочисленных векторов, кроме характеристических векторов разрезов $\delta_G(S)$ ($S \subseteq V_n$) (это легко следует из предложения 27.2.1). Графы G , для которых $\text{MET}^\square(G)$ имеет только целочисленные вершины, т. е. для которых в (27.3.1) имеет место равенство, будут охарактеризованы в теореме 27.3.6. В общем случае, $\text{MET}^\square(G)$ имеет нецелочисленные вершины. Легко видеть, что никакая вершина $\text{MET}^\square(G)$ не может иметь знаменатель 2. Следовательно, вершины со знаменателем 3 являются следующим случаем после целых вершин. Лоран и Поляк [1995a]¹⁾ изучали графы, для которых все

¹⁾ Обобщение в контексте бинарных матроидов рассмотрено в Джерардс и Лоран [1995].

вершины имеют знаменатель ≤ 3 ; такие графы полностью описаны для числа вершин ≤ 7 .

27.3.1. Полуметрический многогранник графа

Мы рассмотрим здесь линейное описание для полуметрического конуса $\text{MET}(G)$ и многогранника $\text{MET}^\square(G)$. Мы знаем линейное описание многогранника $\text{MET}_n^\square$, поэтому линейное описание $\text{MET}^\square(G)$ может быть получено из линейного описания $\text{MET}_n^\square$ применением так называемого метода исключения Фурера–Моцкина. Этот метод состоит в комбинации линейных неравенств, определяющих $\text{MET}_n^\square$, таким образом, чтобы исключить переменные x_e ($e \in E_n \setminus E$), которые не встречаются в $\text{CUT}^\square(G)$; см., например, Скрайвер [1991a], Циглер [1995].

Точное вычисление проекции полиэдра является, в общем случае, трудной задачей, так как на практике метод исключения Фурера–Моцкина часто трудно применим. Например, корреляционный многогранник¹⁾ $\text{COR}_n^\square$ может быть получен как проекция симплекса, лежащего в пространстве размерности 2^n (именно, симплекса $\text{COR}_n^\square(2^{V_n})$; напомним раздел 5.4). Несмотря на то, что нахождение граней симплекса тривиально, нахождение всех фасет $\text{COR}_n^\square$ является трудной задачей. Однако, как показывают нижеприведенные результаты, в случае полуметрических полиэдров $\text{MET}(G)$ и $\text{MET}^\square(G)$, полные описания могут быть найдены удивительно легко.

В этом разделе циклом называется объединение не пересекающихся по ребрам простых циклов. Пусть C — простой цикл, и пусть e — ребро, не принадлежащее C ; тогда говорят, что e есть *хорда* C , если оно соединяет две вершины из C . Простой цикл C называют *бесхордовым*, если он не имеет хорд.

Пусть C — цикл в G , и пусть $F \subseteq C$ — подмножество C , такое, что $|F|$ нечетно. Неравенство:

$$(27.3.2) \quad \sum_{e \in F} x_e - \sum_{e \in C \setminus F} x_e \leq |F| - 1$$

называется *цикловым неравенством*. Заметим, что неравенства треугольника являются специальным случаем цикловых неравенств

¹⁾ Следовательно, с точностью до линейного преобразования, разрезный многогранник $\text{CUT}_n^\square$ также может быть получен как проекция симплекса. В примере 27.4.4 мы увидим другую конструкцию, позволяющую реализовать разрезный многогранник $\text{CUT}^\square(G)$ как проекцию симплекса.

(полученным для $|C| = 3$). Заметим также, что класс цикловых неравенств замкнут относительно операции переключения относительно разреза. (Это следует из того факта, что разрез и цикл пересекаются по четному числу ребер.) Теорема 27.3.3, приведенная ниже, показывает, что цикловые неравенства дают линейное описание полуметрического полиэдра; (i) доказано в Барахона [1993], (ii) и (iii) в Барахона и Маджуб [1986].

Теорема 27.3.3. Пусть дан граф $G = (V_n, E)$.

(i) $\text{MET}(G) = \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid x_e - x(C \setminus \{e\}) \leq 0, C \text{ — цикл в } G, e \in G\}$,

$$\text{MET}^\square(G) = \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid x_e \leq 1 \text{ для } e \in E, x(F) - x(C \setminus F) \leq |F| - 1, \\ C \text{ — цикл в } G, F \subseteq C, |F| \text{ нечетно}\}.$$

- (ii) Пусть C — цикл в G , $e \in C$, и $F \subseteq C$ с нечетным $|F|$. Неравенство $x_e - x(C \setminus \{e\}) \leq 0$ (соответственно, $x(F) - x(C \setminus F) \leq |F| - 1$) определяет фасету $\text{MET}(G)$ (соответственно, $\text{MET}^\square(G)$) тогда и только тогда, когда C является бесхордовым простым циклом.
- (iii) Пусть $e \in E$. Неравенство $x_e \geq 0$ (соответственно, $x_e \geq 1$) определяет фасету $\text{MET}(G)$ (соответственно, $\text{MET}^\square(G)$) тогда и только тогда, когда e не принадлежит некоторому треугольнику в G .

Доказательство. Первое наблюдение состоит в том, что, благодаря переключению, достаточно доказать утверждения, относящиеся к конусу $\text{MET}(G)$. В первую очередь мы покажем что, если C есть цикл в G , который не является бесхордовым простым циклом, то неравенство: $x_e - x(C \setminus \{e\}) \leq 0$ (где $e \in C$) следует из других цикловых неравенств и условия неотрицательности $x \geq 0$. Действительно, предположим, что $C = C_1 \cup \dots \cup C_p$, где C_i — реберно-непересекающиеся простые циклы. Мы можем предположить, что $e \in C_1$. Тогда неравенство: $x_e - x(C \setminus \{e\}) \leq 0$ получается при суммировании неравенств: $x_e - x(C_1 \setminus \{e\}) \leq 0$ и $-x(C_i) \leq 0$ ($i = 2, \dots, p$). Предположим теперь, что C есть простой цикл, имеющий хорду f . Тогда эта хорда определяет разбиение C на два пути P_1, P_2 , такие, что $C_i := p_i \cup \{f\}$ являются простыми циклами для $i = 1, 2$. Тогда, предполагая, что $e \in P_1$, неравенство $x_e - x(C \setminus \{e\}) \leq 0$ получается при суммировании неравенств: $x_e - x(C_1 \setminus \{e\}) \leq 0$ и $x_f - x(C_2 \setminus \{f\}) \leq 0$.

Доказательство (i). Пусть

$$Q(G) := \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid x_e - x(C \setminus \{e\}) \leq 0 \text{ для } C \text{ — цикла в } G, e \in C\}.$$

Сначала мы проверим, что $\text{MET}(G) \subseteq Q(G)$. Пусть $x \in \text{MET}(G)$, пусть C есть цикл в G и пусть $e \in C$. Мы покажем, что $x_e - x(C \setminus \{e\}) \leq 0$. По вышеупомянутому наблюдению, мы можем предположить, что C является простым циклом, скажем, $C = (1, 2, \dots, p)$, и что $e := 12$. По определению $\text{MET}(G)$, существует $y \in \text{MET}_n$, проекция которого на $\mathbb{R}^E$ равна x . Тогда

$$x_e - x(C \setminus \{e\}) = x_{12} - x_{23} - \dots - x_{p-1,p} = \sum_{2 \leq i \leq p-1} y_{1i} - y_{1,i+1} - y_{i,i+1} \leq 0.$$

Мы покажем обратное включение: $Q(G) \subseteq \text{MET}(G)$ индукцией по $|E|$. Это включение тривиально, если $G = K_n$. Предположим, что $G \neq K_n$. Пусть $e := uv$ — ребро K_n , не принадлежащее E , и пусть $x \in Q(G)$. Тогда x можно расширить до вектора $y \in \mathbb{R}^{E \cup \{e\}}$, который принадлежит $Q(G+e)$ ($G+e$ обозначает граф, полученный добавлением к G ребра e). Для этого достаточно взять $y_e = \alpha$, где

$$\max_{P|f \in P} (x_f - x(P \setminus \{f\})) \leq \alpha \leq \min_Q x(Q),$$

где P, Q пробегают все пути в G , связывающие u и v . (Такое α существует, так как $x \in Q(G)$.) По индукционному предположению, $Q(G+e) = \text{MET}(G+e)$. Следовательно, y является проекцией на $\mathbb{R}^{E \cup \{e\}}$ некоторого $z \in \text{MET}_n$. Следовательно, x есть проекция z на $\mathbb{R}^E$, откуда следует, что $x \in \text{MET}(G)$.

Доказательства утверждений (ii), (iii) могут быть найдены в Барахона и Маджуб [1986]; именно, там показано что, при тех же предположениях, неравенства в (i) и (ii) определяют фасеты разрезного многогранника. ■

Список фасет, определяющих полуметрический многогранник $\text{MET}^\square(G)$, может быть экспоненциально длинным (по n). Однако Барахона и Маджуб [1986] показали, что задача отделения для системы:

$$(27.3.4) \quad \begin{cases} 0 \leq x_e \leq 1 & \text{для } e \in E, \\ x(F) - x(C \setminus F) \leq |F| - 1 & \text{для } C \text{ — цикла в } G, F \subseteq C, |F| \text{ нечетно} \end{cases}$$

может быть решена в полиномиальное время (по n и размеру x). Задача отделения может быть сформулирована следующим образом:

Для данного вектора $x \in Q^E$ выяснить, удовлетворяет ли вектор x всем неравенствам системы (27.3.4). Если нет, найти неравенство из (27.3.4), не выполняющееся для x .

Эта задача может быть решена следующим образом. Сначала проверим, имеет ли место $0 \leq x_e \leq 1$ для всех ребер $e \in E$.

Если нет, то невыполняющееся неравенство найдено. Иначе мы можем предположить, что $0 \leq x_e \leq 1$ для всех $e \in E$. Заметим, что цикловое неравенство (27.3.2) может быть переписано в виде

$$\sum_{e \in C \setminus F} x_e + \sum_{e \in F} (1 - x_e) \geq 1.$$

Построим новый граф G' с двумя вершинами i' и i'' для каждой вершины i из G . Для каждого ребра $ij \in E$ введем в G' ребра $i'j'$, $i''j''$ с весом x_{ij} , и ребра $i'j''$, $i''j'$ с весом $1 - x_{ij}$. Таким образом, мы определим весовую функцию на ребрах G' . Теперь для каждой вершины i из G вычислим кратчайший (с учетом данной весовой функции) путь в G' из i' в i'' . Тогда минимум этих кратчайших путей по всем вершинам i из G дает минимальную величину для $\sum_{e \in C \setminus F} x_e + \sum_{e \in F} (1 - x_e)$ по всем циклам C , $F \subseteq C$, $|F|$ нечетно. Если этот минимум меньше единицы, то мы нашли невыполняющееся неравенство; иначе x удовлетворяет всем цикловым неравенствам. Так как вычисление кратчайшего пути может быть проведено за время $O(n^2)$, задача отделения для системы (27.3.4) может быть решена за время $O(n^3)$.

Как приложение (использующее эллипсоидный метод, как показано в Грётшель, Ловас и Скрайвер [1988]), отсюда следует, что линейную целевую функцию можно оптимизировать при ограничениях (27.3.4) в полиномиальное время.

Предложение 27.3.5. *Для данного $c \in Q^E$ задача оптимизации:*

$$\max(c^T x \mid x \text{ удовлетворяет системе (27.3.4)})$$

может быть решена в полиномиальное время (полиномиальное по n и размеру c). ■

На самом деле, существуют более простые аргументы для доказательства предложения 27.3.5, основанные на теореме 27.3.3. Действительно, так как $\text{MET}^\square(G)$ является проекцией $\text{MET}_n^\square$ на $\mathbb{R}^E$, две задачи:

$$\max(c^T x \mid x \in \text{MET}^\square(G)) \quad \text{и} \quad \max(c^T x \mid x \in \text{MET}_n^\square),$$

где мы расширяем c в $\mathbb{R}^{E_n}$ добавлением $c_e := 0$, если $e \in E_n \setminus E$, имеют одинаковый оптимум. Но последняя задача является задачей линейного программирования с $\binom{n}{2}$ переменными и $4\binom{n}{3}$ ограничениями. Следовательно, она может быть решена в полиномиальное время.

27.3.2. Разрезный многогранник для графов без K_5 -минора

Теперь мы перейдем к вопросу характеристики графов G , для которых в (27.3.1) имеет место равенство. С помощью переключения получаем эквивалентность:

$$\text{CUT}(G) = \text{MET}(G) \iff \text{CUT}^\square(G) = \text{MET}^\square(G).$$

Как уже было упомянуто ранее, равенство не имеет место для графа $G = K_5$. Следующий результат показывает, что K_5 является единственным минимальным (в смысле миноров) исключением.

Теорема 27.3.6. $\text{CUT}(G) = \text{MET}(G)$ или, что эквивалентно, $\text{CUT}^\square(G) = \text{MET}^\square(G)$ для графа G тогда и только тогда, когда G не имеет K_5 -минора. ■

Сеймур [1981] доказал этот результат для конусов, а Барахона и Маджуб [1986], используя переключение, получили результат для многогранников. Другое доказательство теоремы 27.3.6 дано в Барахона [1983]; оно основано на декомпозиционном результате Вагнера [1937] для графов, не имеющих K_5 -минора, вместе с результатом, показывающим, как получить линейное описание разрезного многогранника графа, который является кликовой k -суммой двух меньших графов ($k \leq 3$). Как приложение предложения 27.3.5 и теоремы 27.3.6, получаем

Теорема 27.3.7. *Задача о максимальном разрезе:*

$$\max(c^T x \mid x \in \text{CUT}^\square(G))$$

(где $c \in Q^E$) может быть решена за полиномиальное время для класса графов без K_5 -минора.

В частности, задача о максимальном разрезе может быть решена в полиномиальное время для планарных графов.

Так как корелляционные полиэдры и разрезные полиэдры находятся во взаимно-однозначном линейном соответствии, вышеприведенные результаты немедленно переносятся на случай корелляционного полиэдра произвольного графа.

Для произвольного графа $G = (V_n, E)$ его *корреляционный конус* $\text{COR}(G)$ и его *корреляционный многогранник* $\text{COR}^\square(G)$ определяются следующим образом: $\text{COR}(G)$ (соответственно, $\text{COR}^\square(G)$) есть проекция корреляционного конуса COR_n (соответственно, корреляционного многогранника $\text{COR}_n^\square$) на подпространство $\mathbb{R}^{E \cup V_n}$, где V_n идентифицируется с множеством диагональных пар ii для $i \in V_n$.

Пусть ∇G обозначает подвешенный граф G , полученный добавлением к G новой вершины, скажем, $n+1$, и соединением ее со всеми вершинами из G . Следовательно, множество ребер $E(\nabla G)$ графа ∇G есть $E \cup \{(i, n+1) \mid i \in V_n\}$. Мы можем определить взаимно-однозначное соответствие ξ между пространством, индексированным с помощью $E(\nabla G)$ и пространством, индексированным с помощью $E \cup V_n$, следующим образом: для $x \in \mathbb{R}^{E(\nabla G)}$, $y \in \mathbb{R}^{E \cup V_n}$, положим $y = \xi(x)$, если

$$(27.3.8) \quad \begin{aligned} y_{ii} &= x_{i,n+1} \quad \text{для } i \in V_n, \\ y_{ij} &= \frac{1}{2}(x_{i,n+1} + x_{j,n+1} - x_{ij}) \quad \text{для } ij \in E. \end{aligned}$$

Следовательно, когда G есть полный граф K_n , то ξ есть обычное ковариантное отображение (отмеченное на позиции $n+1$), как определено в разделе 26.1. Очевидно, разрезной полиэдр для ∇G и корреляционный полиэдр для G находятся во взаимно-однозначном соответствии. Именно,

$$\text{COR}(G) = \xi(\text{CUT}(\nabla G)) \quad \text{и} \quad \text{COR}^\square(G) = \xi(\text{CUT}^\square(\nabla G)).$$

В частности, теорема 27.3.6 дает следующий результат для корреляционного полиэдра, установленный в Падберг [1989].

Теорема 27.3.9. $\text{COR}(G) = \xi(\text{MET}(\nabla G))$ или, что эквивалентно, $\text{COR}^\square(G) = \xi(\text{MET}^\square(\nabla G))$ тогда и только тогда, когда G не имеет K_4 -минора. $\blacksquare$

Неравенства, определяющие многогранник $\xi(\text{MET}^\square(\nabla G))$, возникают как проекции корреляционных неравенств треугольника. Линейная система, определяющая многогранник $\xi(\text{MET}^\square(\nabla G))$, может быть легко получена из линейного описания $\text{MET}^\square(\nabla G)$, рассмотренного в теореме 27.3.3 (i), применением преобразования ξ (полное описание можно найти, например, в Падберг [1989]).

Как прямое приложение теоремы 27.3.7, задача квадратичного 0-1-программирования (5.1.4) без ограничений может быть решена в полиномиальное время, если носитель целевой функции не имеет K_4 -минора.

27.4. Экскурс в теорию цикловых многогранников бинарных матроидов

Как было замечено ранее, некоторые свойства разрезного полиэдра справедливы для более широких семейств множеств, чем разрезы. Действительно, в разделе 26.3.1 мы видели, что операция переключения применима к любому семейству множеств, удовлетворяющему единственному требованию: они замкнуты относительно симметрической разности. Такие семейства множеств известны в литературе как пространства циклов бинарных матроидов. Таким образом, разрезные полиэдры являются частным случаем цикловых полиэдров бинарных матроидов. Другой интересный пример бинарных матроидов дают циклы. Следовательно, бинарные матроиды образуют единую структурную основу для различных комбинаторных объектов. Мы не можем сейчас вдаваться в детали теории матроидов слишком глубоко, так как их детальное исследование выходит за рамки нашей книги. Мы ограничимся предоставлением, без доказательств, некоторых основных результатов, относящихся к цикловым полиэдрам.

В первом подразделе мы напомним некоторые необходимые определения, касающиеся бинарных матроидов¹). В разделе 27.4.2 дан обзор результатов о цикловых конусах и многограннике бинарного матроида. В разделе 27.4.3 мы собрали несколько дополнительных вопросов и результатов, относящихся, в частности, к решеткам и целочисленному конусу, порожденных циклами бинарного матроида.

27.4.1. Предварительные результаты о бинарных матроидах

Циклы, коциклы и матрица представления. *Бинарный матроид* $\mathcal{M}$ состоит из пары $(E, \mathcal{C})$, где E есть конечное множество, а $\mathcal{C}$ есть набор подмножеств E , замкнутый относительно взятия симметрической разности, т. е. такой, что

$$C \Delta C' \in \mathcal{C} \quad \text{для всех } C, C' \in \mathcal{C}.$$

¹) Читатель может обратиться к Уэлшу [1976] или Оксли [1992] для полной информации о матроидах. Мы рассматриваем только бинарные матроиды, оставляя в стороне матроиды общего вида.

Элементы из $\mathcal{C}$ называются *циклами* в $\mathcal{M}$, а $\mathcal{C}$ — пространством циклов для $\mathcal{M}$. Заметим, что $\emptyset$ всегда является циклом.

Два примера бинарных матроидов можно построить из графов. Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф. Так как симметрическая разность двух эйлеровых подграфов (циклов) в G остается эйлеровым подграфом в G , мы получаем первый матроид на E , обозначаемый как $\mathcal{M}(G)$ и называемый *графическим матроидом* для G , пространство циклов которого является множеством эйлеровых подграфов G . Симметрическая разность двух разрезов из G снова является разрезом, следовательно, мы получаем второй бинарный матроид на G , обозначаемый как $\mathcal{M}^*(G)$ и называемый *кографическим матроидом* для G , пространство циклов которого есть множество разрезов в G .

Пусть $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ есть бинарный матроид. Положим

$$\mathcal{C}^* := \{D \subseteq E : |C \cap D| \text{ чётно для всех } C \in \mathcal{C}\}.$$

Тогда $\mathcal{C}^*$ очевидно замкнуто относительно симметрической разности. Следовательно, $\mathcal{M}^* := (E, \mathcal{C}^*)$ снова является бинарным матроидом, называемым *двойственным матроидом* для $\mathcal{M}$. Элементы $\mathcal{C}^*$ (циклы $\mathcal{M}^*$) называются также *коциклами* $\mathcal{M}$. Можно проверить, что матроид, двойственный для $\mathcal{M}^*$, совпадает с $\mathcal{M}$, т. е. $(\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}$. Например, двойственным для графического матроида $\mathcal{M}(G)$ графа G является кографический матроид $\mathcal{M}^*(G)$ (так как разрез и цикл имеют четное пересечение).

Минимальный непустой цикл $\mathcal{M}$ называется *простым циклом* $\mathcal{M}$, и минимальный непустой коцикл называется *простым коциклом*. Каждый непустой цикл может быть разложен в несвязное объединение простых циклов. Матроид $\mathcal{M}$ называется *копростым*, если ни один коцикл не имеет мощность 1 или 2.

Бинарные матроиды могут быть рассматриваемы и как линейные пространства над полем из двух элементов $GF(2) := \{0, 1\}$. Действительно, для любых подмножеств $C, C' \in E$, $\chi^{C \triangle C'} = \chi^C + \chi^{C'} \pmod{2}$. Следовательно, набор множеств $\mathcal{C}$ замкнут относительно симметрической разности тогда и только тогда, когда множество $\{\chi^C \mid C \in \mathcal{C}\}$ является линейным подпространством бинарного пространства $GF(2)^E$. Следовательно, отождествляя множество и его характеристический вектор, мы получаем, что пространства циклов бинарных матроидов есть ни что иное, как линейные подпространства над $GF(2)$. В этой терминологии, пространство коциклов $\mathcal{C}^*$ для $\mathcal{M}$ есть ортогональное дополнение пространства циклов $\mathcal{C}$ в $GF(2)^E$.

Следовательно, пространство циклов бинарного матроида $\mathcal{M}$ на E может быть реализовано как множество решений $x \in \{0, 1\}^E$ линейного сравнения:

$$Mx = 0 \pmod{2},$$

где M есть 0-1-матрица, столбцы которой индексируются множеством E . Такая матрица M называется *матрицей представления* для $\mathcal{M}$. Максимальное число линейно независимых над $GF(2)$ столбцов M называется *рангом* $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M}$ имеет ранг r , то можно найти его матрицу представления, имеющую форму $(I_r \mid A)$, где I_r есть $r \times r$ тождественная матрица. Кроме того, тогда матрица $(A^T \mid I_{|E|-r})$ является матрицей представления для двойственного матроида $\mathcal{M}^*$ для $\mathcal{M}$.

Миноры. Пусть $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ — бинарный матроид и пусть $e \in E$. Положим

$$\mathcal{C} \setminus e := \{C \subseteq E \setminus \{e\} \mid C \in \mathcal{C}\}, \quad \mathcal{C}/\{e\} = \{C \setminus \{e\} \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

На языке бинарных пространств, $\mathcal{C} \setminus e$ возникает из $\mathcal{C}$ при взятии его пересечения с гиперплоскостью $x_e = 0$, в то время как $\mathcal{C}/e$ возникает из $\mathcal{C}$ при взятии его проекции на $\mathbb{R}^{E \setminus \{e\}}$. И $\mathcal{C} \setminus e$, и $\mathcal{C}/e$ вновь являются бинарными пространствами. Следовательно, $\mathcal{M} \setminus e := (E \setminus \{e\}, \mathcal{C} \setminus e)$, и $\mathcal{M}/e := (E \setminus \{e\}, \mathcal{C}/e)$ являются бинарными матроидами. Можно сказать, что $\mathcal{M} \setminus e$ получено из $\mathcal{M}$ *удалением* элемента e , а $\mathcal{M}/e$ получено из $\mathcal{M}$ *сжатием* элемента e . Удаление и сжатие коммутируют со знаком $*$, именно,

$$(\mathcal{M} \setminus e)^* = \mathcal{M}^*/e, \quad (\mathcal{M}/e)^* = \mathcal{M}^* \setminus e.$$

Если $\mathcal{N}$ есть бинарный матроид, который может быть получен из $\mathcal{M}$ серией удалений и сжатий, то говорят, что $\mathcal{N}$ является *минором* $\mathcal{M}$. Каждый минор $\mathcal{M}$ имеет форму: $\mathcal{M} \setminus X/Y$, где X, Y — два непересекающихся подмножества E (так как операции удаления и сжатия коммутируют, т. е. $\mathcal{M} \setminus e/f = \mathcal{M}/f \setminus e$). Заметим, что операции удаления и сжатия, применяемые к графическому матроиду $\mathcal{M}(G)$ графа G , соответствуют обычным операциям удаления и стягивания ребер в G . Следовательно, класс графических матроидов замкнут относительно взятия миноров; то же справедливо для кографических матроидов.

Теперь мы рассмотрим несколько конкретных примеров бинарных матроидов, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Матроид Фано. Матроидом Фано F_7 называется бинарный матроид на множестве $E := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, циклами которого являются

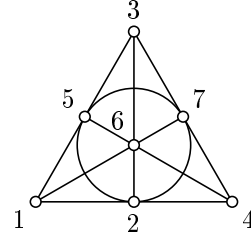
$\emptyset, E$, и множества

124, 135, 167, 236, 257, 347, 456

вместе с их дополнениями. (Здесь мы обозначаем множество $\{1, 2, 4\}$ как 124.) Заметим, что циклы длины 3 в F_7 могут быть рассмотрены как линии плоскости Фано, рассмотренной на рисунке 27.4.1, где показана также матрица представления для F_7 . *Двойственный матроид Фано* F_7^* есть матроид, двойственный к F_7 ; его непустые циклы являются дополнениями линий плоскости Фано.

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Представление плоскости Фано F_7



Плоскость Фано

Рис. 27.4.1

Матроид R_{10} . Пусть $E := \{e_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 5\}$ обозначает множество ребер полного графа K_5 . Тогда R_{10} обозначает бинарный матроид на E , циклы которого являются множествами $C \subseteq E$, образующими циклы четной длины в K_5 . Коциклами являются разрезы K_5 и их дополнения. Заметим, что R_{10} является само-двойственным, т. е. R_{10} изоморфен R_{10}^* .

Бинарное проективное пространство $\mathcal{P}_r$. Пусть $\mathcal{P}_r$ обозначает бинарный матроид, представленный $r \times (2^r - 1)$ матрицей, столбцами которой являются все возможные непустые бинарные векторы длины r . Следовательно, $\mathcal{P}_3$ совпадает с матроидом Фано F_7 . Легко проверить, что $\mathcal{P}_r$ имеет $2^r - 1$ непустых коциклов, каждый мощности 2^{r-1} , и что их характеристические векторы линейно независимы. Двойственный матроид $\mathcal{P}_r^*$ представим, например, матрицей $(I_{2^r-r-1} \mid A_r)$, где I_{2^r-r-1} есть тождественная матрица порядка $2^r - r - 1$, и A_r есть матрица, строки которой — все бинарные вектора длины r , имеющие по крайней мере две ненулевые компоненты.

27.4.2. Цикловой конус и цикловой многогранник

Пусть $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ — бинарный матроид. *Цикловым многогранником* $\mathcal{M}$ называется многогранник $\text{Cyc}^\square(\mathcal{M})$, определяемый как выпуклая оболочка характеристических векторов циклов $\mathcal{M}$, т. е.

$$\text{Cyc}^\square(\mathcal{M}) := \text{Conv}(\{\chi^C \mid C \in \mathcal{C}\}).$$

Цикловым конусом $\mathcal{M}$ называется конус $\text{Cyc}(\mathcal{M})$, определяемый как коническая оболочка характеристических векторов циклов $\mathcal{M}$, т. е.

$$\text{Cyc}(\mathcal{M}) := \left\{ \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C \mid \lambda_C \geq 0 \text{ для всех } C \in \mathcal{C} \right\}.$$

Следовательно, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*(G)$ — кографический матроид графа G , то его цикловой конус и многогранник совпадают, соответственно, с разрезным конусом $\text{CUT}(G)$ и с разрезным многогранником $\text{CUT}^\square(G)$ графа G .

Для изучения цикловых полиэдров мы можем, очевидно, предположить, что имеем дело только с копростыми матроидами. Действительно, если $\{e\}$ есть простой коцикл в $\mathcal{M}$, то никакой цикл в $\mathcal{M}$ не содержит e и, следовательно, цикловой конус и многогранник содержатся в гиперплоскости $x_e = 0$. Аналогично, если $\{e, f\}$ есть простой коцикл в $\mathcal{M}$, то цикловой полиэдр лежит в гиперплоскости $x_e - x_f = 0$. Кроме того, цикловые полиэдры копростого бинарного матроида являются полномерными (см. Барахона и Грётшель [1986]).

Результаты раздела 26.3.1 показывают, что операция переключения сохраняет цикловой многогранник $\text{Cyc}^\square(\mathcal{M})$ любого бинарного матроида $\mathcal{M}$, т. е. $r_C(\text{Cyc}^\square(\mathcal{M})) = \text{Cyc}^\square(\mathcal{M})$ для любого цикла C из $\mathcal{M}$. Кроме того, линейное описание циклового многогранника $\text{Cyc}^\square(\mathcal{M})$ может быть получено из линейного описания циклового конуса $\text{Cyc}(\mathcal{M})$. (Напомним предложение 26.3.6.)

Некоторые допустимые неравенства для циклового многогранника $\text{Cyc}^\square(\mathcal{M})$ могут быть легко определены следующим образом. В первых, неравенства: $0 \leq x_e \leq 1$ (для $e \in E$) являются тривиально допустимыми для $\text{Cyc}^\square(\mathcal{M})$. Пусть D есть коцикл в $\mathcal{M}$, и пусть $F \subseteq D$ с нечетным $|F|$; тогда *коцикловое неравенство*

$$(27.4.2) \quad x(F) - x(D \setminus F) \leq |F| - 1$$

является допустимым для $\text{Cyc}^\square(\mathcal{M})$. (Это следует из того факта, что каждый цикл имеет четное пересечение с коциклом D). Пусть $\text{MET}^\square(\mathcal{M})$ обозначает многогранник в $\mathbb{R}^E$, определенный неравенствами: $0 \leq x_e \leq 1$ ($e \in E$) вместе с коцикловыми неравенствами (27.4.2) для

$D \in \mathcal{C}^*$, $F \subseteq D$ с нечетным $|F|$. Аналогично, определим конус

$$\text{MET}(\mathcal{M}) := \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid x_e - x(D \setminus \{e\}) \leq 0 \text{ для всех } D \in \mathcal{C}^*, e \in D\}.$$

В случае, когда $\mathcal{M}$ есть кографический матроид $\mathcal{M}^*(G)$ графа G , $\text{MET}^\square(\mathcal{M}^*(G)) = \text{MET}^\square(G)$ и $\text{MET}(\mathcal{M}^*(G)) = \text{MET}(G)$ являются обычными полуметрическими полиэдрами графа G (что объясняет наши обозначения).

Мы имеем включения:

$$\text{Cyc}^\square(\mathcal{M}) \subseteq \text{MET}^\square(\mathcal{M}), \quad \text{Cyc}(\mathcal{M}) \subseteq \text{MET}(\mathcal{M}).$$

Следовательно, возникает вопрос о характеристизации матроидов, для которых имеет место равенство. Благодаря переключению

$$\text{Cyc}^\square(\mathcal{M}) = \text{MET}^\square(\mathcal{M}) \iff \text{Cyc}(\mathcal{M}) = \text{MET}(\mathcal{M}).$$

Следуя Сеймуру [1981], бинарные матроиды $\mathcal{M}$, для которых имеет место равенство $\text{Cyc}(\mathcal{M}) = \text{MET}(\mathcal{M})$, называются имеющими «свойство сумм циклов».

Заметим, что ни один из бинарных матроидов F_7^* , R_{10} или $\mathcal{M}^*(K_5)$ не имеет указанного свойства. Действительно, вектор $\left(\frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3}\right)$ является дробной вершиной многогранника $\text{MET}^\square(\mathcal{M})$ для $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*(K_5)$ или F_7^* , и вектор $\left(\frac{3}{4}, \dots, \frac{3}{4}\right)$ является дробной вершиной многогранника $\text{MET}^\square(R_{10})$. На самом деле, исключение этих трех матроидов F_7^* , R_{10} и $\mathcal{M}^*(K_5)$ как миноров характеризует свойство сумм циклов.

Теорема 27.4.3. *Бинарный матроид $\mathcal{M}$ имеет свойство сумм циклов, т. е. $\text{Cyc}(\mathcal{M}) = \text{MET}(\mathcal{M})$ или, что эквивалентно, $\text{Cyc}^\square(\mathcal{M}) = \text{MET}^\square(\mathcal{M})$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ не имеет миноров F_7^* , $\mathcal{M}^*(K_5)$ или R_{10} .* ■

В частности, кографический матроид графа, не содержащего K_5 , имеет свойство сумм циклов — результат, уже упоминавшийся в теореме 27.3.6, и любой графический матроид имеет свойство сумм простых циклов — результат, представленный ранее Сеймуром [1979].

Теорема 27.4.3 была доказана Сеймуром [1981], который рассмотрел свойство сумм простых циклов среди нескольких других свойств, относящихся к многопродуктовым потокам; этот результат следует там из более общих рассуждений. Более прямое доказательство было дано Грётшелем и Трумпером [1989a].

Доказательство теоремы 27.4.3 существенным образом опирается на некоторые декомпозиционные результаты для бинарных матроидов,

включая операции на матроидах, которые могут быть рассмотрены как аналоги операции кликовой суммы для графов. Грубо говоря, матроид, не содержащий миноров F_7^* , $M^*(K_5)$ или R_{10} , может быть разложен на части, которые являются либо кографическими матроидами, не содержащими минора $M^*(K_5)$, или графическими матроидами, или копиями F_7 . Это доказательство может быть сформулировано следующим образом: показать, что свойство сумм циклов сохраняется относительно взятия миноров и операции «кликовой суммы».

Дальнейшие результаты о структуре граней цикловых многогранников можно найти в Барахона и Грётшель [1986] и Грётшель и Трумпер [1989a]. Например, Барахона и Грётшель приводят условия, при которых коцикловое неравенство (27.4.2) определяют фасету циклового многогранника. Очевидно, если неравенство (27.4.2) является определяющим фасету, то D должно быть простым циклом без хорд (*хордой* D называется элемент $e \in E$, для которого существуют два коцикла D_1 и D_2 , такие, что $D_1 \cap D_2 = \{e\}$ и $D = D_1 \Delta D_2$). Обратно, если M не имеет F_7^* минора, и если D является коциклом без хорд, то неравенство (27.4.2) определяет фасету $\text{Cyc}^\square(M)$.

Пример 27.4.4. Цикловой многогранник двойственного проективного пространства $\mathcal{P}_r^*$. Двойственное проективное пространство $\mathcal{P}_r^*$ определяется на множестве мощности $2^r - 1$; оно имеет $2^r - 1$ непустых циклов, каждый мощности 2^{r-1} , характеристические векторы которых линейно независимы. Следовательно, его цикловой многогранник $\text{Cyc}^\square(\mathcal{P}_r^*)$ является полномерным симплексом с 2^r вершинами, фасеты которого определяются неравенствами:

$$\sum_{e \in E} x_e \leq 2^{r-1}$$

вместе с их переключениями относительно $2^r - 1$ непустых циклов. Эти, полученные при помощи переключений, неравенства имеют справа нуль и образуют полное линейное описание конуса $\text{Cyc}(\mathcal{P}_r^*)$. Например, мы получаем, что цикловой многогранник двойственного матроида Фано $F_7^* = \mathcal{P}_3^*$ определяется неравенствами:

$$\sum_{e \in E} x_e \leq 4$$

вместе с их переключениями относительно семи циклов из F_7^* (дополнений линий Фано). Следовательно, мы замечаем, что коцикловые неравенства (27.4.2) не определяют фасеты циклового многогранника для F_7^* .

Следовательно, цикловой многогранник двойственного проективного пространства, будучи симплексом, имеет очень простую структуру граней. Именно, как мы увидим ниже, *любой* цикловой многогранник может быть реализован как проекция такого симплекса. Но нахождение структуры граней циклового многогранника в общем случае является далеко не легкой задачей. (Она трудна уже в частном случае, когда рассматриваемый бинарный матроид является кографическим матроидом полного графа; тогда мы имеем задачу описания структуры граней разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$, которая и составляет главное содержание пятой части.)

Следуя Грётшелю и Трумперу [1989b], мы определим теперь, каким образом любой цикловой многогранник может быть реализован как проекция симплекса. Пусть $\mathcal{M}$ есть копростой бинарный матроид. Рассмотрим матрицу представления $\mathcal{M}$ в виде $(I \mid A)$, где A есть 0-1-матрица, имеющая по меньшей мере две единицы в строке. Скажем, A имеет r столбцов. Напомним, что $\mathcal{P}_r^*$ представим матрицей $(I_{2^r-1} \mid A_r)$, где строками A_r являются все бинарные вектора длины r , имеющие по меньшей мере две единицы. Таким образом, A есть строчная подматрица A_r . Пусть Y обозначает множество индексов для строк A_r , не представленных в A . Тогда $\mathcal{M}$ совпадает с минором сжатия $\mathcal{P}_r^*/Y$ в $\mathcal{P}_r^*$. Следовательно, его цикловой многогранник $\text{Cyc}^\square(\mathcal{M})$ может быть получен из циклового многогранника $\text{Cyc}^\square(\mathcal{P}_r^*)$ проектированием по переменной x_e ($e \in Y$). ■

27.4.3. Еще о пространствах циклов

Мы упомянем здесь некоторые вопросы и результаты, имеющие отношение к другим относящимся к делу аспектам бинарных матроидов. В частности, мы упомянем результаты, связанные с оптимизацией над пространствами циклов. Мы также рассмотрим решетку $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$ и целочисленный конус $\mathbb{Z}_+(\mathcal{M})$, порожденный пространством циклов бинарного матроида $\mathcal{M}$. В этой связи, мы снова имеем две проблемы, возникавшие ранее в связи с существованием небазисных многогранников Делоне и изучения базисов Гильберта.

Именно, так как каждый цикловой многогранник $\text{Cyc}^\square(\mathcal{M})$ является многогранником Делоне решетки $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$, проблема 13.2.3 поднимает вопрос о существовании базиса $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$, состоящего только из циклов. Этот вопрос остается открытым для общих бинарных матроидов, но известны несколько классов бинарных матроидов, для которых имеется

положительный ответ. Годдин [1993] рассмотрел вопрос о характеристизации бинарных матроидов, пространство циклов которых является базисом Гильберта, частным случаем которого является вопрос из раздела 25.3 о базисе Гильберта разрезов. Мы сделаем обзор того, что известно об этой проблеме.

Задача о цикле максимального веса. Пусть $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ — бинарный матроид и $w \in Q^E$. *Задача о цикле максимального веса* состоит в нахождении цикла $C \in \mathcal{C}$, вес которого $\sum_{e \in C} w_e$ максимален. Это NP-трудная задача, так как она содержит задачу о максимальном разрезе в качестве частного случая. Однако для некоторых классов бинарных матроидов эта задача решается за полиномиальное время. Например, это так для кографических матроидов, не содержащих K_5 -миноров (напомним теорему 27.3.7). Это также верно для графических матроидов, как следует из результатов Эдмондса и Джонсона [1973]. Грётшель и Трумпер [1989a] показали, что задача о цикле максимального веса может быть решена в полиномиальное время для большого класса бинарных матроидов, имеющих свойство сумм циклов.

Последний результат основан на доказательстве того, что задача отделения для многогранника $\text{MET}^\square(\mathcal{M})$ может быть решена в полиномиальное время, если $\mathcal{M}$ имеет свойство сумм циклов. Используя декомпозиционные результаты, Grötschel and Truemper свели этот вопрос к специальному случаю, когда $\mathcal{M}$ является графическим или кографическим. Алгоритм отделения был дан Падбергом и Рао [1982] в графическом случае и Барахона и Маджубом [1986] в кографическом случае (последний алгоритм был описан в разделе 27.3.1).

Цикловая решетка. Для бинарного матроида $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ пусть

$$\mathbb{Z}(\mathcal{M}) := \left\{ \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C \mid \lambda_C \in \mathbb{Z} \text{ для всех } C \in \mathcal{C} \right\}$$

обозначает решетку, порожденную его пространством циклов, и называемую *цикловой решеткой* $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M}$ есть кографический матроид полного графа K_n , то $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$ совпадает с разрезной решеткой $\mathcal{L}_n$, введенной ранее. Как мы показали в предложении 25.1.1, разрезная решетка $\mathcal{L}_n$ имеет очень простое описание; именно, целый вектор x принадлежит $\mathcal{L}_n$ тогда и только тогда, когда $x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} \in 2\mathbb{Z}$ для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. Удивительно, что аналогичный результат верен для любой цикловой решетки.

Так как циклы и коциклы имеют четное пересечение, следующее *условие четности*

$$(27.4.5) \quad x(D) \in 2\mathbb{Z} \quad \text{для каждого коцикла } D \text{ из } \mathcal{M}$$

очевидно необходимо для вектора $x \in \mathbb{Z}^E$, принадлежащего $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$. Однако, это условие в общем случае не является достаточным для характеристики $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$. Например, если $\mathcal{M}$ — двойственный матроид Фано F_7^* , то каждый вектор $x \in \mathbb{Z}(F_7^*)$ должен удовлетворять сравнению: $\sum_{e \in E} x_e = 0 \pmod{4}$. Следующий результат виден из работы Каннингхэма [1977].

Теорема 27.4.6. *Следующие утверждения эквивалентны для копростого бинарного матроида $\mathcal{M}$.*

- (i) $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$ полностью характеризуется условием четности (27.4.5), и то же имеет место для любого минора $\mathcal{M}$.
- (ii) $\mathcal{M}$ не имеет минора F_7^* . ■

Эта теорема не дает ответа на вопрос о характеристике бинарных матроидов $\mathcal{M}$, пространства циклов которых описываются условием четности (в то время как для миноров $\mathcal{M}$ это свойство не требуется). Ловас и Сересс [1993] дали полный ответ на этот вопрос. Именно, они дали несколько эквивалентных характеристик таких матроидов. Приводимая ниже теорема 27.4.7 содержит одну из них. Дальнейшие результаты о цикловых решетках можно найти в Ловас и Сересс [1993, 1995].

Нам потребуется следующее определение. Для данной матрицы B со строками $b_1, \dots, b_r$ пусть B' обозначает матрицу со строками $b_1, \dots, b_r$ и $b_i \circ b_j$ ($1 \leq i < j \leq r$), где для двух векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \circ b$ есть вектор с компонентами $a_i b_i$ ($1 \leq i \leq n$).

Теорема 27.4.7. *Пусть $\mathcal{M}$ есть копростой бинарный матроид с матрицей представления B . Тогда цикловая решетка $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$ полностью характеризуется условием четности (27.4.5) тогда и только тогда, когда матрица B' имеет полный столбцовый ранг над $GF(2)$. ■*

Многогранники Делоне цикловых решеток. Мы видели в примере 13.2.5, что разрезный многогранник $\text{CUT}_n^\square$ является многогранником Делоне разрезной решетки $\mathcal{L}_n$. В общем случае, как замечено Хохштэттлером, Лоран и Лёблем [1996], имеет место следующая

Лемма 27.4.8. *Пусть $\mathcal{M}$ — копростой бинарный матроид. Тогда его цикловой многогранник $\text{CUC}^\square(\mathcal{M})$ является многогранником Делоне цикловой решетки $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Мы проверим, что многогранник $\text{CYS}^\square(\mathcal{M})$ вписан в сферу S , пустую в $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$. Действительно, $\text{CYS}^\square(\mathcal{M})$ вписан в сферу S с центром $c := \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ и радиусом $r := \frac{1}{2}\sqrt{|E|}$. Пусть $x \in \mathbb{Z}(\mathcal{M})$. Тогда

$$(\|x - c\|_2)^2 - r^2 = \sum_{e \in E} \left(x_e - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}|E| = \sum_{e \in E} x_e(x_e - 1) \geq 0$$

с равенством в том и только в том случае, когда x принимает только значения 0, 1. Но единственные бинарные векторы $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$ есть характеристические векторы циклов. Это показывает, что сфера S пуста в $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$. ■

В проблеме 13.2.3 мы спрашивали, каждый ли многогранник Делоне является базисным. На этот вопрос нет ответа и для многогранников Делоне цикловых решеток. Именно, мы ставим следующий вопрос:

Проблема 27.4.9. *Можно ли для данного бинарного матроида найти базис B цикловой решетки $\mathbb{Z}(\mathcal{M})$, состоящий только из циклов?*

Известна следующая информация. Галлучио и Лёбль [1996b] показали, что задача 27.4.9 имеет положительный ответ для графических матроидов. Галлучио и Лёбль [1996a] (используя декомпозиционные результаты) показали, что то же следует для матроидов, не имеющих минора F_7^* . Короткое элементарное доказательство этого результата дано Хохштэттлером, Лоран и Лёблом [1996]; кроме того, эти авторы расширили данный результат для одноэлементных расширений бинарных матроидов, не имеющих миноров F_7^* . Проблема 27.4.9 исследовалась, кроме того, в работе Хохштэттлера и Лёбл [1995].

Целочисленный цикловой конус. Для бинарного матроида $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ пусть

$$\mathbb{Z}_+(\mathcal{M}) := \left\{ \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C \mid \lambda_C \in \mathbb{Z}_+ \text{ для всех } C \in \mathcal{C} \right\}$$

обозначает целочисленный конус, порожденный его пространством циклов, называемый *целочисленным цикловым конусом* $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M}$ есть кографический матроид полного графа K_n , то $\mathbb{Z}_+(\mathcal{M})$ состоит из расстояний на n точках, которые изометрически вложимы в гиперкуб (напомним предложение 4.2.4). Очевидно, что

$$\mathbb{Z}_+(\mathcal{M}) \subseteq \mathbb{Z}(\mathcal{M}) \cap \text{CYS}(\mathcal{M}).$$

Как и в разделе 25.3, мы говорим, что $\mathcal{C}$ является базисом Гильберта, если в вышеприведенном включении имеет место равенство. Характеризация бинарных матроидов, пространство циклов которых $\mathcal{C}$ есть базис Гильберта, является открытой проблемой даже для кографических матроидов. Ниже мы суммируем все, что известно по этому вопросу.

Альспах, Годдин и Занг [1994] ответили на этот вопрос для графических матроидов. Именно, они показали, что семейство циклов графа G является базисом Гильберта тогда и только тогда, когда G не имеет в качестве минора граф Петерсена. (Действительно, пусть x обозначает вектор, индексированный множеством ребер графа Петерсена, с величиной 2 на совершенном паросочетании и 1 на оставшихся ребрах. Тогда $x \in \mathbb{Z}(\mathcal{M}(P_{10})) \cap \text{Cyc}(\mathcal{M}(P_{10}))$, но $x \notin \mathbb{Z}_+(\mathcal{M}(P_{10}))$; это показывает, что циклы из P_{10} не образуют базиса Гильберта.)

Заметим, что $\text{Cyc}(\mathcal{M}) = \text{Met}(\mathcal{M})$ для графических матроидов. В общем случае, это равенство имеет место для матроидов со свойством сумм циклов. Фу и Годдин [1999] характеризовали свойство базиса Гильберта в этом классе. Именно, они показали, что

$$\mathbb{Z}_+(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}(\mathcal{M}) \cap \text{Met}(\mathcal{M})$$

тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ есть бинарный матроид без миноров F_7^* , R_{10} , $\mathcal{M}(K_5)$ или $\mathcal{M}(P_{10})$. Это позволяет нам напомнить результат Лоран [1996b] для кографических матроидов, уже упоминавшийся в разделе 25.3: пространство коциклов $\mathcal{M}(G)$ есть базис Гильберта для любого графа $G \neq K_6$, имеющего не более 6 вершин, и не является базисом Гильберта, если G имеет минор K_6 .

Гиперметрические неравенства

В этой главе мы детально изучим класс гиперметрических неравенств. В частности, мы рассмотрим несколько подклассов гиперметрических неравенств, определяющих фасеты в разрезном конусе. Мы также рассмотрим задачу отделения для гиперметрических неравенств. Хотя ее точная сложность неизвестна, имеется несколько результатов, показывающих, что это трудная задача. В частности, задача нахождения наименьшего невыполняющегося гиперметрического неравенства является NP-трудной.

Гиперметрические неравенства принадлежат к большому классу так называемых целевых неравенств. К сожалению, об этих более общих неравенствах известно очень мало. В частности, не известно, содержат ли они новые фасеты (кроме гиперметрических). Кроме того, вычисление их точной правой части является NP-сложной задачей. Один из путей обхода трудностей — замена правой части большими числами (которые легко вычислить). Этим способом можно получить класс допустимых неравенств, которые определяют более слабую релаксацию разрезного многогранника. Это ослабление есть (неполиэдральное) выпуклое тело, обладающее тем свойством, что оптимизацию над ним можно проводить в полиномиальное время. Кроме того, оптимизация над этим выпуклым телом дает очень точное приближение к решению задачи о максимальном разрезе (см. раздел 28.4.1).

28.1. Гиперметрические неравенства: допустимость

Гиперметрические неравенства образуют первый нетривиальный класс допустимых неравенств для разрезного конуса. Как уже было упомянуто ранее в разделе 6.1 (и замечании 5.4.11), они были

независимо открыты несколькими авторами исходя из различных оснований и мотиваций. Гиперметрические неравенства уже были введены в главе 6 в контексте ℓ_1 - и ℓ_2 -метрик. Мы отсылаем читателя к части 2 для детального изучения их свойств, в частности, в связи с геометрией чисел. Здесь мы концентрируем внимание на вопросе определения гиперметрических фасет. Чтобы сделать эту часть независимой, напомним некоторые определения и основные свойства гиперметрических неравенств.

Для определения гиперметрических и других типов неравенств удобно использовать следующее понятие. Для $b \in \mathbb{R}^n$ мы напомним, что $Q(b)$ обозначает вектор в $\mathbb{R}^{E_n}$, ij -я компонента которого равна произведению $b_i b_j$. Следовательно, для $x \in \mathbb{R}^{E_n}$,

$$Q(b)^T x = \sum_{ij \in E_n} b_i b_j x_{ij}.$$

Это обозначение дает удобный путь записи левой части неравенств с $\binom{n}{2}$ коэффициентами, определяемых данным вектором b длины n . В том случае, если мы хотим подчеркнуть тот факт, что вектор b принадлежит $\mathbb{R}^n$, мы будем писать $Q_n(b)$ или $Q_n(b_1, \dots, b_n)$ вместо $Q(b)$.

Определение 28.1.1. Пусть $b = (b_1, \dots, b_n)$ есть целый вектор, удовлетворяющий условию $\sum_{i=1}^n b_i = 1$. Тогда неравенство

$$(28.1.2) \quad Q(b)^T x = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} \leq 0$$

называется *гиперметрическим неравенством*, определенным вектором b . Гиперметрическое неравенство (28.1.2) называется $(2k+1)$ -гональным, если $\sum_{i|b_i < 0} |b_i| = k$ или, что эквивалентно, если $\sum_{i=1}^n |b_i| = 2k+1$.

Лемма 28.1.3. Любое гиперметрическое неравенство (28.1.2) является допустимым для разрезного конуса CUT_n . Кроме того, корнями гиперметрического неравенства являются разрезные векторы $\delta(S)$ ($S \subseteq V_n$), для которых $b(S) := \sum_{i \in S} b_i$ равно 0 или 1.

Доказательство. Для данного $S \subseteq V_n$ справедливо равенство $\sum_{ij \in E_n} b_i b_j \delta(S)_{ij} = b(S)(1 - b(S)) \leq 0$, так как $b(S)$ является целым. ■

Напомним, что гиперметрические неравенства содержат как специальный случай неравенства треугольника:

$$x_{ij} - x_{ik} - x_{jk} \leq 0$$

(которые получаются при взятии $b_i = b_j := 1$ и $b_h := 0$ для $h \in V_n \setminus \{i, j, k\}$).

Так как операция 0-подъема образует фасеты из фасет, мы получаем, что неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету тогда и только тогда, когда неравенство $Q(b')^T x \leq 0$ определяет фасету, где b' есть любой вектор, полученный из b добавлением нулевых компонент. Если мы применим к гиперметрическому неравенству операцию перестановки или операцию переключения относительно одного из его корней, мы снова получим гиперметрическое неравенство. Более точно, применение операции перестановки к $Q(b)^T x \leq 0$ совпадает с перестановкой b_i , переключение неравенства $Q(b)^T x \leq 0$ относительно разреза $\delta(S)$ с $b(S) = 0$ дает неравенство $Q(b')^T x \leq 0$, где $b'_i = -b_i$, если $i \in S$, и $b'_i = b_i$ в остальных случаях. Другими словами, переключение гиперметрического неравенства относительно корня совпадает с изменением знака некоторых коэффициентов b .

Если мы применим к неравенству $Q(b)^T x \leq 0$ переключение относительно вектора разреза $\delta(S)$, не являющегося его корнем, мы получим неравенство, допустимое для разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ (но не для разрезного конуса CUT_n). Например, неравенство:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2k+1} x_{ij} \leq k(k+1)$$

является переключением неравенства $Q_{2k+1}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$.

Гиперметрические неравенства по определению есть неравенства вида:

$$Q(b)^T x \leq 0,$$

где $b \in \mathbb{Z}^n$ и сумма его компонент $\sigma(b) := \sum_{i=1}^n b_i$ равна 1. Можно спросить, что произойдет, если мы ослабим условие на сумму $\sigma(b)$ или позволим ненулевую правую часть. Может ли гиперметрическое неравенство быть видоизменено так, чтобы получилось другое допустимое неравенство? На этот вопрос можно ответить положительно в нескольких случаях.

Мы могли бы начать с напоминания о том, что неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ в случае $\sigma(b) = 0$ есть ни что иное, как неравенство отрицательного типа, которое является допустимым, но не определяющим фасету для CUT_n (напомним следствие 6.1.4).

Если $b \in \mathbb{Z}^n$ имеет произвольную сумму $\sigma(b)$, то всегда можно построить неравенство

$$Q(b)^T x \leq v_0,$$

допустимое для $\text{CUT}_n^\square$; достаточно нужным образом определить правую часть v_0 . Тогда мы получаем класс целевых неравенств, которые обсудим в разделе 28.4.

С другой стороны, если $\sigma(b) \geq 2$, но мы хотим построить однородное неравенство, то мы можем преобразовать величину $Q(b)^T x$, сохраняя допустимость. Клико-паутинные неравенства и неравенства подвешенного дерева являются неравенствами, попадающими в эту категорию.

Имеется и другой путь обобщения гиперметрических неравенств, являющихся допустимыми не для *всех* разрезных векторов, но только для некоторого ограниченного их подмножества. Например, если мы допустим, что $\sigma(b) \geq 2$, то неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ не будет допустимым для всех разрезных векторов, но оно останется допустимым для всех разрезных векторов $\delta(S)$, таких, что $|S| \notin \{1, \dots, \sigma(b) - 1\}$. Когда $\sigma(b) = 2$, неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ является допустимым (и, иногда, определяющим фасету) для четного конуса ECUT_n . Другие примеры такого рода будут рассмотрены в разделе 28.5.

28.2. Гиперметрические фасеты

Имеется несколько классов гиперметрических неравенств, определяющих фасеты для CUT_n . Вот несколько примеров, которые могут быть получены из результатов, представленных далее.

- $Q_3(1, 1, -1)^T x \leq 0$ (треугольная фасета),
- $Q_5(1, 1, 1, -1, -1)^T x \leq 0$ (пентагональная фасета),
- $Q_{2k+1}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ для $k \geq 1$ (чистая гиперметрическая фасета),
- $Q_n(b_1, \dots, b_p, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ для $3 \leq p \leq n - 3, b_1, \dots, b_p > 0$,
- $Q_{11}(2, 2, 2, -2, -2, -2, 1, 1, 1, -1, -1)^T x \leq 0$,
- $Q_{15}(3, 3, -3, -3, -3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1)^T x \leq 0$,
- $Q_{19}(4, 4, -4, -4, 3, 3, -3, -3, -3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1)^T x \leq 0$.

Конечно, пользуясь перестановками, переключениями и 0-подъемом, мы можем получить целые классы гиперметрических фасет из этих примеров. Например, все треугольные фасеты для всех разрезных многогранников $\text{CUT}_n^\square$ могут быть получены из $Q(1, 1, -1)^T x \leq 0$ с помощью этих операций.

В этом разделе мы будем говорить о числе необходимых и/или достаточных условий того, чтобы гиперметрическое неравенство опре-

деляло фасету CUT_n . Представленный здесь материал не является полной характеристикой всех гиперметрических фасет, т. е. всех целых векторов $b = (b_1, \dots, b_n)$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 1$, для которых $Q(b)^T x \leq 0$ является неравенством, определяющим фасету. Однако полная характеристика гиперметрических фасет известна для следующих классов параметров $b = (b_1, \dots, b_n)$:

- $b_1 \geq \dots \geq b_p > 0 > b_{p+1} \geq \dots \geq b_n$ с $b_n = -1$ или с $b_{n-1} = -1$ (см. теорему 28.2.4) (т. е. все отрицательные b_i , кроме, может быть, одного, равны -1).
- $b_i \in \{w, -w, 1, -1\}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, для некоторого целого $w \geq 2$ (см. теорему 28.2.9).

Имеется бесконечно много гиперметрических неравенств. Все они опорные и поэтому определяют непустые грани CUT_n . Однако, так как CUT_n является полиэдральным конусом, он имеет только конечное число граней, т. е. имеются грани, которые порождаются бесконечным числом различных гиперметрических неравенств. Кроме того, так как CUT_n является полномерным, каждая из его фасет определяется единственным (с точностью до умножения на положительную константу) неравенством. Из-за условия $\sum_{1 \leq i \leq n} b_i = 1$ ни одно гиперметрическое неравенство не может быть получено из другого при умножении на положительную константу. Таким образом, среди всех гиперметрических неравенств $Q(b)^T x \leq 0$ имеется только конечное число неравенств, определяющих фасеты разрезного конуса CUT_n . Мы напоминаем следующий более сильный результат из раздела 14.2: гиперметрический конус полиэдрален, т. е. только конечное число гиперметрических неравенств не избыточны.

Следующий результат дает необходимое условие для того, чтобы гиперметрическое неравенство определяло фасету разрезного конуса.

Предложение 28.2.1. Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 1$. Предположим, что b_i, b_j положительны и b_k отрицательно. Положим $P := \{r \mid b_r > 0\} \setminus \{i, j\}$. Если

$$\sum_{r \in P} b_r + b_k < 0,$$

то грань F конуса CUT_n , определяемая неравенством $Q(b)^T x \leq 0$, не является фасетой, и F содержится в фасете, определяемой неравенством треугольника $x_{ij} - x_{ik} - x_{jk} \leq 0$.

Доказательство. Пусть $\delta(S)$ — произвольный разрезный вектор. Мы можем предположить, что $k \notin S$. Если $i, j \in S$, то

$$\begin{aligned} b(S) &\geq b_i + b_j - b_k + \sum_{r|b_r < 0} b_r = b_i + b_j - b_k + 1 - \sum_{r|b_r > 0} b_r = \\ &= 1 - b_k - \sum_{r \in P} b_r > 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\delta(S)$ не является корнем F , так как $b(S) \notin \{0, 1\}$. Следовательно, $|S \cap \{i, j\}| \leq 1$ для каждого корня $\delta(S)$ грани F . Это показывает, что каждый корень F является корнем неравенства треугольника $x_{ij} - x_{ik} - x_{jk} \leq 0$. ■

Из этого наблюдения следует, что если неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету, то сумма двух наибольших коэффициентов из b и абсолютной величины наименьшего коэффициента не может быть больше, чем сумма всех положительных коэффициентов b . Именно, используя общую полиэдральную теорию (см. Грётшель, Ловас и Скрайвер [1988]), можно доказать, что коэффициенты b_i не могут быть больше, чем 2^{n-1} . Используя то, что $b(S) \in \{0, 1\}$ для всех корней $\delta(S)$ гиперметрического неравенства, можно улучшить эту сумму до $n2^{n-2}$. Напомним, что

$$\max_{1 \leq i \leq n} |b_i| \leq \frac{2^{n-1}}{\binom{2n-2}{n-1}} (n-1)!,$$

если неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету CUT_n ; это было доказано в части 2 (см. предложение 14.2.4) как побочный результат интерпретации гиперметрик в терминах геометрии чисел. Эта последняя оценка лучше, чем $n2^{n-2}$. Заметим, однако, что для всех известных гиперметрических фасет $\max_{1 \leq i \leq n} |b_i|$ является только квадратичной функцией от n (см. пример 28.2.6).

Главным средством построения гиперметрических фасет является процедура подъема, описанная в разделе 26.5, и, более точно, лемма подъема 26.5.3. Предположим, что неравенство:

$$v^T x := Q_n(b_1, \dots, b_n)^T x \leq 0$$

порождает фасету для CUT_n , и для данного целого c рассмотрим неравенство

$$(v')^T x := Q_{n+1}(b_1 - c, b_2, \dots, b_n, c)^T x \leq 0.$$

Следовательно, неравенство $(v')^T x \leq 0$ получено из неравенства $v^T x \leq 0$ расщеплением вершины 1 на две вершины 1, $n+1$. Как упоминалось в разделе 26.5, чтобы показать, что $(v')^T x \leq 0$ определяет фасету CUT_{n+1} ,

достаточно проверить выполнимость условия (iii) леммы 26.5.3. Следовательно, достаточно проверить n подмножеств T_k ($1 \leq k \leq n$) множества $\{2, \dots, n, n+1\}$, содержащих элемент $n+1$, таких, что разрезные векторы $\delta(T_k)$ являются корнями $(v')^T x \leq 0$ и такие, что характеристические векторы множеств T_k линейно независимы.

Мы упомянем ниже несколько теорем подъема для гиперметрических фасет, основанных на этой процедуре (см. лемму 28.2.3 и теорему 28.2.4). Как приложение, мы сможем построить несколько классов гиперметрических фасет. Во-первых, прямое применение теоремы 26.4.3, дает следующий результат.

Предложение 28.2.2. Пусть $b_1, \dots, b_n$ — целые числа с условием $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ и $b_2 = b_1 - 1$. Если неравенство:

$$Q_n(b_1, b_1 - 1, b_3, \dots, b_n)^T x \leq 0$$

определяет фасету CUT_n , то неравенство:

$$Q_{n+1}(b_1 - 1, b_1 - 1, b_3, \dots, b_n, 1)^T x \leq 0$$

определяет фасету CUT_{n+1} . В частности, если $\sum_{i=2}^n b_i = 2$ и если неравенство:

$$Q_n(-1, b_2, \dots, b_n)^T x \leq 0$$

определяет фасету CUT_n , то неравенство:

$$Q_{n+2}(-1, b_2, \dots, b_n, 1, -1)^T x \leq 0$$

определяет фасету CUT_{n+2} . ■

Здесь и далее мы используем выражение $[p, q]$ для обозначения множества всех целых i , $p \leq i \leq q$, где $1 \leq p \leq q$ — некоторые целые числа. Лемма 28.2.3 и теорема 28.2.4, приведенные ниже, доказаны в работе Деза [1973a] (см. также Деза и Лоран [1992a] для полных доказательств).

Лемма 28.2.3. Пусть $b_1, \dots, b_n$ — целые числа с условием $\sum_{i=1}^n b_i = 1$. Предположим, что $b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_p > 0$ и $b_{p+1} = \dots = b_n = -1$, где $p \geq 2$, $n \geq 4$. Предположим также, что неравенство $Q_n(b_1, \dots, b_n)^T x \leq 0$ определяет фасету. Тогда

- (i) Неравенство $Q_{n+1}(b_1 + 1, b_2, \dots, b_n, -1)^T x \leq 0$ определяет фасету.
- (ii) Неравенство $Q_{n+1}(b_1 - c, b_2, \dots, b_n, c)^T x \leq 0$ определяет фасету для любого целого $c \in [1, n - p - b_2]$.

Доказательство. Чтобы проиллюстрировать наш метод, мы дадим доказательство пункта (ii) для иллюстрации. Рассмотрим n разрезных векторов $\delta(S)$, где множества S определяются в виде:

$$\begin{aligned} S &= \{i, n+1\} \cup [p+1, p+b_i+c-1] \quad \text{для } 2 \leq i \leq p, \\ S &= \{2, n+1\} \cup [p+1, p+b_2+c] - \{i\} \quad \text{для } p+1 \leq i \leq p+b_2+c-1, \\ S &= \{2, n+1\} \cup [p+1, p+b_2+c-1] \cup \{i\} \quad \text{для } p+b_2+c \leq i \leq n, \\ S &= \{2, 3, n+1\} \cup [p+1, p+b_2+b_3+c]. \end{aligned}$$

Эти n разрезных векторов $\delta(S)$ являются корнями неравенства $Q_{n+1}(b_1 - c, b_2, \dots, b_n, c)^T x \leq 0$, и читатель может проверить, что характеристические векторы множеств S линейно независимы. Следовательно, по лемме подъема 26.5.4, неравенство $Q_{n+1}(b_1 - c, b_2, \dots, b_n, c)^T x \leq 0$ определяет фасету. Доказательство пункта (i) аналогично, но содержит больше технических деталей, так как необходимо различать случаи $b_2 = 1$ и $b_2 \geq 2$. $\blacksquare$

Теорема 28.2.4. Пусть $b_1, \dots, b_n$ — не равные нулю целые числа, такие, что $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_p > 0 > b_{p+1} \geq \dots \geq b_n$, где p есть некоторое целое число, $2 \leq p \leq n-1$.

- (i) Если $p = 2$, то $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету тогда и только тогда, когда $n = 3$ и $b_1 = b_2 = 1, b_3 = -1$.
- (ii) Если $2 \neq p = n-1$, то $Q(b)^T x \leq 0$ не определяет фасету.
- (iii) Предположим, что $p = n-2$.
 - (iiia) Если $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету, то $b_1 = 1$.
 - (iiib) Если $b_{n-1} = -1$, то $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету тогда и только тогда, когда $b_n = -n+4$ и $b_1 = \dots = b_{n-2} = 1$.
- (iv) Предположим, что $3 \leq p \leq n-3$ и $b_{n-1} = -1$. Тогда $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету тогда и только тогда, когда $b_1 + b_2 \leq n-p-1 + \text{sign}(|b_1 - b_p|)$.

(Здесь $\text{sign}(|b_1 - b_p|) = 1$, если $b_1 > b_p$, и $\text{sign}(|b_1 - b_p|) = 0$, если $b_1 = b_p$.)

Доказательство. Пусть R обозначает множество всех корней неравенства $Q(b)^T x \leq 0$.

- (i) Предположим, что $p = 2$. Пусть неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету. Покажем, что оно совпадает с неравенством треугольника. Мы можем предположить, что $1 \notin S$ и $2 \in S$ для каждого корня $\delta(S)$ неравенства $Q(b)^T x \leq 0$. Положим $F := \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Множество R_F проекций на F корней из R состоит из двух векторов $(1, 0, 1)$ и $(1, 1, 0)$. Следовательно, множество R_F имеет ранг 2, что, по

лемме 26.5.2, говорит о том, что проекция $Q_n(b)^T x \leq 0$ на $\overline{F}$ равна нулю. Следовательно, $Q_n(b)^T x \leq 0$ есть неравенство треугольника $x_{12} - x_{13} - x_{23} \leq 0$.

(ii) Если $2 \neq p = n - 1$, то R состоит из разрезных векторов $\delta(\{i\})$ с $b_i = 1$. Следовательно, ранг R меньше или равен $n - 1$, откуда следует, что неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ не определяет фасету.

(iii) Предположим, что $p = n - 2$. Мы можем предположить, что $n \notin S$ для каждого корня $\delta(S)$ из R . Если $b_1 > 1$, то, для каждого корня $\delta(S)$, $n - 1 \in S$, как только $1 \in S$. Положим $F := \{(1, n - 1), (1, n), (n, n - 1)\}$. Тогда множество R_F состоит из векторов $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ и $(1, 0, 1)$. По лемме 26.5.2, если $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету, то проекция $Q_n(b)^T x \leq 0$ на $\overline{F}$ равна нулю, что дает противоречие. Отсюда следует (iii). Если $b_{n-1} = -1$, то понять, что $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету, можно используя процедуру подъема из леммы 28.2.3(i), начиная с треугольной фасеты $Q_3(1, 1, -1)^T x \leq 0$.

Детали доказательства (iv) мы оставляем читателю. ■

Следствие 28.2.5.

- (i) Все чистые гиперметрические неравенства определяют фасеты.
- (ii) Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ таково, что $\sum_{i=1}^n b_i = 1$. Если вектор b имеет по крайней мере 3 и самое большее $n - 3$ положительных компонент, и если все отрицательные компоненты равны -1 , то соответствующее гиперметрическое неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету.

Пример 28.2.6. (Авис и Деза [1991]) При данном $n \geq 7$ положим $m := \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$, и пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ определен как

$$\begin{aligned} b_i &:= m \quad \text{для } i = 1, \dots, n - 2m - 1, \\ b_i &:= m - 1 \quad \text{для } i = n - 2m, \\ b_i &:= -1 \quad \text{для } i = n - 2m + 1, \dots, n - 1, \\ b_i &:= m(2 + 2m - n) + 1 \quad \text{для } i = n. \end{aligned}$$

Поэтому $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ и $\sum_{i=1}^n |b_i| = 2m(n - 2m) - 3 \geq \frac{n^2}{4} - 4$. Гиперметрическое неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ определяет фасету, так как удовлетворяет условиям теоремы 28.2.4 (iv). Следовательно, мы имеем пример гиперметрической фасеты CUT_n , которая является k -гональной с k , квадратическим по n . Мы не знаем примеров, дающих большие значения k . ■

Теперь мы рассмотрим результат подъема, позволяющий определить все гиперметрические фасеты $Q(b)^T x \leq 0$, где $b_i \in \{w, -w, 1, -1\}$ для $1 \leq i \leq n$, для некоторого целого $w \geq 2$. Пусть $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ — неотрицательные целые числа, такие, что $(\alpha - \alpha')w + \beta - \beta' = 1$. Мы хотим характеризовать гиперметрические фасеты вида

$$(28.2.7) \quad Q_n(w, \dots, w, -w, \dots, -w, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0,$$

где α коэффициентов равны w , α' коэффициентов равны $-w$, β коэффициентов равны 1 и β' коэффициентов равны -1 . Для краткости мы обозначим данное неравенство как

$$Q_n(w^{(\alpha)}, -w^{(\alpha')}, 1^{(\beta)}, -1^{(\beta')})^T x \leq 0;$$

таким образом, $n = \alpha + \alpha' + \beta + \beta'$.

Сначала мы сформулируем лемму «удвоенного подъема». Именно, мы докажем, что при некоторых условиях два коэффициента из b могут быть «продублированы» таким образом, что если гиперметрическое неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ типа (28.2.7) определяет фасету, то неравенство, ассоциированное с новым вектором, тоже определяет фасету. Как приложение, можно охарактеризовать гиперметрические неравенства типа (28.2.7), которые определяют фасеты. Лемма 28.2.8, теорема 28.2.9 и лемма 28.2.10, приведенные ниже, могут быть найдены в работе Деа и Лоран [1992a].

Лемма 28.2.8. Пусть $b = (w^{(\alpha)}, -w^{(\alpha')}, 1^{(\beta)}, -1^{(\beta')})$ — целый вектор с $\alpha, \alpha' \geq 1, \beta, \beta'$ удовлетворяющими условию $(\alpha - \alpha')w + \beta - \beta' = 1$. Предположим, что неравенство $Q_n(b)^T x \leq 0$ определяет фасету и что

- либо $\alpha > \alpha'$,
- либо $\alpha = \alpha'$ и $\beta \geq w$

имеют место. Тогда для $b' := (w^{(\alpha+1)}, -w^{(\alpha'+1)}, 1^{(\beta)}, -1^{(\beta')})$ неравенство $Q_{n+2}(b')^T x \leq 0$ определяет фасету. ■

Теорема 28.2.9. Пусть $\alpha, \alpha', \beta, \beta', w \geq 2$ — целые числа, удовлетворяющие условию $\min(\alpha, \alpha') \geq 1$ и $(\alpha - \alpha')w + \beta - \beta' = 1$. Пусть $b := (w^{(\alpha)}, -w^{(\alpha')}, 1^{(\beta)}, -1^{(\beta')})$ и $n = \alpha + \alpha' + \beta + \beta'$.

- (i) Если $\alpha = \alpha'$ (т. е. $\beta' = \beta - 1$), то неравенство $Q_n(b)^T x \leq 0$ определяет фасету тогда и только тогда, когда $\min(\beta, \beta') \geq w$.
- (ii) Если $|\alpha - \alpha'|$ — не равное нулю четное число, то неравенство $Q_n(b)^T x \leq 0$ определяет фасету тогда и только тогда, когда $\min(\beta, \beta') \geq 1$ или $(\min(\beta, \beta') = 0$ и $|\alpha - \alpha'| \geq 4)$.
- (iii) Если $|\alpha - \alpha'|$ — нечетное число, то неравенство $Q_n(b)^T x \leq 0$ определяет фасету тогда и только тогда, когда или $|\alpha - \alpha'| \geq 3$, или $(|\alpha - \alpha'| = 1$ и $\min(\beta, \beta') \geq w)$. ■

Лемма 28.2.10. *Если неравенство:*

$$Q_n(w^{(\alpha)}, -w^{(\alpha')}, 1^{(\beta)}, -1^{(\beta')})^T x \leq 0$$

определяет фасету, то неравенство:

$$Q_{n+2\gamma}((w+1)^{(\gamma)}, (-w-1)^{(\gamma)}, w^{(\alpha)}, -w^{(\alpha')}, 1^{(\beta)}, -1^{(\beta')})^T x \leq 0$$

определяет фасету CUT_{n+2γ} для любого целого γ ≥ 1. ■

Замечание 28.2.11. Некоторые фасеты, введенные Падбергом [1989] для корреляционного многогранника, соответствуют (с точностью до переключения и ковариантного отображения) некоторым классам гиперметрических фасет, полученных в теореме 28.2.4 (iii); это справедливо также для некоторых классов фасет, данных Барахона и Маджубом [1986] для разрезного многогранника (см. Деза и Лоран [1992а] для более точного описания этой связи). ■

С различных точек зрения интересно идентифицировать фасеты, являющиеся симплексами. Например, для $b = (1, 1, -1)$, $b = (1, 1, -1, 0)$ и $b = (1, 1, 1, -1, -1)$ неравенство $Q(b)^T x \leq 0$ определяет симплицальные фасеты для CUT₃, CUT₄ и CUT₅, соответственно. Эти три примера принадлежат к классу неравенств: $Q(n-4, 1, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ ($n \geq 3$). Как показывает следующий результат Деза и Лоран [1992а], каждое такое неравенство определяет симплекс-фасету для CUT_n.

Следствие 28.2.12. *Пусть $b = (b_1, b_2, 1, 1, -1, \dots, -1) \in \mathbb{Z}^n$, где b_1, b_2 — целые числа, такие, что $b_1 \geq b_2$, $b_1 + b_2 = n-5$, и предположим, что $n \geq 6$.*

- (i) $Q_n(b)^T x \leq 0$ образует фасету тогда и только тогда, когда $b_1 \leq n-4$.
- (ii) Грань, определяемая неравенством $Q_n(b)^T x \leq 0$, является симплексом тогда и только тогда, когда $b_1 \geq n-4$.

Доказательство. (i) следует из теоремы 28.2.4 и (ii) — из проверки линейной независимости ненулевых корней. ■

28.3. Отделение гиперметрических неравенств

В этом разделе мы рассмотрим задачу отделения для класса гиперметрических неравенств. Эта задача может быть сформулирована следующим образом:

(P0) Отделение гиперметрических неравенств.

Вход: Целое расстояние d на n точках.

Вопрос: Удовлетворяет ли d всем гиперметрическим неравенствам?

Если нет, найти гиперметрические неравенства, не выполняющиеся для d .

Мы не знаем точной сложности задачи (P0). Однако сложность нескольких родственных задач, описанных ниже, известна. Это показывает, что, скорее всего, (P0) является трудной задачей. Результаты о сложности задач (P1), (P2), (P3) были представлены Ависом и Гришухиным [1993].

(P1) Проверка всех гиперметрических неравенств.

Вход: Целое расстояние d на n точках.

Вопрос: Удовлетворяет ли d всем гиперметрическим неравенствам?

Сложность: co-NP. Существует алгоритм, решающий (P1), за время $O(h(n)(n^4(\log_2(n))^2 + 2n^3 \log_2(n) \log_2(\|d\|_\infty)))$, где $h(n)$ обозначает число гиперметрических неравенств, определяющих фасеты гиперметрического конуса HYP_n .

Мы напомним (из предложения 14.2.4), что если $Q_n(b)^T x \leq 0$ определяет фасету гиперметрического конуса HYP_n , то

$$\max_{1 \leq i \leq n} |b_i| \leq B_n := \frac{2^{n-1}}{\binom{2n-2}{n-1}} (n-1)!.$$

Следовательно, для $h(n)$ получается грубая оценка

$$h(n) \leq (2B_n + 1)^{n-1}.$$

Доказательство для (P1). Пусть d — целое расстояние на n точках. Для проверки того, что d удовлетворяет всем гиперметрическим неравенствам, т. е. что $d \in \text{HYP}_n$, достаточно проверить, что $Q_n(b)^T x \leq 0$ имеет место для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ с суммой 1 и таких, что $|b_i| \leq B_n$ для всех i . Заметим, что величина B_n может быть представлена с помощью $O(n \log_2 n)$ бит. Следовательно, $Q_n(b)^T d$ может быть вычислено за

$O(h(n)(n^4(\log_2(n))^2 + 2n^3 \log_2(n) \log_2(\|d\|_\infty)))$ элементарных операций, что является полиномиальным входных данных. Это показывает, что (P1) является co-NP и подтверждает время работы для решения (P1). ■

Задача отделения¹⁾ для гиперметрических неравенств имеет много шансов быть трудной задачей и в свете следующих задач (P2) и (P3).

(P2) Проверка всех $(2m + 1)$ -гональных неравенств.

Вход: Целое расстояние d на n точках и целое число m .

Вопрос: Удовлетворяет ли d всем $(2m+1)$ -гональным неравенствам?

Сложность: co-NP-полная. Co-NP-полная даже в том случае, если проверять только чистые $(2m + 1)$ -гональные неравенства.

(P3) Нахождение наименьшего невыполняющегося гиперметрического неравенства.

Вход: Целое расстояние d на n точках.

Вопрос: Удовлетворяет ли d всем гиперметрическим неравенствам?

Если нет, найти наименьшее целое k , такое, что d не удовлетворяет $(2k + 1)$ -гональному неравенству.

Сложность: NP-трудная.

Мы докажем сложность задач (P2) и (P3). Для этого мы используем известную сложность следующих задач.

(P4) Нахождение индуцированного полного двудольного подграфа.

Вход: Граф G на n вершинах и целое m , такое, что $2m + 1 \leq n$.

Вопрос: Содержит ли G полный двудольный граф $K_{m,m+1}$ как индуцированный подграф?

Сложность: NP-полная (Гери и Джонсон [1982]).

(P5) Нахождение наибольшего индуцированного полного двудольного подграфа.

Вход: Граф G на n вершинах.

Вопрос: Найти наибольшее целое m , такое, что G содержит $K_{m,m+1}$ как индуцированный подграф.

Сложность: NP-трудная (Гери и Джонсон [1982]).

¹⁾ Эвристический метод отделения для гиперметрических неравенств был предложен в работах Де Симоне [1992], Де Симоне и Ринальди [1994]. (Основная идея состояла в переформулировке задачи отделения для гиперметрических неравенств в виде задачи о максимальном разрезе в большом полном графе, где может быть применена хорошая эвристика решения задачи о максимальном разрезе.) Оказалось, что гиперметрические неравенства являются эффективными с вычислительной точки зрения для решения задачи о максимальном разрезе в полных графах на 20–25 вершинах.

Мы покажем, что (P4) сводится к (P2) и что (P5) сводится самое большее к $\frac{n-1}{2}$ вопросам типа (P3). Сначала введем некоторые обозначения. Пусть $G = (V_n, E)$ — некоторый граф и пусть $t \in \mathbb{R}_+$. Построим расстояние $d^t(G)$ на V_n , положив

$$\begin{aligned} d^t(G)_{ij} &= 1, & \text{если } ij \in E, \\ d^t(G)_{ij} &= 1 + t, & \text{если } ij \in E_n \setminus E. \end{aligned}$$

Для данного $b \in \mathbb{Z}^n$ положим

$$\begin{aligned} V_+(b) &:= \{i \in V_n \mid b_i > 0\}, & V_-(b) &:= \{i \in V_n \mid b_i < 0\}, \\ V(b) &:= V_+(b) \cup V_-(b). \end{aligned}$$

Пусть $E(G, b)$ — множество ребер подграфа графа G , порожденного $V(b)$, и пусть

$$E^\Delta(G, b) := E(G, b) \triangle E(K_{V_+(b), V_-(b)}),$$

где $E(K_{V_+(b), V_-(b)})$ обозначает множество ребер полного двудольного графа с разбиением вершин $(V_+(b), V_-(b))$. Установим следующий результат.

Лемма 28.3.1. Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ и $\sum_{i=1}^n |b_i| = 2k + 1$. Тогда

$$(28.3.2) \quad Q(b)^T d^t(G) = k^2 t - k - (t+1) \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{|b_i|(|b_i| - 1)}{2} - t \sum_{ij \in E^\Delta(G, b)} |b_i b_j|.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $E^\Delta(G, b) = \emptyset$. Тогда

$$Q(b)^T d^t(G) = \sum_{i \in V_-(b), j \in V_+(b)} b_i b_j + (1+t) \left(\sum_{i, j \in V_-(b), i < j} b_i b_j + \sum_{i, j \in V_+(b), i < j} b_i b_j \right).$$

Используя тождество

$$\sum_{i, j \in X, i < j} b_i b_j = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i \in X} b_i \right)^2 - \sum_{i \in X} (b_i)^2 \right)$$

и тот факт, что $\sum_{i \in V_+(b)} b_i = k + 1$, $\sum_{i \in V_-(b)} b_i = -k$, мы получим

$$Q(b)^T d^t(G) = -k(k+1) + \frac{t+1}{2} (k^2 + (k+1)^2 - \sum_{i \in V(b)} (b_i)^2),$$

что совпадает с суммой первых трех членов из (28.3.2). Если $E^\Delta(G, b) \neq \emptyset$, то легко проверить, что нужно добавить еще один член, который равен $-t \sum_{ij \in E^\Delta(G, b)} |b_i b_j|$. ■

Следствие 28.3.3. Пусть $G = (V_n, E)$ — некоторый граф, и m — целое число, такое что $n \geq 2m + 1$. Положим $d_m(G) := m^3 d^t(G)$, где $t := \frac{1}{m} + \frac{1}{m^3}$. Тогда

- (i) $d_m(G)$ удовлетворяет всем $(2k + 1)$ -гональным неравенствам для $1 \leq k \leq m - 1$.
- (ii) $d_m(G)$ удовлетворяет всем $(2m + 1)$ -гональным неравенствам, кроме случая, когда G содержит $K_{m,m+1}$ как индуцированный подграф. В этом случае $d_m(G)$ не удовлетворяет чистому $(2m + 1)$ -гональному неравенству.

Доказательство. Предположим, что $\sum_{i=1}^n |b_i| = 2k + 1$ с $k \leq m - 1$. Тогда, по лемме 28.3.1, $Q(b)^T d^t(G) \leq k^2 t - k \leq 0$. Предположим теперь, что $k = m$. По лемме 28.3.1

$$Q(b)^T d^t(G) \leq \frac{1}{m} - (t + 1) \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{|b_i|(|b_i| - 1)}{2} - t \sum_{ij \in E^\Delta(G, b)} |b_i b_j|.$$

Если $|b_i| \geq 2$ для некоторого i или если $E^\Delta(G, b) \neq \emptyset$, то $Q(b)^T d^t(G) \leq \frac{1}{m} - t < 0$. Иначе, b является чистым, G содержит индуцированный подграф $K_{m,m+1}$, и $Q(b)^T d^T(G) = \frac{1}{m} > 0$. ■

Доказательство для (P2). Пусть G — граф на n вершинах, и m — такое целое число, что $n \geq 2m + 1$. Рассмотрим расстояние $d_m(G)$. По следствию 28.3.3, G содержит индуцированный подграф $K_{m,m+1}$ тогда и только тогда, когда $d_m(G)$ не удовлетворяет $(2m + 1)$ -гональному неравенству (или, что то же, чистому $(2m + 1)$ -гональному неравенству). Это показывает, что (P2) является со-NP-полной. ■

Доказательство для (P3). Пусть G — граф на n вершинах. Положим $k := \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Пусть m обозначает наибольшее целое число, такое что G содержит индуцированный подграф $K_{m,m+1}$. Для $s \leq k$ положим $t := \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$ и рассмотрим расстояние $d_s(G)$. Если $s > m$, то G не содержит индуцированного подграфа $K_{s,s+1}$. Следовательно, по следствию 28.3.3, ответом для (P3) является либо что $d_s(G)$ удовлетворяет всем гиперметрическим неравенствам, либо что $d_s(G)$ не удовлетворяет некоторому $(2p + 1)$ -гональному неравенству для некоторого $p > s$. Если $s = m$, то G содержит $K_{m,m+1}$, и ответом для (P3) является то, что наименьшее неравенство, не выполняющееся для $d_s(G)$, есть $(2s + 1)$ -гональное. Следовательно, ответы для (P3), примененные последовательно к $s = k$,

$k - 1, \dots, 1$, дают нам величину m . Это показывает, что (P3) является NP-трудной задачей. ■

Замечание 28.3.4. В отличие от гиперметрического случая, задача отделения для неравенств отрицательного типа может быть решена в полиномиальное время. Легко убедиться в этом можно, используя отношение (6.1.15), которое утверждает, что конус отрицательного типа NEG_{n+1} и положительно полуопределенный конус PSD_n находятся во взаимно однозначном соответствии при ковариантном отображении ξ . Другими словами, пусть d — расстояние на $n + 1$ точках. Определим $n \times n$ симметрическую матрицу (p_{ij}) , положив

$$\begin{aligned} p_{ii} &:= d_{i,n+1} \quad \text{для } i = 1, \dots, n, \\ p_{ij} &:= \frac{1}{2}(d_{i,n+1} + d_{j,n+1} - d_{ij}) \quad \text{для } i \neq j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда d удовлетворяет всем неравенствам отрицательного типа тогда и только тогда, когда матрица (p_{ij}) является положительно полуопределенной. Кроме того, неравенство отрицательного типа, не выполняющееся для d (если такое существует) может быть найдено в полиномиальное время (по предложению 2.4.3). ■

28.4. Щелевые неравенства

Мы опишем здесь большой класс допустимых для $\text{CUT}_n^\square$ неравенств, обобщающих гиперметрические неравенства и неравенства отрицательного типа. Они были введены Лоран и Поляком [1996b]. Для $b \in \mathbb{Z}^n$ величина

$$\gamma(b) := \min_{S \subseteq V_n} |b(S) - b(\bar{S})|$$

называется *целью* для b . (Здесь $\bar{S} := V_n \setminus S$.) Положим также

$$\sigma(b) := \sum_{1 \leq i \leq n} b_i.$$

Тогда неравенство:

$$(28.4.1) \quad Q(b)^T x \leq \frac{1}{4}(\sigma(b)^2 - \gamma(b)^2)$$

называется *щелевым неравенством*. Следующие две леммы показывают допустимость щелевых неравенств и их замкнутость относительно переключения.

Лемма 28.4.2. Каждое целое неравенство (28.4.1) допустимо для $\text{CUT}_n^\square$.

Доказательство. Пусть $S \subseteq V_n$ и предположим, например, что $b(S) \leq \frac{\sigma(b)}{2}$. Тогда по определению щели $\gamma(b)$, $b(S) \leq \frac{\sigma(b) - \gamma(b)}{2}$, что дает $Q(b)^T \delta(S) = b(S)(\sigma(b) - b(S)) \leq \frac{\sigma(b)^2 - \gamma(b)^2}{4}$. ■

Лемма 28.4.3. Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$, $A \subseteq V_n$ и b' получено из b изменением знака его компонент, индексированных множеством A , т. е., $b'_i := -b_i$, если $i \in A$, и $b'_i = b_i$, если $i \in V_n \setminus A$. Тогда $\gamma(b') = \gamma(b)$.

Доказательство. Для $S \subseteq V_n$ мы имеем $b'(S \triangle A) = b(S \setminus A) - b(A \setminus S) = b(S) - b(A)$ и $b'(\overline{S} \triangle A) = b(\overline{S} \cap \overline{A}) - b(S \cap A) = b(\overline{S}) - b(A)$. Из этого следует, что $\gamma(b') = \gamma(b)$. ■

Очевидно, что класс неравенств (28.4.1) замкнут относительно перестановок. Лемма 28.4.3 утверждает, что этот класс замкнут и относительно переключений, так как

$$\frac{1}{4}(\sigma(b')^2 - \gamma(b')^2) = \frac{1}{4}(\sigma(b)^2 - \gamma(b)^2) - Q(b)^T \delta(A),$$

если b' получено из b изменением знака компонент, индексированных множеством $A \subseteq V_n$. Следовательно, класс щелевых неравенств замкнут относительно перестановок и переключений.

Заметим, что $\gamma(b)$ и $\sigma(b)$ имеют одинаковую четность. Тривиально, $\gamma(b) \leq \sigma(b)$. Легко проверить, что

$$\gamma(b) \leq \max_i |b_i|.$$

В частности, $\gamma(b) = 1$, если $\sigma(b) = 1$, и $\gamma(b) = 0$, если $\sigma(b) = 0$. Следовательно, щелевые неравенства (28.4.1) с $\sigma(b) = 1$ совпадают с гиперметрическими неравенствами, в то время как при $\sigma(b) = 0$ получаются неравенства отрицательного типа. Используя лемму 28.4.3, мы можем определить, какие щелевые неравенства возникают из гиперметрических неравенств и неравенств отрицательного типа с помощью переключений.

Лемма 28.4.4. Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$. Тогда неравенство (28.4.1) может быть получено с помощью переключения из гиперметрического неравенства (соответственно, из неравенства отрицательного типа) тогда и только тогда, когда $\gamma(b) = 1$ (соответственно, $\gamma(b) = 0$), или, что эквивалентно, если существует подмножество $S \subseteq V_n$, такое, что $b(S) = \frac{1}{2}(\sigma(b) - 1)$ (соответственно, $b(S) = \frac{1}{2}\sigma(b)$).

Следовательно, орбиты граней $\text{CUT}_n^\square$, определяемых гиперметрическими неравенствами, состоят из тех граней, определенных неравенствами типа (28.4.1), для которых $\gamma(b) = 1$. Другими словами, глава 28 посвящена классу щелевых неравенств (28.4.1), для которых $\gamma(b) = 1$.

Напомним, что ни одно неравенство (28.4.1) с $\gamma(b) = 0$ не определяет фасету (по следствию 6.4.1). В случае $\gamma(b) = 1$ широкие классы неравенств (28.4.1), определяющих фасеты, были рассмотрены в разделе 28.2. Щелевые неравенства (28.4.1) при $\gamma(b) \geq 2$ сложны для изучения. В частности, мы не знаем ни одного примера целой последовательности $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\gamma(b) \geq 2$, для которой щелевое неравенство (28.4.1) определяет фасету $\text{CUT}_n^\square$. Таким образом, следующая задача является открытой.

Проблема 28.4.5. *Существует ли целая последовательность b с $\gamma(b) \geq 2$, для которой щелевое неравенство: $Q(b)^T x \leq \frac{1}{4}(\sigma(b)^2 - \gamma(b)^2)$ определяет фасету разрезного многогранника?*

Известно только следующее. Лоран и Поляк [1996b] показали¹⁾, что, если компоненты b имеют только два различных (по абсолютной величине) значения и $\gamma(b) \geq 2$, то неравенство (28.4.1) не определяет фасету.

Кроме того, щелевые неравенства представляют следующую сложность: вычисление щели последовательности $b \in \mathbb{Z}^n$ и, следовательно, точной правой части неравенства (28.4.1) является NP-трудной задачей. Действительно, для данного $b \in \mathbb{Z}^n$ решить, имеет ли место $\gamma(b) = 0$, все равно что разбить b на две подпоследовательности с равными суммами; это задача разбиения, которая является NP-полной (Гери, Джонсон [1982]).

Чтобы избежать эти трудности, можно рассмотреть следующее более слабое неравенство:

$$(28.4.6) \quad Q(b)^T x \leq \frac{1}{4}\sigma(b)^2$$

вместо (28.4.1). Неравенство (28.4.6) является тривиально допустимым для $\text{CUT}_n^\square$. (Действительно, если $\gamma(b) \neq 0$, то (28.4.6) вовсе не содержит корней и, если $\gamma(b) = 0$, то (28.4.6) является переключением неравенства отрицательного типа.)

¹⁾ Лоран и Поляк [1996b] дали также характеристику последовательностей b , для которых (28.4.1) определяет фасету, включающую только условия, выраженные в терминах n -мерного пространства, вместо размерности $\binom{n}{2}$, в которой находится разрезный многогранник $\text{CUT}_n^\square$.

Тем не менее неравенства (28.4.6) обладают рядом интересных свойств. Как мы увидим ниже, они, в частности, поддаются исследованию легче, чем щелевые неравенства (28.4.1).

28.4.1. Положительно полуопределенная релаксация задачи о максимальном разрезе

Пусть $\mathcal{J}_n$ обозначает подмножество в $\mathbb{R}^{E_n}$, определенное всеми неравенствами (28.4.6) для всех $b \in \mathbb{Z}^n$, т. е.

$$\mathcal{J}_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{E_n} \mid Q(b)^T x \leq \frac{1}{4} \sigma(b)^2 \text{ для всех } b \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Тогда $\mathcal{J}_n$ есть выпуклое тело в $\mathbb{R}^{E_n}$. Первым интересным свойством является то, что задача отделения для $\mathcal{J}_n$ может быть решена в полиномиальное время. Это — следующая задача:

Для данного вектора $x \in \mathbb{Q}^{E_n}$ определить, принадлежит ли x к $\mathcal{J}_n$. Если нет, найти $b \in \mathbb{Z}^n$, такое, что $Q(b)^T x > \frac{1}{4} \sigma(b)^2$.

Эта задача может быть решена следующим образом: для $x \in \mathbb{R}^{E_n}$ определим $n \times n$ симметрическую матрицу X с нулевой диагональю и элементом x_{ij} на ij -м месте вне диагонали. Тогда

$x \in \mathcal{J}_n \iff$ матрица $J - 2X$ является положительно полуопределена,

где J обозначает матрицу, составленную из одних единиц. (Это следует из того факта, что $b^T(J - 2X)b = \sigma(b)^2 - 4Q(b)^T x$ для всех $b \in \mathbb{R}^n$.) Наш результат получается теперь с учетом предложения 2.4.3.

Следовательно, линейную целевую функцию над $\mathcal{J}_n$ можно оптимизировать в полиномиальное время. То есть, для данного $c \in \mathbb{Q}^{E_n}$, в полиномиальное время можно вычислить величину:

$$B(c) := \max(c^T x \mid x \in \mathcal{J}_n)$$

(с любой точностью); за подробностями отсылаем к Гёмансу и Уильямсону [1994]. Так как неравенства (28.4.6) допустимы для разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$, выпуклое тело $\mathcal{J}_n$ является релаксацией $\text{CUT}_n^\square$, т. е.

$$\text{CUT}_n^\square \subseteq \mathcal{J}_n.$$

Следовательно, величина $B(c)$ является верхней оценкой¹⁾ для величины максимального разреза:

$$\text{mc}(K_n, c) := \max(c^T x \mid x \in \text{CUT}_n^\square).$$

То есть,

$$\text{mc}(K_n, c) \leq B(c)$$

для всех $c \in \mathbb{Q}^{E_n}$. Гёманс и Уильямсон [1994] показали, что величина $B(c)$ дает очень хорошее приближение о максимальном разрезе $\text{mc}(K_n, c)$, когда весовая функция c неотрицательна. Именно,

Теорема 28.4.7. *Для данного $c \in \mathbb{Q}_+^{E_n}$ мы имеем*

$$\frac{\text{mc}(K_n, c)}{B(c)} \leq \alpha,$$

где $\alpha := \min_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{2}{\pi} \frac{\theta}{1 - \cos \theta}$. Величина α может быть оценена следующим образом: $0.87856 < \alpha < 0.87857$.

Доказательство. Как и выше, для вектора $x \in \mathbb{R}^{E_n}$ через X обозначим $n \times n$ симметрическую матрицу с нулевой диагональю и недиагональными элементами x_{ij} . Положим $Y = J - 2X$. Тогда

$$x \in \mathcal{J}_n \iff Y \succeq 0.$$

Поэтому величина $B(c)$ может быть записана в виде

$$B(c) = \max_{\substack{Y = (y_{ij}) \succeq 0 \\ y_{ii} = 1 \ (i=1, \dots, n)}} \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij}(1 - y_{ij}).$$

Используя представление положительно полуопределенных матриц в виде матриц Грама, мы можем переписать $B(c)$ как

$$(28.4.8) \quad B(c) = \max_{v_1, \dots, v_n \in S} \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij}(1 - v_i^T v_j),$$

где $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$. Пусть $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ есть единичные векторы, реализующие оптимум этой задачи, т. е. $B(c) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij}(1 - v_i^T v_j)$. Главный шаг в доказательстве состоит

¹⁾ На самом деле, эта верхняя оценка совпадает с другой верхней оценкой $\varphi(c)$, введенной ранее Делормом и Поляком [1993а], и определенной в терминах задачи минимизации, включая максимальное собственное значение ассоциированной матрицы лапласиана $L(c)$. Именно, $L(c)$ является симметрической $n \times n$ матрицей с диагональными членами $c^T \delta(i)$ (для $i = 1, \dots, n$) и с недиагональными членами $-c_{ij}$ (для $i \neq j$). То, что две оценки $\varphi(c)$ и $B(c)$ совпадают, было показано Поляком и Рендлом [1995] с использованием двойственной задачи полуопределенного программирования.

теперь в том, чтобы найти «хороший» случайный разрез, т. е. разрез, вес которого близок к величине α максимального разреза. Для этого:

- Выберем произвольный единичный вектор $r \in \mathbb{R}^n$.
- Положим $S := \{i \in V_n \mid v_i^T r \geq 0\}$.

Пусть $E(c^T \delta(S))$ обозначает ожидаемый вес разрезного вектора $\delta(S)$. Тогда

$$E(c^T \delta(S)) \leq \text{mc}(K_n, c).$$

Теперь получим нижнюю оценку для $E(c^T \delta(S))$. Мы имеем

$$E(c^T \delta(S)) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} p_{ij},$$

где p_{ij} есть вероятность того, что ребро ij из K_n будет разрезано при разбиении $(S, V_n \setminus S)$. Эта вероятность равна вероятности¹⁾ того, что случайная гиперплоскость разделяет два вектора v_i и v_j . Следовательно,

$$p_{ij} = \frac{1}{\pi} \arccos(v_i^T v_j).$$

Таким образом,

$$E(c^T \delta(S)) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} \frac{\arccos(v_i^T v_j)}{\pi} \geq \alpha \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} \frac{1 - v_i^T v_j}{2} = \alpha B(c),$$

где последнее неравенство следует из определения α . Отсюда следует желаемое неравенство $\alpha B(c) \leq \text{mc}(K_n, c)$. ■

Вышеприведенное доказательство показывает существование случайного разреза, вес которого равен по крайней мере α раз взятому оптимальному значению $\text{mc}(K_n, c)$. Гёманс и Уильямсон [1994] показали, что вышеприведенная процедура может быть неслучайной, так как влечет полиномиальный детерминистический $(\alpha - \varepsilon)$ -приближенный алгоритм для задачи о максимальном разрезе (для любого $\varepsilon > 0$). Заметим, что лучшим из предыдущих результатов в этом направлении был $\frac{1}{2}$ -приближенный алгоритм, полученный Сахни и Гонсалесом [1976].

Результат Гёманса и Уильямсона появился как прорыв в области комбинаторной оптимизации. Именно, он показывает, как задача полуопределенного программирования может быть успешно применена для построения приближенных алгоритмов решения комбинаторных задач. С тех пор этот метод уже был применен к нескольким другим

¹⁾ Эта вероятность была вычислена в разделе 6.4; по соотношению (6.4.4) она равна $\frac{\arccos(v_i^T v_j)}{\pi}$.

задачам; см., в частности, Гёманс и Уильямсон [1994], Каргер, Мотвани и Судан [1994], Фриз и Джеррум [1995].

Рассмотрим следующий пример задачи о максимальном разрезе: $n = 5$, и весовая функция c равна 1 на ребрах 5-цикла C_5 и равна 0 в остальных случаях. Тогда $\text{mc}(K_5, c) = 4$ и $B(c) = \frac{5}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{25 + 5\sqrt{5}}{8}$ (получено при взятии в (28.4.8) векторов $v_i = \left(\cos\left(\frac{4i\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4i\pi}{5}\right)\right)$ для $i = 1, \dots, 5$; см. Делорм и Поляк [1993b]). Следовательно, $\frac{\text{mc}(K_5, c)}{B(c)} = \frac{32}{25 + 5\sqrt{5}} (= .88445)$. Делорм и Поляк [1993b] предположили, что это отношение худшего случая, т. е. что

$$\frac{\text{mc}(K_5, c)}{B(c)} \geq \frac{32}{25 + 5\sqrt{5}} (= .88445)$$

для всех $c \geq 0$. Следовательно, результат теоремы 28.4.7 дает нижнюю оценку, которая очень близка к этой предполагаемой величине.

Карлофф [1996] сделал недавно подробный анализ работы алгоритма Гёманса–Уильямсона. Мы напомним, что неравенства:

$$(28.4.9) \quad \alpha \leq \frac{E(c^T \delta(S))}{B(c)} \leq \frac{\text{mc}(K_n, c)}{B(c)} \leq 1,$$

где $E(c^T \delta(S))$ есть ожидаемый вес разреза, конструируемого случайной процедурой, были описаны в доказательстве теоремы 28.4.7. Карлофф построил класс задач (K_N, c) , для которых равенство достигается справа для почти всех неравенств (28.4.9), а также (асимптотически) слева для почти всех неравенств (28.4.9). (Именно, для данного четного числа m и $b \leq \frac{m}{12}$, рассмотрим граф $J\left(m, \frac{m}{2}, b\right)$, множество вершин которого есть семейство $\mathcal{A}$ подмножеств $[1, m]$ мощности $\frac{m}{2}$, с ребрами между $A, B \in \mathcal{A}$, если $|A \cap B| = b$. Определим весовую функцию c на ребрах K_n ($n := |\mathcal{A}|$), взяв величину 1 на ребрах из $J\left(m, \frac{m}{2}, b\right)$, и величину 0 в остальных случаях.)

Выпуклое множество, на котором вычисляется оценка $B(c)$, есть множество $\mathcal{J}_n$ или, точнее, его образ $\mathcal{E}_n$ при линейной биекции: $x \mapsto 1 - 2x$. Именно,

$$\mathcal{E}_n := \left\{ Y \mid \begin{array}{l} Y \text{ } n \times n \text{ симметрическая матрица} \\ Y \succeq 0, \ y_{ii} = 1, \text{ для } i = 1, \dots, n \end{array} \right\}.$$

Множество $\mathcal{E}_n$ было названо *эллитопом* (получается из эллипсоида и многогранника) в Лоран и Поляк [1995b]. Следовательно, $\mathcal{E}_n$ можно рассматривать как пересечение положительно полуопределенного конуса PSD_n с гиперплоскостями $y_{ii} = 1$ ($i = 1, \dots, n$). Эллитоп $\mathcal{E}_3$ (или, точнее, его 3-мерная проекция, состоящая из верхних треугольных частей матриц Y) показан на рисунке 31.3.6.

Эллитоп $\mathcal{E}_n$ был детально изучен Лоран и Поляком [1995b, 1996a]. Например, известны все возможные размерности для граней $\mathcal{E}_n$, так же как для его полиэдральных граней (см. раздел 31.5); в Лоран и Поляк [1995b] показано, что $\mathcal{E}_n$ имеет вершины (т. е. экстремальные точки, имеющие полномерные нормальные конусы), являющиеся в точности «матрицами разрезов» xx^T для $x \in \{-1, 1\}^n$. Кроме того, в Лоран, Поляк и Рендл [1997] описана связь с хорошо известной тета-функцией, введенной Ловаслом [1983] для аппроксимации Шенноновской емкости и числа независимости графа.

Эллитоп $\mathcal{E}_n$ имеет отношение и к следующей задаче, известной в линейной алгебре как *задача о положительно полуопределенном пополнении*¹⁾:

Для данной частичной действительной симметрической матрицы X , имеющей элементы только на отмеченном подмножестве F позиций (включая диагональные позиции) определить, возможно ли пропущенные позиции заполнить таким образом, что полученная матрица будет положительно полуопределенной.

Легко заметить, что достаточно рассмотреть данную задачу для матриц, у которых все диагональные элементы равны 1. (Действительно, если частичную симметрическую матрицу X можно дополнить до положительно полуопределенной матрицы, то ее диагональные элементы неотрицательны. Кроме того, мы можем предположить, что все диагональные элементы положительны, так как в противном случае задача сводится к рассмотрению подматрицы с положительными диагональными элементами. Наконец, если D обозначает диагональную матрицу с i -м диагональным элементом $\frac{1}{\sqrt{x_{ii}}}$, то частичная матрица $X' := DXD$ (с элементами $\frac{x_{ij}}{\sqrt{x_{ii}x_{jj}}}$ для $ij \in F$) может быть дополнена до положительно полуопределенной матрицы

¹⁾ Смотрите Джонсон [1990]

тогда и только тогда, когда это имеет место для X . Теперь X' есть частичная симметрическая матрица со всеми единицами на главной диагонали.)

В случае частичных симметрических матриц с единицами на главной диагонали, задача положительно полуопределенного пополнения совпадает с задачей принадлежности проекции $\mathcal{E}(G)$ эллитопа $\mathcal{E}_n$ на подпространство $\mathbb{R}^E$, где $G = (V_n, E)$ обозначает граф, соответствующий отмеченным недиагональным позициям (т. е. $E := F \setminus \{ii \mid i = 1, \dots, n\}$). Описание (в замкнутой форме) спроектированных эллитопов $\mathcal{E}(G)$ известно для некоторых классов графов G , именно, для хордовых графов и для серийно-параллельных графов. Детали даны в разделе 31.3.

28.5. Дополнительные замечания

Улучшенные грани, получаемые вычитанием неравенств.

Мы упомянем здесь общий метод, введенный в Де Симоне, Деза и Лоран [1994], построения из данной грани F новой грани, большей размерности и содержащей F . В качестве примера мы применим его к некоторым гиперметрическим неравенствам.

Предположим, что мы имеем допустимое неравенство $v^T x \leq 0$ для CUT_n . Предположим также, что мы можем найти другое допустимое неравенство $w^T x \leq 0$, такое, что неравенство $(v - w)^T x \leq 0$ остается допустимым для CUT_n . Пусть F_v (соответственно, F_w, F_{v-w}) обозначает грань, определенную неравенством $v^T x \leq 0$ (соответственно, $w^T x \leq 0$, $(v - w)^T x \leq 0$). Тогда

$$F_v = F_w \cap F_{v-w}.$$

Следовательно, размерность F_w (или F_{v-w}) больше или равна размерности F_v . Ниже в теореме 28.5.2 мы приводим пример, когда F_{v-w} грань является фасетой. Начнем с простого замечания.

Лемма 28.5.1. Пусть $v^T x \leq 0$ и $w^T x \leq 0$ — два допустимых неравенства для CUT_n , и пусть F_v, F_w обозначают, соответственно, грани, которые они определяют. Если $F_v \subseteq F_w$, то неравенство $(M_w v - t_v w)^T x \leq 0$ является допустимым для CUT_n , где t_v обозначает минимум ненулевых значений $|v^T \delta(S)|$ и M_w обозначает максимум величин $|w^T \delta(S)|$ для всех подмножеств S множества $\{1, \dots, n\}$. ■

Заметим, что, в обозначениях леммы 28.5.1, грань, определяемая неравенством $(M_w v - m_m w)^T x \leq 0$, содержит грань F_v . Кроме того, если $m_v = M_w = 2$, то неравенство $(v - w)^T x \leq 0$ также является допустимым для CUT_n ; например, $m_v = M_v = 2$ для любой треугольной фасеты.

Рассмотрим пример. Запишем неравенство

$$Q_7(1, 3, 2, -1, -1, -1, -2)^T x \leq 0$$

как $v^T x \leq 0$ и неравенство $Q_7(0, 1, 1, 0, 0, 0, -1)^T x \leq 0$ как $w^T x \leq 0$. По предложению 28.2.1 мы знаем, что $F_v \subseteq F_w$. Поэтому $m_v = M_w = 2$. Полагая $b := (1, 3, 2, -1, -1, -1, -2)$ и $d := (0, 1, 1, 0, 0, 0, -1)$, получим неравенство

$$(v - w)^T x - \sum_{1 \leq i < j \leq 7} (b_i b_j - d_i d_j x_{ij}) \leq 0,$$

которое допустимо для CUT_7 . Более того, оно определяет фасету для CUT_7 (действительно, $Q_7(b)^T x \leq 0$ имеет 19 линейно независимых корней, которые вместе с разрезом $\delta(\{1, 7\})$ образуют множество 20 линейно независимых корней вышеприведенного неравенства). (Заметим также, что неравенство $(v - w)^T x \leq 0$ эквивалентно (с точностью до переключения) клико-паутинному неравенству $\text{CW}_7^1(3, 2, 2, -1, -1, -1, -1)^T x \leq 0$, которое будет определено в следующем разделе.) В общем случае мы имеем следующий результат.

Теорема 28.5.2. *Для $n \geq 7$ пусть $b = (2n - 13, 3, 2, -1, -1, -1, -2, \dots, -2)$ и $d = (n - 7, 1, 1, 0, 0, 0, -1, \dots, -1)$ — два вектора в $\mathbb{Z}_n$. Неравенство:*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 7} (b_i b_j - d_i d_j x_{ij}) \leq 0$$

определяет фасету для CUT_n . ■

Обобщение на другие семейства разрезов. Мы покажем, как можно модифицировать гиперметрические неравенства, чтобы они порождали допустимые неравенства для других разрезных полиэдров.

Неравенства для четных Т-разрезов. Пусть $T \subseteq V_n$ есть множество четной мощности. Напомним, что $\delta(S)$ является вектором четного Т-разреза, если $S \cap T$ четно. Пусть $b \in \mathbb{Z}_n^n$ такой, что b_i нечетны для всех $i \in T$ и четны для всех $i \in V_n \setminus T$ и $\sum_{i=1}^n b_i = 2$. Тогда неравенство

$$Q(b)^T x \leq 0$$

допустимо для всех векторов четных Т-разрезов. (Действительно, пусть $\delta(S)$ есть разрезный вектор, такой, что $|S \cap T|$ четно. Тогда $Q(b)^T \delta(S) =$

$= b(S)(2 - b(S)) \leq 0$, так как $b(S) = b(S \cap T) + b(S - T) \neq 1$, потому что $b(S)$ — четное число.)

В специальном случае, когда $T = V_n$ и когда $|b_i| = 1$ для всех $i \in V_n$, вышеприведенное неравенство определяет фасету для четно-разрезного конуса ECUT_n (см. Деза и Лоран [1993b]).

Неравенства для t-адических разрезов. Пусть $t \geq 2$ — некоторое целое число и предположим, что $n \equiv 0 \pmod{t}$. Тогда разрезный вектор $\delta(S)$ называется t-адическим, если $|S| \equiv 0 \pmod{t}$. Следовательно, понятия 2-адического и четного разреза совпадают. Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ такой, что $\sum_{i=1}^n b_i = t$ и $b_i \equiv \beta \pmod{t}$ для всех $i \in V_n$, для некоторого $\beta \in \{1, 2, \dots, t-1\}$. Тогда неравенство

$$Q(b)^T x \leq 0$$

допустимо для всех t-адических разрезных векторов. (Действительно, пусть $\delta(S)$ есть разрезный вектор, такой, что $|S| \equiv 0 \pmod{t}$. Тогда $Q(b)^T \delta(S) = b(S)(t - b(S)) \leq 0$, так как $b(S) \equiv \beta |S| \equiv 0 \pmod{t}$.)

Неравенства для мультиразрезов. Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sigma := \sum_{i=1}^n b_i \geq 1$. Тогда неравенство

$$Q(b)^T x \leq \frac{\sigma(\sigma - 1)}{2}$$

допустимо для мультиразрезного многогранника $\text{MC}_n^\square$. Кроме того, Грётшель и Вакабаяши [1990] показали, что это неравенство определяет фасету $\text{MC}_n^\square$ в специальном случае, когда $|b_i| = 1$ для всех $i \in V_n$. Другие классы таких фасет можно найти в Грётшель и Вакабаяши [1990] и Деза, Грётшель и Лоран [1992].

Другое обобщение гиперметрических неравенств для мультиразрезного многогранника представлено в Чопра и Рао [1995].

Заметим, что если мы предположим, что $\sigma \geq 2$, то неравенство

$$Q(b)^T x \leq \frac{\sigma(\sigma - 2)}{2}$$

становится допустимым для всех четно мультиразрезных векторов, т. е. векторов $\delta(S_1, \dots, S_p)$, соответствующих разбиению V_n , в котором все S_i имеют четные мощности (Деза и Лоран [1993b]).

Клико-паутинные неравенства

В главе 28 мы видели, что допустимое неравенство для CUT_n , именно, гиперметрическое неравенство $Q(b)^T x \leq 0$, может быть построено для любого целого вектора $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 1$. Более общо, как можно построить допустимое неравенство, если мы имеем произвольный целый вектор $b \in \mathbb{Z}^n$?

Когда $\sum_{i=1}^n b_i = 3$, мы можем построить допустимое для CUT_n неравенство следующим образом. Пусть $\{1, 2, \dots, p\}$ обозначает множество индексов i , для которых b_i положительно, и предположим, что $3 \leq p \leq n-1$. Пусть C обозначает цикл с множеством вершин $\{1, \dots, p\}$. Тогда неравенство

$$(29.0.1) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} - \sum_{ij \in E(C)} x_{ij} \leq 0$$

является допустимым для CUT_n . (Действительно, величина левой части неравенства (29.0.1) на разрезном векторе $\delta(S)$ равна $b(S)(3 - b(S)) - |\delta(S) \cap E(C)|$, что неположительно, если $b(S) \leq 0$ или $b(S) \geq 3$; если $b(S) = 1, 2$, то $b(S)(3 - b(S)) = 2$ и $1 \leq |S \cap \{1, \dots, p\}| \leq p-1$, откуда следует, что $|\delta(S) \cap E(C)| \geq 2$.) На самом деле, неравенство (29.0.1) остается допустимым, если мы заменим цикл C произвольным двухвалентным связным графом с множеством вершин $\{1, \dots, p\}$. Однако, мы будем рассматривать здесь только случай цикла. Проблема характеристики двухвалентных связных графов, для которых (29.0.1) порождает фасету CUT_n , остается открытой.

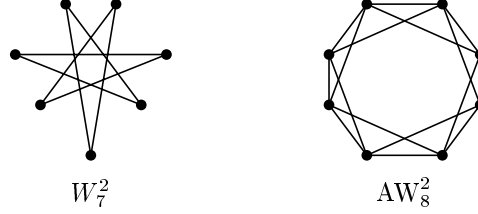
В этой главе мы опишем более общий случай построения допустимого для CUT_n неравенства при любом $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 2r+1$ ($r \geq 1$). Мы рассматриваем класс клико-паутинных неравенств $(\text{CW}_n^r)^T x \leq 0$. Они имеют форму (29.0.1), если цикл C заменить более сложным графом, именно, взвешенной антипаутиной. Позднее, в разделе 30.1, мы рассмотрим класс неравенств подвешенного дерева, в которых цикл заменен на граф подвешенного дерева.

29.1. Чистые клико-паутинные неравенства

Сначала мы введем клико-паутинные неравенства $CW_n^r(b)^T x \leq 0$ в чистом виде, т. е. в случае, когда $|b_i| = 1$ для всех i .

Определение 29.1.1. Для данных целых p и r с $p \geq 2r + 3$, *антипаутиной* AW_p^r с параметрами p и r называется граф с множеством вершин $V_p = \{1, 2, \dots, p\}$, ребрами которого являются пары $(i, i + 1)$, $(i, i + 2), \dots, (i, i + r)$ для $i \in V_p$ (индексы взяты по модулю p). Паутина W_p^r является дополнением антипаутины AW_p^r в полном графе K_p .

Паутина W_7^2 и антипаутина AW_8^2 показаны ниже.



В дальнейшем мы будем использовать одно и то же обозначение AW_p^r (или W_p^r) для графа антипаутины (или паутины) или его множества ребер.

Определение 29.1.2. Пусть n, p, q, r целые числа, удовлетворяющие условиям

- (i) $n = p + q$, $p - q = 2r + 1$, $q \geq 2$ или, что эквивалентно,
- (ii) $p = \frac{n+1}{2} + r$, $q = \frac{n-1}{2} - r$, $0 \leq r \leq \frac{n-5}{2}$.

Чистое клико-паутинное неравенство $(CW_n^r)^T x \leq 0$ с параметрами, удовлетворяющими (i), есть неравенство:

$$(29.1.3) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} - \sum_{ij \in AW_p^r} x_{ij} \leq 0,$$

где $b := (1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ с первыми p коэффициентами, равными 1 и последними $q = n - p$ коэффициентами, равными -1 .

Неравенство (29.1.3) также может быть записано в виде

$$\sum_{ij \in W_p^r} x_{ij} + \sum_{p+1 \leq i < j \leq n} x_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq n} x_{ij} \leq 0.$$

Следовательно, мы имеем паутину на первых p вершинах (тех, для которых $b_i = +1$) и клику на последних q вершинах (тех, для которых $b_i = -1$), что соответствует терминологии «клико-паутинного неравенства». Мы остановим внимание на случае $q \geq 2$, потому что неравенство (29.1.3) в случае $q = 1$ принимает вид:

$$- \sum_{1 \leq i \leq n-1} x_{in} + \sum_{1 \leq i \leq r+1} x_{i,r+i+1} = \sum_{1 \leq i \leq r+1} (x_{i,r+i+1} - x_{in} - x_{r+i+1,n}) \leq 0;$$

следовательно, это есть сумма $r + 1$ неравенств треугольника, т. е., исключая случай $r = 0$, не определяет фасету.

Например, на рисунке 29.1.4 показан граф, соответствующий неравенству $(CW_{11}^2)^T x \leq 0$ (ребра с весом 1 обозначены сплошными линиями, ребра с весом -1 обозначены пунктирными линиями, каждая вершина треугольника смежна с каждой вершиной паутины).

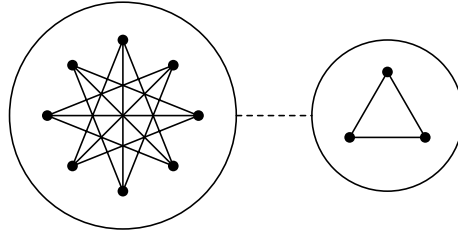


Рис. 29.1.4. $(CW_{11}^2)^T \leq 0$

Заметим, что переключение неравенства $(CW_n^r)^T x \leq 0$ относительно разреза $\delta(\{1, 2, \dots, p\})$ дает неравенство

$$(29.1.5) \quad ((CW_n^r)^{\delta(\{1, \dots, p\})})^T x := \sum_{ij \in W_p^r} x_{ij} + \sum_{p+1 \leq i < j \leq n} x_{ij} + \sum_{1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq n} x_{ij} \leq pq.$$

В случае, когда $q = 2$ (т. е., $r = \frac{n-5}{2}$, $p = 2r + 3$), неравенство (29.1.5) называется также *неравенством бициклически нечетного колеса*; оно было введено Барахона, Грётшелем и Маджубом [1985] и Барахона и Маджубом [1986]. Заметим, что паутинная W_{2r+3}^r является циклом. Рисунок 29.1.6 показывает граф, соответствующий неравенству бициклически нечетного колеса на 7 точках, т. е. неравенству (29.1.6) для $n = 2r + 5$ и $r = 1$.

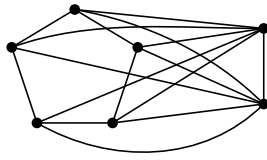


Рис. 29.1.6. Неравенство бициклически нечетного колеса на 7 точках

Рассмотрим несколько специальных случаев клико-паутинного неравенства $(CW_n^r)^T x \leq 0$.

- Для $r = 0$ антипаутина AW_p^0 есть пустой граф. Следовательно, клико-паутинное неравенство $(CW_n^0)^T x \leq 0$ совпадает с чистым гиперметрическим неравенством. Для $r = 1$ антипаутина AW_p^1 является циклом. Клик-паутинное неравенство $(CW_n^1)^T x \leq 0$ есть неравенство (29.0.1), которое было введено в Деза и Лоран [1992a] под именем «циклового неравенства». Для $r = \frac{n-5}{2}$ (наибольшее возможное значение r), т. е. для $p = 2r + 3$ или $q = 2$, паутина W_{2r+3}^r является циклом. Клик-паутинное неравенство $(CW_{2r+5}^r)^T x \leq 0$ совпадает (с точностью до переключения) с неравенством бициклически нечетного колеса.

В действительности, изучение этих трех случаев привело Деза и Лоран [1992a] к общему определению клико-паутинных неравенств.

29.2. Общие клико-паутинные неравенства

Для определения клико-паутинных неравенств $CW_n^r(b)^T x \leq 0$ для произвольного вектора $b \in \mathbb{Z}^n$, мы используем операцию стягивания, описанную в разделе 26.4.

Пусть $b = (b_1, \dots, b_n)$ — такие целые числа, что $\sum_{i=1}^n b_i = 2r + 1$ и предположим, что

$$b_1, b_2, \dots, b_p > 0 > b_{p+1}, b_{p+2}, \dots, b_n$$

где $2 \leq p \leq n-1$. Пусть $N := \sum_{i=1}^n |b_i|$ и $P := \sum_{i=1}^p b_i = \sum_{i|b_i > 0} b_i$. Пусть $\pi(b)$ обозначает разбиение $V_N = \{1, 2, \dots, N\}$ на следующие n классов: p интервалов $I_0 = [1, b_1]$ и $I_i = [b_1 + \dots + b_i + 1, b_1 + \dots + b_i + b_{i+1}]$ для $i = 1, \dots, p-1$ (которые разбивают $[1, P]$) вместе с $n-p$ произвольными

подмножествами, образующими разбиение множества $[P + 1, N] = V_N \setminus [1, P]$, соответственно имеющими мощности $|b_{p+1}|, \dots, |b_n|$.

Определение 29.2.1. Для данных целых $b = (b_1, \dots, b_n)$ и $r \geq 0$, таких что $\sum_{i=1}^n b_i = 2r + 1$, и $N := \sum_{i=1}^n |b_i|$, клико-паутинное неравенство $CW_n^r(b)^T x \leq 0$ определяется как $\pi(b)$ -стягивание (чистого) клико-паутинного неравенства $(CW_N^r)^T x \leq 0$.

Клико-паутинное неравенство $CW_n^r(b)^T x \leq 0$ может быть определено более точно при использовании понятия взвешенной антипаутины. Взвешенной антипаутиной называется реберно-взвешенный граф, полученный стягиванием (обычной) антипаутины. Пусть $b_1, \dots, b_p$ есть положительные целые числа такие, что $\sum_{i=1}^p b_i \geq 2r + 1$. Положим $P := \sum_{i=1}^p b_i$ и рассмотрим разбиение $\pi_0(b_1, \dots, b_p)$ множества $V_P = \{1, \dots, P\}$ на p интервалов $I_0, I_1, \dots, I_p$, описанных выше.

Определение 29.2.2. С использованием вышеприведенных понятий, антипаутиной $AW_p^r(b_1, \dots, b_p)$ называется взвешенный граф, полученный $\pi_0(b_1, \dots, b_p)$ -стягиванием антипаутины AW_P^r .

Тогда клико-паутинное неравенство $CW_n^r(b)^T x \leq 0$ может быть иначе записано в виде:

$$(29.2.3) \quad CW_n^r(b)^T x := \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} - \sum_{ij \in AW_p^r(b_1, \dots, b_p)} x_{ij} \leq 0.$$

В выражении (29.2.3) величину $\sum_{ij \in AW_p^r(b_1, \dots, b_p)} x_{ij}$ надо понимать как сумму $\sum_{1 \leq i < j \leq p} v_{ij} x_{ij}$, где v обозначает вектор весов ребер $AW_p^r(b_1, \dots, b_p)$. В чистом случае, т. е. когда $|b_i| = 1$ для всех i , неравенства (29.1.3) и (29.2.3) совпадают, т. е. совпадают неравенства $CW_n^r(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ и $(CW_n^r)^T x \leq 0$.

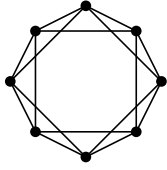
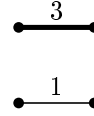
Рассмотрим несколько примеров взвешенных антипаутин.

Лемма 29.2.4. Пусть $b_i \geq r$ для $i = 1, \dots, p$. Тогда антипаутина $AW_p^r(b_1, \dots, b_p)$ есть $\frac{r(r+1)}{2} AW_p^1$, т. е. цикла $C(1, 2, \dots, p)$ с весами $\frac{r(r+1)}{2}$ на его ребрах. ■

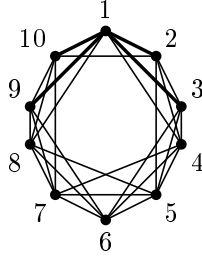
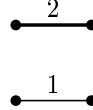
Лемма 29.2.5. Антипаутина $AW_p^r(2, 1, \dots, 1)$ есть взвешенный граф, полученный из AW_p^r

- (i) удалением ребер $(p-i, r-i)$ для $i = 0, 1, \dots, r-2$ и
- (ii) присвоением веса 2 ребрам $(1, i)$ и $(1, p-r+i)$ для $i = 2, \dots, r$. ■

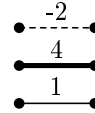
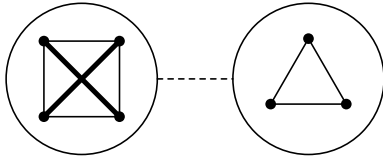
На рисунках 29.2.6, 29.2.7 и 29.2.8 показаны антипаутины AW_8^2 , $AW_4^2(2, 2, 2, 2)$ и $AW_{10}^3(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. На рисунке 4.5 изображен граф, соответствующий неравенству $CW_7^2(2, 2, 2, 2, -1, -1, -1)^T x \leq 0$.

Рис. 29.2.6. AW_8^2 Рис. 29.2.7. $AW_4^2(2, 2, 2, 2)$ 

реберные веса

Рис. 29.2.8. $AW_{10}^3(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ 

реберные веса



реберные веса

Рис. 29.2.9. $CW_7^2(2, 2, 2, 2, -1, -1, -1)^T x \leq 0$

29.3. Клико-паутинные неравенства: допустимость и корни

В этом разделе мы покажем, что клико-паутинное неравенство $CW_n^r(b)^T x \leq 0$ является допустимым для разрезного конуса CUT_n . Так как клико-паутинное неравенство $CW_n^r(b)^T x \leq 0$ определяется

как стягивание чистого клико-паутинного неравенства $(CW_N^r(b))^T \leq 0$ ($N = \sum_{i=1}^n |b_i|$), то достаточно доказать допустимость в чистом случае (напомним лемму 26.4.1). Мы опишем также корни чистого клико-паутинного неравенства. Допустимость чистого клико-паутинного неравенства была представлена Алоном [1990], а корни были описаны Деца и Лоран [1992a].

Предложение 29.3.1. Пусть p, r — целые числа, такие, что $p \geq 2r + 3$, $r \geq 1$, и пусть S есть подмножество множества $\{1, \dots, p\}$ мощности s .

- (i) Если $s \leq r$, то $|\delta_{K_p}(S) \cap AW_p^r| \geq r(r+1)$ с равенством тогда и только тогда, когда S порождает клику в AW_p^r , т. е. если любые две вершины из S смежны в графе AW_p^r .
- (ii) Если $r+1 \leq s \leq \frac{p}{2}$, то $|\delta_{K_p}(S) \cap AW_p^r| \geq r(r+1)$ с равенством тогда и только тогда, когда S есть интервал в $[1, p]$, т. е. если $S = \{i, i+1, i+2, \dots, i+s-1\}$ для некоторого $i \in \{1, \dots, p\}$ (индексы взяты по модулю p).

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по $p \geq 2r+3$. Сначала докажем результат для $p = 2r+3$. Тогда $AW_p^r = K_p \setminus C$, где C есть цикл с множеством вершин $[1, p]$ и с ребрами, заданными парами $(i, i+r+1)$ для $i = 1, \dots, p$, где индексы взяты по модулю p ; таким образом, $C = (1, r+2, p, r+1, p-1, r, p-2, r-1, \dots, 2, r+3)$. Пусть S есть подмножество множества $\{1, \dots, p\}$. Тогда

$$|\delta_{K_p}(S) \cap AW_p^r| = s(2r+3-s) - |\delta_{K_p}(S) \cap C| \geq s(2r+1-s),$$

так как $|\delta_{K_p}(S) \cap C| \leq 2s$. Кроме того, равенство $|\delta_{K_p}(S) \cap AW_p^r| = s(2r+1-s)$ справедливо тогда и только тогда, когда $|\delta_{K_p}(S) \cap C| = 2s$, т. е. если никакие две вершины из S не смежны в C ; это означает, что любые две вершины S смежны в AW_p^r , т. е. что S порождает клику в AW_p^r . Когда $r+1 \leq s \leq \frac{p}{2}$, т. е. $s = r+1$, легко видеть, что S порождает клику в AW_p^r тогда и только тогда, когда S есть некоторый интервал. Следовательно, предложение 29.3.1 справедливо для случая $p = 2r+3$.

Предположим теперь, что предложение 29.3.1 справедливо для некоторого данного $p \geq 2r+3$. Покажем, что оно справедливо и для $p+1$. Сначала рассмотрим связь между графами AW_p^r и AW_{p+1}^r . Предположим, что AW_p^r и AW_{p+1}^r определены, соответственно, на множествах вершин $\{1, \dots, p\}$ и $\{1, \dots, p, p+1\}$ (с вершинами, расположенными в этом циклическом порядке; т. е. новая вершина $p+1$ вставляется между двумя вершинами p и 1 в цикле $(1, 2, \dots, p)$). Тогда

- ребрами, принадлежащими AW_p^r , но не AW_{p+1}^r , являются пары $(i, p-r+i)$ для $i = 1, 2, \dots, r$;
- ребрами, принадлежащими AW_{p+1}^r , но не AW_p^r , являются пары $(i, p+1)$ и $(p+1, p-r+i)$ для $i = 1, 2, \dots, r$.

Возьмем подмножество S множества $\{1, \dots, p, p+1\}$ и положим $T := S \setminus \{p+1\}$. Предположим, что $s := |S| \leq \frac{p+1}{2}$. Для удобства обозначим через v характеристический вектор разреза $\delta_{K_{p+1}}(S)$. Тогда,

$$\begin{aligned}
 |\delta_{K_{p+1}}(S) \cap AW_{p+1}^r| &= \\
 &= |\delta_{K_p}(T) \cap AW_p^r| + \sum_{ij \in AW_{p+1}^r \setminus AW_p^r} v_{ij} - \sum_{ij \in AW_p^r \setminus AW_{p+1}^r} v_{ij} = \\
 &= |\delta_{K_p}(T) \cap AW_p^r| + \sum_{1 \leq i \leq r} (v_{i, p+1} + v_{p+1, p-r+i} - v_{i, p-r+i}) = \\
 &= |\delta_{K_p}(T) \cap AW_p^r| + \sum_{i=1}^r \Delta_i \geq |\delta_{K_p} \cap AW_p^r|,
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta_i := v_{i, p+1} + v_{p+1, p-r+i} - v_{i, p-r+i}$$

для всех $i = 1, \dots, r$. (Заметим, что $\Delta_i \geq 0$ для всех i следует из допустимости неравенств треугольника.) Рассмотрим два случая, зависящие от того, принадлежит ли вершина $p+1$ множеству S , или нет.

Случай 1: $p+1 \notin S$, т. е. $S = T$. Тогда по индукционному предположению неравенства предложения 29.3.1 имеют место. Рассмотрим теперь случай выполнения этих неравенств как равенств.

Предположим сначала, что $s \leq r$ и $|\delta_{K_{p+1}}(S) \cap AW_{p+1}^r| = s(2r+1-s)$. Тогда $|\delta_{K_p}(S) \cap AW_p^r| = s(3r+1-s)$ и $\Delta_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, r$. По индукционному предположению, множество S порождает клику в AW_p^r . Тогда S порождает клику и в AW_{p+1}^r . Действительно, предположим, что существуют $i, j \in S$, такие, что $ij \notin AW_{p+1}^r$. Тогда $ij \in AW_p^r \setminus AW_{p+1}^r$ и, следовательно, ij имеет форму $(i, p-r+i)$ для некоторого $i \in \{1, \dots, r\}$. Отсюда следует, что $\Delta_i = 2$ (так как $p+1 \notin S$), что приводит к противоречию.

Предположим теперь, что $r+1 \leq s \leq \frac{p+1}{2}$ и что $|\delta_{K_{p+1}}(S) \cap AW_{p+1}^r| = r(r+1)$. Тогда $|\delta_{K_p}(S) \cap AW_p^r| = r(r+1)$ и $\Delta_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, r$. По индукционному предположению, множество S есть некоторый интервал из $[1, p]$. Если пара $\{1, p\}$ не содержится в S , то S остается интервалом из $[1, p+1]$. Предположим, что обе вершины

$1, p$ принадлежат S . Тогда $S = [p - x + 1, p] \cup [1, y]$ для некоторых целых $x, y \geq 1$ с $x + y \geq r + 1$. Если $x \geq r$, то $p - r + 1, 1 \in S$, откуда $\Delta_1 = 2$. Если $y \geq r$, то $p, r \in S$, откуда $\Delta_r = 2$. Если $x \leq y \leq r - 1$, то $p - x + 1, x \in S$, откуда $\Delta_x = 2$, и, наконец, если $y \leq x \leq r - 1$, то $p - y + 1, y \in S$, откуда $\Delta_y = 2$. Во всех случаях мы получаем противоречие. Следовательно, пара $\{1, p\}$ не может принадлежать S и, следовательно, S есть интервал из $[1, p + 1]$.

Случай 2: $p + 1 \in S$, т. е. $|T| = s - 1$. Предположим сначала, что $s \leq r$. Обозначим через K множество индексов $i \in [1, r]$, для которых $\Delta_i = 0$; пусть $k := |K|$. Тогда $|\delta_{K_p}(S) \cap AW_p^r| \geq (s - 1)(2r + 1 - (s - 1))$ по индукционному предположению. Кроме того, $\Delta_i = 2$ для всех $i \in [1, r] \setminus K$. Так как $S \cap \{i, p - r + i\} \neq \emptyset$ для всех $i \in K$, мы получаем, что $s \geq 1 + k$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\delta_{K_{p+1}}(S) \cap AW_{p+1}^r| &\geq (s - 1)(2r + 1 - (s - 1)) + 2(r - k) \geq \\ &\geq (s - 1)(2r + 1 - (s - 1)) + 2(r - s + 1) = s(2r + 1 - s). \end{aligned}$$

Это показывает, что справедливо неравенство из предложения 29.3.1 (i). Предположим теперь, что справедливо равенство: $|\delta_{K_{p+1}}(S) \cap AW_{p+1}^r| = s(2r + 1 - s)$. Тогда $|\delta_{K_p}(T) \cap AW_p^r| = (s - 1)(2r + 1 - (s - 1))$ и, по индукционному предположению, T порождает клику в AW_p^r . Кроме того, $s = 1 + k$. Отсюда следует, что $|S \cap \{i, p - r + i\}| = 1$ для всех $i \in K$. Следовательно, $S \cap \{i, p - r + i\} = \emptyset$ для $i \in [1, r] \setminus K$ и $S \cap [r + 1, p - r] = \emptyset$. Мы покажем, что S порождает клику в AW_{p+1}^r . Заметим сначала, что вершина $p + 1$ смежна всем остальным вершинам из S в AW_{p+1}^r . Предположим, что $i \neq j \in S$ не смежны в AW_{p+1}^r . Тогда $i, j \in T$ и, следовательно, ij есть ребро из $AW_{p+1}^r \setminus AW_p^r$. Тогда $j = p - r + i$, и множество S содержит обе вершины i и $p - r + i$, что приводит к противоречию.

Предположим теперь, что $s \geq r + 2$. Тогда $|\delta_{K_p}(T) \cap AW_p^r| \geq r(r + 1)$ (по индукционному предположению, так как $|T| \geq r + 1$). Следовательно, справедливо неравенство из предложения 29.3.1 (ii). Кроме того, если $|\delta_{K_{p+1}}(S) \cap AW_{p+1}^r| = r(r + 1)$, то $|\delta_{K_p}(T) \cap AW_p^r| = r(r + 1)$ и $\Delta_i = 0$ для всех $i \in [1, r]$. По индукционному предположению, множество T есть интервал в $[1, p]$. Если $1 \in S$ или если $p \in S$, то множество S остается интервалом в $[1, p + 1]$. Предположим, что $1, p \notin S$. Тогда $T := [x, y]$ для некоторых $2 \leq x < y \leq p - 1$. Для каждого $i \in [1, r]$ мы имеем $|S \cap \{i, p - r + 1\}| \geq 1$, так как $\Delta_i = 0$. Следовательно, $r \in S$, так как $p \notin S$, откуда $x \leq r$. Кроме того, $p - r + x - 1 \in S$, так как $x - 1 \notin S$,

откуда $p - r + x - 1 \leq y$, т. е. $|T| = y - x + 1 \geq p - r$. Следовательно, $s \geq p - r + 1$, что противоречит тому, что $s \leq \frac{p+1}{2}$.

Наконец, предположим, что $s = r + 1$. Тогда $|\delta_{K_p}(T) \cap AW_p^r| \geq r(r+1)$ (по индукционному предположению), откуда $|\delta_{K_{p+1}}(S) \cap AW_{p+1}^r| \geq r(r+1)$, т. е. справедливо неравенство из предложения 29.3.1 (ii). Предположим теперь, что $|\delta_{K_{p+1}}(S) \cap AW_{p+1}^r| = r(r+1)$. Тогда $|\delta_{K_p}(T) \cap AW_p^r| = r(r+1)$ и $\Delta_i = 0$ для всех $i \in [1, r]$. Следовательно, множество T порождает клику в AW_p^r . Кроме того, $|S \cap \{i, p - r + i\}| = 1$ для всех $i \in [1, r]$ и $S \cap [r + 1, p - r] = \emptyset$. Покажем, что S есть интервал в $[1, p + 1]$. Если $i, j \in [1, r]$ такие, что $i \in S$ и $j \notin S$, то $p - r + j \in S$, откуда $j \geq i$ (так как $p - r + j$ должно быть смежно с i в AW_p^r). Следовательно, $S \cap [1, r]$ имеет вид $[1, x]$ для некоторого $0 \leq x \leq r$. Следовательно, $S = \{p + 1\} \cup [1, x] \cup [p - r + x + 1, p]$ действительно является интервалом в $[1, p + 1]$. $\blacksquare$

Следующие результаты устанавливают допустимость неравенства $(CW_n^r)^T x \leq 0$ и описывают его корни. Для данных $n = p + q$ с $p - q = 2r + 1$ и $q \geq 2$, клик-паутинное неравенство $(CW_n^r)^T x \leq 0$ определено в 29.1.2.

Предложение 29.3.2. *Клик-паутинное неравенство $(CW_n^r)^T x \leq 0$ допустимо для CUT_n .*

Предложение 29.3.3. *Предположим, что $r \geq 1$. Корнями неравенства $(CW_n^r)^T x \leq 0$ являются разрезные векторы $\delta(S)$, где $S = S_+ \cup S_-$ с $S_+ \subseteq \{1, 2, \dots, p\}$ и $S_- \subseteq \{p + 1, \dots, n\}$, и S принадлежит одному из следующих двух типов:*

- (i) (тип 1) $S_- = \emptyset$ и S_+ порождает клику в AW_p^r .
- (ii) (тип 2) S_+ есть интервал в $[1, p]$ с $r + 1 \leq |S_+| \leq p - r$ и $|S_+| - |S_-| = r, r + 1$.

Замечание 29.3.4. Напомним, что когда мы говорим, что S_+ есть интервал в $[1, p]$, мы подразумеваем, что $S_+ = \{i, i + 1, \dots, i + |S_+| - 1\}$ (для некоторого $i \in \{1, \dots, p\}$), где индексы взяты по модулю p . В представлении корней, данном в предложении 29.3.3, имеется некоторая избыточность. Легко видеть, что не являющееся избыточным описание корней (т. е. такое, в котором каждый корень встречается только один раз) может быть получено при замене в предложении 29.3.3 семейства множеств типа 2 на семейство множеств типа $2'$, где (тип $2'$)

S_+ есть интервал в $[1, p]$ с $r + 1 \leq |S_+| \leq p - r - 2$ и $|S_+| - |S_-| = r$.

Заметим также, что, если $S \subseteq \{1, \dots, p\}$ порождает клику в AW_p^r , то $|S| \leq r+1$. Например, интервал $[1, r+1] = \{1, 2, \dots, r, r+1\}$ порождает клику в AW_p^r ; следовательно, любое подмножество S следующего типа 1^* порождает клику в AW_p^r :

(тип 1^*) S содержится в интервале длины $r+1$ из $[1, p]$.

В общем случае могут существовать множества, не принадлежащие типу 1^* и порождающие клику в AW_p^r . Например, для $r = 3$ и $p = 9$ множество $\{1, 4, 7\}$ порождает клику в AW_9^3 . Однако для $p \geq 3k$ только множества типа 1^* порождают клики в AW_p^r . В наших доказательствах для клико-паутинных фасет мы будем использовать только корни $\delta(S)$, в которых S является множеством типа 1^* или типа 2. ■

Доказательство предложений 29.3.2 и 29.3.3. Возьмем подмножество S множества $\{1, \dots, n\}$. Тогда $S = S_+ \cup S_-$, где $S_+ \subseteq \{1, \dots, p\}$ и $S_- \subseteq \{p+1, \dots, n\}$. Положим $s := |S|$, $s_+ := |S_+|$, $s_- := |S_-|$; тогда $s = s_+ + s_-$. Отсюда

$$\begin{aligned} (CW_n^r)^T \delta(S) &= b(S)(2r+1-b(S)) - |\delta_{K_p}(S) \cap AW_p^r| = \\ &= (s_+ - s_-)(2r+1-(s_+ - s_-)) - |\delta_{K_p}(S) \cap AW_p^r|. \end{aligned}$$

Предположим, что $s_+ \leq r$. Тогда

$$(CW_n^r)^T \delta(S) \leq (s_+ - s_-)(2r+1-(s_+ - s_-)) - s_+(2r+1-s_+) \leq 0.$$

Первое неравенство следует из предложения 29.3.1 (i), и второе из того факта, что отображение $x \mapsto x(2r+1-x)$ является монотонно неубывающим для $x \leq r$. Следовательно, если $\delta(S)$ есть корень $(CW_n^r)^T x \leq 0$, то $s_- = 0$ и, по предложению 29.3.1 (ii), S_+ порождает клику в AW_p^r . Предположим теперь, что $r+1 \leq s_+ \leq \frac{p}{2}$. Тогда

$$(CW_n^r)^T \delta(S) \leq (s_+ - s_-)(2r+1-(s_+ - s_-)) - r(r+1) \leq 0.$$

Первое неравенство следует из предложения 29.3.1 (ii), и второе из того факта, что $x(2r+1-x) \leq r(r+1)$ для любого целого x . Следовательно, если $\delta(S)$ есть корень $(CW_n^r)^T x \leq 0$, то $s_+ - s_- = r, r+1$ и, по предложению 29.3.1 (ii), S_+ есть интервал. Это завершает доказательство. ■

Как найти корни общего клико-паутинного неравенства $CW_n^r(b)^T x \leq 0$? Они могут быть выведены из корней чистого случая способом, описанным в лемме 26.4.1 (ii). В качестве примера опишем корни двух клико-паутинных неравенств, именно, неравенства

$\text{CW}_n^r(b)^T x \leq 0$, где $b_i \geq r$, если $b_i > 0$, и неравенства

$$\text{CW}_n^r(2, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0.$$

Предложение 29.3.5. *Предположим, что $b_i \geq r$ для $i \in \{1, \dots, p\}$ и $b_i < 0$ для $i \in \{p+1, \dots, n\}$. Тогда корнями неравенства $\text{CW}_n^r(b)^T x \leq 0$ являются разрезные векторы $\delta(S)$, для которых $S \cap [1, p]$ есть интервал из $[1, p]$ и $b(S) = r, r+1$.* ■

Предложение 29.3.6. *Корнями неравенства*

$$\text{CW}_n^r(2, 1, \dots, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$$

(где имеется $p-1$ коэффициентов $+1$ и $n-p$ коэффициентов -1) являются разрезные векторы $\delta(S)$, где $S = S_+ \cup S_-$, а $S_+ \subseteq \{1, 2, \dots, p\}$ и $S_- \subseteq \{p+1, \dots, n\}$ удовлетворяют (i) или (ii).

- (i) $S_- = \emptyset, 1 \notin S$ (соответственно, $1 \in S$) и S (соответственно, $S \cup \{p+1\}$) порождает клику в AW_{p+1}^r , где AW_{p+1}^r есть антипутьина, определенная на $p+1$ вершинах $1, 2, \dots, p, p+1$, взятых в этом циклическом порядке.
- (ii) S_+ есть интервал в $[1, p]$ и
 - либо $1 \notin S_+, r+1 \leq |S_+| \leq p+1-r$ и $|S_+| - |S_-| = r, r-1$
 - либо $1 \in S_+, r \leq |S_+| \leq p-r$ и $|S_+| - |S_-| = r, r+1$.

В случае $r = 1$ AW_p^1 есть цикл длины p , и любое интервальное стягивание цикла (т. е. стягивание только последовательных вершин цикла) снова является циклом. Следовательно, для $r = 1$, клико-паутинное неравенство $\text{CW}_n^1(b)^T x \leq 0$ принимает достаточно простую форму; именно, если $b_1, \dots, b_p > 0, b_{p+1}, \dots, b_n < 0$, то

$$\text{CW}_n^1(b)^T x := \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} - \left(\sum_{1 \leq i \leq p-1} x_{i, i+1} + x_{1p} \right) \leq 0.$$

В частности, для всех корней $\delta(S)$ неравенства $\text{CW}_n^1(b)^T x \leq 0$ множество $S \cap [1, p]$ должно быть интервалом. Заметим также, что для любых целых $r \geq 1, b_1, \dots, b_p > 0 > b_{p+1}, \dots, b_n$, неравенство

$$(29.3.7) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} - \frac{r(r+1)}{2} \left(\sum_{1 \leq i \leq p-1} x_{i, i+1} + x_{1p} \right) \leq 0$$

является допустимым для CUT_n . Как мы заметили в лемме 29.2.4, когда $b_1, \dots, b_p \geq r$, клико-паутинное неравенство $\text{CW}_n^r(b)^T x \leq 0$ имеет, на самом деле, форму (29.3.7). Однако, если $b_i < r$ для некоторого $i \in \{1, \dots, p\}$, то неравенство (29.3.7) не определяет фасету, так как его

доминирует неравенство $CW_n^r(b)^T x \leq 0$. (Действительно, можно легко проверить, что неравенство

$$|\delta_{K_p}(S) \cap AW_p^r(b_1, \dots, b_p)| \leq \frac{r(r+1)}{2} |\delta_{K_p}(S) \cap C|$$

справедливо для любого подмножества S множества $\{1, \dots, p\}$, где C обозначает цикл $(1, 2, \dots, p)$ (используя определение стягивания и разлагая S в объединение интервалов из $[1, p]$; см. лемму 2.8 в Деза, Грётшель и Лоран [1992].)

Как простое следствие описания корней $(CW_n^r)^T x \leq 0$, мы имеем следующий результат.

Предложение 29.3.8. *Предположим, что $r \geq 1$. Тогда $b(S) \in \{1, 2, \dots, r+1\}$ для каждого ненулевого корня $\delta(S)$ неравенства $CW_n^r(b)^T x \leq 0$.* ■

29.4. Клико-паутинные фасеты

В этом разделе мы опишем несколько классов клико-паутинных фасет, т. е. несколько классов параметров b , для которых неравенство $(CW_n^r)^T x \leq 0$ определяет фасету. Полная характеристика всех клико-паутинных фасет является слишком трудной задачей; действительно, эта проблема не решена уже для специального случая $r = 0$ гиперметрических неравенств. Мы можем ограничиться случаем $r \geq 1$, так как случай $r = 0$ был рассмотрен в предыдущей главе. Известны следующие классы клико-паутинных фасет:

- $(CW_n^r)^T x \leq 0$, т. е. $CW_n^r(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ (чистый случай),
 - $CW_n^r(r, \dots, r, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ для $r \geq 1$, $p \geq 5$,
 - $CW_n^r(b_1, \dots, b_p, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ с $b_1, \dots, b_p \geq r$ и некоторыми добавочными условиями (см. теорему 29.4.4),
 - $CW_b^r(2, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ для $r \geq 1$, $p \geq 2r + 3$,
 - $CW_n^r(b_1, \dots, b_p - 1, \dots, -1, -2, \dots, -2)^T x \leq 0$ для $b_1, \dots, b_p \geq r$ и некоторыми добавочными условиями (см. теорему 29.4.6).
- Вот три примера клико-паутинных фасет¹⁾
- $CW_7^1(3, 2, 2, -1, -1, -1, -1)^T x \leq 0$,

¹⁾ Эти три клико-паутинные фасеты были найдены Ассуадам и Делормом [1982] (см. Ассуад [1984]). Однако первый пример был получен ранее Ависом [1977] и

- $CW_7^1(2, 2, 1, 1, -1, -1, -1)^T x \leq 0$,
- $CW_7^1(1, 1, 1, 1, 1, -1, -1)^T x \leq 0$.

Для $n \leq 6$ все фасеты CUT_n являются гиперметрическими, и для $n = 7$ единственными клико-паутинными фасетами для CUT_7 являются либо гиперметрические фасеты, либо одна из вышеназванных трех фасет. Полное описание разрезного конуса CUT_n для $n \leq 7$ см. в разделе.

Начнем с условия, необходимого для того, чтобы клико-паутинное неравенство $CW_n^r(b)^T x \leq 0$ определяло фасету. Следующий результат обобщает предложение 28.2.1, которое соответствовало случаю $r = 0$, т. е. случаю гиперметрических неравенств.

Предложение 29.4.1. Пусть $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 2r + 1$, $r \geq 1$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_p > 0 > b_{p+1} \geq \dots \geq b_n$. Если

$$b_1 + b_2 - b_n > \sum_{i=1}^p b_i - r,$$

то грань F конуса CUT_n , определяемая клико-паутинным неравенством $CW_n^r(b)^T x \leq 0$, содержится в фасете, определяемой неравенством треугольника $x_{12} - x_{1n} - x_{2n} \leq 0$; следовательно, F не является фасетой CUT_n .

Доказательство. Пусть $\delta(S)$ — ненулевой корень $CW_n^r(b)^T x \leq 0$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $n \notin S$; тогда $b(S) \in \{1, 2, \dots, r + 1\}$ по предложению 29.3.8. Множество $\{1, 2\}$ не содержится в S (иначе $b(S) \geq b_1 + b_2 + \sum_{i=p+1}^{n-1} b_i \geq r + 2$). Из этого следует, что $\delta(S)$ является также корнем неравенства треугольника: $x_{12} - x_{1n} - x_{2n} \leq 0$. ■

Неравенство из предложения 29.4.1 — лучшее из возможных. Например, неравенства

$$\begin{aligned} CW_n^1(n - 5, 2, 1, 1, -1, \dots, -1)^T x &\leq 0, \\ CW_n^1(b_1, n - 2 - b_1, 2, -1, \dots, -1)^T x &\leq 0 \end{aligned}$$

(где $2 \leq b_1 \leq 4$) определяют фасеты; равенство $b_1 - b_2 - b_n = \sum_{1 \leq i \leq p} b_i - r$ справедливо для каждого из них (при $r = 1$).

(в контексте корелляционного многогранника) Мак Раз и Дэвидсоном [1972]. Эти примеры показывают, что разрезный конус имеет фасеты, которые не порождены гиперметрическими неравенствами. Ранее некоторые авторы предполагали (см., например, Дэвидсон [1969], Деза [1973a], Питовский [1991]), что все фасеты разрезного конуса являются гиперметрическими.

Теперь мы рассмотрим несколько классов клико-паутинных фасет. Когда мы рассматриваем клико-паутинное неравенство $CW_n^r(b)^T x \leq 0$, мы всегда предполагаем, что b есть целый вектор, такой, что $\sum_{i=1}^n b_i = 2r + 1$, даже если это условие не оговаривается особо.

Теорема 29.4.2.

- (i) $(CW_n^r)^T x \leq 0$, т. е. чистое клико-паутинное неравенство (29.1.3), определяет фасету CUT_n для любого $r \geq 0$.
- (ii) $CW_n^r(r, \dots, r, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ определяет фасету для всех $r \geq 1$, $p \geq 5$.
- (iii) $CW_n^r(2, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ определяет фасету для всех $r \geq 1$, $p \geq 2r + 3$.
- (iv) $CW_n^r(r + 2, r + 1, r + 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ определяет фасету для всех $r \geq 1$.
- (v) $CW_n^r(r + 1, r + 1, r, r, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ определяет фасету для всех $r \geq 1$. ■

Теорема 29.4.2 (i)–(iii) приведена в работе Деза и Лоран [1992b], а (iv)–(v) — в Деза и Лоран [1992c]. Мы докажем только утверждение (i). Доказательства для (ii)–(v) проводятся по той же схеме с несколько большим количеством технических деталей. Чтобы не прерывать изложение, мы отложим доказательство теоремы 29.4.2 (i) до раздела 29.6.

Другие классы клико-паутинных фасет могут быть получены применением операции подъема из приведенной ниже теоремы 29.4.3. Этот результат получается как прямое применение теоремы 26.4.4, опирающееся на то, что две взвешенные антипаутины $AW_p^r(b_1, b_2, \dots, b_p)$ и $AW_p^r(b'_1, b_2, \dots, b_p)$ совпадают, если $b_1, b'_1 \geq r$. Класс фасет из теоремы 29.4.4 был рассмотрен в работе Деза и Лоран [1992c].

Теорема 29.4.3. Пусть $r \geq 1$, $b_1, \dots, b_p > 0 > b_{p+1}, \dots, b_n$ с $\sum_{i=1}^n b_i = 2r + 1$. Предположим, что для некоторых различных $j, k \in \{p + 1, \dots, n\}$, $b_j = b_k := d < 0$, и что для некоторого $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, k\}$ либо $b_i \leq d$, либо $b_i \geq r$. Если неравенство:

$$CW_n^r(b_1, \dots, b_n)^T x \leq 0$$

определяет фасету CUT_n , то неравенство:

$$CW_{n+1}^r(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i - d, b_{i+1}, \dots, b_n, d)^T x \leq 0$$

определяет фасету CUT_{n+1} . ■

Теорема 29.4.4. Для данных целых $p \geq 3, r \geq 1, b_1, \dots, b_p \geq r$, следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $CW_n^r(b_1, \dots, b_p, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ определяет фасету.
- (ii) $p \geq 5$ или $p = 4$ и $b_1, b_2 \geq r + 1$ (с точностью до циклического сдвига на $[1, 4]$), или $p = 3$ и $b_1 \geq r + 2, b_2, b_3 \geq r + 1$ (с точностью до циклического сдвига на $[1, 3]$).

Доказательство. Импликация (ii) $\implies$ (i) доказывается с помощью видоизмененного применения подъема из теоремы 29.4.3, начиная с известных фасет теоремы 29.4.2 (ii), (iv), (v). Проверим теперь импликацию (i) $\implies$ (ii). Предположим, что неравенство

$$CW_n^r(b_1, \dots, b_p, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$$

определяет фасету с $p = 3$ или 4. Рассмотрим сначала случай $p = 3$. Мы можем предположить, например, что $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ (с точностью до циклического сдвига на $[1, 3]$). Из предложения 29.4.1 мы имеем, что $b_3 \geq r + 1$. Предположим, что $b_1 = r + 1$; тогда $b_1 = b_2 = b_3 = r + 1$, и каждый корень неравенства $CW_n^r(r + 1, r + 1, r + 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ является корнем неравенства $CW_n^0(1, 1, 1, -1, -1, 0, \dots, 0)^T x \leq 0$, что противоречит тому факту, что предыдущее неравенство определяет фасету. Это показывает, что $b_1 \geq r + 2$. Рассмотрим теперь случай $p = 4$. Можно проверить, что корни неравенства $CW_n^r(x, r, r, r, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ (где $x \geq r + 1$) и неравенства $CW_n^r(x, r, y, r, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$ (где $x, y \geq r + 1$) являются также корнями неравенства $CW_n^0(1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots, 0)^T x \leq 0$; следовательно, эти два неравенства не определяют фасеты. Следовательно, с точностью до циклического сдвига на $[1, 4]$, мы должны иметь $b_1, b_2 \geq r + 1$. ■

Следующие два примера теорем подъема для клико-паутинных неравенств можно найти в работе Деза и Лоран [1992c].

Теорема 29.4.5. Для данных целых $b_1, b_2, \dots, b_p \geq r \geq 1, b_{p+1}, \dots, b_n < 0$ предположим, что имеют место (i) и (ii).

- (i) $CW_n^r(b_1, \dots, b_n)^T x \leq 0$ определяет фасету для CUT_n .
- (ii) Существуют n подмножеств $T_1, \dots, T_n$ множества $\{1, \dots, n\}$, таких, что имеют место (iia)–(iic):
 - (iia) $T_j \cap \{1, \dots, p\}$ есть интервал в $\{1, \dots, p\}$ для всех $1 \leq j \leq n$,
 - (iib) $b(T_j) = r + 2$ для всех $1 \leq j \leq n$,
 - (iic) характеристические векторы множеств $T_1, \dots, T_n$ линейно независимы.

Тогда неравенство $CW_{n+1}^{r-1}(b_1, \dots, b_n, -2)^T x \leq 0$ определяет фасету CUT_{n+1} . ■

Теорема 29.4.6. Для данных целых $b_1, \dots, b_p \geq r \geq s \geq 0$, $p \geq 5$, неравенство:

$$CW_n^{r-s}(b_1, \dots, b_p, -1, \dots, -1, -2, \dots, -2)^T x \leq 0$$

определяет фасету CUT_n . (Здесь $q - s$ компонент равны -1 , s компонент равны -2 , где $q = n - p$ и $\sum_{i=1}^p b_i - (q - s) = 2r + 1$.) ■

Доказательство теоремы 29.4.6 основано на видоизмененном применении процедуры подъема теоремы 29.4.5, начиная с известной клико-паутинной фасеты $CW^r(b_1, \dots, b_p, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$. Следующий результат следует из теоремы 26.4.3.

Теорема 29.4.7. Для данных целых $b_1, \dots, b_p > 0 > b_{p+1}, \dots, b_n$, где $p \geq 3$, предположим, что существуют два индекса $i, j \in \{1, \dots, p\}$, такие, что $b_j = b_i - 1$ и $j = i + 1 \pmod{p}$, например, $i = 1, j = 2$ для упрощения обозначений. Если два неравенства:

$$CW_n^r(b_1, b_1 - 1, b_3, \dots, b_n)^T x \leq 0 \quad \text{и} \quad CW_n^r(b_1 - 1, b_1, b_3, \dots, b_n)^T x \leq 0$$

определяют фасеты CUT_n , то неравенство:

$$CW_{n+1}^r(b_1 - 1, 1, b_1 - 1, b_3, b_4, \dots, b_n)^T x \leq 0$$

определяет фасету CUT_{n+1} . ■

Это практически вся информация, которую мы имеем о клико-паутинных фасетах. Вероятно, при дальнейшем использовании наших теорем подъема могут быть получены некоторые другие классы клико-паутинных фасет. Однако было бы интересно получить новый метод для построения новых классов клико-паутинных фасет. Мы завершаем этот раздел несколькими замечаниями. Класс клико-паутинных граней из нижеприведенного предложения 29.4.8 описан в работе Де Симоне, Деза и Лоран [1994].

Предложение 29.4.8. Неравенство

$$CW_n^2(n - 6, 2, 2, 1, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$$

определяет грань CUT_n размерности $\binom{n}{2} - (n - 4)$ для всех $n \geq 8$. ■

Рассмотрим клико-паутинное неравенство $CW_n^r(n - 6, 2, 2, 1, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$. Оно определяет фасету для $(r = 0, n \geq 3)$ и для $(r \geq 1, n \geq r + 6)$. Число его корней равно $\binom{n-2}{r+2} + 2n - 4$. Следовательно, это симплицальная фасета только для $(r = 0, n \geq 3)$ и $(r \geq 1, n = r + 6)$; в действительности, для $r = 0$ это единственный класс симплицальных гиперметрических фасет, который мы знаем. Заметим также, что число корней есть $O(n^r)$, т. е. полиномиально по n в произвольной степени r .

Заметим, что три клико-паутинные фасеты, определяемые неравенствами

$$\begin{aligned} \text{CW}_n^1(n-4, 2, 2, -1, \dots, -1)^T x &\leq 0, \\ \text{CW}_n^1(n-5, 2, 1, 1, -1, \dots, -1)^T x &\leq 0, \\ \text{CW}_n^1(n-6, 1, 1, 1, 1, -1, \dots, -1)^T x &\leq 0 \end{aligned}$$

(для $n \geq 7$) имеют одинаковое число корней, равное $\binom{n-2}{3} + 2n - 4$. Следовательно, эти три фасеты являются симплицальными фасетами для $n = 7$ (напомним, что они являются единственными негиперметрическими фасетами CUT_7).

Наконец, упомянем об обобщении клико-паутинных неравенств для мультиразрезного многогранника. Пусть r и $b = (b_1, \dots, b_n)$ такие целые числа, что $\sigma := \sum_{i=1}^n b_i \geq 2r + 1$ и $b_1, \dots, b_p > 0 > b_{p+1}, \dots, b_n$. Тогда неравенство

$$(29.4.9) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} - \sum_{ij \in \text{AW}_p^r(b_1, \dots, b_p)} x_{ij} \leq \frac{\sigma(\sigma - 2r - 1)}{2}$$

допустимо для мультиразрезного многогранника $\text{MC}_n^\square$. Оно определяет фасету $\text{MC}_n^\square$ для нескольких классов параметров; например, в случае, когда $|b_i| = 1$ для всех $1 \leq i \leq n$. Мы отсылаем читателя к Деа, Грётшель и Лоран [1992] для подробного освещения вопроса.

29.5. Отделение клико-паутинных неравенств

Здесь мы обращаемся к задаче отделения для клико-паутинных неравенств. Неизвестно, как отделить весь этот класс, но полиномиальный алгоритм известен для задачи отделения некоторых малых подклассов.

Напомним (см. определение 29.1.2), что чистое клико-паутинное неравенство $(\text{CW}_n^r)^T x \leq 0$ определяется двумя параметрами, которые можно обозначить n и r или, что эквивалентно, q и r , тогда n будет задано как $n = 2q + 2r + 1$. Джерардс [1985] показал, что подкласс, состоящий из чистых клико-паутинных неравенств с $q = 2$, может быть отделен в полиномиальное время. Заметим, что эти неравенства могут

быть переписаны в виде

$$(29.5.1) \quad x_{uv} + \sum_{ij \in E(C)} x_{ij} - \sum_{i \in V(C)} (x_{iu} + x_{iv}) \leq 0,$$

где C есть нечетный цикл и u, v — две вершины, не принадлежащие C .

Более точно, для данного целого N пусть $S_N^{(2)}$ обозначает систему, состоящую из неравенств (29.5.1) (для нечетного цикла C с $V(C) \subseteq V_N = \{1, \dots, N\}$ и $u, v \in V_N \setminus V(C)$) и неравенств треугольника: $x_{ij} - x_{ik} - x_{jk} \leq 0$ (для $i, j, k \in V_N$). Задача отделения для системы $S_N^{(2)}$ состоит в следующем:

Для данного вектора $x \in \mathbb{R}^N$ определить, удовлетворяет ли x всем неравенствам из системы $S_N^{(2)}$. Если нет, найти неравенство из $S_N^{(2)}$, не выполняющееся для x .

Эта задача может быть решена в полиномиальное время (Джерардс [1985]).

Доказательство. Возьмем два различных элемента $u, v \in V_N$. Для $i, j \in V_N \setminus \{u, v\}$ положим

$$(29.5.2) \quad y_{ij} := -x_{ij} + \frac{1}{2}(x_{iu} + x_{iv} + x_{ju} + x_{jv}).$$

Если C есть цикл с $V(C) \subseteq V_N \setminus \{u, v\}$, то

$$\sum_{ij \in E(C)} y_{ij} = - \sum_{ij \in E(C)} x_{ij} + \sum_{i \in V(C)} (x_{iu} + x_{iv}).$$

Следовательно, x удовлетворяет неравенству (29.5.1) тогда и только тогда, когда $\sum_{ij \in E(C)} y_{ij} \geq x_{uv}$. Таким образом, задачу отделения над $S_N^{(2)}$ можно решить следующим образом. Сначала проверим, удовлетворяет ли x всем неравенствам треугольника. Если нет, то невыполняющееся неравенство треугольника найдено. Если да, то это влечет, что y неотрицательно. Тогда можно использовать полиномиальный алгоритм Грётшеля и Пуллиblanka [1981] для нахождения нечетного цикла на $V_N \setminus \{u, v\}$ минимального веса, с весами y (такой цикл будет, конечно, простым). Тогда можно проверить, будет ли этот минимальный вес больше или равен константе x_{uv} . Если нет, невыполняющееся неравенство найдено. Это вычисление повторяется для каждого выбора $u, v \in V_N$. ■

Тем же самым образом класс неравенств бициклически нечетного колеса

$$x_{uv} + \sum_{ij \in E(C)} x_{ij} + \sum_{i \in V(C)} (x_{iu} + x_{iv}) \leq 2|V(C)|$$

(где C — нечетный цикл и $u, v \in V_N \setminus V(C)$) вместе с неравенствами треугольника $x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} \leq 2$ ($i, j, k \in V_N$) может быть отделен в полиномиальное время. (Доказательство аналогично; достаточно заменить (29.5.2) на $y_{ij} := 2 - x_{ij} - \frac{1}{2}(x_{iu} + x_{iv} + x_{ju} + x_{jv})$.)

В общем случае, для данного целого $q \geq 2$, пусть $S_N^{(q)}$ обозначает систему, состоящую из однородных неравенств треугольника и из неравенств

$$\sum_{ij \in E(\mathcal{W})} x_{ij} + \sum_{ij \in E(K_Q)} x_{ij} - \sum_{i \in V(\mathcal{W}), j \in Q} x_{ij} \leq 0,$$

где $\mathcal{W}$ есть паутина W_{q+2r+1}^r на V_N и K_Q — полный граф на $Q \subseteq V_N \setminus V(\mathcal{W})$, где $|Q| = q$. Для отделения системы $S_N^{(q)}$ мы можем поступить так же, как в случае $q = 2$, рассмотренном выше. Именно, пусть Q есть подмножество мощности q множества V_N и для $i, j \in V_N \setminus Q$ положим

$$y_{ij} := -x_{ij} + \frac{1}{q} \sum_{u \in Q} (x_{iu} + x_{ju}).$$

Тогда y неотрицательно, если x удовлетворяет всем неравенствам треугольника. Если $\mathcal{W}$ есть паутина на $q + 2r + 1$ вершинах $V_N \setminus Q$ с параметром r , то

$$\sum_{ij \in E(\mathcal{W})} y_{ij} = - \sum_{ij \in E(\mathcal{W})} x_{ij} + \sum_{i \in V(\mathcal{W}), u \in Q} x_{iu}.$$

Следовательно, если мы можем в полиномиальное время найти минимальную взвешенную паутину (с весами y) на $q + 2r + 1$ вершинах с параметром r , то мы можем решить задачу отделения над $S_N^{(q)}$ в полиномиальное время. К сожалению, ничего неизвестно о задаче нахождения минимальной взвешенной паутины, если $q \neq 2$. Например, для $q = 3$, паутина W_{2r+4}^r является циркулярным графом на $2r + 4$ вершинах, где каждая вершина i смежна с вершинами $r + 1 + i$, $r + 2 + i$ и $r + 3 + i$, и мы получаем задачу нахождения такого графа минимального веса. Мы приводим паутину W_{10}^3 на рис. 29.5.1.

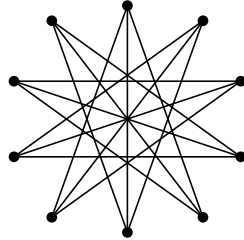


Рис. 29.5.1. Паутина W_{10}^3

29.6. Образец доказательства фасетности клико-паутинного неравенства

Здесь мы докажем теорему 29.4.2 (i), т. е. покажем, что чистое клико-паутинное неравенство $(CW_n^r)^T x \leq 0$ определяет фасету для CUT_n , если $r \geq 1$. (Случай $r = 0$ уже был рассмотрен; для доказательства см., например, наблюдение после следствия 26.6.2.) Мы используем следующие две леммы, взятые, соответственно, из работ Барахона и Маджуба [1986] и Барахона, Грётшеля и Маджуба [1985].

Лемма 29.6.1. Пусть $a \in \mathbb{R}^{E_n}$, $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, $S \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ такие, что разрезные векторы $\delta(S)$, $\delta(S \cup \{i\})$, $\delta(S \cup \{j\})$, $\delta(S \cup \{i, j\})$ удовлетворяют равенству $a^T x = 0$. Тогда $a_{ij} = 0$. ■

Лемма 29.6.2. Пусть $a \in \mathbb{R}^{E_n}$, I, J, H и S — непересекающиеся подмножества множества $\{1, \dots, n\}$, такие что разрезные векторы $\delta(S \cup J)$, $\delta(S \cup H)$, $\delta(S \cup I \cup J)$, $\delta(S \cup I \cup H)$ удовлетворяют равенству $a^T x = 0$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{i \in I, j \in J} a_{ij} = \sum_{i \in I, h \in H} a_{ih}.$$

В частности, если $I = \{i\}$, $J = \{j\}$, $H = \{h\}$, то $a_{ij} = a_{ih}$. ■

Для доказательства того, что $(CW_n^r)^T x \leq 0$ определяет фасету CUT_n , рассмотрим допустимое неравенство $a^T x \leq 0$ для CUT_n , такое, что $a(\delta(S)) = 0$ для всех корней $\delta(S)$ неравенства $(CW_n^r)^T x \leq 0$. Покажем существование скаляра α , такого, что $a^T x = \alpha(CW_n^r)^T x$. Для этого достаточно доказать следующие утверждения:

- (a) $a_{ij} = 0$ для всех $ij \in \text{AW}_p^r$.
- (b) $a_{ij} = \alpha$ для всех $ij \in K_p \setminus \text{AW}_p^r$.
- (c) $a_{i'j'} = \alpha$ для всех $i'j' \in K_p$.
- (d) $a_{ij'} = \alpha$ для всех $i \in \{1, \dots, p\}$, $j' \in [1', q']$.

Нам удобно обозначить n вершин, на которых определено CW_n^r , в виде $[1, n] = [1, p] \cup [1', q']$ ($q = n - p$). Мы докажем утверждения (a)–(d), используя следующие утверждения 29.6.3–29.6.8. Мы используем описание корней $(CW_n^r)^T x \leq 0$, данное в предложении 29.3.3.

Утверждение 29.6.3. Условие (a) справедливо, т. е. $a_{ij} = 0$, для $ij \in \text{AW}_p^r$.

Доказательство. Пусть u — такое целое число, что $2 \leq u \leq r+1$ и пусть $S := [2, u-1]$; таким образом, $S = \emptyset$ для $u = 2$. Множества S , $S \cup \{1\}$, $S \cup \{u\}$ и $S \cup \{1, u\}$ определяют корни (типа 1) неравенства $(CW_n^r)^T x \leq 0$ и, следовательно, неравенства $a^T x \leq 0$. Следовательно, лемма 29.6.1 дает, что $a_{1u} = 0$, и общий результат следует из симметрии. $\blacksquare$

Утверждение 29.6.4. $a_{ij'} = \gamma$ для некоторого скаляра γ и для всех $i \in \{1, \dots, p\}$, $j' \in [1', q']$.

Доказательство. Возьмем две различные вершины i', j' из $[1', q']$ и положим $S := [2, r+2]$. Тогда множества $S \cup \{i'\}$, $S \cup \{j'\}$, $S \cup \{1, i'\}$ и $S \cup \{1, j'\}$ определяют корни (типа 2). Следовательно, лемма 29.6.2 дает, что $a_{1i'} = a_{1j'}$, т. е. $a_{11'} = \dots = a_{1q'} =: \gamma_1$ для некоторого скаляра γ_1 . Аналогично, $a_{i1'} = \dots = a_{iq'} =: \gamma_i$ для некоторого скаляра γ_i для всех i . Пусть i — такое целое число, что $r+2 \leq i \leq p-r$, и пусть $T := [2, i-1] \cup \cup [2', (i-r-1)']$ (где $T = [2, r+1]$, если $i = r+2$). Множества $T \cup \{1\}$, $T \cup \{i\}$, $T \cup \{1, 1'\}$ и $T \cup \{i, 1'\}$ определяют корни. Следовательно, лемма 29.6.2 дает, что $a_{11'} = a_{i1'}$, т. е. $\gamma_1 = \gamma_i$. Тогда $\gamma_1 = \gamma_{r+2} = \gamma_{r+3} = \dots = \gamma_{p-r}$; аналогично, $\gamma_2 = \gamma_{r+3} + \dots = \gamma_{p-r+1}$ и, следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$. По симметрии, $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_p =: \gamma$. $\blacksquare$

Утверждение 29.6.5. $a_{i'j'} = \alpha$ для некоторого скаляра α и для всех $1' \leq i' < j' \leq q'$.

Доказательство. Возьмем различные вершины i', j', h' в $[1', q']$ и положим $S := [1, r+2]$. Тогда множества $S \cup \{j'\}$, $S \cup \{h'\}$, $S \cup \{i', j'\}$ и $S \cup \{i', h'\}$ определяют корни. Следовательно, мы выводим из леммы 29.6.2, что $a_{i'j'} = a_{i'h'}$, откуда следует доказываемый результат. $\blacksquare$

Из того факта, что $\delta(\{i\})$ является корнем для всех $1 \leq i \leq p$, мы получаем, что $a^T \delta(\{i\}) = 0$. Используя вышеприведенные утверждения, мы получаем, что

$$(S_i) \quad \sum_{1 \leq j \leq p} a_{ij} = -q\gamma,$$

где для удобства мы полагаем $a_{ii} := 0$.

Утверждение 29.6.6. $\gamma = -\alpha$.

Доказательство. Так как множество $[1, r+1] \cup \{1'\}$ определяет корень, равенство $a^T \delta([1, r+1] \cup \{1'\}) = 0$, вместе с вышеприведенными

утверждениями, дает:

$$\sum_{1 \leq j \leq p} (a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{r+1,j}) + (r+1)(q-1)\gamma + (p-r-1)\gamma + (q-1)\alpha = 0.$$

Используя соотношения $(S_1), \dots, (S_{r+1})$, мы выводим из этого тождества, что

$$-q(r+1)\gamma + (r+1)(q-1)\gamma + (h-r-1)\gamma + (q-1)\alpha = 0,$$

т. е., $\gamma(p-2r-2) + \alpha(q-1) = 0$. Таким образом, $\gamma = -\alpha$, так как $p = q + 2r + 1$ и $q \geq 2$. ■

Утверждение 29.6.7. $a_{1,r+2} = \alpha$.

Доказательство. Так как множество $[1, r+2] \cup \{1'\}$ определяет корень, мы выводим соотношение:

$$\sum_{1 \leq j \leq p} (a_{1j} + \dots + a_{r+2,j}) - 2a_{1,r+2} - \alpha(r+2)(q-1) - \alpha(p-r-2) + \alpha(q-1) = 0,$$

которое, используя соотношения $(S_1), \dots, (S_{r+2})$, влечет $a_{1,r+2} = \alpha$. ■

Для завершения доказательства мы должны показать, что справедливо условие (b). Для этого достаточно показать, например, что $a_{ij} = \alpha$ для всех $1 \leq i < j \leq \frac{(p+1)}{2}$, таких, что $ij \notin \text{AW}_p^r$, т. е. $j \geq i + r + 1$. Мы докажем следующее утверждение (H_u) индукцией по u , $r+2 \leq u \leq \frac{(p+1)}{2}$:

(H_u) $a_{ij} = \alpha$ для всех $1 \leq i < j \leq u$, таких что $ij \notin \text{AW}_p^r$.

Утверждение (H_{r+2}) следует из утверждения 29.6.7. Возьмем $u \geq r+3$ и предположим, что (H_i) справедливо для $i \leq u-1$; покажем, что справедливо (H_u) , т. е. что $a_{iu} = \alpha$ для $1 \leq i \leq u-r-1$.

Утверждение 29.6.8. $a_{iu} = \alpha$ для всех $1 \leq i \leq u-r-1$.

Доказательство. Пусть $S := [i+1, u] \cup [1', (u-i-r)']$. Тогда S и $S \cup \{i\}$ определяют корни, откуда:

$$0 = a(\delta(S \cup \{i\})) - a(\delta(S))$$

и, следовательно, справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j \notin S \cup \{i\}} a_{ij} - \sum_{j \in S} a_{ij} = \\ &= \sum_{1 \leq j \leq p} a_{ij} - 2(a_{i,i+1} + \dots + a_{iu}) - \alpha(q-u+i+r) + \alpha(u-i-r). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_{i,i+1} + \dots + a_{iu} = a_{i,i+r+1} + \dots + a_{i,u-1} + a_{iu} = \alpha(u - i - r - 1) + a_{iu},$$

последнее равенство следует из индукционного предположения (H_i) для $i \leq u - 1$. Следовательно, вышеприведенное отношение дает:

$$0 = q\alpha - 2\alpha(u - i - r - 1) - 2a_{iu} - \alpha(q - u + i + r) + \alpha(u - i - r),$$

т. е., $a_{iu} = \alpha$. ■

Глава 30.

Другие допустимые неравенства и фасеты

В этой главе мы описываем другие важные классы допустимых неравенств, определяющих фасеты разрезного многогранника. Полное линейное описание многогранника $\text{CUT}_n^\square$ известно только для $n \leq 7$; оно представлено в разделе 30.6.

30.1. Неравенства подвешенного дерева

Как обобщение подкласса клико-паутинных неравенств $\text{CW}_n^1(b)^T x \leq 0$ (случай $r = 1$ для $\text{CW}_n^r(b)^T x \leq 0$), Борош и Хаммер [1993] ввели следующий класс неравенств (30.1.1).

Пусть $r \geq 1$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ — такие целые числа, что $\sum_{i=1}^n b_i = 2r + 1$, и предположим, что $b_2, \dots, b_p > 0 > b_{p+1}, \dots, b_n$ для некоторого $2 \leq p \leq n - 1$. (Заметим, что знак b_1 произволен.) Пусть T — дерево на $p - 1$ вершинах множества $\{2, \dots, p\}$, и для каждой вершины $i \in \{2, \dots, p\}$ пусть d_i обозначает степень вершины i в T . Рассмотрим неравенство:

$$(30.1.1) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} - \frac{r(r+1)}{2} \left(\sum_{i=2}^p (2 - d_i) x_{1i} + \sum_{ij \in E(T)} x_{ij} \right) \leq 0.$$

Мы назовем его *неравенством подвешенного дерева* и обозначим

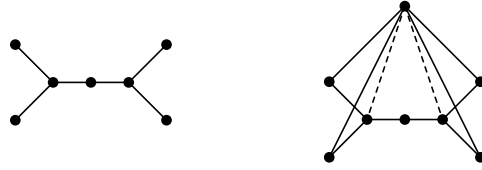
$$\text{ST}_n^r(T, b)^T x \leq 0,$$

так как величина

$$(30.1.2) \quad \sum_{i=2}^p (2 - d_i) x_{1i} + \sum_{ij \in E(T)} x_{ij}$$

определяется подвешенным деревом (дерево плюс вершина, смежная с некоторыми вершинами дерева). Ниже приведен пример дерева и

соответствующей величины (30.1.2) (вес 1 показан сплошными линиями, вес -1 — пунктирными линиями, а линии с весом 0 не изображены).



В частном случае, когда T есть путь $(2, \dots, p)$, $d_2 = d_p = 1$, в то время как $d_i = 2$ для $3 \leq i \leq p-1$. Следовательно, величина (30.1.2) принимает вид:

$$\sum_{1 \leq i \leq p-1} x_{i,i+1} + x_{1p},$$

т. е. соответствующий граф является циклом длины p . Следовательно, неравенство (30.1.1) совпадает с неравенством (29.3.7). Отсюда следует, что, если $b_1, \dots, b_p \geq r$, то $ST_n^r(T, b)^T x \leq 0$ совпадает с $CW_n^r(b)^T x \leq 0$; иначе, $CW_n^r(b)^T x \leq 0$ доминирует над $ST_n^r(T, b)^T x \leq 0$ и, следовательно, $ST_n^r(T, b)^T x \leq 0$ не определяет фасету (напомним наблюдения после предложения 29.3.6).

Мы выдвигаем в качестве гипотезы утверждение, что для любого дерева T , если $b_i < r$ для некоторого $i \in \{1, \dots, p\}$, то неравенство подвешенного дерева $ST_n^r(T, b)^T x \leq 0$ не определяет фасету. Выше мы видели, что это действительно так в случае, когда T является путем. В действительности, класс неравенств подвешенного дерева $ST_n^r(T, b)^T x \leq 0$ с $b_i \geq r$ для всех положительных b_i обобщает класс клико-паутинных неравенств $CW_n^r(b)^T x \leq 0$ с $b_i \geq r$ для всех положительных b_i . С другой стороны, напомним, что класс клико-паутинных неравенств был определен как стягивание некоторых чистых клико-паутинных неравенств. Мы выдвигаем в качестве гипотезы утверждение, что существует некоторый большой класс $\mathcal{J}$ допустимых неравенств, обобщающий (чистые) клико-паутинные неравенства, такой, что неравенство подвешенного дерева $ST_n^r(T, b)^T x \leq 0$ с $b_i \geq r$ для всех положительных b_i будет стягиванием некоторого чистого элемента из $\mathcal{J}$, в то время как $ST_n^r(T, b)^T x \leq 0$ при $b_i < r$ для некоторого положительного b_i будет доминировано некоторым элементом из I .

Предложение 30.1.3. *Неравенство (30.1.1) является допустимым для CUT_n . Кроме того, корнями (30.1.1) являются разрезные*

векторы $\delta(S)$, для которых $S \subseteq \{2, \dots, n\}$, $b(S) = r, r+1$ и такие, что подграф T , порожденный множеством $S \cap \{2, \dots, p\}$, связан.

Доказательство. Пусть S — подмножество $V_n \setminus \{1\}$. Легко проверить, что

$$\text{ST}_n^r(T, b)^T \delta(S) = b(S)(2r+1-b(S)) - r(r+1)c(S),$$

где $c(S)$ обозначает число связанных компонент подграфа T , порожденного множеством $S \cap \{2, \dots, p\}$. Следовательно, $\text{ST}_n^r(T, b)^T \delta(S) \leq 0$, если $c(S) \geq 1$, с равенством тогда и только тогда, когда $c(S) = 1$ и $b(S) = r, r+1$. Кроме того, $\text{ST}_n^r(T, b)^T \delta(S) < 0$, если $c(S) = 0$, так как тогда $S \cap \{1, 2, \dots, p\} = \emptyset$, откуда $b(S) < 0$. ■

Теорема 30.1.4. Пусть $r \geq 1$, $b_1, \dots, b_n$ — целые числа, такие что $\sum_{i=1}^n b_i = 2r+1$, $b_2, \dots, b_p \geq r$, $b_{p+1} = \dots = b_n = -1$ для некоторого p , где $3 \leq p \leq n-1$. Пусть T есть подвешенное дерево на $\{2, \dots, p\}$. Предположим, что справедливо одно из двух условий (i), (ii).

- (i) $\sum_{i=2}^n b_i \leq n-p+r+1$ (или, что эквивалентно, $b_1 \geq r$) и существует два непересекающихся множества $S_1, S_2 \subseteq \{2, \dots, p\}$, такие, что $b(S_l) = \sum_{i \in S_l} b_i \geq r+1$ и подграф графа T , порожденный S_l , связан для $l = 1, 2$.
- (ii) T не является звездой и $b(S) \leq n-p+r+1$ для каждого подмножества $S \subseteq \{2, \dots, p\}$, для которого подграф графа T , порожденный S , является путем.

Тогда неравенство (30.1.1) определяет фасету CUT_n .

Предложение 30.1.3 и теорема 30.1.4 с условием (i) даны в работе Бороша и Хаммера [1993]; альтернативное условие (ii) теоремы 30.1.4 предложено в Буассен [1994]. Результаты представлены здесь в контексте корреляционного полиэдра. Нижеприведенное доказательство взято из Борош и Хаммер [1993].

Доказательство. Покажем, что неравенство:

(30.1.5)

$$\sum_{2 \leq i, j \leq n} b_i b_j p_{ij} - (2r+1) \sum_{i=2}^n b_i p_{ii} + r(r+1) \left(\sum_{i=2}^p p_{ii} - \sum_{ij \in E(T)} p_{ij} \right) \geq 0,$$

которое соответствует неравенству (30.1.1) в ковариантном отображении, отмеченном на позиции 1, определяет фасету COR_{n-1} . Здесь $b_2, \dots, b_n$ — такие целые числа, что $b_2, \dots, b_p \geq r$, $b_{p+1}, \dots, b_n = -1$; T есть подвешенное дерево на $\{2, \dots, p\}$, и справедливо одно из условий (i), (ii) теоремы 30.1.4. Обозначим неравенство (30.1.5) через $v^T p \geq 0$.

Пусть $w^T p \geq 0$ есть допустимое неравенство для COR_{n-1} , такое, что $\{p \in \text{COR}_{n-1} \mid v^T p = 0\} \subseteq \{p \in \text{COR}_{n-1} \mid w^T p = 0\}$. Покажем, что $w = \lambda v$ для некоторого $\lambda > 0$.

Пусть $\mathcal{S}$ обозначает семейство, состоящее из множеств $S \subseteq \{2, \dots, p\}$, для которых подграф $T[S]$ графа T , порожденный S , связан и таков, что $r + 1 \leq b(S) \leq n - p + r + 1$. Для $i_0 \in \{p + 1, \dots, n\}$ пусть $\mathcal{S}_{i_0}$ обозначает семейство, состоящее из множеств $S \cup S'$, где $S \in \mathcal{S}$ и $S' \subseteq \{p + 1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$ с $|S'| = b(S) - r - 1$. Положим $\mathcal{S}_{i_0}^* := \{A \cup \{i_0\} \mid A \in \mathcal{S}_{i_0}\}$. Докажем промежуточный результат.

Утверждение 30.1.6. *Для каждого $i_0 \in \{p + 1, \dots, n\}$ характеристические векторы элементов из $\mathcal{S}_{i_0}^*$ имеют ранг $n - 2$.*

Доказательство утверждения 30.1.6. Покажем, что пространство, состоящее из всех векторов, ортогональных характеристическим векторам элементов из $\mathcal{S}_{i_0}^*$, имеет размерность 1. Рассмотрим вектор $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, определенный в виде $y_i := b_i$ ($i = 2, \dots, p$), $y_{i_0} := -r - 1$ и $y_i := -1$ ($i \in \{p + 1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$). Очевидно, y ортогонален всем характеристическим векторам элементов из $\mathcal{S}_{i_0}^*$. Пусть $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ такой, что $x_{i_0} = 0$ и x ортогонален всем характеристическим векторам элементов из $\mathcal{S}_{i_0}^*$. Покажем, что $x = 0$. Пусть $S \in \mathcal{S}$. Тогда $x(S) + x(S') = 0$ для каждого подмножества $S' \subseteq \{p + 1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$ мощности $b(S) - r - 1$. Следовательно, $x_i = \alpha$ для $i \in \{p + 1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$, где

$$\alpha := \frac{x(S)}{b(S) - r - 1}.$$

Следовательно,

$$(a) \quad (x + \alpha b)(S) = \alpha(r + 1) \quad \text{для всех } S \in \mathcal{S}.$$

Предположим сначала, что справедливо условие (i) теоремы 30.1.4. Если $S \in \mathcal{S}$, и если вершина $i \in \{2, \dots, p\} \setminus S$ связана с вершиной из S в дереве T , то $S \cup \{i\}$ принадлежит $\mathcal{S}$. Следовательно, $x_i + \alpha b_i = 0$ по (a) и поэтому это соотношение справедливо для всех $i \in \{2, \dots, p\} \setminus S$. Теперь, взяв за S два множества S_1 и S_2 из условия (i), мы получим, что $x_i + \alpha b_i = 0$ для всех $i \in \{2, \dots, p\}$. Отсюда следует, что $x = 0$. Предположим теперь, что справедливо условие (ii) теоремы 30.1.4. Пусть S есть множество вершин пути $(i_1, \dots, i_s)$ в T . Если $|S| \geq 4$, то все множества $S, S \setminus \{i_s\}, \dots, S \setminus \{i_s, i_{s-1}, \dots, i_3\}$ и $S \setminus \{i_1\}, \dots, S \setminus \{i_1, \dots, i_{s-2}\}$ принадлежат $\mathcal{S}$. Следовательно, мы получаем из (a), что $x_i + \alpha b_i = 0$ для всех $i \in S$. Поэтому $x_i = 0$ для всех $i \in S$. Так как T не звезда, каждая вершина T принадлежит пути по крайней мере длины 4. Это показывает, что $x = 0$. ■

Ясно, что для $i_0 \in \{p+1, \dots, n\}$ и $S \cup S' \in \mathcal{S}_{i_0}$ векторы корелляции $\pi(S \cup S')$ и $\pi(S \cup S' \cup \{i_0\})$ являются корнями неравенства (30.1.5). Следовательно, выражения

$$v_{i_0} + \sum_{i \in S \cup S'} v_{i, i_0} = 0, w_{i_0} + \sum_{i \in S \cup S'} w_{i, i_0} = 0$$

справедливы для всех $S \cup S' \in \mathcal{S}_{i_0}$. Из утверждения 30.1.6 мы получаем, что существует скаляр λ_{i_0} , такой что $w_{i_0} = \lambda_{i_0} v_{i_0}$ и $w_{i, i_0} = \lambda_{i_0} v_{i, i_0}$ для всех $i \in \{2, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$. Так как $v_{ij} \neq 0$ для $i, j \in \{p+1, \dots, n\}$, мы получаем, что все λ_{i_0} равны, скажем, λ . Следовательно, $w_i = \lambda v_i$ для $i = p+1, \dots, n$ и $w_{ij} = \lambda v_{ij}$, если по крайней мере один из i, j принадлежит множеству $\{p+1, \dots, n\}$.

Положим $u := w - \lambda v$. Покажем, что $u = 0$. Для $i_0 \in \{2, \dots, p\}$ пусть $\mathcal{T}_{i_0}$ обозначает семейство, состоящее из непустых множеств $S \subseteq \{2, \dots, p\} \setminus \{i_0\}$, таких, что подграфы $T[S]$ и $T[S \cup \{i_0\}]$ связны и $b(S) + b_{i_0} \leq n - p + r + 1$. Очевидно, что если $S \in \mathcal{T}_{i_0}$ и $S', S'' \subseteq \{p+1, \dots, n\}$ с $|S'| = b(S) - r$, $|S''| = b_{i_0} - 1$, то векторы корелляции $\pi(S \cup S')$ и $\pi(S \cup \{i_0\} \cup S' \cup S'')$ являются корнями неравенства (30.1.5). Отсюда следует, что

$$(b) \quad u_{i_0} + \sum_{i \in S} u_{i, i_0} = 0 \quad \text{для всех } S \in \mathcal{T}_{i_0}.$$

Если i — вершина T , смежная с i_0 , то $\{i\}$ принадлежит $\mathcal{T}_{i_0}$ и, следовательно, $u_{i_0} + u_{i, i_0} = 0$. Если $(i_0, i_1, \dots, i_s)$ — путь в T , то все множества $\{i_1\}, \{i_1, i_2\}, \dots, \{i_1, \dots, i_s\}$ принадлежат $\mathcal{T}_{i_0}$. Из (b) мы получаем, что $u_{i_0, i_2} = u_{i_0, i_3} = \dots = u_{i_0, i_s} = 0$. Это показывает, что $u_{i_0, i} = 0$, если i не смежно с i_0 и $u_{i_0, i} = -u_{i_0}$, если i смежно с i_0 . Следовательно, мы получаем, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_2 = \dots = u_p = \alpha$, $u_{ij} = -\alpha$, если ij является ребром в T , и $u_{ij} = 0$ в противном случае. Наконец, $\alpha = 0$, откуда $u = 0$, т. е. $w = \lambda v$. $\blacksquare$

Теперь мы рассмотрим некоторые другие классы фасет, полученных видоизменением определения неравенств подвешенного дерева. Пусть $b = (b_1, \dots, b_{2p+1})$, где $b_i = 1$, если $i \in \{1, \dots, p+2\}$, и $b_i = -1$, если $i \in \{p+3, \dots, 2p+1\}$; таким образом, $\sum_{i=1}^{2p+1} b_i = 3$. Пусть T есть подвешенное дерево, определенное на $p+1$ вершинах множества $\{2, \dots, p+2\}$. Поэтому неравенство

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2p+1} b_i b_j x_{ij} - \left(\sum_{i=2}^{p+2} (2 - d_i) x_{1i} + \sum_{ij \in E(T)} x_{ij} \right) \leq 0$$

$p+2, p+3, p+4, p+5$) и пусть C' обозначает цикл на пяти вершинах $(p+1, p+3, p+5, p+2, p+4)$. Рассмотрим неравенство

$$(30.1.11) \quad \sum_{ij \in K_{2p+1}} x_{ij} - \left(\sum_{i=2}^p (2-d_i)x_{1i} + \sum_{ij \in E(T)} x_{ij} + \sum_{ij \in C} x_{ij} - \sum_{ij \in C'} x_{ij} \right) \leq p(p+1).$$

Если $p=7$ и T — дерево рисунка 30.1.12, то величина

$$\sum_{i=2}^p (2-d_i)x_{1i} + \sum_{ij \in E(T)} x_{ij} + \sum_{ij \in C} x_{ij} - \sum_{ij \in C'} x_{ij}$$

изображена на рисунке 30.1.13.

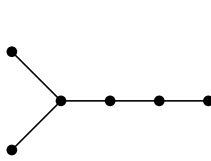


Рис. 30.1.12

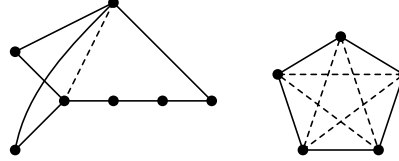


Рис. 30.1.13

Следующий результат был получен в работе Де Суза и Лоран [1995].

Теорема 30.1.14.

- (i) Неравенство (30.1.8) определяет фасету разрезного многогранника $\text{CUT}_{2p+1}^\square$ если $p \geq 5$ и если T не звезда.
- (ii) неравенство (30.1.11) определяет фасету $\text{CUT}_{2p+1}^\square$, если $p \geq 6$ и если, для каждой вершины v графа T , некоторая связная компонента графа $T \setminus v$ имеет по меньшей мере три вершины. ■

Следующим случаем, интересным для изучения, будет случай, когда дерево T определено на $p-2$ вершинах. Естественно предположить существование допустимого для $\text{CUT}_{2p+1}^\square$ неравенства, которое, по аналогии с (30.1.8) и (30.1.11), определялось бы, кроме подвешенного дерева, графом K_7 с подходящими реберными весами. Мы отсылаем читателя к работе Де Суза [1993] для обсуждения этого случая; там предложено несколько примеров таких неравенств.

30.2. Неравенства букета циклов

Для данного $p \geq 1$ пусть C обозначает цикл $(1, 2, \dots, p+2)$. Тогда неравенство

$$(30.2.1) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 2p+1} x_{ij} - \sum_{ij \in E(C)} x_{ij} \leq p(p+1) - 2$$

определяет фасету $\text{CUT}_{2p+1}^\square$. Действительно, неравенство (30.2.1) совпадает с переключением (чистого) клико-паутинного неравенства $(\text{CW}_{2p+1}^1)^T x \leq 0$, точнее, с его переключением относительно разреза $\delta(\{1, 2, \dots, p+2\})$ (см. (29.1.5)). В этом разделе мы опишем класс неравенств, обобщающих (30.2.1). Вместо использования только одного цикла мы рассмотрим структуру, называемую букетом циклов, построенную из нескольких циклов.

Более точно, букет циклов — это граф, определенный следующим образом. Пусть r циклов $C_h = (V_h, E(C_h))$ ($1 \leq h \leq r$) определены на таких множествах V_h , что $V_h \cap V_{h'} = \bigcap_{1 \leq h \leq r} V_h$ для всех различных $h, h' \in \{1, \dots, r\}$. Предположим, кроме того, что общие точки представлены в том же самом порядке в каждом из циклов C_h . Тогда граф с множеством вершин $\bigcup_{1 \leq h \leq r} V_h$ и множеством ребер $\bigcup_{1 \leq h \leq r} E(C_h)$ (допускается повторение ребер) называется *букетом циклов* и обозначается РВС. Он может содержать повторяющиеся ребра, если некоторые ребра были использованы в нескольких циклах C_h . На рисунке 30.2.2 показан пример РВС-графа, составленного из трех циклов. Черными вершинами обозначены вершины, общие для всех трех циклов; три цикла изображены, соответственно, сплошной, жирной и пунктирной линиями.

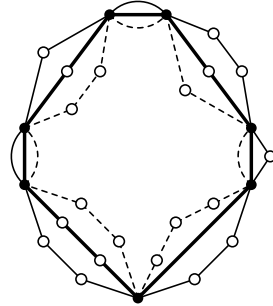


Рис. 30.2.2. Граф букета циклов

Положим $\bigcap_{1 \leq h \leq r} V_h := \{x_1, \dots, x_t\}$, где $t \geq 1$. Следовательно, каждый цикл C_h разложим в t подпутей P_{ih} ($1 \leq i \leq t$), где P_{ih} начинается в x_i и заканчивается в x_{i+1} (индексы i взяты по модулю t). Пусть

$$q_{ih} := |V(P_{ih})| - 2,$$

т. е. q_{ih} есть число внутренних точек P_{ih} , $q_{ih} \geq 0$. Пусть $\pi_1, \dots, \pi_{r-1}$ обозначают $r-1$ наибольших значений q_{ih} для $1 \leq i \leq t, 1 \leq h \leq r$. Для каждого целого k , такого что $k(k+1) \leq 2(r-1)$, положим

$$Q_k := \sum_{1 \leq h \leq r-1 - \frac{k(k+1)}{2}} \pi_h.$$

Наконец, пусть

$$n_0 := 2p + 1 - \left| \bigcup_{1 \leq h \leq r} V_h \right|.$$

Для данного РВС-графа, составленного из r циклов $C_1, \dots, C_r$ и являющегося подграфом графа K_{2p+1} , определим следующее неравенство:

$$(30.2.3) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 2p+1} x_{ij} - \sum_{1 \leq h \leq r} \sum_{ij \in E(C_h)} x_{ij} \leq p(p+1) - 2r.$$

Оно называется *неравенством букета циклов*. Эти неравенства в своей наиболее полной форме введены в Де Суза [1993]; более узкий подкласс (см. ниже) рассмотрен в Де Суза и Лоран [1995]. Именно, они введены в контексте эквиварезного многогранника $\text{EQCUT}_{2p+1}^\square$.

Сначала мы дадим характеристику РВС-неравенств, допустимых для разрезного многогранника, которые были предложены Де Суза [1993].

Предложение 30.2.4. *Для данного РВС-графа, являющегося подграфом K_{2p+1} , неравенство (30.2.3) является допустимым для $\text{CUT}_{2p+1}^\square$ тогда и только тогда, когда $Q_k + n_0 \geq p - 1 - k$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, таких, что $k(k+1) \leq 2(r-1)$.*

Доказательство. Обозначим неравенство (30.2.3) как $v^T x \leq p(p+1) - 2r$.

Необходимость. Предположим, что k — такое целое число, что $Q_k + n_0 \geq p - k$ и $k(k+1) \geq 2(r-1)$. Тогда мы можем построить множество вершин S мощности $p-k$, элементы которого либо являются внутренними вершинами путей P_{ih} , соответствующих $r-1 - \frac{k(k+1)}{2}$

наибольшим значениям π_h , либо не принадлежат РВС-графу. Кроме того, множество S может быть выбрано таким образом, что

$$v^T \delta(S) \geq p(p+1) - k(k+1) - 2 \left(r - 1 - \frac{k(k+1)}{2} \right),$$

$$\text{т. е. } v^T \delta(S) \geq p(p+1) - 2r + 2.$$

Следовательно, разрезный вектор $\delta(S)$ не удовлетворяет неравенству (30.2.3).

Достаточность. Предположим, что $Q_k + n_0 \leq p - k - 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, таких что $k(k+1) \leq 2(r-1)$. Предположим, что существует разрезный вектор $\delta(S)$, не удовлетворяющий (30.2.3). Пусть $|S| := p - k$ для некоторого $1 \leq k \leq h-1$. Тогда

$$v^T \delta(S) = p(p+1) - k(k+1) - \sum_{1 \leq h \leq r} |\delta_{K_{2p+1}}(S) \cap E(C_h)| > p(p+1) - 2r.$$

Следовательно, разрез $\delta_{K_{2p+1}}(S)$ не может пересечь все r циклов C_h . Следовательно, множество $\bigcap_{1 \leq h \leq r} V_h$ общих вершин является собственным подмножеством S или его дополнения. Из этого следует, что $\delta_{K_{2p+1}}(S)$ может пересекать только $r - \lambda$ путей P_{ih} для некоторого целого λ , $1 \leq \lambda \leq r$. Тогда $\sum_{1 \leq h \leq r} |\delta_{K_{2p+1}}(S) \cap E(C_h)| = 2(r - \lambda)$, т. е. $v^T \delta(S) = p(p+1) - 2r + 2\lambda - k(k+1)$. Отсюда следует, что $2\lambda > k(k+1)$, т. е. $\lambda \geq \frac{k(k+1)}{2} + 1$. Пусть $\alpha := |S \setminus \bigcup_{1 \leq h \leq r} V_h|$ и $\beta := |S| - \alpha$. Эти β вершин распределены среди $r - \lambda \leq r - \frac{k(k+1)}{2} - 1$ путей P_{ih} , откуда $\beta \leq Q_k$. С другой стороны, $\alpha \leq n_0$. Следовательно, $p - k = \alpha + \beta \leq n_0 + Q_k \leq p - k - 1$, что приводит к противоречию. Это показывает, что (30.2.3) допустимо для $\text{CUT}_{2p+1}^\square$. $\blacksquare$

Напомним, что эквивалентный многогранник $\text{EQCUT}_{2p+1}^\square$ является фасетой $\text{CUT}_{2p+1}^\square$, определяемой неравенством:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2p+1} x_{ij} \leq p(p+1).$$

Следовательно, для любого определяющего фасету неравенства для $\text{EQCUT}_{2p+1}^\square$, существует его подходящая линейная комбинация с уравнением $\sum_{1 \leq i < j \leq 2p+1} x_{ij} = p(p+1)$, которая порождает неравенство, определяющее фасету $\text{CUT}_{2p+1}^\square$. Именно этим способом неравенство (30.2.3) получается из неравенства

$$(30.2.5) \quad \sum_{1 \leq h \leq r} \sum_{ij \in E(C_h)} x_{ij} \geq 2r.$$

Де Суза [1993] показал, что неравенство (30.2.5) является допустимым для $\text{EQCUT}_{2p+1}^\square$ тогда и только тогда, когда $n_0 + Q_0 \leq p - 1$; кроме того, он показал, что (30.2.3) определяет фасету $\text{CUT}_{2p+1}^\square$ всегда, когда оно допустимо для $\text{CUT}_{2p+1}^\square$, и (30.2.5) определяет фасету для $\text{EQCUT}_{2p+1}^\square$. Класс РВС-графов, описанный в Де Суза и Лоран [1995], является классом, для которого (30.2.5) определяет фасету для $\text{EQCUT}_{2p+1}^\square$; мы опишем его ниже в теореме 30.2.7.

Рассмотрим РВС-граф, построенный из r циклов, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) все r циклов имеют ту же самую длину, т. е. $|V_1| = \dots = |V_r|$.
- (ii) Число общих для всех циклов вершин четно, скажем, $t = 2s$.
- (iii) Для каждого нечетного $i \in \{1, 2, \dots, 2s\}$, путь P_{ih} состоит из ребра (x_i, x_{i+1}) , т. е. $q_{ih} = 0$.
- (iv) Для каждого четного $i \in \{1, 2, \dots, 2s\}$ любые два пути $P_{ih}, P_{ih'}$ имеют общими только их конечные вершины x_i, x_{i+1} , и их длины совпадают и равны $q + 1$, т. е. $q_{ih} = q$.

Следовательно, РВС-граф, удовлетворяющий (i)–(iv), полностью определяется параметрами (s, q, r) .

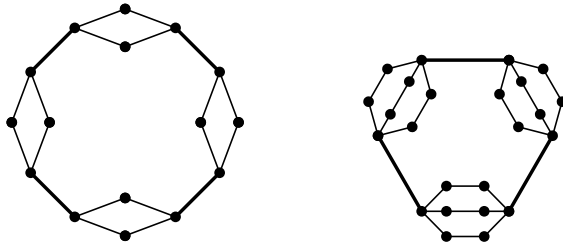


Рис. 30.2.6. РВС-графы

Положим $E_r := \{x_i x_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 2s - 1, i \text{ нечетно}\}$, и $E_1 := \bigcup_{1 \leq h \leq r} E(C_h) \setminus E_r$. Тогда ребра из E_r принадлежат всем r циклам, в то время как каждое ребро из E_1 принадлежит точно одному циклу. Следовательно,

$$\sum_{1 \leq h \leq r} \sum_{ij \in E(C_h)} x_{ij} = \sum_{ij \in E_1} x_{ij} + r \sum_{ij \in E_r} x_{ij}.$$

На рисунке 30.2.6 показаны два РВС-графа, удовлетворяющие условиям (i)–(iv) с параметрами $s = 4, q = 1, r = 2$, и $s = 3, q = 2, r = 3$, соответственно; жирные ребра — это ребра из E_r .

Теорема 30.2.7. Рассмотрим PBC-граф с параметрами (s, q, r) , удовлетворяющий условиям (i)–(iv). Предположим, что этот PBC-граф является подграфом K_{2p+1} и что $n_0 = p - (r - 1)q - 1$ (или, что эквивалентно, $p = (s - 1)(qr + 2) + q$). Тогда неравенство (30.2.3) определяет фасету для $\text{CUT}_{2p+1}^\square$. ■

Замечание 30.2.8. (i) Де Суза [1993] предложил рассматривать некоторые неравенства, являющиеся обобщением одновременно и неравенств подвешенного дерева, и неравенств букета циклов. Заметим, что графическая структура, используемая в неравенствах подвешенного дерева, есть подвешенное дерево, в то время как графическая структура, используемая в неравенствах букета циклов, есть набор циклов. Заметим также, что цикл является специальным случаем подвешенного дерева. Следовательно, естественной является идея рассмотрения неравенств, определенных набором подвешенных деревьев. Мы отсылаем читателя к работе Де Суза [1993], где несколько неравенств такого типа рассмотрены в контексте эквипарезного многогранника.

(ii) Задача отделения для неравенств подвешенного дерева и для неравенств букета циклов, вероятно, является трудной. Некоторые процедуры отделения неравенств букета циклов (или, более точно, неравенств (30.2.5) с применением к эквипарезному многограннику) предложены в работе Де Суза [1993]. ■

30.3. Неравенства циркулянта

В этом разделе мы представляем класс фасет, для которых соответствующий граф является циркулянтom. *Циркулянтom* называется граф $C(n, r)$ на n вершинах $\{1, 2, \dots, n\}$, ребрами которого являются пары $(i, i + 1)$, $(i, i + r)$ для $i = 1, \dots, n$, где индексы взяты по модулю n . На рисунке 30.3.1 показан граф $C(8, 3)$.

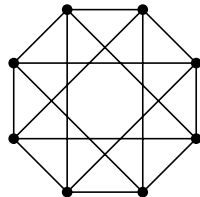


Рис. 30.3.1. $C(8, 3)$

Поляк и Турзик [1987, 1992] вычислили максимальную величину разреза в любом циркулянте $C(n, r)$. Для эквиразрезного многогранника и многогранника двудольного подграфа они рассмотрели несколько новых классов фасет, которые соответствуют некоторым циркулянтам. Теоремы 30.3.2 и 30.3.3 доказаны в работе Поляк и Турзик [1992], а теорема 30.3.4 в работе Поляк и Турзик [1987, 1992].

Многогранником двудольного подграфа $\text{VIP}_n^\square$ называется многогранник в $\mathbb{R}^{E_n}$, определенный как выпуклая оболочка характеристических векторов множества ребер $F \subseteq E_n$, для которого (V_n, F) является двудольным подграфом полного графа K_n .

Теорема 30.3.2. Пусть n, r — целые числа с $n \geq 2r + 1 \geq 4$. Тогда максимум мощности множества ребер F двудольного подграфа в $C(n, r)$ равна $\max(2n - u_t - v_t \mid t = 0, 1, \dots, r)$, где $u_t := |nt - v_{tr}|$, и v_t есть единственное целое, имеющее ту же четность, что и n , и удовлетворяющее условию $nt - r \leq v_{tr} < nt + r$. ■

Теорема 30.3.3. Пусть $n = kr + s$, где $0 < s < r < \frac{n}{2}$, r и k — четные числа, s нечетное число, и n и s взаимно просты. Обозначим через E_O (соответственно, через E_I) множество ребер $(i, i + 1)$ (соответственно, $(i, i + r)$) для $i = 1, \dots, n$ из $C(n, r)$ (индексы взяты по модулю n). Тогда неравенство:

$$\sum_{ij \in E(I)} x_{ij} + s \sum_{ij \in E_O} x_{ij} \leq (s + 1)n - sk - r$$

определяет фасету многогранника двудольного подграфа $\text{VIP}_n^\square$. ■

Теорема 30.3.4. Пусть $n = kr + 1$, где $k, r \geq 2$ — четные числа. Тогда неравенство:

$$\sum_{ij \in C(n, r)} x_{ij} \leq 2n - k - r$$

определяет фасету разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$. ■

Заметим, что в случае $r = 2$ циркулянт $C(n, 2)$ совпадает с антипаутиной AW_n^2 . Поляк и Турзик [1992] заметили, что задача: «содержит ли граф G циркулянт $C(n, 2)$ для некоторого n ?» является NP-полной. Следовательно, задача отделения для класса неравенств:

$$\sum_{ij \in C(n, 2)} x_{ij} \leq \frac{3}{2}(n - 1), \quad n \text{ нечетное}$$

является NP-трудной.

30.4. Парашютное неравенство

В этом разделе мы рассмотрим класс парашютных неравенств. Они были введены¹⁾ в работе Деза и Лоран [1992a] и в дальнейшем исследованы в Деза и Лоран [1992c, 1992d].

Парашютное неравенство определяется на нечетном числе точек, скажем, на $2k + 1$ точках. Удобно обозначить элементы множества V_{2k+1} как $\{0, 1, 2, \dots, k, 1', 2', \dots, k'\}$. Определим пути P и Q следующим образом:

$$P := (k, k-1, \dots, 2, 1, 1', 2', \dots, (k-1)', k'),$$

$$Q := (k-1, \dots, 2, 1, 1', 2', \dots, (k-1)').$$

Тогда неравенство:

$$(30.4.1) \quad (\text{Par}_{2k+1})^T x := \sum_{ij \in P} x_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq k-1} (x_{0i} + x_{0i'} + x_{ki'} + x_{k'i}) - x_{kk'} \leq 0$$

называется *парашютным неравенством* и обозначается $(\text{Par}_{2k+1})^T x \leq 0$. На рисунке 30.4.3 показан граф, соответствующий парашютному неравенству на 7 точках.

Для четного k парашютное неравенство не допустимо для разрезного конуса; например, оно не выполняется для разрезного вектора $\delta(\{1, 3, \dots, k-1\} \cup \{2', 4', \dots, k'\})$. Но для нечетного k парашютное неравенство определяет фасету CUT_{2k+1} .

Теорема 30.4.2. *Для нечетного k парашютное неравенство (30.4.1) определяет фасету CUT_{2k+1} .* ■

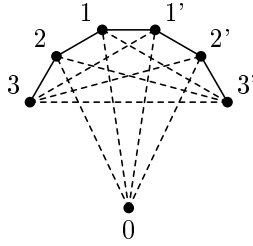


Рис. 30.4.3. $(\text{Par}_7)^T x \leq 0$

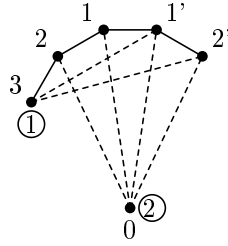


Рис. 30.4.4. Аналог $(\text{Par}_7)^T x \leq 0$ для COR_6

¹⁾ Парашютное неравенство на семи точках (точнее, его переключение) было рассмотрено ранее в работе Ассуад и Делорм [1982] (см. также Ассуад [1984]).

30.4.1. Корни и числа Фибоначчи

Как мы увидим, парашютное неравенство обладает двумя замечательными свойствами. Во-первых, число его корней может быть выражено в терминах чисел Фибоначчи; во-вторых, имеется тесная связь между парашютным неравенством $(\text{Par}_{2k+1})^T x \leq 0$ и клико-паутиным неравенством: $(\text{CW}_{2k+1}^{k-2}(1, \dots, 1, -1, -1))^T x \leq 0$. Напомним, что *последовательностью Фибоначчи* называется последовательность $(f_i)_{i \geq 1}$, рекурсивно задаваемая как

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 = 1, \\ f_{i+2} &= f_i + f_{i+1} \quad \text{для } i \geq 1. \end{aligned}$$

Введем некоторые понятия, необходимые для описания корней парашютного неравенства. Данное подмножество S множества $V_{2k+1} = \{0, 1, \dots, k, 1', \dots, k'\}$ называется *симметричным*, если для всех $i \in \{1, \dots, k\}$ $i \in S$ тогда и только тогда, когда $i' \in S$. Пусть дан путь $A = (1, 2, \dots, n)$. Подмножество S множества $\{1, \dots, n\}$ называется *чередующимся* в пути A , если $|S \cap \{i, i+1\}| \leq 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$, и S называется *псевдо-чередующимся* в пути A , если $|S \cap \{i, i+1\}| = 1$ для всех $i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{j\}$ и $|S \cap \{j, j+1\}| = 0, 2$ для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Легко проверить, что для четного n имеется точно $n-1$ псевдо-чередующихся подмножеств S в пути A , для которых $1, n \in S$. Простая индукция показывает, что число чередующихся подмножеств в пути $A = (1, \dots, n)$ равно числу Фибоначчи f_{n+2} .

Предложение 30.4.5. *Если k нечетно, то парашютное неравенство (30.4.1) допустимо для CUT_{2k+1} . Для любого k корнями парашютного неравенства являются разрезные векторы $\delta(S)$, для которых S есть подмножество множества $\{1, 2, \dots, k, 1', 2', \dots, k'\}$ одного из следующих четырех типов:*

Тип 1. $k, k' \in S$ и S является псевдо-чередующимся в пути P .

Тип 2. $k, k' \notin S$ и S является чередующимся в пути Q .

Тип 3. Для нечетного k , $k \in S$, $k' \notin S$ и имеют место (а) или (б):

- (а) $S := \{2', 4', \dots, (k-1)', k\} \cup T$, где T есть подмножество множества $\{1, 2, \dots, k-2\}$, чередующееся в пути $(1, 2, \dots, k-2)$.
- (б) $S = \{k, 1', (k-1)'\} \cup T \cup T'$, где T есть подмножество множества $\{2, 3, \dots, k-2\}$, чередующееся в пути $(2, 3, \dots, k-2)$, и T' есть подмножество множества $\{2', 3', \dots, (k-2)'\}$, для которого $T' \cup \{1', (k-1)'\}$ является псевдо-чередующимся в пути $(1', 2', \dots, (k-1)').$

Тип 3'. Получается из типа 3 переменной ролей вершин i и i' для всех $i = 1, \dots, k$.

Следовательно, общее число корней $(\text{Par}_{2k+1})^T x \leq 0$ равно $f_{2k} + 2f_{k-1} + 2f_{k-2} + 2k - 1$ для нечетного k и $f_{2k} + 2k - 1$ для четного k , в то время как число ненулевых симметричных корней $(\text{Par}_{2k+1})^T x \leq 0$ равно числу Фибоначчи f_k .

Доказательство. Пусть S есть подмножество множества $\{1, \dots, k, 1', \dots, k'\}$ и пусть $s := |S \cap \{1, \dots, k-1\}|$, $s' := |S \cap \{1', \dots, (k-1)'\}|$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} (\text{Par}_{2k+1})^T \delta(S) &= |\delta(S) \cap P| - 2(s + s'), \text{ если } k, k' \notin S \\ &= |\delta(S) \cap P| - 2s - k, \text{ если } k \in S, k' \notin S \\ &= |\delta(S) \cap P| - 2(k-1), \text{ если } k, k' \in S. \end{aligned}$$

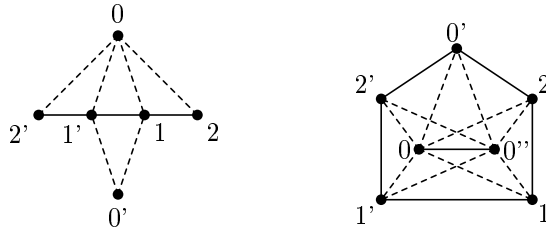
Тогда легко видеть, что для нечетного k парашютное неравенство является допустимым, и что для любого k корни неравенства $(\text{Par}_{2k+1})^T x \leq 0$ имеют тип 1, 2, 3 или 3'. Имеется $2k-1$ корней типа 1, f_{2k} корней типа 2 и $f_k + (k-1)f_{k-1}$ корней типа 3. Следовательно, имеется $2k-1 + f_{2k} + 2f_k + 2(k-1)f_{k-1}$ корней для нечетного k и $2k-1 + f_{2k}$ корней для четного k . Имеется только один симметричный корень типа 1, именно, $\delta(\{k, \dots, 3, 1, 1', 3', \dots, k'\})$ для нечетного k , и $\delta(\{k, \dots, 4, 2, 2', 4', \dots, k'\})$ для четного k . Число симметричных корней типа 2 равно числу чередующихся подмножеств в пути $(2, 3, \dots, k-1)$, т. е. f_k . Симметричных корней типов 3 и 3' нет. Следовательно, всего имеется f_k ненулевых симметричных корней. ■

Покажем теперь связь между парашютным неравенством и клико-паутинным неравенством $\text{CW}_{2k+1}^{k-2}(1, \dots, 1, -1, -1)^T x \leq 0$. Для этого определим сначала следующее неравенство:

$$(30.4.6) \quad \sum_{ij \in Q} x_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq k-1} (x_{0i} + x_{0i'}) - \sum_{1 \leq i \leq k-2} (x_{0'i} + x_{0'i'}) \leq 0,$$

которое определено на $2k$ вершинах множества $\{0, 1, 2, \dots, k-1, 0', 1', \dots, (k-1)'\}$. Неравенство (30.4.6) называется *неравенством Фибоначчи* и обозначается $(\text{Fib}_{2k})^T x \leq 0$.

Рассмотрим теперь клико-паутинное неравенство $\text{CW}_{2k+1}^{k-2}(1, \dots, 1, -1, -1)^T x \leq 0$. Тогда неравенство, полученное из него стягиванием положительных вершин (т. е. вершин i , для которых $b_i = 1$) и отрицательных вершин (т. е. вершин j , для которых $b_j = -1$) совпадает с неравенством Фибоначчи $(\text{Fib}_{2k})^T x \leq 0$ (если соответствующим образом проиндексировать точки, на которых клико-паутинное неравенство

Рис. 30.4.7. $(\text{Fib}_6)^T x \leq 0$ Рис. 30.4.8. $(\text{CW}_7^1)^T x \leq 0$

определено). Это, в частности, показывает, что неравенство Фибоначчи допустимо для CUT_{2k} .

Заметим, что неравенство Фибоначчи $(\text{Fib}_{2k})^T x \leq 0$ может также быть получено из парашютного неравенства $(\text{Par}_{2k+1})^T x \leq 0$ стягиванием двух вершин k, k' в единственную вершину, обозначенную $0'$. Следовательно, корнями неравенства Фибоначчи $(\text{Fib}_{2k})^T x \leq 0$ являются разрезные векторы $\delta(S \setminus \{k, k'\} \cup \{0'\})$ для S типа 1 и разрезные векторы $\delta(S)$ для S типа 2. Следовательно, $(\text{Fib}_{2k})^T x \leq 0$ имеет $f_{2k} + 2k - 1$ корней. Легко проверить, что оно определяет грань CUT_{2k} размерности $\binom{2k-1}{2} + 2 = \binom{2k}{2} - (2k - 3)$.

Следовательно, для любого $k \geq 3$ парашютное неравенство $(\text{Par}_{2k+1})^T x \leq 0$ и клико-паутинное неравенство $\text{CW}_{2k+1}^{k-2}(1, \dots, 1, -1, -1)^T x \leq 0$ допускают стягивание, определяющее одинаковую грань.

На рисунках 30.4.7 и 30.4.8 показаны графы неравенства Фибоначчи $(\text{Fib}_6)^T x \leq 0$ и клико-паутинного неравенства $(\text{CW}_7^1)^T x \leq 0$. (Стягивание вершин $0'$ и $0''$ в $(\text{CW}_7^1)^T x \leq 0$ дает $(\text{Fib}_6)^T x \leq 0$.)

30.4.2. Обобщение парашютного неравенства

Наконец, мы представляем класс неравенств из работы Буассен [1994], обобщающих парашютные неравенства. Эти новые неравенства могут быть получены применением операции «расщепления вершины», описанной в разделе 26.6. Так как эту операцию проще применить к фасетам корелляционного многогранника, сначала мы переформулируем парашютное неравенство для корелляционного многогранника.

Начнем с парашютного неравенства $(\text{Par}_{2k+1})^T x \leq 0$, определенного на множестве $V_{2k+1} = \{0, 1, 2, \dots, k, 1', 2', \dots, k'\}$. Применив ковариантное отображение $\xi_{k'}$ (отмеченное на позиции k'), мы получим следующее

неравенство $a^T p \geq 0$, определенное на всех парах (не обязательно различных) элементов из $V_{2k+1} \setminus \{k'\}$:

$$(30.4.9) \quad a^T p := (k-1)p_{00} + \frac{k-1}{2}p_{kk} + \sum_{ij \in E(P')} p_{ij} - \sum_{h=1}^{k-1} (p_{0h} + p_{0,h'} + p_{k,h'}) \geq 0,$$

где P' обозначает путь $(k, k-1, \dots, 2, 1, 1', 2', \dots, (k-1)')$. На рисунке (30.4.4) изображено выражение $a^T p$ для $k=3$ (петли в вершинах 0 и 3 соответствуют величинам a_{00} и a_{33}).

Пусть $h \in \{1, \dots, k-1\}$, и пусть $b^T p \geq 0$ обозначает неравенство, полученное из $a^T p \geq 0$ расщеплением вершины h ; напомним, что b определено из отношения (26.6.3). Следовательно, если мы обозначим новую вершину h^* , то $b_{ij} = a_{ij}$ для $i, j \in V_{2k+1} \setminus \{k'\}$, $b_{h,h^*} = 0$, $b_{0,h^*} = 0$ и, для $i \in V_{2k+1} \setminus \{0, k'\}$, $b_{i,h^*} = 1$, если i смежно с h в пути P' , и $b_{i,h^*} = 0$ в противном случае. Легко проверить, что можно взять $b_{h,h^*} = 1$ для уверенности в том, что неравенство $b^T p \geq 0$ определяет фасету COR_{2k+1} (см. предложение 26.6.4).

Конечно, можно повторить эту операцию, т. е. ввести большее число вершин как результат расщепления вершин $h \in \{1, \dots, k-1\}$. Именно, пусть $Q_1, \dots, Q_{k-1}$ обозначают попарно непересекающиеся множества, являющиеся подмножествами V_{2k+1} . Построим неравенство $B^T p \geq 0$, полученное последовательным добавлением всех вершин из Q_h как расщеплений вершины h и уже введенных вершин из Q_h , для $h = 1, \dots, k-1$. Например, на рисунке 30.4.10 показана величина $B^T p$, где $k=5$, и мы ввели одно расщепление вершины 1, одно расщепление вершины 4 и два расщепления вершины 2.

В качестве упражнения построим неравенство для разрезного многогранника, соответствующее неравенству $B^T p \geq 0$. Это неравенство $C^T x \leq 0$, определенное на парах различных элементов множества $V_{2k+1} \cup \bigcup_{1 \leq h \leq k-1} Q_h$, где

$$\begin{aligned} C_{0k} &= 0 \\ C_{0k'} &= \sum_{1 \leq h \leq k-1} |Q_h|, \\ C_{0i} &= -1 \text{ для } i \in Q_h \cup \{h, h'\} \text{ } (1 \leq h \leq k-1), \\ C_{ij} &= 1, \text{ если } ij \text{ есть ребро пути } P, \\ C_{i1'} &= 1 \text{ для } i \in Q_1, \end{aligned}$$

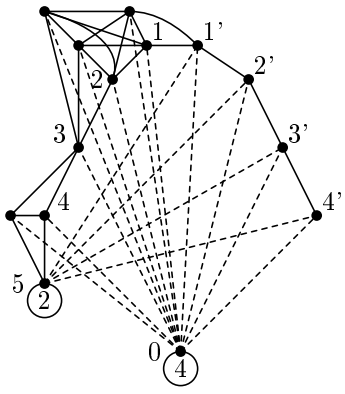


Рис. 30.4.10. $B^T p \geq 0$
(фасета COR_{14})

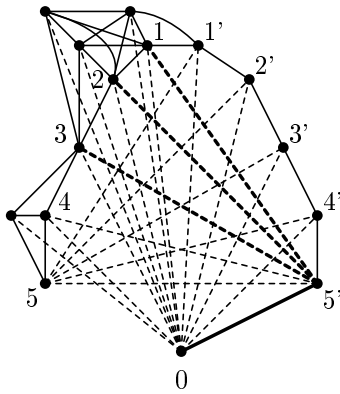


Рис. 30.4.11. $C^T x \leq 0$
(фасета CUT_{15})

$$C_{ij} = 1 \text{ для } i \in Q_h \cup \{h\}, j \in Q_{h+1} \cup \{h+1\}$$

$$(1 \leq h \leq k-1),$$

$$C_{ij} = 1 \text{ для } i \neq j \in Q_h,$$

$$C_{ki'} = -1 \text{ для } i' = 1', 2', \dots, k',$$

$$C_{k'i} = -(|Q_{h-1}| + |Q_h| + |Q_{h+1}|) \text{ для } i \in Q_h \text{ } (1 \leq h \leq k-1),$$

где $Q_0 = Q_k = \emptyset$. Например, неравенство $B^T p \geq 0$ рисунка 30.4.10 соответствует неравенству $C^T x \leq 0$, которое показано на рисунке 30.4.11 (с весом 4 на ребре $(5', 0)$, весом -4 на ребрах $(5', 1)$, $(5', 2)$, $(5', 3)$ и весом -2 на ребре $(5', 4)$). Следующий результат является прямым приложением предложения 26.6.4.

Теорема 30.4.12. *Неравенство $B^T p \geq 0$ определяет фасету корреляционного многогранника. Эквивалентно, неравенство $C^T x \leq 0$ определяет фасету разрезного многогранника.* ■

30.5. Некоторые спорадические примеры

Гришухин [1990] ввел следующее неравенство:

$$(30.5.1) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_{ij} + x_{56} + x_{57} - x_{67} - x_{16} - x_{36} - x_{27} - x_{47} - 2 \sum_{1 \leq i \leq 4} x_{5i} \leq 0$$

и доказал, что оно определяет фасету CUT₇. Обозначим неравенство (30.5.1) как $(Gr_7)^T x \leq 0$. Заметим, что если мы применим стягивание к вершинам 6, 7 в $(Gr_7)^T x \leq 0$, то мы получим гиперметрическое неравенство $Q_6(1, 1, 1, 1, -2, -1)^T x \leq 0$. Другими словами, $(Gr_7)^T x \leq 0$ можно рассматривать как подъем неравенства $Q_6(1, 1, 1, 1, -2, -1)^T x \leq 0$. С другой стороны, рассмотрим следующее неравенство (30.5.2), обозначаемое как $(Gr_8)^T x \leq 0$; оно было введено в Де Симоне, Деза и Лоран [1994], где было доказано, что оно определяет фасету CUT₈:

$$(30.5.2) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_{ij} + x_{68} + x_{78} - x_{16} - x_{27} - x_{47} - \sum_{1 \leq i \leq 4} (x_{5i} + x_{8i}) \leq 0.$$

Заметим, что если мы применим стягивание к вершинам 5, 8 в $(Gr_8)^T x \leq 0$, мы получим $(Gr_7)^T x \leq 0$. Следовательно, $(Gr_7)^T x \leq 0$ есть не чистое неравенство, возникающее как стягивание чистого неравенства $(Gr_8)^T x \leq 0$. На рисунках 30.5.3, 30.5.4 показаны графы, соответствующие неравенствам $(Gr_7)^T x \leq 0$ и $(Gr_8)^T x \leq 0$. (На рисунке 30.5.3 жирная штриховая линия между вершиной 5 и окружностью, содержащей вершины 1, 2, 3, 4, означает, что вершина 5 смежна со всеми четырьмя вершинами 1, 2, 3, 4 ребрами веса -2 .)

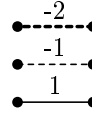
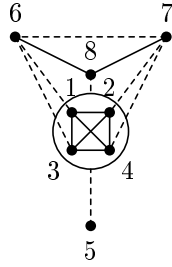
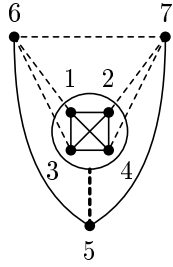


Рис. 30.5.3. $(Gr_7)^T x \leq 0$ Рис. 30.5.4. $(Gr_8)^T x \leq 0$ реберные веса

Келли (неопубликованная рукопись) ввел следующий класс допустимых неравенств. Рассмотрим разбиение множества $\{1, \dots, n\}$ на $P \cup Q \cup \{n\}$, где $|P| = p$, $|Q| = q$ и $p, q \geq 2$, $p + q + 1 = n$. Пусть K_p (соответственно, K_q) обозначает полный граф на множестве P

(соответственно, Q). Пусть $t := pq - p^2 + 1$. Рассмотрим следующее неравенство, обозначаемое как $(\text{Kel}_n(p))^T x \leq 0$:

$$(p-1) \sum_{ij \in K_q} x_{ij} + (p+1) \sum_{ij \in K_p} x_{ij} - p \sum_{i \in Q, j \in P} x_{ij} + (q-p-t) \sum_{i \in Q} x_{in} + t \sum_{i \in P} x_{in} \leq 0.$$

Следующий результат можно найти в Деза и Лоран [1992a].

Предложение 30.5.5. *Для $n \geq 5$ неравенство $(\text{Kel}_n(p))^T x \leq 0$ является допустимым для CUT_n .* ■

Определение того, при каких параметрах p и n неравенство $(\text{Kel}_n(p))^T x \leq 0$ порождает фасету, остается открытой проблемой. Мы приводим здесь несколько частных результатов.

Предложение 30.5.6. *Предположим, что $n \geq 7$. Тогда*

- (i) *Неравенство $(\text{Kel}_n(2))^T x \leq 0$ совпадает (с точностью до перестановки) с клико-паутинным неравенством $\text{CW}_n^1(n-4, 2, 2, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$; следовательно, оно определяет фасету CUT_n .*
- (ii) *Неравенство $(\text{Kel}_n(n-1))^T x \leq 0$ определяет симплицальную грань CUT_n размерности $\binom{n}{2} - 3$.* ■

30.6. Полное описание CUT_n и $\text{CUT}_n^\square$ для $n \leq 7$

Мы представляем здесь полное линейное описание¹⁾ разрезного конуса CUT_n и разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ для $n \leq 7$.

Для $n = 3, 4$ единственными неравенствами, определяющими фасеты CUT_n , являются неравенства треугольника, т. е. неравенства

$$x_{ij} - x_{ik} - x_{jk} \leq 0$$

для различных i, j, k из $\{1, \dots, n\}$. Следовательно, CUT_3 (соответственно, $\text{CUT}_3^\square$) имеет 3 (соответственно, 4) фасеты, в то время как CUT_4 (соответственно, $\text{CUT}_4^\square$) имеет 12 (соответственно, 16) фасет.

¹⁾ Это линейное описание было независимо получено несколькими авторами. В частности, линейное описание для CUT_5 было получено Деза [1960, 1973a], Дэвидсоном [1969]; линейное описание для CUT_6 — Барановским [1971], Мак Раэ и Дэвидсоном [1972], Ависом и Маттом [1989]; и линейное описание для CUT_7 — Гришухиным [1990]. На самом деле, Мак Раэ и Дэвидсон [1972] уже нашли список фасет для CUT_7 и предположили, что он полный.

Для $n = 5$ фасеты CUT_5 , с точностью до перестановок и переключений, определяются следующими неравенствами:

1. $Q_5(1, 1, -1, 0, 0)^T x \leq 0$ (неравенство треугольника),
2. $Q_5(1, 1, 1, -1, -1)^T x \leq 0$ (пентагональное неравенство).

В целом, CUT_5 (соответственно, $\text{CUT}_5^\square$) имеет $30 + 10 = 40$ фасет (соответственно, $40 + 16 = 56$ фасет).

Для $n = 6$ фасеты CUT_6 , с точностью до перестановок и переключений, порождены одним из следующих неравенств:

1. $Q_6(1, 1, -1, 0, 0, 0)^T x \leq 0$,
2. $Q_6(1, 1, 1, -1, -1, 0)^T x \leq 0$,
3. $Q_6(2, 1, 1, -1, -1, -1)^T x \leq 0$.

В целом, CUT_6 имеет $60 + 60 + 90 = 210$ фасет и $\text{CUT}_6^\square$ имеет $80 + 96 + 192 = 368$ фасет.

Для $n = 7$ фасеты CUT_7 , с точностью до перестановок и переключений, порождены одним из следующих одиннадцати неравенств:

1. $Q_7(1, 1, -1, 0, 0, 0, 0)^T x \leq 0$,
2. $Q_7(1, 1, 1, -1, -1, 0, 0)^T x \leq 0$,
3. $Q_7(2, 1, 1, -1, -1, -1, 0)^T x \leq 0$,
4. $Q_7(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1)^T x \leq 0$,
5. $Q_7(2, 2, 1, -1, -1, -1, -1)^T x \leq 0$,
6. $Q_7(3, 1, 1, -1, -1, -1, -1)^T x \leq 0$,
7. $\text{CW}_7^1(1, 1, 1, 1, 1, -1, -1)^T x \leq 0$,
8. $\text{CW}_7^1(2, 2, 1, 1, -1, -1, -1)^T x \leq 0$,
9. $\text{CW}_7^1(3, 2, 2, -1, -1, -1, -1)^T x \leq 0$,
10. $(\text{Par}_7)^T x \leq 0$,
11. $(Gr_7)^T x \leq 0$.

Среди 11 типов фасет CUT_7 первые пять не являются симплицальными, последние пять не являются гиперметрическими, и пять из них являются чистыми (т. е. все их коэффициенты равны $0, 1, -1$) (именно, первый, второй, четвертый, седьмой и десятый классы).

Пусть F_i обозначает фасету CUT_7 , определенную i -м неравенством для $i = 1, \dots, 11$. Как было получено в работе Деза и Лоран [1992с], орбита $\Omega(F_i)$ (которая состоит из всех фасет CUT_7 , которые могут быть получены из F_i (корневым) переключением или перестановкой) содержит соответственно 105, 210, 630, 35, 546, 147, 5292, 8820, 2205, 7560 и 13230 элементов для $i = 1, \dots, 11$. Следовательно, среди 11 типов фасет CUT_7 определяющее фасету неравенство $(Gr_7)^T x \leq 0$ имеет наибольшее число 13230 различных образов при перестановках и переключениях!

Следовательно, CUT_7 имеет $\sum_{i=1}^{11} |\Omega(F_i)| = 105 + 210 + \dots + 13230 = 38780$ фасет. Используя лемму 26.3.11, можно легко вычислить, что $\text{CUT}_7^\square$ имеет 116.764 фасет.

Число различных (с точностью до перестановки) фасет CUT_7 было вычислено в Де Симоне, Деза и Лоран [1994]; оно равно 36. Более точно, пусть $\nu(F_i)$ обозначает число (корневых) переключений F_i , которые попарно перестановочно неэквивалентны. Например, $\nu(F_1) = 1$, так как любые два (корневых) переключения неравенства треугольника снова являются неравенствами треугольника. Именно, $\nu(F_i) = 1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 7, 5, 3, 7$, соответственно, для $i = 1, \dots, 11$. Различные переключения каждой фасеты F_i подробно описаны в Де Симоне, Деза и Лоран [1994].

В таблице 30.6.1 мы суммируем некоторую информацию о фасетах CUT_7 . А именно, для каждой фасеты F_i ($i = 1, \dots, 11$) мы даем:

- число (S) ее различных (с точностью до перестановки) корневых переключений,
- число (R) ее корней,
- размер (o) $|\Omega(F_i)|$ ее орбиты в CUT_7 (т. е. число различных фасет CUT_7 , которые могут быть получены из F_i перестановкой или переключением),
- размер (O) ее орбиты в $\text{CUT}_7^\square$ (т. е. число различных фасет $\text{CUT}_7^\square$, которые могут быть получены из F_i перестановкой или переключением).

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	всего
S	1	1	2	1	3	2	4	7	5	3	7	36
R	48	40	30	35	26	21	21	21	21	21	21	
o	105	210	630	35	546	147	5292	8820	2205	7560	13230	38780
O	140	336	1344	64	1344	448	16128	26880	6720	23040	40320	116764

Рис. 30.6.1. Данные о фасетах CUT_7

Кристоф и Райнелт¹⁾ [1996] недавно получили описание граней разрезного многогранника для $n \leq 8$ точек. Для $n = 8$ они получили 217 093 472 фасет для разрезного многогранника $\text{CUT}_8^\square$ и 49 604 520

¹⁾ Кристоф и Райнелт [1996] получили список различных (с точностью до перестановок и переключений) фасет и указали для каждой фасеты число ее корней и размер ее орбиты в конусе и в многограннике разрезов. Следовательно, информация таблицы (30.6.1) может быть расширена. Эти сведения для CUT_8 и $\text{CUT}_8^\square$ можно найти по следующему WWW адресу:

<http://www.iwr.uni-heidelberg.de/iwr/comopt/soft/SMAPO/SMAPO.html>.

фасет для разрезного конуса CUT_8 , которые разбиты на 147 орбит. Структура этих фасет не была проанализирована и мы не можем привести здесь список этих фасет, так как он слишком велик. Таким образом, число фасет растет очень быстро при переходе от $n = 7$ к $n = 8$; $\text{CUT}_8^\square$ имеет более чем в тысячу раз больше фасет, чем $\text{CUT}_7^\square$! Это показывает, что структура фасет CUT_n становится все более и более сложной с возрастанием n . Неравенства не имеют очевидных симметрий и выглядят слишком трудными для обобщений. Именно, фасета $(Gr_7)^T x \leq 0$ (из (5.9)) является наименьшим (и единственным для $n \leq 7$) примером фасеты, для которой мы не можем найти должного обобщения. Этот феномен возрастания сложности структуры граней для больших n является общим для многогранников, возникающих из трудных задач оптимизации. Например, структура граней многогранника симметричной задачи коммивояжера, известная для $n = 8$ (Бойд и Каннингхэм [1991], Кристоф, Юнгер и Райнелт [1991]), недавно была вычислена для $n = 9, 10$ Падбергом [1995] и Кристофом и Райнелтом [1996]. (Имеется 42 104 442 фасеты для $n = 9$ и более чем 51 043 900 866 фасет для $n = 10$.)

30.7. Дополнительные замечания

Мы упомянем здесь некоторые другие интересные вопросы, связанные с изучением фасет разрезного конуса. Во-первых, мы рассмотрим некоторые подконусы CUT_n , порожденные подсемействами разрезов; мы покажем, что они наследуют, в некотором смысле, все фасеты CUT_n . Тогда мы рассмотрим следующие три вопроса, относящиеся к операции стягивания в разрезном конусе: Может ли каждая фасета быть стянутой до треугольной фасеты? Может ли каждая (не чистая) фасета быть получена стягиванием чистой фасеты? Имеет ли каждая фасета свойство четности?

Перенос фасет в другие конусы. Пусть K — подмножество множества всех разрезных векторов в K_n . Мы интересуемся нахождением структуры граней конуса $\mathbb{R}_+(K)$ или многогранника $\text{Conv}(K)$ для некоторых специальных семейств разрезов K . Общая проблема имеет вид: Какие фасеты разрезного конуса CUT_n наследуют полиэдры $\mathbb{R}_+(K)$ и $\text{Conv}(K)$? Очевидно, любое неравенство, которое определяет фасету в CUT_n , остается допустимым для $\mathbb{R}_+(K)$ и $\text{Conv}(K)$, но когда оно будет

порождать фасету в этих полиэдрах? Такой вопрос рассматривался для случая, когда K состояло из четно-разрезных векторов, или из неэквивариантных векторов, или из эквивариантных векторов. Удивительным свойством четно-разрезного конуса ECUT_n , неэквивариантного конуса ICUT_n и эквивариантного многогранника $\text{EQCUT}_n^\square$ является то, что они уже «содержат» все фасеты разрезного конуса. Более точно, каждое неравенство, определяющее фасету разрезного конуса CUT_n , может быть преобразовано в некоторую фасету ECUT_m , ICUT_m или $\text{EQCUT}_m^\square$ для любого достаточно большого m с помощью 0-подъема. Утверждение (i) нижеприведенной теоремы 30.7.1 доказано в Деа и Лоран [1993b], а (ii) и (iii) — в Деа, Фукуда и Лоран [1993].

Теорема 30.7.1. *Для данного $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ и целых $m \geq n$ определим $v' \in \mathbb{R}^{\binom{m}{2}}$, положив $v'_{ij} = v_{ij}$ для $1 \leq i < j \leq n$ и $v'_{ij} = 0$ для $1 \leq i \leq n < j \leq m$ и $n+1 \leq i < j \leq m$. Предположим, что неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету разрезного конуса CUT_n . Тогда*

- (i) *Неравенство $(v')^T x \leq 0$ определяет фасету четно-разрезного конуса ECUT_m для любого четного m , $m \geq n+5$.*
- (ii) *Неравенство $(v')^T x \leq 0$ определяет фасету неэквивариантного конуса ICUT_m для любого m , такого что $n < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.*
- (iii) *Неравенство $(v')^T x \leq 0$ определяет фасету эквивариантного многогранника $\text{EQCUT}_m^\square$ для любого нечетного m , $m \geq 2n+1$. ■*

Допустимые для разрезного конуса CUT_n неравенства могут также быть перенесены на конус k -однородных разрезов UCUT_n^k следующим образом. Предположим, что $1 \leq k \leq n-1$, $k \neq \frac{n}{2}$. Для данного $v \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$ определим $v^* \in \mathbb{R}^{E_n}$, положив

$$v_{ij}^* := v_{ij} + \frac{v_{i,n+1} + v_{j,n+1}}{n-2k} - \frac{v^T \delta(\{n+1\})}{(n-k)(n-2k)}$$

для $1 \leq i < j \leq n$. Если неравенство $v^T x \leq 0$ является допустимым для разрезного конуса CUT_{n+1} , то неравенство $(v^*)^T x \leq 0$ является допустимым для конуса k -однородных разрезов UCUT_n^k (Деа и Лоран [1992e]). Например, для $1 \leq i < j \leq n$, если $v^T x := x_{i,n+1} - x_{j,n+1} - x_{ij} \leq 0$ есть неравенство треугольника, то $(v^*)^T x \leq 0$ есть

$$\sum_{1 \leq h \leq n, h \neq i, j} (x_{ih} - x_{jh}) - (n-2k)x_{ij} \leq 0.$$

Если $v^T x := x_{ij} - x_{i,n+1} - x_{j,n+1}$, то $(v^*)^T x \leq 0$ имеет вид

$$2 \sum_{1 \leq h \leq l \leq n} x_{hl} - (n-k) \sum_{1 \leq h \leq n, h \neq i,j} (x_{ih} + x_{jh}) + (n-k)(n-2k-2)x_{ij} \leq 0.$$

Именно, конус 2-однородных разрезов UCUT_n^2 является симплициальным конусом, полностью описываемым последними $\binom{n}{2}$ неравенствами (Деза, Фукуда и Лоран [1993]).

Вопросы, относящиеся к операции стягивания. Теперь мы обратимся к следующим трем вопросам о фасетах CUT_n :

Вопрос 1. Можно ли каждую фасету разрезного конуса сжать до некоторой треугольной фасеты?

Вопрос 2. Может ли каждая (не чистая) фасета быть получена стягиванием некоторой чистой фасеты?

Вопрос 3. Если неравенство $v^T x \leq 0$ определяет фасету CUT_n , верно ли, что $v^T \delta(S)$ есть четное число для любого разрезного вектора $\delta(S)$?

Напомним, что операция стягивания сохраняет допустимые неравенства, но не обязательно сохраняет фасеты. Назовем фасету *сжатой*, если ни одно из ее стягиваний не определяет фасету. Следовательно, ответом на вопрос 1 является «да» в точности тогда, когда единственными сжатыми фасетами конуса CUT_n (для любого n) являются треугольные фасеты. Более вероятным предположением является следующее: число сжатых фасет разрезного конуса конечно.

Мы проверим, что большинство из известных классов фасет конуса CUT_n действительно можно сжать до некоторой треугольной фасеты. (Например, рассмотрим чистое неравенство клики-паутины: $(\text{CW}_n^r)^T x \leq 0$; неравенство, полученное из него стягиванием всех вершин из множества $\{1, \dots, n\} \setminus \{1, r+2\}$ в единственную вершину, скажем u , является в точности неравенством треугольника $x_{1,r+2} - x_{1u} - x_{u,r+2} \leq 0$.) В действительности, часто имеется несколько путей стягивания данной фасеты в некоторую треугольную фасету. Стягивания всех фасет CUT_7 в некоторые треугольные фасеты даны в Де Симоне, Деза и Лоран [1994].

Для данного порождающего фасету неравенства $v^T x \leq 0$ его *пурификацией* называется любое чистое неравенство, допустимое для большего разрезного конуса и допускающее стягивание, совпадающее с $v^T x \leq 0$. Как показано в Де Симоне [1992], такая пурификация всегда существует. Но в вопросе 2 говорится о фасетах, пурификация которых является неравенством, порождающим фасету. По построению, ответом

является «да» для класса клико-паутинных фасет. В разделе 30.5 мы упоминали также неравенство (30.5.2), которое является пурификацией не чистого неравенства (30.5.1). Однако мы не знаем ответа на вопрос 2 для классов неравенств подвешенного дерева или неравенств букета циклов. Интересно было бы найти некоторый большой класс чистых фасет, из которых фасеты (30.1.1), (30.1.7), (30.1.8) или (30.1.11) могут быть получены с помощью стягивания. (напомним замечание к предложению 30.1.3).

Если ответом на вопрос 3 является «да», мы говорим, что неравенство $v^T x \leq 0$ имеет *свойство четности*. Мы говорим также, что вектор v имеет свойство четности, если $v^T \delta(S)$ является четным для всех разрезных векторов $\delta(S)$. Пусть e_{ij} ($1 \leq i < j \leq n$) обозначают координатные вектора в $\mathbb{R}^{E_n}$. Можно легко проверить, что $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ имеет свойство четности тогда и только тогда, когда v можно записать как целую линейную комбинацию треугольных векторов $e_{ij} + e_{ik} + e_{jk}$ (для $1 \leq i < j \leq n$) и векторов $2e_{ij}$ (для $1 \leq i < j \leq n$), т. е. если

$$v \in \mathbb{Z}(e_{ij} + e_{ik} + e_{jk} \ (1 \leq i < j < k \leq n), \ 2e_{ij} \ (1 \leq i < j \leq n)).$$

Заметим, что свойство четности сохраняется при переключении и стягивании. Проверено, что все известные классы фасет разрезного конуса имеет свойство четности.

Интересной проблемой является нахождение фасеты $\text{CUT}_n^\square$, не имеющей свойства четности; хорошим кандидатом могло бы быть некоторое неравенство вида

$$v^T := \sum_{ij \in E} x_{ij} \leq v_0,$$

где E есть множество ребер регулярного графа нечетной степени, и v_0 есть максимальная величина разреза в этом графе. (Заметим, что оба предположения, допустимости и полного ранга, являются необходимыми для свойства четности. Действительно, легко построить некоторое допустимое неравенство, не определяющее фасету и не обладающее свойством четности, или некоторое недопустимое неравенство, множество корней которого имеет полный ранг, и которое не обладает свойством четности.)

В качестве иллюстрации мы опишем ниже полное разложение некоторых определяющих фасеты неравенств в решетке $\mathbb{Z}(e_{ij} + e_{ik} + e_{jk} \ (1 \leq i < j < k \leq n), 2e_{ij} \ (1 \leq i < j \leq n))$. Положим

$$T(i, j; k) := x_{ij} - x_{ik} - x_{jk}.$$

- Для фасеты, определенной парашютным неравенством:
 $(\text{Par}_{2k+1})^T x \leq 0$ (k нечетно),

$$(\text{Par}_{2k+1})^T x = \sum_{1 \leq i \leq k-1} (T(i, i+1; a_{i'}) + T(i', (i+1)'; a_i)) + T(1, 1'; 0) - T(k, k'; 0),$$

где $a_i := k, a_{i'} := k'$ для нечетного i и $a_i = a_{i'} := 0$ для четного i .

- Для фасеты, определяемой неравенством: $(Gr_7)^T x \leq 0$,

$$(Cr_7)^T x = T(1, 2; 5) + T(1, 3; 5) + T(1, 4; 6) + T(2, 3; 7) + \\ + T(2, 4; 5) + T(3, 4; 5) - T(6, 7; 5).$$

- Для гиперметрической фасеты: $Q_n(-(n-4), 1-, 1, \dots, 1)^T x \leq 0$

$$Q_n(-(n-4), 1-, 1, \dots, 1)^T x = - \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 \right) 2x_{12} + \sum_{3 \leq i < j \leq n} T(i, j; a_{ij}) - T_0,$$

где $a_{ij} := 2$, если $ij = (2t+1, 2t+2)$ для $1 \leq t \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, и $a_{ij} := 1$ в противном случае, и $T_0 := T(2, n; 1)$, если n нечетное, и $T_0 := 0$, если n четное.

- Для фасеты, определяемой клико-паутинным неравенством:
 $(CW_{2r+5}^r)^T x \leq 0$,

$$(CW_{2r+5}^r)^T x = \sum_{i=1}^{r+1} (T(i, i+r+1; 2r+4) + T(i, i+r+2; 2r+5)) + \\ + T(r+2, 2r+3; 2r+4) - T(r+2, 2r+5; 2r+4).$$

Глава 31.

Геометрические свойства

Эта глава содержит несколько результатов геометрического типа для разрезного многогранника $CUT_n^\square$. Одна из тем посвящена изучению геометрической формы $CUT_n^\square$, в частности, в связи с его линейной релаксацией до полуметрического многогранника $MET_n^\square$ и с его выпуклым (неполиэдральным) релаксацией до эллитопа $\mathcal{E}_n$.

Мы уже видели (в разделе 26.3.3), что многогранник $CUT_n^\square$ имеет много симметрий. Мы будем, например, интересоваться следующими вопросами: Что является ребрами многогранника $CUT_n^\square$? В более общем случае, какова структура его граней малых размерностей? В некотором смысле мы можем дать ответ на этот вопрос до размерности $\log_2 n$. Действительно, оказывается, что $CUT_n^\square$ имеет довольно много граней размерности до $\log_2 n$, общих с его релаксациями $MET_n^\square$ и $\mathcal{E}_n$, которые порождаются множествами разрезов (см. теоремы 31.5.9 и 31.6.4).

Как мы видели в части 5, $CUT_n^\square$ имеет большое разнообразие фасет, большинство из которых имеют очень сложную структуру. Возникает оправданный вопрос: какие из них наиболее важны? Дать точное определение слову «важное» в данном вопросе не простая задача. Однако интуитивно ясно, что некоторые фасеты более существенны, чем другие; некоторые фасеты имеют в действительности «большую площадь», в то время как другие необходимы лишь для скругления некоторых малых углов многогранника. Одним из путей измерения важности фасеты является вычисление евклидова расстояния от гиперплоскости, содержащей фасету, до центра тяжести $CUT_n^\square$. Интуитивно ясно, что фасеты, расположенные ближе к центру тяжести, более важны, чем отдаленные фасеты. Выдвинута гипотеза, что треугольные фасеты являются ближайшими к центру тяжести фасетами; см. раздел 31.7 о результатах, относящихся к этой гипотезе. Напомним (глава 27), что неравенства треугольника имеют и другие интересные свойства.

Разрезный многогранник $CUT_n^\square$ не является симплицальным многогранником (если $n \geq 5$), так как уже некоторые из его фасет не симплицальны. Однако, похоже, что подавляющее большинство его фасет являются симплексами. Это было проверено для $n \leq 7$, и с

помощью компьютера найдено, что свыше 97 процентов фасет являются симплексами. Мы собрали результаты о симплицальных фасетах $\text{CUT}_n^\square$ в разделе 31.8.

В разделе 31.5 представлено несколько геометрических свойств эллитопа $\mathcal{E}_n$, определенного в разделе 28.4.1 как множество всех $n \times n$ симметрических положительно полуопределенных матриц с нулями на главной диагонали. С точностью до простого преобразования, $\mathcal{E}_n$ является (неполиэдральной) релаксацией разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$.

Более интересная интерпретация разрезного многогранника упомянута в разделе 31.2; именно, допустимые для $\text{CUT}_n^\square$ неравенства порождают неравенства для попарных углов в множестве из n единичных векторов в $\mathbb{R}^n$. (По сути это переформулировка утверждения, установленного в разделе 6.4, о том, что сферическое расстояние ℓ_1 -вложимо.) В разделе 31.3 мы описываем некоторые дальнейшие приложения этого результата в связи с задачей пополнения частичной положительно полуопределенной матрицы. Эта задача совпадает с описанием проекций эллитопа $\mathcal{E}_n$. В общем случае, проективный многогранник $\mathcal{E}(G)$ содержится в образе $\text{CUT}^\square(G)$ при отображении $x \mapsto \cos(\pi x)$. Из этого следует, что оба тела совпадают, если граф G не имеет K_4 -минора (см. теорему 31.3.7). Дальнейшие результаты для больших классов графов даны в разделе 31.3.

В разделе 31.4 мы рассматриваем аналог задачи пополнения для матриц евклидовых расстояний. В действительности, эта задача ни что иное, как задача описания проекций конуса отрицательного типа NEG_n . Оказывается, имеется несколько результатов по этой задаче, которые совершенно аналогичны известным результатам для задачи положительно полуопределенного пополнения. В разделе 31.4.2 мы упомянем, как эти две задачи пополнения могут быть сопоставлены (используя, в частности, одно из метрических преобразований, рассмотренных в главе 9, а именно, преобразование Шенберга).

В разделе 31.1 мы описываем, как разрезы могут быть использованы для опровержения долгое время не поддававшейся решения гипотезы Борсука.

31.1. Используя разрезы опровержение гипотезы Борсука

Следующий вопрос был поставлен Борсуком [1933] более чем шестьдесят лет тому назад:

Для данного множества X точек в $\mathbb{R}^d$, всегда ли возможно разбить X на $d + 1$ подмножеств так, чтобы каждое имело диаметр меньший, чем X ?

Напомним, что диаметр¹⁾ множества $X \subseteq \mathbb{R}^d$ определяется как

$$\text{diam}(X) := \max_{x, y \in X} \|x - y\|_2,$$

максимум евклидовых расстояний между любыми двумя точками из X . На вопрос Борсука был дан отрицательный ответ Каном и Калаи [1993], которые построили контрпример, используя разрезные векторы. Мы представляем здесь вариант их контрпримера, предложенный Нилли [1994].

Пусть $n = 4p$, где p — нечетное простое число и $d := \binom{n}{2}$. В качестве множества точек $X \subseteq \mathbb{R}^d$ возьмем множество

$$X := \{\delta(S) \mid S \subseteq V_n, |S| \text{ четно и } 1 \in S\}$$

всех четных разрезов в K_n ; следовательно, $|X| = 2^{n-2}$. Тогда X дает контрпример к вопросу Борсука в том случае, если

$$(31.1.1) \quad \frac{2^{n-2}}{\sum_{i=0}^{p-1} \binom{n-1}{i}} > \binom{n}{2} + 1.$$

Наименьший контрпример получается в размерности $d = \binom{44}{2} = 946$ для $n = 44$, $p = 11$. Доказательство основано на следующем результате Нилли [1994].

Лемма 31.1.2. Пусть $n = 4p$ с нечетным простым p и пусть $\mathcal{E}$ обозначает множество векторов $x \in \{\pm 1\}^n$, таких, что $x_1 = 1$ и x имеет четное число положительных компонент. Если $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ не содержит двух ортогональных векторов, то $|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n-1}{i}$.

¹⁾ Для многогранника P кроме геометрического понятия диаметра, описанного здесь, имеется и другое понятие диаметра. Именно, диаметр P иногда определяется как диаметр графа его 1-остова; например, диаметр графа 1-остова разрезного многогранника равен 1 (см. раздел 31.6).

Доказательство. Заметим, что скалярное произведение двух элементов $a, b \in \mathcal{E}$ делится на 4. Следовательно, по предположению, $a^T b \not\equiv 0 \pmod{p}$ для любых $a \neq b \in \mathcal{F}$. Для каждого $a \in \mathcal{F}$ мы рассмотрим полином P_a от переменных $X_1, \dots, X_n$, определяемый как

$$P_a(X) := \prod_{i=1}^{p-1} \left(\sum_{j=1}^n a_j X_j - 4i \right).$$

Тогда

- (i) $P_a(b) \equiv 0 \pmod{p}$ для всех $a \neq b \in \mathcal{F}$,
- (ii) $P_a(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$ для всех $a \in \mathcal{F}$.

Пусть Q_a обозначает полином, полученный из P_a при раскрытии скобок и последовательной замены произведения X_i^2 единицей для каждого $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $Q_a(x) = P_a(x)$ для всех $x \in \{\pm 1\}^n$. Поэтому Q_a также удовлетворяет вышеприведенным условиям (i) и (ii). Эти соотношения позволяют проверить, что множество $\{Q_a \mid a \in \mathcal{F}\}$ линейно независимо над полем $GF(p)$. Следовательно, $|\mathcal{F}|$ меньше или равно размерности пространства полиномов от $n-1$ переменных (так как $x_1 = 1$) степени не выше $p-1$ над $GF(p)$, которая равна $\sum_{i=0}^{p-1} \binom{n-1}{i}$. ■

Покажем теперь, что множество X всех четных разрезов не может быть разбито на $d+1$ подмножеств меньшего диаметра. В этом случае более удобно работать с разрезными векторами, имеющими координаты ± 1 , чем с разрезными векторами, имеющими координаты $0, 1$. Другими словами, мы покажем, что множество

$$X_1 := \{xx^T \mid x \in \mathcal{E}\}$$

не может быть разбито на $d+1$ подмножеств меньшего диаметра, если выполняется условие (31.1.1) ($\mathcal{E}$ определено по лемме 31.1.2). (Заметим, что xx^T есть $n \times n$ симметрическая матрица с элементами $x_i x_j$, т. е. с диагональными элементами, равными единице. Поэтому векторы xx^T ($x \in \{\pm 1\}^n$) лежат фактически в пространстве размерности d .) Для данных $x, y \in \mathcal{E}$ мы имеем

$$(\|xx^T - yy^T\|_2)^2 = 2n^2 - 2(x^T y)^2 \leq 2n^2$$

с равенством, если $x^T y = 0$. Следовательно, диаметр X_1 равен $n\sqrt{2}$. Предположим, что X_1 разбито на s подмножеств $Y^1 \cup \dots \cup Y^s$, где каждое Y^i имеет диаметр меньший, чем $n\sqrt{2}$. Тогда никакие два вектора из Y^i не ортогональны. Из леммы 31.1.2 мы получаем, что $|Y^i| \leq \sum_{j=0}^{p-1} \binom{n-1}{j}$ для всех i . Это дает, что $2^{n-2} \leq s \sum_{j=0}^{p-1} \binom{n-1}{j}$. Поэтому из условия

(31.1.1) вытекает, что $s > \binom{n}{2} + 1 = d + 1$. Это показывает, что, при выполнении условия (31.1.1), множество X_1 (или X) не может быть разбито на $d + 1$ подмножеств меньшего диаметра.

31.2. Неравенства для углов между векторами

Пусть $v_1, \dots, v_n$ — единичные векторы в $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$). Пусть

$$\theta_{ij} := \arccos(v_i^T v_j) \quad \text{для } 1 \leq i < j \leq n.$$

Мы рассмотрим вопрос нахождения допустимых неравенств, т. е. неравенств, которым удовлетворяют углы θ_{ij} . Классическим результатом в стереометрии (3-мерной геометрии) являются соотношения

$$\theta_{12} \leq \theta_{13} + \theta_{23}, \quad \theta_{13} \leq \theta_{12} + \theta_{23}, \quad \theta_{23} \leq \theta_{12} + \theta_{13}, \quad \theta_{12} + \theta_{13} + \theta_{23} \leq 2\pi$$

для попарных углов между тремя векторами в $\mathbb{R}^3$ (см. теорему 31.2.2 ниже). Заметим, что вышеприведенные неравенства есть ни что иное, как неравенства треугольника (для переменной $\frac{\theta}{\pi}$). Как было показано в теореме 6.4.5, аналогичный результат справедлив для любой размерности $m \geq 3$. Для удобства мы повторим здесь этот результат.

Теорема 31.2.1. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — единичные векторы в $\mathbb{R}^m$ ($n \geq 3$, $m \geq 1$). Пусть $a \in \mathbb{R}^{E_n}$ и $a_0 \in \mathbb{R}$ таковы, что неравенство $a^T x \leq a_0$ допустимо для разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$. Тогда,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \arccos(v_i^T v_j) \leq \pi a_0. \quad \blacksquare$$

Следовательно, неравенства, допустимые для многогранника $\text{CUT}_n^\square$, имеют следующую изящную интерпретацию: они порождают допустимые неравенства для попарных углов между n единичными векторами. Много таких неравенств было представлено в предыдущих параграфах; например, для любых n единичных векторов $v_1, \dots, v_n$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \arccos(v_i^T v_j) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \pi.$$

Вопрос об определении максимального значения для сумм попарных углов между векторами некоторого множества впервые был поставлен Фейшем Тотом [1959]. Он выдвинул гипотезу, что вышеприведенное

неравенство справедливо, и доказал это для случая $n \leq 6$. Эта гипотеза была доказана для случая $n = 2p$ Шперлингом [1960] и для общего случая Келли [1970b].

В случае $n = 3$ утверждение теоремы 31.2.1 может быть переформулировано следующим образом¹⁾.

Теорема 31.2.2. *Следующие утверждения эквивалентны для $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$.*

(i) *Матрица*

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 1 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

положительно полуопределена.

(ii) *существуют три единичных вектора $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, такие что $\alpha = \arccos(v_1^T v_2)$, $\beta = \arccos(v_1^T v_3)$ и $\gamma = \arccos(v_2^T v_3)$.*

(iii) $\alpha \leq \beta + \gamma, \beta \leq \alpha + \gamma, \gamma \leq \alpha + \beta$ и $\alpha + \beta + \gamma \leq 2\pi$.

Доказательство. Очевидно, (i) $\iff$ (ii). Определитель $\det A$ может быть выражен в виде

$$\begin{aligned} \det A &= 1 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma = \\ &= (1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma) - \\ &\quad - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma - 2 \cos \beta \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma) = \\ &= (1 - \cos^2 \beta)(1 - \cos^2 \gamma) - (\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma)^2 = \\ &= \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma - (\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma)^2 = \\ &= (\cos(\beta - \gamma) - \cos \alpha) \cdot (\cos \alpha - \cos(\beta + \gamma)). \end{aligned}$$

Следовательно, $A \succeq 0 \iff \det A \geq 0 \iff |\beta - \gamma| \leq \alpha \leq \beta + \gamma \leq 2\pi - \alpha$, что эквивалентно (iii). ■

Некоторые обобщения этого результата будут представлены в следующем подразделе, в частности, в теореме 31.3.7.

¹⁾ Этот факт известен достаточно давно; см., например, Блюменталь [1953] (лемма 43.1), или Берже [1984] (следствие 18.6.10), или Барретт, Джонсон и Таразага [1993].

31.3. Задача положительно полуопределенного пополнения

Рассмотрим эллитоп $\mathcal{E}_n$ и его проекции на подмножества его элементов. Напомним (раздел 28.4), что

$$\mathcal{E}_n = \{Y \text{ есть } n \times n \text{ симметрическая матрица} \mid Y \succeq 0, y_{ii} = 1 \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Для данного подмножества E множества $E_n := \{ij \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ рассмотрим граф $G := (V_n, E)$ и проекцию $\mathcal{E}(G)$ множества $\mathcal{E}_n$ на подпространство $\mathbb{R}^E$, т. е.

$$\mathcal{E}(G) := \{x \in \mathbb{R}^E \mid \exists Y = (y_{ij}) \in E_n \text{ такая, что } x_{ij} = y_{ij} \forall ij \in E\}.$$

Следовательно, $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}(K_n)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии, так как элементы из $\mathcal{E}(K_n)$ являются верхними треугольными частями матриц из $\mathcal{E}_n$.

Для данного графа $G = (V_n, E)$ и $x \in \mathbb{R}^E$ обозначим через X частичную симметрическую $n \times n$ матрицу, недиагональные элементы которой определены только для позиций, соответствующих ребрам графа G (и им симметричным); ij -й элемент X есть x_{ij} для $ij \in E$, и диагональные элементы X равны 1. Тогда $x \in \mathcal{E}(G)$ тогда и только тогда, когда частичная матрица X может быть дополнена до положительно полуопределенной матрицы. Следовательно, задача положительно полуопределенного пополнения, которая была введена в разделе 28.4, есть задача принадлежности к эллитопу $\mathcal{E}(G)$.

Этой задаче уделено много внимания в литературе, особенно в связи с линейной алгеброй. В частности, это из-за того, что имеется много ее приложений (в том числе в теории вероятностей и статистике, технике и т. д.), и из-за ее тесной связи с другими важными свойствами матриц, таких как матрицы евклидовых расстояний. (Смотрите, к примеру, обзор Джонсона [1990] по задаче пополнения.) Мы представляем здесь некоторые результаты о задаче положительно полуопределенного пополнения, наиболее близкие к тематике этой книги, т. е. к разрезным и полуметрическим полиэдрам. В самом деле, оказывается, для некоторых графов эллитоп $\mathcal{E}(G)$ имеет описание, включающее в себя разрезной и полуметрический многогранники над G . Мы даем здесь компактное представление результатов, полученных несколькими авторами. Изложение как этого, так и следующего раздела по-существу следует обзорной статье Лоран [1997a].

31.3.1. Результаты

Пусть $G = (V_n, E)$ — некоторый граф, и пусть $x \in \mathbb{R}^E$ с соответствующей частичной матрицей X . Очевидно, если $x \in \mathcal{E}(G)$, то любая собственная подматрица X , все элементы которой полностью определены, является положительно полуопределенной. Другими словами, если $K \subseteq V_n$ порождает клику в G , то проекция x_K величины x на множество ребер $G[K]$ принадлежит эллипсу $\mathcal{E}(K)$ клики K . (Здесь мы используем ту же самую букву K для обозначения клики как множества ребер и как графа.) Следовательно,

$$(31.3.1) \quad x_K \in \mathcal{E}(K) \quad \text{для каждой клики } K \text{ в } G$$

является необходимым условием для $x \in \mathcal{E}(G)$, которое называется *условием клики*. Другое необходимое условие принадлежности к $\mathcal{E}(G)$ может быть получено из результата раздела 31.2. Ясно, что все компоненты $x \in \mathcal{E}(G)$ принадлежат интервалу $[-1, 1]$; следовательно, x можно параметризовать в виде

$$x = \cos(\pi a), \quad \text{т. е. } x_e = \cos(\pi a_e) \text{ для всех } e \in E,$$

где $0 \leq a_e \leq 1$ для всех $e \in E$. Тогда теорема 31.2.1 может быть переформулирована следующим образом:

$$\mathcal{E}(K_n) \subseteq \cos(\pi \text{CUT}^\square(G)) := \{\cos(\pi a) \mid a \in \text{CUT}_n^\square\}.$$

Взяв проекции обеих частей на подпространство $\mathbb{R}^E$, индексированное множеством ребер G , мы получим

$$\mathcal{E}(G) \subseteq \cos(\pi \text{CUT}^\square(G)) := \{\cos(\pi a) \mid a \in \text{CUT}^\square(G)\}.$$

Другими словами,

$$(31.3.2) \quad a \in \text{CUT}^\square(G)$$

является необходимым условием для включения $x = \cos(\pi a) \in \mathcal{E}(G)$, называемым *условием разреза*. Так как $\text{CUT}^\square(G) \subseteq \text{MET}^\square(G)$ (по (27.3.1)), мы получаем, что

$$(31.3.3) \quad a \in \text{MET}^\square(G)$$

также является необходимым условием для этого включения $x = \cos(\pi a) \in \mathcal{E}(G)$, называемым *метрическим условием*.

В общем случае ни одно из условий (31.3.1), (31.3.2) или (31.3.3) не является достаточным для характеристики $\mathcal{E}(G)$. Например, пусть $C = (V_n, E)$ есть цикл на $n \geq 4$ вершинах и пусть $x \in \mathbb{R}^E$ определен как $x_e := 1$ для всех ребер, кроме $x_e := -1$ для одного ребра из

C . Тогда x удовлетворяет (31.3.1), но $x \notin \mathcal{E}(C)$. В качестве другого примера рассмотрим 4×4 матрицу с диагональными элементами 1 и недиагональными элементами $-\frac{1}{2}$. Тогда $X \notin \mathcal{E}_4$ (так как $Xe = -\frac{1}{2}e$, где e обозначает вектор, состоящий из одних единиц, то X не положительно полуопределена). Следовательно, вектор $x := \left(-\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^{E(K_4)}$ не принадлежит $\mathcal{E}(K_4)$, в то время как $\frac{1}{\pi} \arccos x = \left(\frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3}\right)$ принадлежит $\text{MET}^\square(K_4) = \text{CUT}^\square(K_4)$.

Таким образом, естественно возникает вопрос о характеристизации графов G , для которых условия (31.3.1), (31.3.2) и (31.3.3) (взятые вместе или по отдельности) достаточны для описания $\mathcal{E}(G)$. Пусть $\mathcal{P}_K$ (соответственно, $\mathcal{P}_M$, $\mathcal{P}_C$) обозначает класс графов G , для которых условие клики (31.3.1) (соответственно, метрическое условие (31.3.3) и условие разреза (31.3.2)) является достаточным для описания $\mathcal{E}(G)$.

Начнем с описания класса $\mathcal{P}_K$. Напомним, что граф называется *хордовым*, если каждый цикл длины ≥ 4 имеет хорду. Мы будем также использовать следующую характеристизацию из статьи Дирак [1961]: граф является хордовым тогда и только тогда, когда он может быть получен из клик применением сумм по кликам.

Ясно, что каждый граф $G \in \mathcal{P}_K$ должен быть хордовым (положим, что C есть не содержащий хорды цикл из G длины ≥ 4 ; определим $x \in \mathbb{R}^E$, положив $x_e := 1$ для всех ребер e из C , исключая $x_{e_0} := -1$ для одного ребра e_0 из C , и $x_e := 0$ для всех остальных ребер из G . Тогда x удовлетворяет (31.3.1), но $x \notin \mathcal{E}(G)$. Гроун, Джонсон, Са и Волкович [1984] показали, что $\mathcal{P}_K$ состоит только из хордовых графов. Именно, имеет место

Теорема 31.3.4. *Для графа $G = (V, E)$ мы имеем*

$$\mathcal{P}_K = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x_K \in \mathcal{E}(K) \ \forall K \text{ — клики из } G\}$$

тогда и только тогда, когда G является хордовым.

Доказательство опирается на нижеприведенную лемму 31.4.5, так как каждая клика очевидным образом принадлежит $\mathcal{P}_K$ и любой хордовый граф может быть получен из клик взятием сумм по кликам.

Лемма 31.3.5. *Класс $\mathcal{P}_K$ замкнут относительно взятия суммы по клике.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ является суммой по клике двух графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$. Предположим, что $G_1, G_2 \in \mathcal{P}_K$; покажем, что $G \in \mathcal{P}_K$. Для этого пусть $x \in \mathbb{R}^E$, так что $x_K \in \mathcal{E}(K)$ для каждой клики K в G . Тогда для $i = 1, 2$ проекция x на подпространство $\mathbb{R}^{E_i}$ принадлежит $\mathcal{E}(G_i)$ и, следовательно, может быть дополнена до положительно полуопределенной матрицы порядка $|V_i|$. Поэтому мы можем найти векторы $u_j \in \mathbb{R}^k$ ($j \in V_1$) и $v_j \in \mathbb{R}^k$ ($j \in V_2$) такие, что $x_{ij} = u_i^T u_j$ для всех $i, j \in V_1$ и $x_{ij} = v_i^T v_j$ для всех $i, j \in V_2$. Для общей клики $V_1 \cap V_2$, мы получим, что $u_i^T u_j = v_i^T v_j$ для всех $i, j \in V_1 \cap V_2$. Следовательно, существует ортогональная $k \times k$ матрица A , такая, что $Au_i = v_i$ для всех $i \in V_1 \cap V_2$. Теперь матрица Грама системы векторов: Au_i ($i \in V_1$), v_i ($i \in V_2$) дает положительно полуопределенное пополнение x , которое показывает, что $x \in \mathcal{E}(G)$. ■

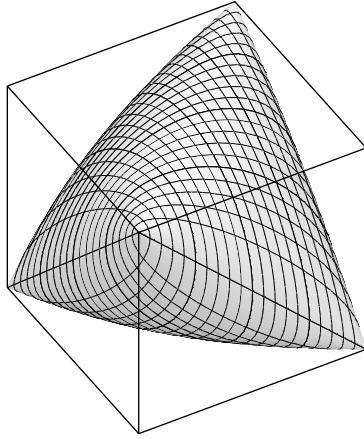


Рис. 31.3.6. Эллипс $\mathcal{E}(K_3)$ полного графа на трех вершинах
Перейдем теперь к описанию классов $\mathcal{P}_M$ и $\mathcal{P}_C$. Очевидно, что

$$\mathcal{P}_M \subseteq \mathcal{P}_C.$$

По теореме 31.2.2, граф K_3 принадлежит $\mathcal{P}_M$. Другими словами, $\mathcal{E}(K_3) = \cos(\pi \text{MET}_3^\square)$. Тогда $\mathcal{E}(K_3)$ есть «деформация» (с помощью косинусного отображения) трехмерного симплекса $\text{MET}_3^\square$; см. рисунок 31.3.6 с изображением эллипса $\mathcal{E}(K_3)$. Как было показано ранее, граф K_4 не принадлежит $\mathcal{P}_C$. Лоран [1997b] показала, что классы $\mathcal{P}_M$ и $\mathcal{P}_C$ совпадают и состоят из графов, не имеющих K_4 -миноров.

Теорема 31.3.7. *Следующие утверждения эквивалентны для графа G :*

- (i) $\mathcal{E}(G) = \{x = \cos(\pi a) \mid a \in \text{CUT}^\square(G)\}$.
- (ii) $\mathcal{E}(G) = \{x = \cos(\pi a) \mid a \in \text{MET}^\square(G)\}$.
- (iii) G не имеет K_4 -минора.

Доказательство существенно опирается на следующий декомпозиционный результат для графов, не имеющих K_4 -минора¹⁾²⁾ (см. Даффин [1965]): граф G не имеет K_4 -минора тогда и только тогда, когда $G = K_3$, или G есть подграф k -суммы по клике ($k = 1, 2$) двух меньших графов (т. е. с меньшим, чем у G , числом вершин), каждый из которых не имеет K_4 -минора. Мы установим два промежуточных результата.

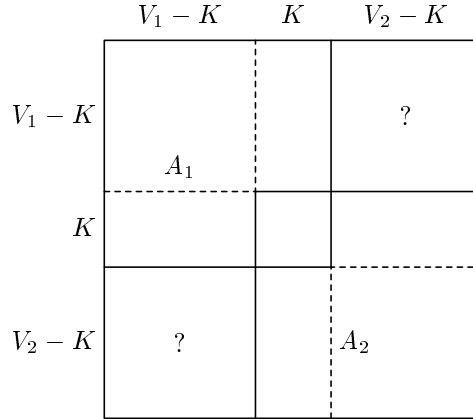


Рис. 31.3.8

Лемма 31.3.9. *Каждый из классов $\mathcal{P}_M$ и $\mathcal{P}_C$ замкнут относительно взятия минора.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ есть граф на $n = |V|$ вершинах, пусть $e = uv$ есть ребро в G и пусть G' есть граф, полученный из G удалением или сжатием ребра e . Мы покажем, что $G' \in \mathcal{P}_M$ (соответственно, $G' \in \mathcal{P}_C$), если $G \in \mathcal{P}_M$ (соответственно, $G \in \mathcal{P}_C$).

Рассмотрим сначала случай, когда $G' = G \setminus e$ получен удалением ребра e . Предположим, что $G \in \mathcal{P}_M$; покажем, что $G' \in \mathcal{P}_M$. Для этого

¹⁾ Граф, не имеющий K_4 -минора, известен также под именем (простого) *последовательно-параллельного графа*. Мы подчеркиваем слово «простой», так как в общем случае последовательно-параллельные графы допускают петли и параллельные ребра. Но в нашем изложении мы имеем дело только с простыми графами.

²⁾ Из этого следует, что каждый граф без K_4 -минора является подграфом хордового графа (на том же множестве вершин), не содержащим клик размера 4.

пусть $a \in \text{MET}^\square(G')$; покажем, что $\cos(\pi a) \in \mathcal{E}(G')$. Пусть для $b \in \text{MET}^\square(G)$ его проекция на множество ребер G' есть a . Тогда $\cos(\pi b) \in \mathcal{E}(G)$, так как $G \in \mathcal{P}_M$, откуда следует, что его проекция $\cos(\pi a)$ на множество ребер G' принадлежит $\mathcal{E}(G')$.

Предположим теперь, что $G \in \mathcal{P}_C$; покажем, что $G' \in \mathcal{P}_C$. Рассуждения аналогичны. Действительно, если $a \in \text{CUT}^\square(G')$, пусть для $b \in \text{CUT}^\square(G)$ его проекция на множество ребер G' есть a ; тогда $\cos(\pi b) \in \mathcal{E}(G)$, откуда $\cos(\pi a) \in \mathcal{E}(G')$.

Рассмотрим теперь случай, когда $G' = G/e$ получен сжатием ребра e . Пусть w обозначает вершину G' , полученную при сжатии ребра $e = uv$. Доказательство основано на следующем простом наблюдении: для данного $a \in \mathbb{R}^{E'}$ определим $b \in \mathbb{R}^E$, положив $b_{uv} := 0$, $b_{iu} := a_{iw}$, если i смежно с u в G , $b_{iv} := a_{iw}$, если i смежно с v в G , и $b_f := a_f$ для всех оставшихся ребер f из G . Тогда $b \in \text{MET}^\square(G)$ (соответственно, $b \in \text{CUT}^\square(G)$), если $a \in \text{MET}^\square(G')$ (соответственно, $a \in \text{CUT}^\square(G')$). Предположим, что $G \in \mathcal{P}_M$, пусть $a \in \text{MET}^\square(G')$ и $b \in \text{MET}^\square(G)$ определены также, как и ранее. Тогда $\cos(\pi b) \in \mathcal{E}(G)$. Следовательно, существует матрица $B \in \mathcal{E}_n$, расширяющая $\cos(\pi b)$. Если A обозначает матрицу, полученную из B удалением строки и столбца, индексированных u , и переименованием v в w , то $A \in \mathcal{E}_{n-1}$ и A расширяет $\cos(\pi a)$, что показывает, что $\cos(\pi a) \in \mathcal{E}(G')$. Доказательство для случая $\mathcal{P}_C$ аналогично. ■

Лемма 31.3.10. *Класс $\mathcal{P}_M$ замкнут относительно взятия суммы по клике.*

Доказательство. Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ — такие два графа из $\mathcal{P}_M$, что $K := V_1 \cap V_2$ порождает клики и в G_1 , и в G_2 , и такие, что нет ребер между $V_1 \setminus V_2$ и $V_2 \setminus V_1$. Пусть $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ обозначает их сумму по клике. Покажем, что $G \in \mathcal{P}_M$. Для этого пусть $a \in \text{MET}^\square(G)$. Проекция элемента a_i из a на $\mathbb{R}^{E_i}$ принадлежит $\text{MET}_{G_i}^\square$, откуда $\cos(\pi a_i) \in \mathcal{E}(G_i)$ для $i = 1, 2$. Следовательно, существует матрица $A_i \in E_{n_i}$ ($n_i := |V_i|$), расширяющая $\cos(\pi a_i)$. Рассмотрим частичную симметрическую матрицу M , показанную на рисунке 31.3.8, элементы которой m_{uv} ($u \in V_1 \setminus V_2, v \in V_2 \setminus V_1$) должны быть определены. Следовательно, элементы M определены на графе H , заданном как сумма по клике (именно, по K) двух полных графов с соответствующими множествами вершин V_1 и V_2 . Так как H является хордовым, то из теоремы 31.3.4 мы получаем, что M может быть дополнена до положительно полуопределенной матрицы. Это показывает, что $\cos(\pi a) \in \mathcal{E}(G)$, так как M расширяет $\cos(\pi a)$. ■

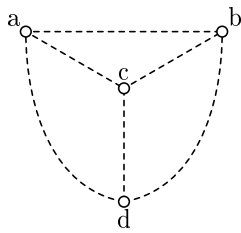
Доказательство теоремы 31.3.7. Так как $\mathcal{P}_M \subseteq \mathcal{P}_C$, достаточно показать, что граф из $\mathcal{P}_C$ не имеет K_4 -минора и что граф, не имеющий K_4 -минора, принадлежит $\mathcal{P}_M$. Утверждение о том, что граф из $\mathcal{P}_C$ не содержит K_4 -минора, следует из леммы 31.3.9 и того факта, что $K_4 \notin \mathcal{P}_C$. Обратно, предположим, что G не имеет K_4 -минора. Покажем, что $G \in \mathcal{P}_M$, индукцией по числу вершин G . Если $G = K_3$, то $G \in \mathcal{P}_M$ по теореме 31.2.2. В противном случае G есть подграф суммы по клике двух меньших графов G_1 и G_2 , не имеющих K_4 -миноров. G_1 и G_2 принадлежат $\mathcal{P}_M$ по индукционному предположению. Отсюда $G \in \mathcal{P}_M$ по леммам 31.3.9 и 31.3.10. ■

Рассмотрим теперь класс $\mathcal{P}_{KM}$ (соответственно, $\mathcal{P}_{KC}$), состоящий из графов G , для которых метрическое условие и условие клики (31.3.3), (31.3.1) (соответственно, условия клики и разреза (31.3.1), (31.3.2)), взятые вместе, достаточны для описания $\mathcal{E}(G)$. В свете приведенных выше результатов можно предположить, что условие клики имеет место для всех клик размера ≥ 4 . Очевидно,

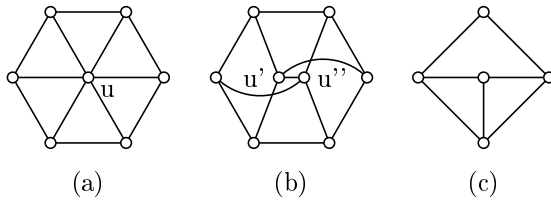
$$\mathcal{P}_{KM} \subseteq \mathcal{P}_{KC}.$$

Оказывается, классы $\mathcal{P}_{KM}$ и $\mathcal{P}_{KC}$ совпадают. Известны несколько эквивалентных характеристик графов из этих классов; они представлены ниже. В первую очередь нам нужны некоторые определения.

Назовем *расщеплением* операцию, обратную сжатию ребра; следовательно, расщепление вершины u в графе обозначает расщепление u на две смежные вершины u', u'' и произвольную замену каждого ребра uv либо на $u'v$, либо на $u''v$ (но так, чтобы каждая вершина u' и u'' была смежна по меньшей мере одной вершине). (Эта операция может быть рассмотрена как специальный случай операции расщепления, определенной в разделе 26.5.) На рисунке 31.3.12 приведен пример расщепления. *Подразбиением* ребра $e = uv$ называется введение новой вершины w и замена ребра e на два ребра uw и wv . Следовательно, это специальный случай расщепления. Граф, который может быть построен из данного графа G подразбиением ребер, называется *гомеоморфом* G . Заметим, что расщепление вершины степени 2 или 3 совпадает с подразбиением одного из ребер, содержащих эту вершину. (Следовательно, гомеоморфы K_4 и расщепления K_4 являются одним и тем же понятием; в частности, граф не имеет K_4 -минора тогда и только тогда, когда он не имеет гомеоморфов K_4 в качестве подграфов.) На рисунке 31.3.11 показан гомеоморф K_4 ; пунктирные линии обозначают пути.

Рис. 31.3.11. Гомеоморф K_4

Пусть $W_n := \nabla C_{n-1}$ обозначает *колесо* на n вершинах, полученное при добавлении новой вершины, смежной всем остальным вершинам цикла C длины $n - 1$. Следовательно, $W_4 = K_4$. На рисунке 31.3.12 (а) показано колесо W_7 , и (с) показывает граф $\hat{W}_4$, полученный из K_4 расщеплением одной вершины. Очевидно, W_n ($n \geq 5$) и любое расщепление W_n ($n \geq 4$) не принадлежит $\mathcal{P}_{KC}$ (по теореме 31.3.7, так как эти графы не содержат клики размера 4, в то время как имеют K_4 -минор).

Рис. 31.3.12. (а) Колесо W_7 ; (б) Расщепление вершины u в W_7 ; (с) граф $\hat{W}_4$

Несколько эквивалентных характеристик для графов из $\mathcal{P}_{KM}$ были получены Барреттом, Джонсоном и Леви [1996]; более точно, они показали эквивалентность условий (i), (iii), (iv), (v) теоремы 31.3.13, приведенной ниже. Основываясь на их результате, Джонсон и Мак Ки [1996] показали эквивалентность (i) и (vi); другими словами, графы из $\mathcal{P}_{KM}$ возникают из графов, принадлежащих классам $\mathcal{P}_K$ и $\mathcal{P}_M$, при взятии сумм по кликам. Лоран [1998a] заметила, кроме того, эквивалентность (i) и (ii); следовательно, два класса $\mathcal{P}_{KM}$ и $\mathcal{P}_{KC}$ совпадают, несмотря на то, что условие разреза (31.3.2) сильнее метрического условия (31.3.3). Мы отложим доказательство следующего результата до раздела 31.3.2.

Теорема 31.3.13. *Следующие утверждения эквивалентны для графа G :*

- (i) $G \in \mathcal{P}_{KM}$, т. е. $\mathcal{E}(G)$ состоит из векторов $x = \cos(\pi a)$, таких что $a \in \text{MET}^\square(G)$ и $x_K \in \mathcal{E}(K)$ для каждой клики K из G .

- (ii) $G \in \mathcal{P}_{KC}$, т. е. $\mathcal{E}(G)$ состоит из векторов $x = \cos(\pi a)$, таких что $a \in \text{CUT}^\square(G)$ и $x_K \in \mathcal{E}(K)$ для каждой клики K из G .
- (iii) Ни один из порожденных подграфов G не совпадает с W_n ($n \geq 5$) или с расщеплением W_n ($n \geq 4$).
- (iv) Каждый порожденный подграф графа G , содержащий гомеоморф K_4 , содержит клику размера 4.
- (v) Существует хордовый граф G' , содержащий G в качестве подграфа и не имеющий новых клик размера 4.
- (vi) G может быть получен суммами по клике из хордовых графов и графов, не имеющих K_4 -минора.

Мы завершим этот раздел результатом, относящимся к графам, для которых их эллитоп является многогранником. Это имеет место только в тривиальном случае, когда $\mathcal{E}(G) = [-1, 1]^E$. Положим

$$Q_n := \text{Conv}(xx^T \mid x \in \{\pm 1\}^n)$$

и, для графа $G = (V_n, E)$, пусть $Q(G)$ обозначает проекцию Q_n на подпространство $\mathbb{R}^E$, индексированное множеством ребер G . Следовательно, Q_n (соответственно, $Q(G)$) есть ни что иное, как образ разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ (соответственно, $\text{CUT}^\square(G)$) при отображении $x \mapsto 1 - 2x$. Ясно, что

$$Q_n \subseteq \mathcal{E}_n, \quad Q(G) \subseteq \mathcal{E}(G).$$

Следующий результат Лоран [1997b] характеризует графы, для которых имеет место равенство $Q(G) = \mathcal{E}(G)$; его доказательство аналогично доказательству теоремы 31.3.7.

Теорема 31.3.14. *Для графа G равенство $Q(G) = \mathcal{E}(G)$ имеет место если и только если G не имеет K_3 -минора, т. е. если граф G является лесом. Тогда $\mathcal{E}(G) = [-1, 1]^E$. ■*

Так как класс графов G , для которых $\mathcal{E}(G)$ является многогранником, замкнут относительно взятия миноров, мы получаем

Следствие 31.3.15. *Эллитоп $\mathcal{E}(G)$ графа G является многогранником тогда и только тогда, когда G является лесом; в этом случае $\mathcal{E}(G) = [-1, 1]^E$. ■*

31.3.2. Характеризация графов, содержащих порожденные колеса

Здесь мы приводим полное доказательство¹⁾ теоремы 31.3.13, которая дает несколько эквивалентных характеристик графов, не содержащих расщеплений колес в качестве порожденных подграфов. Покажем, что имеют место импликации

$$(ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (v) \implies (i) \text{ и } (i) \iff (vi).$$

Импликация $(i) \implies (ii)$ является очевидной.

Следующее понятие «пути, избегающего клики», будет полезным для доказательства. Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, K — клика в G , и пусть $a \in K, x \in V \setminus K$. Путь P , связывающий вершины a и x , называется *избегающим клики K* , если P не содержит других вершин K , кроме a .

Начнем с некоторых предварительных результатов.

Лемма 31.3.16. *Класс $\mathcal{P}_{KC}$ замкнут относительно взятия порожденного подграфа.*

Доказательство. Предположим, что $G = (V, E)$ принадлежит $\mathcal{P}_{KC}$, и пусть $H = G[U]$ есть порожденный подграф G , где $U \subseteq V$. Покажем, что $H \in \mathcal{P}_{KC}$. Пусть x есть вектор, индексированный множеством ребер H , удовлетворяющий (31.3.1) и (31.3.2); покажем, что $x \in \mathcal{E}(H)$. Для этого расширим x до вектора y , индексированного множеством ребер G , положив $y_{uv} := 0$ для ребра $uv \in E$ с $u \in U, v \in V \setminus U$ и $y_{uv} := 1$ для ребра $uv \in E$, содержащегося в $V \setminus U$. Ясно, что y удовлетворяет (31.3.1). По предположению, $a := \frac{1}{\pi} \arccos x \in \text{CUT}^\square(H)$; проверим, что $b := \frac{1}{\pi} \arccos y \in \text{CUT}^\square(G)$. Действительно, пусть

$$a = \sum_{S \subseteq U} \lambda_S \delta_H(S),$$

где $\lambda_S \geq 0, \sum_S \lambda_S = 1$. Тогда

$$b = \frac{1}{2} \sum_{S \subseteq U} \lambda_S (\delta_G(S) + \delta_G(U \setminus S)),$$

¹⁾ Данное здесь доказательство принадлежит Лоран [1998b]. Оно основано на доказательствах Барретта, Джонсона и Леви [1996] и Джонсона и Мак Ки [1996], однако некоторые части упрощены и укорочены; в частности, это так для доказательств импликаций $(iv) \implies (v) \implies (i)$.

откуда следует, что $b \in \text{CUT}^\square(G)$. Таким образом, y удовлетворяет (31.3.2). Следовательно, $y \in \mathcal{E}(G)$, и $x \in \mathcal{E}(H)$. ■

Лемма 31.3.17. *Класс $\mathcal{P}_{KM}$ замкнут относительно взятия суммы по клике.* ■

Пропустим доказательство, которое аналогично доказательству леммы 31.3.10.

Лемма 31.3.18. *Пусть $G = (V, E)$ — граф, в котором каждый порожжденный подграф содержит гомеоморф K_4 и клику размера 4. Пусть K — клика в G с $|K| \geq 4$, пусть $a, b, c \in K$, $v \in V \setminus K$, и пусть P_a (соответственно, P_b, P_c) — пути из a (соответственно, из b, c) в v , избегающие клики K . Тогда существует вершина $w \in V \setminus K$, лежащая на путях P_a, P_b или P_c , которая смежна всем трем вершинам a, b и c .*

Доказательство. Пусть W обозначает множество вершин, лежащих на путях P_a, P_b или P_c . Очевидно, что имеется путь, избегающий K , из каждой вершины $w \in W$ к каждой вершине из $\{a, b, c\}$. Для $w \in W$ определим $d(w)$ как наименьшую сумму $|Q_a| + |Q_b| + |Q_c|$, где Q_a, Q_b, Q_c являются путями, избегающими K , и связывающими w с a, b, c соответственно, в графе $G[W]$. Предположим, что w есть вершина из W , для которой $d(w)$ минимально, и пусть Q_a, Q_b, Q_c есть соответствующие пути, определенные выше. Пусть $W_0 \subseteq W$ обозначает множество вершин, лежащих на Q_a, Q_b или Q_c . Тогда

$$V(Q_a) \cap V(Q_b) = V(Q_a) \cap V(Q_c) = V(Q_b) \cap V(Q_c) = \{w\}.$$

Действительно, если z — вершина из $V(Q_a) \cap V(Q_b)$, отличная от w , то легко видеть, что $d(z) < d(w)$. Следовательно, три пути Q_a, Q_b, Q_c вместе с ребрами ab, ac и bc образуют гомеоморф K_4 , содержащийся в $G[W_0]$. По предположению, $G[W_0]$ должен содержать клику S размера 4. Покажем, что

$$S = \{w, a, b, c\}.$$

Предположим, что $w \notin S$. Тогда S содержит две вершины r, s , которые лежат на общем пути, скажем, на Q_a ; пусть w, r, s, a лежат в таком порядке на Q_a . Пусть $t \in S \setminus \{r, s\}$. Мы можем предположить, что t лежит на Q_b (так как t не лежит на Q_a в силу минимальности $d(w)$). Тогда $t = b$ (иначе $d(t) < d(w)$). Следовательно, S имеет вид $\{r, s, b, c\}$, откуда $d(r) < d(w)$, что дает противоречие. Следовательно, множество S содержит w , т. е. $S = \{w, r, s, t\}$, где r, s, t лежат на Q_a, Q_b, Q_c , соответственно. Теперь $r = a$ (иначе $d(r) < d(w)$); аналогично, $s = b$ и $t = c$. Это показывает, что $S = \{w, a, b, c\}$. ■

Предложение 31.3.19. Пусть $G = (V, E)$ — граф, удовлетворяющий следующим условиям:

- (i) Каждый порожденный подграф G , содержащий гомеоморф K_4 , содержит клику размера 4.
- (ii) G содержит клику размера 4.
- (iii) Для каждой максимальной клики K в G , $a \in K$ и $v \in V \setminus K$, существует путь из a в v , избегающий K .

Тогда граф G является хордовым.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по числу n вершин графа G . Если $n = 4$, результат становится тривиальным (так как $G = K_4$). Пусть $n \geq 5$ и пусть K — максимальная клика в G размера ≥ 4 . Мы можем предположить, что подграф $G[V \setminus K]$, порожденный $V \setminus K$, является связным. (В противном случае обозначим $W_1, \dots, W_p$ связные компоненты $G[V \setminus K]$, тогда $G_i := G[K \cup W_i]$ является хордовым для каждого $i = 1, \dots, p$ по индукционному предположению. Следовательно, G является хордовым как сумма по клике хордовых графов.) Покажем, что $K = V$, т. е. что G есть полный граф. Для этого предположим, что $K \neq V$. Для каждого $x \in V \setminus K$ пусть $N(x)$ обозначает множество вершин K , смежных с x . Мы утверждаем:

- (a) Если $x, y \in V \setminus K$ смежны и если $N(x) \not\subseteq N(y)$, $N(y) \not\subseteq N(x)$, то $N(x) \cap N(y) = \emptyset$, $|N(x)| = |N(y)| = 1$.

Действительно, пусть $a \in N(x) \setminus N(y)$ и $b \in N(y) \setminus N(x)$. Предположим сначала, что существует $c \in N(x) \cap N(y)$. Тогда подграф G , порожденный $\{a, b, c, x, y\}$, содержит гомеоморф K_4 , но не содержит клики размера 4, что противоречит (i). Если $|N(x)| \geq 2$, мы получим противоречие с (i), выбрав теперь c в $N(x) \setminus \{a\}$. Это доказывает (a). Далее, мы имеем:

- (b) Если $x \in V \setminus K$ и $|N(x)| = 1$, то $N(x) \subset N(y)$ для некоторого $y \in V \setminus K$.

Скажем, $N(x) = \{a\}$. Пусть $b, c \in K \setminus \{a\}$ и пусть P_a, P_b, P_c — пути из x в a, b, c , соответственно, избегающие K . По лемме 31.3.18, существует вершина $y \in V \setminus K$, лежащая на одном из этих путей, которая смежна a, b и c . Следовательно, $N(x) \subset N(y)$.

Назовем множество $N(x)$ ($x \in V \setminus K$) *максимальным*, если $N(x) = N(y)$ при $N(x) \subseteq N(y)$, для $y \in V \setminus K$. Покажем, что

- (c) Если $x \neq y \in V \setminus K$, и $N(x), N(y)$ — оба максимальны, то $N(x) = N(y)$.

Предположим, что $N(x) \neq N(y)$. Тогда, по (а) и (б), x и y не смежны. Пусть $(x, z_1, \dots, z_p, y)$ — путь кратчайшей длины, связывающий x и y в $G[V \setminus K]$. Тогда $N(z_1) \subseteq N(x)$ и $N(z_p) \subseteq N(y)$. Предположим сначала, что $N(z_i) \not\subseteq N(x)$ для некоторого $i = 1, \dots, p$. Пусть i наименьший такой индекс. Тогда $N(z_1) \cup \dots \cup N(z_{i-1}) \subseteq N(x)$ и $N(z_i) \not\subseteq N(x)$. Пусть $a \in N(x) \setminus N(z_i)$ и $b \in N(z_i) \setminus N(x)$. Мы утверждаем, что $N(z_1) \cup \dots \cup N(z_{i-1}) \subseteq \{a\}$. Для этого, предположим, что существует элемент $a' \in N(z_1) \cup \dots \cup N(z_{i-1})$ с $a' \neq a$. Тогда, применяя лемму 31.3.18, мы найдем вершину $w \in \{x, z_1, \dots, z_{i-1}, z_i\}$, которая смежна всем трем вершинам a, b и a' . Из этого следует, что $w = z_j$ ($j < i$) и, значит, $b \in N(z_i) \subseteq N(x)$, что дает противоречие. Следовательно, $N(z_1) \cup \dots \cup N(z_{i-1}) \subseteq \{a\}$. Пусть $c \in N(x) \setminus \{a\}$, тогда подграф G , порожденный множеством $\{a, b, c, x, z_1, \dots, z_{i-1}, z_i\}$, содержит гомеоморф K_4 , но не содержит клики размера 4, что противоречит (i). Когда $N(z_i) \not\subseteq N(y)$ для некоторого $i = 1, \dots, p$, мы получаем противоречие совершенно аналогично. Следовательно, $N(z_1) \cup \dots \cup N(z_p) \subseteq N(x) \cap N(y)$. Взяв $a \in N(x) \setminus N(y)$, $b \in N(y) \setminus N(x)$, $c \in N(x) \setminus \{a\}$, получим, что подграф G , порожденный множеством $\{a, b, c, x, z_1, \dots, z_p, y\}$, содержит гомеоморф K_4 , но не содержит клики размера 4, что дает противоречие. Следовательно, имеет место (с).

Теперь мы можем завершить доказательство. Пусть $N(x_0)$ обозначает единственное максимальное множество формы $N(x)$ ($x \in V \setminus K$). Тогда $N(x_0) = K$ (по (iii)). Следовательно, $K \cup \{x_0\}$ является кликой, что противоречит максимальной K . ■

Доказательство теоремы 31.3.13. Импликация (ii) $\implies$ (iii) следует из леммы 31.3.16, так как W_n ($n \geq 5$) и расщепление W_n ($n \geq 4$) не принадлежат $\mathcal{P}_{KC}$. Импликация (vi) $\implies$ (i) следует из леммы 31.3.17 и того факта, что хордовые графы и графы, не содержащие K_4 -минора, принадлежат $\mathcal{P}_{KM}$.

(v) $\implies$ (i) Предположим, что $G = (V, E)$ есть граф, удовлетворяющий (v). Пусть $G' = (V, E')$ есть хордовый граф, такой что $E \subseteq E'$ и каждая клика размера 4 в G' есть, конечно, клика в G . Мы покажем, что $G \in \mathcal{P}_{KM}$. Для этого, пусть $x = \cos(\pi a) \in \mathbb{R}^E$, такой что $a \in \text{MET}^\square(G)$ и $x_K \in \mathcal{E}(K)$ для всех клик K из G . Пусть $b \in \text{MET}^\square(G')$ расширяет a и пусть $y := \cos(\pi b)$. Тогда y удовлетворяет условию клики (31.3.1) (так как $y_K = x_K \in \mathcal{E}(K)$ для каждой клики K размера ≥ 4 в G'). Так как G' является хордовым, мы получаем, что $y \in \mathcal{E}(G')$ и, следовательно, что $x \in \mathcal{E}(G)$.

(iii) $\implies$ (iv) Предположим, что $G = (V, E)$ есть граф, для которого существует подмножество $U \subseteq V$, такое что $G[U]$ содержит гомеоморф K_4 и не содержит клики размера 4. Выберем такое U минимальной мощности; положим $G' := G[U] := (U, E')$. Кроме того, пусть $H = (W, F)$ есть гомеоморф K_4 , содержащийся в G' и имеющий минимальное число ребер. Тогда $W = U$ (из минимальности $|U|$) и $H \neq K_4$ (по предположению). Для ясности, предположим, что H есть граф, показанный на рисунке 31.3.11; таким образом, H состоит из шести путей $P_{ab}, P_{ac}, P_{bc}, P_{ad}, P_{bd}$ и P_{cd} (где P_{ab} обозначает путь, связывающий вершины a и b , и так далее); будем рассматривать вершины a, b, c, d как «углы» H .

Покажем, что G' есть колесо или расщепление колеса. Это очевидно, если $|E' \setminus F| \leq 1$. Таким образом, мы можем предположить, что $|E' \setminus F| \geq 2$. Первым наблюдением является

(а) концы ребра $e \in E' \setminus F$ не лежат на общем пути в H .

Действительно, предположим, что концы x и y ребра e лежат, скажем, на пути P_{ab} . Пусть $P_{ab}(x, y)$ обозначает подпуть P_{ab} , связывающий x и y . Тогда граф, полученный из H удалением $P_{ab}(x, y)$ и добавлением ребра e , является гомеоморфом K_4 , содержащимся в G' , но имеющим меньше ребер, чем H . Это противоречит минимальности H . Следовательно, (а) доказано.

Имеется две возможности для ребра $e = xy \in E' \setminus F$: либо (I) e лежит в грани H (т. е. x и y лежат на двух путях в H , имеющих общие концы), либо (II) e связывает два непересекающихся пути в H . Мы сделаем два наблюдения:

(b) Пусть $e = xy \in E' \setminus F$, где x, y — внутренние вершины в P_{ab}, P_{cd} , соответственно. Тогда $|P_{ac}| = |P_{bc}| = |P_{ad}| = |P_{bd}| = 1$.

Действительно, предположим, что $|P_{ac}| > 1$. Тогда граф, полученный из H добавлением e и удалением P_{ac} есть гомеоморф K_4 (с углами x, y, b, d), содержащийся в G' и имеющий меньше ребер, чем H . Аналогично,

Пусть $e = xy \in E' \setminus F$ лежит в грани H . Скажем, x, y лежат на P_{ab}, P_{bc} , соответственно. Тогда (ci) $xa, ya \in E$, $|P_{bc}| = |P_{bd}| =$
 (c) $= |P_{cd}| = 1$ или
 (cii) $y = c$, $|P_{ac}| = |P_{bc}| = |P_{cd}| = 1$, или
 (ciii) $x = b$, $|P_{ab}| = |P_{bc}| = |P_{bd}| = 1$.

Предположим сначала, что существует ребро $e \in E' \setminus F$ типа (II). Скажем, $e = xy$, где x, y — внутренние точки на P_{ab}, P_{cd} , соответственно. Пусть $e' = x'y'$ — другое ребро в $E' \setminus F$. Тогда e' имеет тип (I). (Действительно, если e' имеет тип (II), то e' соединяет те же самые пути P_{ab} и P_{cd} — это следует из (b) и того факта, что $H \neq K_4$. Скажем, $x \neq x'$ и d, y', y, c лежат в этом порядке на P_{cd} . Тогда, добавляя e, e' к H , и удаляя P_{ab}, P_{bd} и подпуть $P_{cd}(d, y')$, получаем гомеоморф K_4 с меньшим числом ребер, чем H .) Без ограничения общности мы можем предположить, что e' лежит в грани H , содержащей a, b, c . По (c), e' имеет форму sz , где z лежит на P_{ab} . Скажем, z лежит между a и x . Тогда, добавляя e, e' к H и уничтожая P_{ad}, P_{ac} и $P_{ab}(a, z)$, получаем гомеоморф K_4 , меньший, чем H .

Следовательно, мы можем теперь предположить, что каждое ребро из $E' \setminus F$ имеет тип (I), т. е. лежит на грани H . Если $E' \setminus F$ содержит ребро вида (ci), то легко видеть, что всегда можно найти меньший гомеоморф K_4 в G' . Следовательно, мы можем предположить, что все ребра из $E' \setminus F$ имеют вид (cii) или (ciii). Пусть $e = sx \in E' \setminus F$, где x есть внутренняя вершина P_{ab} . Отсюда легко следует, что каждое ребро $e' \in E' \setminus F$ имеет форму sz , где z лежит на P_{ab}, P_{bd} или P_{ad} . Следовательно, G' является колесом или расщеплением колеса.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Предположим, что G удовлетворяет предположению (iv). Покажем, что имеет место (v), индукцией по числу вершин G . Можно предположить, что G содержит гомеоморф K_4 ; иначе результат следует автоматически. По (iv), G имеет клику размера 4. Более того, мы можем предположить, что существует максимальная клика K в G , $a_0 \in K$ и $x_0 \in V \setminus K$, такие, что не существует пути из a в x , избегающего клики K ; иначе, G является хордовым по предложению 31.3.19, и утверждение доказано. Пусть S обозначает множество вершин $b \in K$, для которых существует путь из x_0 в b , избегающий K . Кроме того, пусть T обозначает множество вершин $x \in V \setminus K$, которые могут быть смежны со всеми вершинами из S некоторым путем, избегающим K , и не могут быть смежны с любой другой точкой из $K \setminus S$ путем, избегающим K . Тогда $S \neq K$ (так как $a_0 \notin S$) и $T \neq \emptyset$ (так как $x_0 \in T$). Кроме того, нет ребер между T и $(V \setminus K) \setminus T$ или $K \setminus S$. Рассмотрим порожденные подграфы $G[S \cup T]$ и $G[V \setminus T]$; оба являются собственными подграфами G . По индукционному предположению, существует хордовый граф H_1 (соответственно, H_2), содержащий $G[S \cup T]$ (соответственно, $G[V \setminus T]$) как подграф и не имеющий новых клик размера 4. Пусть $H := H_1 \cup H_2$ обозначает граф с множеством

ребер $E(H_1) \cup E(H_2)$. Тогда H содержит G в качестве подграфа. Кроме того, H является хордовым и H не содержит новых клок размера 4. Это следует из того факта, что H является, очевидно, суммой по клике (по клике S) двух графов H_1 и H_2 . Следовательно, G удовлетворяет (v).

(i) $\implies$ (vi) Пусть G — граф из $\mathcal{P}_{KM}$. Покажем, что G удовлетворяет (vi), индукцией по числу вершин G . Мы можем предположить, что G является смежным (иначе результат следует по индукции), и что G содержит гомеоморф K_4 . Теперь достаточно показать, что G содержит клику, являющуюся разрезным множеством, т. е. такую клику K , что граф $G[V \setminus K]$ является несвязным. Если G содержит симплициальную вершину¹⁾ v , то множество соседей этой вершины v образует искомую клику. Предположим теперь, что G не имеет симплициальных вершин. Используя импликацию (i) $\implies$ (iv) (уже доказанную выше), мы можем утверждать, что G содержит клику размера 4. Пусть K — максимальная клика в G размера ≥ 4 , такая, что граф $G[V \setminus K]$ является связным (иначе утверждение доказано). Заметим, что для каждого $a \in K$ и $x \in V \setminus K$ существует путь из a в x , избегающий K . (Действительно, так как a не является симплициальной вершиной, то a смежна некоторой вершине $w \in V \setminus K$. Далее, v и w могут быть смежны некоторым путем в $G[V \setminus K]$, что дает путь из v в a , избегающий K .) Следовательно, граф G удовлетворяет условиям (i)–(iii) предложения 31.3.19. Следовательно, G является хордовым. Это дает противоречие, так как любой хордовый граф имеет симплициальную вершину, что и завершает доказательство (i) $\implies$ (vi). ■

31.4. Задача пополнения матрицы евклидовых расстояний

Пусть (V_n, d) — пространство расстояний с ассоциированной матрицей расстояний D . Напомним, что D называется матрицей евклидовых расстояний, когда $(V_n, \sqrt{d})$ изометрически ℓ_2 -вложимо; это имеет место, когда d принадлежит конусу отрицательного типа NEG_n .

Для данного подмножества E множества $E_n = \{ij \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ рассмотрим граф $G = (V_n, E)$. Обозначим через $\text{NEG}(G)$

¹⁾ Вершина v графа G называется *симплициальной*, если множество ее соседей порождает клику в G .

проекцию конуса отрицательного типа NEG_n на подпространство $\mathbb{R}^E$, индексированное множеством ребер E графа G . Следовательно, вектор $d = (d_{ij})_{ij \in E}$ принадлежит $\text{NEG}(G)$ тогда и только тогда, когда существуют векторы $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ (для некоторого $m \geq 1$), такие, что

$$(31.4.1) \quad \sqrt{d_{ij}} = \|u_i - u_j\|_2 \quad \text{для всех } ij \in E.$$

Расстоянию $d \in \mathbb{R}^E$ соответствует частичная симметрическая $n \times n$ матрица $M = (m_{ij})$, элементы которой определены только на диагональных позициях и на позициях, соответствующих ребрам из E ; именно, $m_{ii} = 0$ для всех $i \in V_n$ и $m_{ij} = m_{ji} := d_{ij}$ для всех $ij \in E$. Тогда $d \in \text{NEG}(G)$ если не заданные элементы M могут быть доопределены таким образом, что мы получим матрицу евклидовых расстояний; это возможно тогда, когда M может быть пополнена до матрицы евклидовых расстояний. Следовательно, задача пополнения частичной матрицы евклидовых расстояний совпадает с задачей принадлежности проекциям конуса отрицательного типа.

Барвинок [1995] показал, что для $d \in \text{NEG}(G)$ существует система векторов $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая (31.4.1) для размерности m , ограниченной следующим образом:

$$(31.4.2) \quad m \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{8|E|+1}-1}{2} \right\rfloor.$$

Короткое доказательство этого факта может быть получено при использовании теоремы 31.5.3 из следующего раздела.

Доказательство соотношения (31.4.2). Для $d \in \mathbb{R}^E$ мы имеем:

$$\exists u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m, \text{ такие, что } d_{ij} = (\|u_i - u_j\|_2)^2 \text{ для всех } ij \in E$$

$$\Updownarrow$$

существует симметрическая $n \times n$ матрица $A \succeq 0$ ранга $\leq m$,

$$\text{такая что } d_{ij} = a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij} \text{ для всех } ij \in E.$$

Рассмотрим выпуклое множество $K := \{x \mid x \succeq 0, x_{ii} + x_{jj} - 2x_{ij} = d_{ij} \text{ для } ij \in E\}$. Если $K \neq \emptyset$ (т. е. если $d \in \text{NEG}(G)$), и если $d \neq 0$ (т. е. K имеет экстремальные точки), то любая матрица $A \in K$, являющаяся экстремальной точкой K , имеет ранг r , удовлетворяющий условию $\binom{r+1}{2} \leq |E|$ (по теореме 31.5.3). Это условие равносильно неравенству (31.4.2). ■

В этом разделе мы дадим в замкнутой форме описание проекций $\text{NEG}(G)$ конуса отрицательного типа NEG для нескольких классов гра-

фов. Фактически, легко можно сформулировать необходимые условия принадлежности конусу $\text{NEG}(G)$, подобные условиям (31.3.1), (31.3.2) и (31.3.3), рассмотренным в разделе 31.3 для задачи положительно полуопределенного пополнения. Кроме того, эти условия достаточны в точности для тех же самых классов графов, которые возникали в разделе 31.3.

Сначала мы сформулируем результаты, относящиеся к задаче пополнения матрицы евклидовых расстояний. Затем мы покажем, как они могут быть получены из соответствующих результатов для задачи положительно полуопределенного пополнения; здесь существенным образом используется техника метрических преобразований, развитая в главе 9.

Изложение этой секции также соответствует обзорной статье Лоран [1998b].

31.4.1. Результаты

Мы формулируем здесь несколько результатов для задачи пополнения матрицы евклидовых расстояний. Доказательства будут даны в разделе 31.4.2.

Пусть $K \subseteq V_n$ — подмножество вершин, индуцирующее клику в G . Для $d \in \mathbb{R}^E$ обозначим через d_K его проекцию на множество ребер $G[K]$. Ясно, что если $d \in \text{NEG}(G)$, то $d_K \in \text{NEG}(K)$. Следовательно, условие

$$(31.4.3) \quad d_K \in \text{NEG}(K) \quad \text{для каждой клики } K \text{ из } G$$

является необходимым условием для $d \in \text{NEG}(G)$, которое мы вновь назовем *условием клики*. Бакони и Джонсон [1995] характеризовали графы G , для которых условие (31.4.3) является достаточным для описания $\text{NEG}(G)$. Они показали:

Теорема 31.4.4. *Для графа $G = (V_n, E)$ мы имеем*

$$\text{NEG}(G) = \{d \in \mathbb{R}^E \mid d_K \in \text{NEG}(K) \ \forall K \text{ — клики в } G\}$$

тогда и только тогда, когда G является хордовым.

Условие (31.4.3) не является достаточным для описания $\text{NEG}(G)$, когда G не является хордовым. Действительно, предположим, что G имеет цикл C без хорд длины ≥ 4 . Пусть $x \in \mathbb{R}^E$ определен как $x_e := 0$ для всех ребер e из C , исключая $x_{e_0} := 1$ для одного ребра e_0 из C , $x_{ij} := 1$ для всех ребер ij с $i \in V(C)$, $j \in V \setminus V(C)$, и $x_{ij} := 0$ для всех ребер ij

с $i, j \in V \setminus V(C)$. Тогда x удовлетворяет (31.4.3), но $x \notin \text{NEG}(G)$. Другое необходимое условие может быть легко сформулировано в терминах разрезного конуса. Именно, условие

$$(31.4.5) \quad \sqrt{d} \in \text{CUT}(G)$$

является необходимым условием для $d \in \text{NEG}(G)$, называемым *условием разреза*; это следует из того факта, что « $\ell_2 \Rightarrow \ell_1$ » (напомним предложение 6.4.12) и взятия проекций. Следовательно,

$$(31.4.6) \quad \sqrt{d} \in \text{MET}(G)$$

также является необходимым условием для $d \in \text{NEG}(G)$, называемым *метрическим условием*. Условие (31.4.6) характеризует $\text{NEG}(G)$ в случае, когда $G = K_3$. Этот результат уже был упомянут в замечании 6.2.12; мы повторим доказательство для удобства изложения.

Лемма 31.4.7. $\text{NEG}_3 = \{d \in \mathbb{R}_+^3 \mid \sqrt{d} \in \text{MET}_3\}$.

Доказательство. Пусть d — расстояние на V_3 , и пусть $d_{12} := a$, $d_{13} := b$, $d_{23} := c$. Рассмотрим образ d при ковариантном отображении (отмеченном на позиции 3), и соответствующую симметрическую матрицу

$$P := \begin{pmatrix} b & \frac{b+c-a}{2} \\ \frac{b+c-a}{2} & c \end{pmatrix}.$$

Используем тот факт, что $d \in \text{NEG}_3$ тогда и только тогда, когда $P \succeq 0$ (напомним рисунок 6.2.3). Далее, $P \succeq 0$ тогда и только тогда, когда $\det P \leq 0$, т. е. если $4bc - (b+c-a)^2 \leq 0$. Последнее условие может быть переписано как $a^2 - 2a(b+c) + (b-c)^2 \leq 0$, что равносильно $b+c-2\sqrt{bc} = (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \leq a \leq b+c+2\sqrt{bc} = (\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$. Следовательно, мы нашли условие, при котором $\sqrt{d} \in \text{MET}_3$. ■

В общем случае, Бакони и Джонсон [1995] заметили, что условие (31.4.6) достаточно для описания $\text{NEG}(G)$, если G есть цикл. А именно, имеет место результат, являющийся аналогом теоремы 31.3.7 (Лоран [[1998a]]).

Теорема 31.4.8. *Следующие утверждения равносильны для графа G :*

- (i) $\text{NEG}(G) = \{d \in \mathbb{R}_+^E \mid \sqrt{d} \in \text{CUT}(G)\}$.
- (ii) $\text{NEG}(G) = \{d \in \mathbb{R}_+^E \mid \sqrt{d} \in \text{MET}(G)\}$.
- (iii) G не имеет K_4 -минора.

Следующий результат идентифицирует графы, для которых метрическое условие и условие клики (соответственно, условия клики и разреза) достаточны для описания конуса $\text{NEG}(G)$. Равносильность (i) и (iii) доказана Джонсоном, Джонсом и Крошелем [1995], и равносильность (ii) и (iii) доказана Лоран [1998a].

Теорема 31.4.9. *Следующие утверждения равносильны для графа G :*

- (i) $\text{NEG}(G) = \{d \in \mathbb{R}_+^E \mid \sqrt{d} \in \text{MET}(G) \text{ и } d_K \in \text{NEG}(K) \forall K \text{ — клики в } G\}$.
- (ii) $\text{NEG}(G) = \{d \in \mathbb{R}_+^E \mid \sqrt{d} \in \text{CUT}(G) \text{ и } d_K \in \text{NEG}(K) \forall K \text{ — клики в } G\}$.
- (iii) Ни один из порожденных подграфов графа G не является колесом W_n ($n \geq 5$) или расщеплением колеса W_n ($n \geq 4$).

Мы закончим этот раздел геометрическим результатом, данным в Бакони и Джонсон [1995]; он является прямым приложением теоремы 31.4.4.

Предложение 31.4.10. *Пусть $G = (V_n, E)$ — хордовый граф, пусть $K_1, \dots, K_s$ обозначают его максимальные клики, и пусть $d \in \mathbb{R}^E$ и $R > 0$. Предположим, что существуют векторы $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие (i) и (ii):*

- (i) $\|u_i - u_j\|_2 = d_{ij}$ для всех $ij \in E$,
- (ii) для каждого $i = 1, \dots, s$ векторы u_i ($i \in K_r$) лежат на сфере радиуса R .

Тогда существуют векторы $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие (i) и лежащие на сфере радиуса R . ■

31.4.2. Связь между двумя задачами пополнения

Имеются очевидные аналогии между вышеприведенными результатами для задачи пополнения матрицы евклидовых расстояний и результатами раздела 31.3 для задачи положительно полуопределенного пополнения. В частности, сравним теоремы 31.3.4 и 31.4.4, так же как теоремы 31.3.7 и 31.4.8, и теоремы 31.3.13 и 31.4.9. Следуя Лоран [1998a], мы покажем, как получить результаты для задачи пополнения матрицы евклидовых расстояний из соответствующих результатов для задачи положительно полуопределенного пополнения.

Для удобства введем следующие классы графов: $\mathcal{D}_K$ (соответственно, $\mathcal{D}_M$, $\mathcal{D}_C$) обозначает класс графов, для которых условие клики (31.4.3) (соответственно, метрическое условие (31.4.6) и условие

разреза (31.4.5)) достаточно для описания конуса $\text{NEG}(G)$; $\mathcal{D}_{KM}$ (соответственно, $\mathcal{D}_{KC}$) обозначает класс графов, для которых условие клики и метрическое условие (соответственно, условия разреза и клики) достаточны для описания $\text{NEG}(G)$.

Удобно также ввести обозначения для следующих, уже встречавшихся классов графов. Класс $\mathcal{G}_{ch}$ состоит из всех хордовых графов; класс $\mathcal{G}_{K_4}$ состоит из графов, не содержащих K_4 -минора; и класс $\mathcal{G}_{wh}$ состоит из графов, не содержащих колеса W_n ($n \geq 5$) или расщепления колеса W_n ($n \geq 4$) как порожденных подграфов.

Доказательства теорем 31.4.4, 31.4.8 и 31.4.9 состоят в проверке равенств: $\mathcal{D}_K = \mathcal{G}_{ch}$, $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_C = \mathcal{G}_{K_4}$ и $\mathcal{D}_{KM} = \mathcal{D}_{KC} = \mathcal{G}_{wh}$. Для этого достаточно проверить включения $\mathcal{D}_K \subseteq \mathcal{G}_{ch}$, $\mathcal{P}_K \subseteq \mathcal{D}_K$; $\mathcal{D}_C \subseteq \mathcal{G}_{K_4}$, $\mathcal{P}_M \subseteq \mathcal{D}_M$; и $\mathcal{D}_{KC} \subseteq \mathcal{G}_{wh}$, $\mathcal{P}_{KM} \subseteq \mathcal{D}_{KM}$. Мы сделаем это в нижеприведенных леммах 31.4.16 и 31.4.17.

Для доказательства являются важными некоторые связи между конусом отрицательного типа и эллиогранником. Первая очевидная связь между конусом $\text{NEG}(\nabla G)$ и эллитопом $\mathcal{E}(G)$ вытекает из ковариантного отображения (как определено в (27.3.8)). Именно, для данных векторов $x \in \mathbb{R}^E$ и $d \in \mathbb{R}^{E(\nabla G)}$, удовлетворяющих условиям: $d_{i,n+1} = 1$ для всех $i \in V_n$, и $d_{ij} = 2 - 2x_{ij}$ для всех $ij \in E$, имеем

$$(31.4.11) \quad x \in \mathcal{E}(G) \iff d \in \text{NEG}(\nabla G).$$

Другим полезным средством является следующее свойство преобразования Шенберга из теоремы 9.1.1: для $d \in \mathbb{R}^{E_n}$,

$$(31.4.12) \quad d \in \text{NEG}(K_n) \iff \exp(\lambda d) \in E(K_n) \text{ для всех } \lambda > 0.$$

(Напомним, что $\exp(-\lambda d)$ означает покомпонентное применение показательной функции, т. е. $(\exp(-\lambda d))_{ij} = \exp(-\lambda d_{ij})$.) Это соотношение остается верным и для случая произвольных графов. Именно,

Предложение 31.4.13. Пусть $G = (V_n, E)$ — некоторый граф, и пусть $d \in \mathbb{R}^E$. Следующие утверждения равносильны.

- (i) $d \in \text{NEG}(G)$.
- (ii) $\exp(-\lambda d) \in \mathcal{E}(G)$ для всех $\lambda > 0$.
- (iii) $1 - \exp(-\lambda d) \in \text{NEG}(G)$ для всех $\lambda > 0$.

Доказательство. (i) $\implies$ (ii) следует из (31.4.12) и взятия проекции.

(ii) $\implies$ (iii) Для данного $\lambda > 0$ определим вектор $D \in \mathbb{R}^{E(\nabla G)}$, положив $D_{i,n+1} = 1$ для $i \in V_n$, и $D_{ij} = 2 - 2\exp(-\lambda d_{ij})$ для $ij \in E$. Тогда $D \in \text{NEG}(\nabla G)$ (по отношению (31.4.11)), откуда $1 - \exp(-\lambda d) \in \text{NEG}(G)$.

(iii) $\implies$ (i) Пусть $v^T x \leq 0$ является допустимым неравенством для конуса $\text{NEG}(G)$. Покажем, что $v^T d \leq 0$. По предположению, $v^T(1 - \exp(-\lambda d)) \leq 0$. Раскладывая в ряд показательную функцию, получаем:

$$\begin{aligned} v^T(1 - \exp(-\lambda d)) &= \sum_{ij \in E} v_{ij} \left(\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^{p-1}}{p!} \lambda^p d_{ij}^p \right) = \\ &= \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^{p-1} \lambda^p}{p!} \sum_{ij \in E} v_{ij} d_{ij}^p \leq 0. \end{aligned}$$

Деля на λ и устремляя λ к нулю, получаем: $\sum_{ij \in E} v_{ij} d_{ij} \leq 0$. Это показывает, что $d \in \text{NEG}(G)$, так как d удовлетворяет всем допустимым для $\text{NEG}(G)$ неравенствам. $\blacksquare$

Отсюда мы можем получить следующий результат¹⁾, допускающий связь двух метрических условий (31.3.3) и (31.4.6).

Лемма 31.4.14. Пусть $G = (V_n, E)$ — некоторый граф, и пусть $d \in \mathbb{R}_+^E$. Тогда

$$\sqrt{d} \in \text{MET}(G) \implies \frac{1}{\pi} \arccos(e^{-\lambda d}) \in \text{MET}^\square(G) \text{ для всех } \lambda > 0.$$

Доказательство. Сначала заметим, что достаточно доказать утверждение для случая $G = K_n$ (так как общий результат получится тогда при взятии проекций). Далее, заметим, что достаточно получить результат для случая $n = 3$ (так как $\text{MET}(K_n)$ и $\text{MET}^\square(K_n)$ определяются неравенствами, определенными только на трех точках). Тогда мы имеем: $\sqrt{d} \in \text{MET}(K_3) \iff d \in \text{NEG}(K_3)$ (по лемме 31.4.7); $d \in \text{NEG}(K_3) \iff \exp(-\lambda d) \in \mathcal{E}(K_3)$ для всех $\lambda > 0$ (по предположению 31.4.13); наконец,

$$\exp(-\lambda d) \in \mathcal{E}(K_3) \iff \frac{1}{\pi} \arccos(e^{-\lambda d}) \in \text{MET}^\square(K_3)$$

(по теореме 31.2.2). $\blacksquare$

Еще одним полезным предварительным результатом является

¹⁾ Импликация леммы 31.4.14 на самом деле является эквивалентностью. Обратная импликация получается при использовании теоремы о среднем для функции $f(t) = \arccos(e^{-t^2})$ и устремлении λ к нулю.

Лемма 31.4.15. Пусть $W_n = \nabla C$ есть колесо на n вершинах, с центром u_0 и ободом C . Рассмотрим вектор d , индексированный множеством ребер W_n и определенный следующим образом: $d(u_0, u) := 1$ для каждой вершины u из C , $d(u, v) := 4$ для каждого ребра uv из C . Тогда $d \in \text{NEG}(W_n) \iff n$ нечетно.

Доказательство. Пусть x — вектор, индексированный множеством ребер W_n и имеющий значение -1 на каждом ребре. По (31.4.11), $d \in \text{NEG}(W_n)$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{E}(C)$. Последнее утверждение имеет место тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\pi} \arccos x \in \text{MET}^\square(C)$, что, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда C имеет четную длину. ■

Лемма 31.4.16. Справедливы включения: $\mathcal{D}_K \subseteq \mathcal{G}_{ch}$, $\mathcal{D}_C \subseteq \mathcal{G}_{K_4}$ и $\mathcal{D}_{KC} \subseteq \mathcal{G}_{wh}$.

Доказательство. Покажем включение: $\mathcal{D}_K \subseteq \mathcal{G}_{ch}$. Для этого предположим, что $G = (V, E)$ — нехордовый граф, и $C = (V(C), E(C))$ — не содержащий хорд цикл длины ≥ 4 в G . Определим вектор $d \in \mathbb{R}^E$, удовлетворяющий (31.4.3) и такой, что $d \notin \text{NEG}(G)$, положив $d_e := 0$ для всех ребер $e \in E(C)$, исключая $d_{e_0} := 1$ для одного ребра e_0 из C ; $d_e := 1$ для каждого ребра e , связывающего вершину из C с вершиной из $V \setminus V(C)$; и $d_e := 0$ для каждого ребра e , связывающего две вершины из $V \setminus V(C)$.

Пример из леммы 31.4.15 показывает, что $K_4 = W_4$ не принадлежит $\mathcal{D}_C$. Включение $\mathcal{D}_C \subseteq \mathcal{G}_{K_4}$ следует теперь из того факта, что $\mathcal{D}_C$ замкнуто относительно взятия миноров.

Проверим теперь включение: $\mathcal{D}_{KC} \subseteq \mathcal{G}_{wh}$. Пусть $G = (V, E)$ — граф из $\mathcal{D}_{KC}$, и пусть $H := G[U]$ — порожденный подграф G , где $U \subseteq V$. Предположим сначала, что H является колесом $W_n := \nabla C$ ($n \geq 5$) с центром u_0 . Рассмотрим вектор d , индексированный множеством ребер G и определенный следующим образом: d равно 4 на каждом ребре цикла C , исключая значение 0 на одном ребре, если n нечетно; d равно 1 на каждом ребре, соединяющем центр колеса u_0 с вершиной из C ; d равно 1 на ребрах между вершинами из C и вершинами, не принадлежащими колесу; d равно 0 на всех оставшихся ребрах (т. е. на ребрах, соединяющих u_0 с вершинами, не принадлежащими колесу или на ребрах, соединяющих две вершины, не принадлежащие колесу). Тогда d удовлетворяет условию ([31.4.3] и $d \notin \text{NEG}(G)$ (по лемме 31.4.15). Кроме того, d удовлетворяет (31.4.5), т. е. $\sqrt{d} \in \text{CUT}(G)$. Действительно, пусть C есть цикл $(u_1, \dots, u_{n-1})$. Тогда $\sqrt{d} = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_G(u_i)$,

если n четное, и $\sqrt{d} = \delta_G(\{u_1, u_{n-1}\}) + \sum_{i=2}^{n-2} \delta_G(u_i)$, если n нечетное и (u_1, u_{n-1}) есть ребро C , на котором d равно 0. Наконец, если H есть расщепление колеса W_n ($n \geq 4$), продолжение построенного выше вектора d с помощью присвоения значения 0 всем новым ребрам ведется в рамках процесса расщепления. ■

Лемма 31.4.17. $\mathcal{P}_K \subseteq \mathcal{D}_K$, $\mathcal{P}_M \subseteq \mathcal{D}_M$, и $\mathcal{P}_{KM} \subseteq \mathcal{D}_{KM}$.

Доказательство. Сначала мы проверим включение: $\mathcal{P}_K \subseteq \mathcal{D}_K$. Пусть G есть некоторый граф из $\mathcal{P}_K$; покажем, что $G \in \mathcal{D}_K$. Для этого, пусть $d \in \mathbb{R}^E$ удовлетворяет (31.4.3); покажем, что $d \in \text{NEG}(G)$. По предложению 31.4.13, $\exp(-\lambda d_K) \in E(K)$ для каждой клики K в G и каждого $\lambda > 0$. Так как $G \in \mathcal{P}_K$, отсюда следует, что $\exp(-\lambda d) \in \mathcal{E}(G)$ для всех $\lambda > 0$. Вновь используя предложение 31.4.13, получим, что $d \in \text{NEG}(G)$.

Предположим теперь, что $G \in \mathcal{P}_M$; покажем, что $G \in \mathcal{D}_M$. Пусть $d \in \mathbb{R}^E$ удовлетворяет (31.4.6), т. е. $\sqrt{d} \in \text{MET}(G)$. Тогда по лемме 31.4.14 $\frac{1}{\pi} \arccos(e^{-\lambda d}) \in \text{MET}^\square(G)$ для всех $\lambda > 0$; так как $G \in \mathcal{P}_M$, отсюда следует, что $\exp(-\lambda d) \in \mathcal{E}(G)$ для всех $\lambda > 0$. По предложению 31.4.13 мы получаем, что $d \in \text{NEG}(G)$.

Включение $\mathcal{P}_{KM} \subseteq \mathcal{D}_{KM}$ получается объединением вышеприведенных аргументов. ■

31.5. Геометрия эллитопа

В разделе 28.4.1 было введено выпуклое тело $\mathcal{J}_n$ как (неполиэдральная) релаксация разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$. Напомним, что

$$\mathcal{J}_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{E_n} \mid \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j x_{ij} \leq \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^2 \text{ для всех } b \in \mathbb{Z}^n \right\} = \\ = \{ x \in \mathbb{R}^{E_n} \mid J - 2X \succeq 0 \},$$

где J есть матрица, состоящая из одних единиц, и, для $x \in \mathbb{R}^{E_n}$, X есть симметрическая $n \times n$ матрица с нулевой диагональю и недиагональными элементами x_{ij} . Напомним также, что эллитоп $\mathcal{E}_n$ определен как множество $n \times n$ симметрических положительно полуопределенных матриц с единичной диагональю. Таким образом,

$$x \in \mathcal{J}_n \iff J - 2X \in \mathcal{E}_n.$$

Следовательно, два выпуклых множества $\mathcal{J}_n$ и $\mathcal{E}_n$ идентичны с точностью до преобразования $x \mapsto 1 - 2x$. Выпуклое тело $\mathcal{J}_n$ является релаксацией $\text{CUT}_n^\square$, т. е.

$$\text{CUT}_n^\square \subseteq \mathcal{J}_n.$$

Кроме того, $\mathcal{I}_n$ дает хорошее приближение для $\text{CUT}_n^\square$ в смысле оптимизации (напомним теорему 28.4.7). Именно, выпуклое тело $\mathcal{J}_n$ имеет несколько геометрических свойств, которые могут объяснить его хорошее поведение при оптимизации. Одним из таких свойств является, например, тот факт, что единственными вершинами $\mathcal{J}_n$ являются разрезы векторы. Этот результат приведен ниже, также как и несколько других геометрических свойств. Для удобства мы будем работать с эллитопом $\mathcal{E}_n$, а не с самим $\mathcal{I}_n$.

Начнем с повторения некоторых определений. Пусть K — выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$. Для данной граничной точки x_0 из K ее *нормальным конусом* $N(K, x_0)$ назовем

$$N(K, x_0) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x \leq 0 \text{ для всех } x \in K\}.$$

Следовательно, $N(K, x_0)$ состоит из векторов, нормальных к гиперплоскостям, ограничивающим K в точке x_0 . Тогда *ограничивающим конусом* в точке x_0 называется множество

$$C(K, x_0) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x \leq 0 \text{ для всех } c \in N(K, x_0)\}.$$

Размерность нормального конуса позволяет классифицировать граничные точки. В частности, граничная точка x_0 называется *вершиной* K , если ее нормальный конус $N(K, x_0)$ полномерен. Подмножество $F \subseteq K$ есть грань K , если для всех $x \in F$, $y, z \in K$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ из того, что $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ следует, что $y, z \in F$. В частности, элемент $x_0 \in K$ называется *экстремальной точкой* K , если множество $\{x_0\}$ является гранью K . В дальнейшем мы рассматриваем два выпуклых тела $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{J}_n$. При работе с $\mathcal{E}_n$ мы берем в качестве содержащего его пространства пространство симметрических $n \times n$ матриц, снабженное внутренним произведением:

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij} \quad \text{для двух симметрических } n \times n \text{ матриц } A, B.$$

Когда мы работаем с $\mathcal{J}_n$, содержащим его пространством является обычное евклидово пространство $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$. Напомним, что для $n \times n$ матрицы A $\text{Tr } A := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Начнем с описания поляры $\mathcal{E}_n$ и ее нормальных конусов. Эти результаты опубликованы в работах Лоран и Поляк [1995b, 1996a]; доказательства можно найти там же.

Теорема 31.5.1. *Поляра $\mathcal{E}_n$ имеет вид*

$$(\mathcal{E}_n)^\circ = \{D - M \mid M \succeq 0, D \text{ диагональная матрица с } \text{Tr } D = 1\}.$$

Для $A \in \mathcal{E}_n$ ее нормальный конус определяется как

$$N(\mathcal{E}_n, A) = \{D - M \mid M \succeq 0, \langle A, B \rangle = 0, D \text{ — диагональная матрица}\}.$$

Кроме того, $\dim N(\mathcal{E}_n, A) = n + \binom{n-r+1}{2}$, где r есть ранг A . ■

Следствие 31.5.2. *Единственными вершинами $\mathcal{E}_n$ являются «разрезные матрицы» xx^T для $x \in \{\pm 1\}^n$. Другими словами, выпуклое тело $\mathcal{J}_n$ имеет 2^{n-1} вершин, именно, разрезные векторы $\delta(S)$ для $S \subseteq V_n$.* ■

Напомним, что для данного $c \in \mathbb{R}^{E_n}$ $\max(c^T x \mid x \in \mathcal{J}_n)$ является верхней оценкой задачи о максимальном разрезе: $\max(c^T x \mid x \in \text{CUT}_n^\square)$. Равенство между оценкой и максимальным разрезом имеет место точно тогда, когда c принадлежит нормальному конусу одного из разрезных векторов. То, что разрезные векторы являются единственными граничными точками, имеющими полномерный нормальный конус, подтверждает идею о том, что $\mathcal{J}_n$ хорошо приближает $\text{CUT}_n^\square$. Из теоремы 31.5.1 можно получить, что опорный конус $C(\mathcal{E}_n, A)$ в точке $A \in \mathcal{E}_n$ есть множество

$$\{X \text{ симметрическая } n \times n \text{ матрица} \mid x_{ii} = 0 \ \forall i = 1, \dots, n, b^T X b \leq 0 \text{ для всех } b \in \text{Ker } A\}.$$

В частности, в точке $A = J$ (матрица, состоящая из одних единиц), опорный конус есть $-\text{NEG}_n$. В любой другой вершине $\mathcal{E}_n$ опорный конус является аффинным образом (относительно переключения) конуса отрицательного типа $\text{NEG}(G)$. Это дает еще одну связь между эллитопом и конусом отрицательного типа.

Перейдем теперь к описанию граней $\mathcal{E}_n$. Напомним, что $\mathcal{E}_n$ получен при пересечении конуса PSD_n положительно полуопределенных матриц с линейным пространством $W := \{x \mid x_{ii} = 1 \ \forall i = 1, \dots, n\}$. Структура граней конуса PSD_n хорошо изучена (см. Хилл и Уотерс [1987]). Она, в некотором смысле, достаточно проста. Действительно, для данной матрицы $A \in \text{PSD}_n$ ранга r наименьшая грань $F_{\text{PSD}}(A)$ из PSD_n , содержащая A , равна

$$F_{\text{PSD}}(A) = \{X \in \text{PSD}_n \mid \text{Ker } X \supseteq \text{Ker } A\}.$$

Следовательно, грань $F_{\text{PSD}}(A)$ изоморфна конусу PSD_r , и поэтому имеет размерность $\binom{r+1}{2}$. Из этого следует описание граней $\mathcal{E}_n$. Для $A \in \mathcal{E}_n$ наименьшая грань $F_{\mathcal{E}}(A)$ эллиптопа $\mathcal{E}_n$, содержащая A , равна $F_{\text{PSD}}(A) \cap W$ (так как W является единственной гранью W). Другими словами,

$$F_{\mathcal{E}}(A) = \{X \in \mathcal{E}_n \mid \text{Ker } X \supseteq \text{Ker } A\}.$$

Однако, вычисление размерности $F_{\mathcal{E}}(A)$ требует больших усилий¹⁾. Это было сделано Чи-Квонг Ли и Бит-Шун Тамом [1994]. Для удобства, мы приводим их результат в более общем виде.

Теорема 31.5.3. Пусть $A_1, \dots, A_m$ — $n \times n$ симметрические матрицы и $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Рассмотрим выпуклое множество

$$K := \{X \in \text{PSD}_n \mid \langle X, A_j \rangle = b_j \ \forall j = 1, \dots, m\}.$$

Пусть $A \in K$ и пусть $F_K(A)$ есть наименьшая грань K , содержащая A . Предположим, что A имеет ранг r и что $A = QQ^T$, где Q есть $n \times r$ матрица ранга r . Тогда

$$\dim F_K(A) = \binom{r+1}{2} - \text{rank}\{Q^T A_j Q \mid j = 1, \dots, m\}.$$

Доказательство. Назовем симметрическую матрицу B возмущением матрицы A , если $A \pm \lambda B \in K$ для некоторого $\lambda > 0$. Тогда $\dim F_K(A)$ равна рангу множества возмущений A . Мы утверждаем:

(a)

$$B = QRQ^T \text{ для некоторой } r \times r \text{ симмет-}$$

$$B \text{ есть возмущение } A \iff \text{рической матрицы } R \text{ и } \langle B, A_j \rangle = 0$$

$$\text{для всех } j = 1, \dots, m.$$

Если $B = QRQ^T$, то матрица $A \pm \lambda B = Q(I \pm \lambda R)Q^T$ очевидно положительно полуопределена для достаточно малых $\lambda > 0$. Кроме того, условие: $\langle B, A_j \rangle = 0$ для всех j , дает, что $A \pm \lambda B \in K$. Обратно, предположим, что B есть возмущение A . Тогда $A \pm \lambda B \in K$ для некоторого $\lambda > 0$. Отсюда следует, что $\langle B, A_j \rangle = 0$ для всех j . Дополним Q до $n \times n$ несингулярной матрицы P . Положим $C := P^{-1}B(P^{-1})^T$; тогда $B = PCP^T$. Тогда

$$A \pm \lambda B = P \mathcal{J}_n \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^T \pm \lambda PCP^T = P \left(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pm \lambda \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \right) P^T,$$

¹⁾ Здесь возникает вопрос характеристики линейных подпространств V пространства $\mathbb{R}^n$, таких что $V \subseteq \text{Ker } A$ для некоторого $A \in \mathcal{E}_n$. Делорм и Поляк [1993b] показали, что вектор $b \in \mathbb{R}^n$ принадлежит ядру некоторой матрицы $A \in \mathcal{E}_n$ тогда и только тогда, когда B удовлетворяет условию: $|b_i| \leq \sum_{1 \leq j \leq n, n \neq j \neq i} |b_j|$ для всех $i = 1, \dots, n$. Аналогичная комбинаторная характеристика для пространств большей (чем 1) размерности неизвестна.

если положить $C := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}$. Следовательно, $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pm \lambda \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \succeq 0$. Отсюда следует, что $C_{12} = C_{22} = 0$. Поэтому $B = QC_{11}Q^T$, где C_{11} есть симметрическая $r \times r$ матрица. Следовательно, имеет место (а).

Далее, каждое возмущение A имеет форму $B = QRQ^T$ с $\langle B, A_j \rangle = 0$ для всех j ; отсюда $\langle R, Q^T A_i Q \rangle = 0$ для всех j . Следовательно, размерность $F_K(A)$ равна размерности ортогонального дополнения для $\{Q^T A_j Q \mid j = 1, \dots, t\}$ в пространстве симметрических $r \times r$ матриц. Следовательно, мы имеем нужную формулу для $\dim F_K(A)$. ■

Следствие 31.5.4. Пусть $A \in \mathcal{E}_n$ с рангом r , пусть $F_{\mathcal{E}}(A)$ обозначает наименьшую грань $\mathcal{E}_n$, содержащую A , и предположим, что A есть матрица Грама для векторов $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^r$. Тогда

$$(31.5.5) \quad \dim F_{\mathcal{E}}(A) = \binom{r+1}{2} - \text{rank}\{u_i u_i^T \mid i = 1, \dots, n\}. \quad \blacksquare$$

В частности, можно получить оценку ранга экстремальных матриц¹⁾ из $\mathcal{E}_n$.

Следствие 31.5.6. Пусть $A \in \mathcal{E}_n$ с рангом r . Если A есть экстремальная точка $\mathcal{E}_n$, то $\binom{r+1}{2} \leq n$. ■

Кроме того, как мы увидим ниже, для каждого r , такого что $\binom{r+1}{2} \leq n$, существует экстремальная матрица в $\mathcal{E}_n$, имеющая ранг r . Формула (31.5.5) может быть использована для нахождения возможных размерностей граней $\mathcal{E}_n$, как было замечено в Лоран и Поляк [1996a].

Предложение 31.5.7. Пусть $A \in \mathcal{E}_n$ имеет ранг r , и пусть $k := \dim F_{\mathcal{E}}(A)$. Тогда

$$\max \left(0, \binom{r+1}{2} - n \right) \leq k \leq \binom{r}{2}.$$

Кроме того, для любых целых $r, k \geq 0$, удовлетворяющих данному неравенству, существует матрица $A \in \mathcal{E}_n$ ранга r , и размерность $\dim F_{\mathcal{E}}(A) = k$.

Доказательство. Неравенство из предложения 31.5.7 следует из (31.5.5), так как $r \leq \text{rank}\{u_1 u_1^T, \dots, u_n u_n^T\} \leq n$. Доказательство существования существенно опирается на конструкцию, предложенную Гроуном, Пирсом и Уоткинсом [1990]. Именно, пусть $e_1, \dots, e_r$ обозначают

¹⁾ Решению этого вопроса было посвящено несколько статей в литературе по линейной алгебре; например, Кристенсен и Вестерштрём [1979], Леви [1980], Гроун, Пирс и Уоткинс [1990].

координатные векторы в $\mathbb{R}^r$, и пусть $w_{ij} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + e_j)$ для $1 \leq i < j \leq r$. Тогда $\binom{r+1}{2}$ матрицы $e_i e_i^T$ ($i = 1, \dots, r$) и $w_{ij} w_{ij}^T$ ($1 \leq i < j \leq r$) линейно независимы. Предположим сначала, что $n = \binom{r+1}{2} - k$, где $k \leq \binom{r}{2}$. Следовательно, $r \leq n \leq \binom{r+1}{2}$. Определим A как матрицу Грама для следующих n векторов: $e_1, \dots, e_r$ вместе с $n - r$ векторами w_{ij} . По построению, A имеет ранг r и $\dim F_{\mathcal{E}}(A) = \binom{r+1}{2} - n = k$. Когда $n > \binom{r+1}{2} - k$, мы можем взять в качестве A матрицу Грама следующих n векторов: e_1 , повторенное $n - \binom{r+1}{2} + k + 1$ раз, и $\binom{r}{2} - k$ векторов w_{ij} . ■

Следовательно, область $\mathcal{D}_n$ возможных значений размерностей граней $\mathcal{E}_n$ имеет вид:

$$\mathcal{D}_n = \left[0, \binom{k_n}{2}\right] \cup \bigcup_{r=k_n+1}^n \left[\binom{r+1}{2} - n, \binom{r}{2}\right],$$

где k_n есть наименьшее целое k , такое что $\binom{k+2}{2} - n > \binom{k_n}{2} + 1$, т. е. $2k_n > n$; таким образом, $k_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Например,

$$\begin{aligned} k_3 &= 2, & \mathcal{D}_3 &= [0, 1] \cup \{3\}, \\ k_4 &= 3, & \mathcal{D}_4 &= [0, 3] \cup \{6\}, \\ k_5 &= 3, & \mathcal{D}_5 &= [0, 3] \cup [5, 6] \cup \{10\}, \\ k_6 &= 4, & \mathcal{D}_6 &= [0, 6] \cup [9, 10] \cup \{15\}, \\ k_7 &= 4, & \mathcal{D}_7 &= [0, 6] \cup [8, 10] \cup [14, 15] \cup \{21\}. \end{aligned}$$

По рисунку 31.3.6 можно проверить, что собственные грани $\mathcal{E}_3$ имеют размерность 0 (экстремальные точки) или 1 (ребра между двумя разрезными векторами; имеется шесть таких граней). Детальное описание граней $\mathcal{E}_n$ можно найти в Лоран и Поляк [1995b, 1996a] для $n = 3$ и $n = 4$, соответственно.

Наконец, возможные размерности для полиэдральных граней $\mathcal{E}_n$ описаны в теореме 31.5.8; они были вычислены в Лоран и Поляк [1996a].

Теорема 31.5.8. *Если F есть полиэдральная грань $\mathcal{E}_n$ размерности k , то $\binom{k+1}{2} \leq n - 1$. Кроме того, если все вершины F есть разрезные матрицы, то F является симплексом. Обратно, для каждого целого $k \geq 1$, такого что $\binom{k+1}{2} \leq n - 1$, $\mathcal{E}_n$ имеет полиэдральную грань размерности k (которая может быть выбрана как симплекс с разрезными матрицами в качестве вершин).* ■

Каждая полиэдральная грань $\mathcal{E}_n$ с разрезными матрицами в качестве вершин дает, очевидно, грань для разрезного многогранника. Ниже мы опишем конструкцию таких полиэдральных граней, данную в Лоран и Поляк [1996a]. Для формулировки результата нам необходимо ввести некоторые определения.

Пусть $S_1, \dots, S_k$ есть k подмножеств множества V_n . Говорят, что разрезные векторы $\delta(S_1), \dots, \delta(S_k)$ находятся в *общем положении*, если множество

$$\bigcap_{i \in I} S_i \cap \bigcap_{i \notin I} (V_n \setminus S_i)$$

непусто для любого подмножества $I \subseteq \{1, \dots, k\}$. Отсюда следует, что $2^k \leq n$, т. е. $k \leq \log_2 n$. Кроме того, разрезные векторы $\delta(S_1), \dots, \delta(S_k)$ линейно независимы.

Теорема 31.5.9. Пусть $\delta(S_1), \dots, \delta(S_k)$ — k разрезных векторов в общем положении. Тогда множество $F := \text{Conv}(\delta(S_1), \dots, \delta(S_k))$ является гранью выпуклого тела $\mathcal{J}_n$. (Равносильно, множество

$$\text{Conv}(x_1 x_1^T, \dots, x_k x_k^T)$$

является гранью $\mathcal{E}_n$, где $x_h \in \mathbb{R}^n$ определен как $x_h(i) := 1$, если $i \in S_h$, и $x_h(i) := -1$, если $i \in V_n \setminus S_h$, для $h = 1, \dots, k$.) Следовательно, F также является гранью разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$. ■

Этот результат показывает, что $\mathcal{J}_n$ и $\text{CUT}_n^\square$ имеют невероятно много общих граней, вплоть до размерности $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Это вновь подтверждает идею о том, что $\mathcal{J}_n$ хорошо приближает $\text{CUT}_n^\square$. Заметим, что грани, рассмотренные в теореме 31.5.9, являются также гранями, общими с полуметрическим многогранником $\text{MET}_n^\square$; см. теорему 31.6.4.

31.6. Свойства смежности

Теперь мы перейдем к изучению геометрии самого разрезного многогранника и его линейной релаксации до полуметрического многогранника. Сначала мы упомянем некоторые результаты для граней малой размерности и, затем, факты и вопросы, касающиеся малых разрезных и полуметрических многогранников.

31.6.1. Грани малой размерности

Важным свойством разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ является то, что любые две его вершины принадлежат ребру в $\text{CUT}_n^\square$. На самом деле, имеет место более сильное утверждение. Для формулировки результатов мы нуждаемся в нескольких определениях.

Пусть P — многогранник с множеством вершин V . Для данного целого $k \geq 1$, многогранник P называется k -смежностным, если для любого подмножества $W \subseteq V$ вершин, такого что $|W| \leq k$, множество $\text{Conv}(W)$ является гранью P . Отсюда следует, в частности, что каждые k вершин P аффинно независимы. Следовательно, каждый многогранник является 1-смежностным, и многогранник является 2-смежностным, если граф его 1-остова является полным графом.

Для данного целого d и многогранника P , обозначим через $\phi_d(P)$ множество d -мерных граней P .

Барахона и Маджуб [1986] показали, что $\text{CUT}_n^\square$ является 2-смежностным, т. е. что любые два разрезных вектора смежны в $\text{CUT}_n^\square$. Другими словами, граф 1-остова $\text{CUT}_n^\square$ является полным графом. Падберг [1989] доказал следующий, более сильный результат: любые два разрезных вектора смежны в корневом полуметрическом многограннике $\text{RMET}_n^\square$ (определенном неравенствами треугольника, проходящими через данную вершину; напомним раздел 27.2). В общем случае, Деза, Лоран и Поляк [1992] доказали следующий результат.

Теорема 31.6.1. *Пусть W — множество разрезных векторов, такое что $|W| \leq 3$. Тогда множество $\text{Conv}(W)$ является симплицальной гранью полуметрического многогранника $\text{MET}_n^\square$.*

Доказательство. Используя переключение, мы можем предположить, что множество W содержит нулевой разрезный вектор $\delta(\emptyset)$. Рассмотрим сначала случай, когда $|W| = 2$; скажем, пусть $W = \{\delta(\emptyset), \delta(S)\}$, где $S \neq \emptyset, V_n$. Для доказательства того, что множество $\text{Conv}(W)$ является гранью $\text{MET}_n^\square$, достаточно найти вектор $w \in \mathbb{R}^{E_n}$, удовлетворяющий условию:

- (а) $w^T x \leq 0$ для всех $x \in \text{MET}_n^\square$ с равенством тогда и только тогда, когда $x \in \text{Conv}(W)$.

Для этого положим $w_{ij} := 0$, если $\delta(S)_{ij} = 1$, и $w_{ij} := -1$ в противном случае. Отсюда немедленно следует, что w удовлетворяет нужному условию.

Рассмотрим теперь случай, когда $|W| = 3$; скажем, пусть $W = \{\delta(\emptyset), \delta(S), \delta(T)\}$, где $\delta(S)$ и $\delta(T)$ — различные ненулевые разрезные векторы. Положим $A := S \cap T$, $B := \overline{S} \cap T$, $C := S \cap \overline{T}$, и $D := \overline{S} \cap \overline{T}$. Мы вновь должны найти $w \in \mathbb{R}^{E_n}$, удовлетворяющий (а). Предположим сначала, что множества A, B, C, D непусты. Пусть $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ и $d \in D$. Определим $w \in \mathbb{R}^{E_n}$, положив $w_{ab} = w_{ac} = w_{bd} = w_{cd} := -1$, $w_{ad} = w_{bc} := 1$, $w_{ij} := -1$, если $i \neq j$ оба принадлежат A , или B , или C , или D (обозначим множество этих пар ij через E), и $w_{ij} := 0$ в противном случае. Тогда $w^T \delta(S) = w^T \delta(T) = 0$. Пусть $x \in \text{MET}_n^\square$. Тогда

$$w^T x = - \sum_{ij \in E} x_{ij} + \sigma,$$

где

$$\sigma := x_{ad} + x_{bc} - x_{ab} - x_{bd} - x_{cd} - x_{ac}.$$

Мы имеем соотношения

- (i) $\sigma = (x_{ad} - x_{ac} - x_{cd}) + (x_{bc} - x_{cd} - x_{bd}) + x_{cd} - x_{ab} \leq x_{cd} - x_{ab}$,
- (ii) $\sigma = (x_{ad} - x_{ab} - x_{bd}) + (x_{bc} - x_{ab} - x_{ac}) + x_{ab} - x_{cd} \leq x_{ab} - x_{cd}$,
- (iii) $\sigma = (x_{ad} - x_{ac} - x_{cd}) + (x_{bc} - x_{ab} - x_{ac}) + x_{ac} - x_{bd} \leq x_{ac} - x_{bd}$,
- (iv) $\sigma = (x_{ad} - x_{ab} - x_{bd}) + (x_{bc} - x_{bd} - x_{cd}) + x_{bd} - x_{ac} \leq x_{bd} - x_{ac}$.

Из (i)–(iv) получаем, что $\sigma \leq 0$. Следовательно, $w^T x \leq 0$. Кроме того, если $w^T x = 0$, то $x_{ij} = 0$ для всех $ij \in E$ и $\sigma = 0$. Следовательно, используя (i)–(iv), $x_{ab} = x_{cd} := \alpha$, $x_{ac} = x_{bd} := \beta$ для некоторых $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$ и $x_{ad} = x_{bc} = \alpha + \beta$. Из этого легко вытекает, что $x = \alpha \delta(S) + \beta \delta(T)$, и, значит, $x \in \text{Conv}(W)$.

Наконец, предположим, что одно из множеств A, B, C, D пусто. Скажем, пусть $D = \emptyset$. Тогда $A, B, C \neq \emptyset$; пусть $a \in A, b \in B$ и $c \in C$. Определим $w \in \mathbb{R}^{E_n}$, положив $w_{ab} = w_{ac} := -1$, $w_{bc} := 1$, $w_{ij} := -1$, если $i \neq j$ оба принадлежат к A , или B , или C , и $w_{ij} := 0$ в противном случае. Легко проверить, что в этом случае w удовлетворяет (а). ■

Следствие 31.6.2. *Разрезный многогранник $\text{CUT}_n^\square$ является 3-смежностным.* ■

Следствие 31.6.3.

- (i) Для $n \geq 4$ каждая грань $\text{CUT}_n^\square$ размерности $d \leq 5$ является симплексом.
- (ii) $\varphi_d(\text{CUT}_n^\square) \subseteq \varphi_d(\text{MET}_n^\square)$ для $d = 0, 1, 2$. ■

Результаты следствий 31.6.2 и 31.6.3 (i) являются наилучшими из возможных; именно, $\text{CUT}_n^\square$ не является 4-смежностным, и существует

6-мерная грань $\text{CUT}_n^\square$ ($n \geq 4$), не являющаяся симплексом. Действительно, для $n = 4$ многогранник $\text{CUT}_4^\square$ сам является 6-мерной несимплициальной гранью. Для $n \geq 5$ рассмотрим грань F многогранника $\text{CUT}_n^\square$, определенную неравенством:

$$\sum_{4 \leq i < j \leq n} x_{ij} \geq 0.$$

Тогда F содержит следующие восемь разрезных векторов $\delta(S)$ для $S = \emptyset, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ и $\{1, 2, 3\}$. Они не являются аффинно независимыми, так как.

$$\delta(\{1\}) + \delta(\{2\}) + \delta(\{3\}) + \delta(\{1, 2, 3\}) = \delta(\{1, 2\}) + \delta(\{1, 3\}) + \delta(\{2, 3\}).$$

Следовательно, F является несимплициальной гранью размерности 6 в многограннике $\text{CUT}_n^\square$. (Легко проверить, что F является также гранью $\text{MET}_n^\square$.) Следовательно, четыре разрезных вектора $\delta(\emptyset), \delta(\{1, 2\}), \delta(\{1, 3\})$ и $\delta(\{2, 3\})$ не образуют грань $\text{CUT}_n^\square$. Это показывает, что $\text{CUT}_n^\square$ не является 4-смежностным.

Результат следствия 31.6.3 (ii) также является наилучшим из возможных, так как существует 3-мерная грань $\text{CUT}_n^\square$, которая не является гранью $\text{MET}_n^\square$ (для $n \geq 5$). Следующий пример рассмотрен в Деца и Деца [1995]. Пусть $n \geq 5$. Рассмотрим грань F многогранника $\text{CUT}_n^\square$, определенную следующим образом: $F := \text{CUT}_5^\square$ для $n = 5$ и

$F := \{x \in \text{CUT}_n^\square \mid x_{1i} + x_{2i} + x_{12} = 2 \text{ и } x_{1i} - x_{2i} - x_{12} = 0 \text{ для } i = 6, \dots, n\}$ для $n \geq 6$. Разрезные векторы, лежащие в F , имеют вид $\delta(S \cup \{1\})$, где $S \subseteq \{2, 3, 4, 5\}$. Следовательно, $F \approx \text{CUT}_5^\square$ является 10-мерной гранью $\text{CUT}_n^\square$, не являющейся гранью $\text{MET}_n^\square$. Рассмотрим множество

$$G := \text{Conv}(\delta(\{1, 2\}), \delta(\{1, 3\}), \delta(\{1, 4\}), \delta(\{1, 5\})),$$

и пусть H обозначает грань $\text{MET}_n^\square$, определенную равенствами треугольника:

$$\begin{aligned} x_{1i} + x_{2i} + x_{12} &= 2, & x_{1i} - x_{2i} - x_{12} &= 0 & (i = 6, \dots, n) \\ \text{и } x_{1i} + x_{1j} + x_{ij} &= 2 & (2 \leq i < j \leq 5). \end{aligned}$$

Тогда G есть 3-мерная грань $\text{CUT}_n^\square$, так как

$$G = \left\{ x \in F \mid \sum_{1 \leq i < j \leq 5} x_{ij} = 6 \text{ и } x_{1i} + x_{1j} + x_{ij} = 2 \text{ для } 2 \leq i < j \leq 5 \right\}.$$

Но G не является гранью $\text{MET}_n^\square$. Чтобы увидеть это, рассмотрим точку $x \in \mathbb{R}^{E_n}$, определенную следующим образом: $x_{1i} = 1, x_{2i} = x_{3i} = x_{4i} = x_{5i} = \frac{1}{3}$ для $i = 6, \dots, n$, $x_{ij} = 0$ для $6 \leq i < j \leq n$, и $x_{ij} = \frac{2}{3}$

для $1 \leq i < j \leq 5$. Тогда $x \in H \setminus G$. Если G есть грань $\text{MET}_n^\square$, то G есть грань H , и, следовательно, существует неравенство треугольника, допустимое для G и не выполняющееся для x . Легко проверить, что такого неравенства не существует. Это показывает, что G не является гранью $\text{MET}_n^\square$.

Хотя не каждая d -мерная грань $\text{CUT}_n^\square$ является гранью $\text{MET}_n^\square$ при $d \geq 3$, следующий результат показывает, что большинство из них остаются гранями $\text{MET}_n^\square$, когда $d \leq \log_2 n$.

Напомним, что для данных $S_1, \dots, S_k \subseteq V_n$ разрезные векторы $\delta(S_1), \dots, \delta(S_k)$ находятся в общем положении, если множество

$$\bigcap_{i \in I} S_i \cap \bigcap_{i \notin I} (V_n \setminus S_i)$$

непусто для любого подмножества $I \subseteq \{1, \dots, k\}$. Тогда $k \leq \log_2 n$ и разрезные векторы $\delta(S_1), \dots, \delta(S_k)$ линейно независимы. Деза, Лоран и Поляк [1992] показали, что разрезы в общем положении образуют грань; доказательство этого результата аналогично теореме 31.6.1, но имеет больше технических деталей. Сравните результаты теорем 31.6.4 и 31.5.9.

Теорема 31.6.4. *Пусть $\delta(S_1), \dots, \delta(S_k)$ есть k разрезных векторов в общем положении. Тогда множество $\text{Conj}(\delta(S_1), \dots, \delta(S_k))$ является гранью $\text{MET}_n^\square$, и, значит, гранью $\text{CUT}_n^\square$.* ■

Следовательно, $\text{CUT}_n^\square$ и $\text{MET}_n^\square$ имеют много общих граней, по меньшей мере до размерности $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Это показывает, что полуметрический многогранник очень плотно обернут вокруг разрезного многогранника.

31.6.2. Малые многогранники

Мы собрали здесь некоторые результаты и вопросы, относящиеся к фасетам и вершинам разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ и полуметрического многогранника $\text{MET}_n^\square$, особенно для малых значений n , $n \leq 7$. Мы отсылаем читателя к работам Деза [1994, 1996] для подробного обзора различных комбинаторных и геометрических свойств этих многогранников.

Все фасеты разрезного конуса CUT_n и разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ известны для $n \leq 7$; они были описаны в разделе 30.6. Экстремальные лучи MET_n и вершины $\text{MET}_n^\square$ также известны для

n	число фасет CUT_n	число орбит фасет	число фасет $\text{CUT}_n^\square$	число орбит фасет
3	3	1	4	1
4	12	1	16	1
5	40	2	56	2
6	210	4	368	3
7	38 780	36	116 764	11
8	49 604 520	?	217 093 472	147

Рис. 31.6.5. Число фасет разрезных конусов многогранников
для $n \leq 8$

$n \leq 7$; экстремальные лучи MET_7 были найдены Гришухиным [1992а], и вершины $\text{MET}_7^\square$ — Деза, Деза и Фукуда [1996]. Для $n \leq 6$ они очень просты. Именно, кроме разрезных векторов (которые являются единственными целыми векторами), все они получаются из вектора $(\frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3})$ применением переключений¹⁾ и 0-гейт-расширений²⁾. Таблицы 31.6.5 и 31.6.6 суммируют информацию о числе фасет и вершин разрезных и полуметрических полиэдров. Результаты для CUT_8 и $\text{CUT}_8^\square$ получены в Кристофом и Райнельтом [1996]. (Мы напомним, что орбиты получены переключениями и перестановками для многогранников и только перестановками для конусов.)

Имеется много информации о графе 1-остова $\text{MET}_n^\square$ и о ридж-графах¹⁾ $\text{MET}_n^\square$ и $\text{CUT}_n^\square$. Мы приводим здесь некоторые факты и

¹⁾ Метрический многогранник сохраняется при операции переключения, и его множество вершин разбивается на переключательные классы. Именно, если x есть вершина $\text{MET}_n^\square$, то все векторы из ее переключательного класса $\{r_{\delta(A)}(x) \mid A \subseteq V_n\}$ также являются вершинами $\text{MET}_n^\square$. Например, разрезные векторы образуют один переключательный класс.

²⁾ Напомним, что для данного $x \in \mathbb{R}^{E_n}$ его 0-гейт-расширением называется вектор $y \in \mathbb{R}^{E_{n+1}}$, определенный как: $y_{ij} := x_{ij}$ для $ij \in E_n$, $y_{1,n-1} := 0$, $y_{i,n+1} := x_{1i}$ для $i = 1, \dots, n$. Легко проверить, что y является вершиной $\text{MET}_{n+1}^\square$ в том случае, когда x является вершиной $\text{MET}_n^\square$.

¹⁾ Пусть P — d -мерный полиэдрон. Его *ридж-графом* называется граф, множество вершин которого совпадает с множеством фасет P , две фасеты смежны в том случае, если их пересечение имеет размерность $d - 2$.

n	число экстр. лучей MET_n	число орбит лучей	число вершин $\text{MET}_n^\square$	число орбит вершин
3	3	1	4	1
4	7	2	8	1
5	25	3	32	2
6	296	7	544	3
7	55 226	41	275 840	13

Рис. 31.6.6. Число экстремальных лучей (вершин)
полуметрических полиэдров для $n \leq 7$

вопросы и за большими подробностями отсылаем читателя к оригинальным статьям или к обзору Деза [1996].

Граф 1-остова полуметрического многогранника. Так как полуметрический многогранник $\text{MET}_n^\square$ сохраняется при переключении, то множество его вершин разбивается на переключательные классы. Разрезные векторы образуют единственный переключательный класс, который является кликой в графе 1-остова $\text{MET}_n^\square$ (по теореме 31.6.1). С другой стороны, в Лоран [1996с] показано, что любой другой переключательный класс вершин образует независимое множество в графе остова $\text{MET}_n^\square$; т. е. никакие две эквивалентные относительно переключения нецелые вершины $\text{MET}_n^\square$ не образуют ребра $\text{MET}_n^\square$. Следующая гипотеза выдвинута Лоран и Поляк [1992].

Гипотеза 31.6.7. *Каждая дробная вершина x многогранника $\text{MET}_n^\square$ смежна с некоторому разрезному вектору (т. е. некоторой целой вершине $\text{MET}_n^\square$). Равносильно, для каждой дробной вершины x из $\text{MET}_n^\square$ некоторое ее переключение $r_{\delta(S)}(x)$ лежит на экстремальном луче $\text{MET}_n^\square$.*

Эту гипотезу можно рассматривать как аналог следующего свойства, которым обладают фасеты разрезного многогранника: для каждой фасеты разрезного многогранника существует ее переключение, содержащее нулевую вершину. Одним из следствий гипотезы 31.6.7 являлось бы, что граф остова имеет диаметр ≤ 3 . Справедливость гипотезы 31.6.7 была проверена для некоторых классов вершин (см. Лоран [1996с]) и для $n \leq 7$ (см. Деза, Деза и Фукуда [1996]).

Смежность была детально проанализирована для некоторых классов вершин. Для данного подмножества $S \subseteq V_n$ пусть $d(K_{S, V_n \setminus S})$ обозначает метрику полного двудольного графа с разбиением вершин $(S, V_n \setminus S)$. Тогда $x_S := \frac{1}{3}d(K_{S, V_n \setminus S})$ есть вершина $\text{MET}_n^\square$ (x_S равно $\frac{1}{3}$ на ребрах графа и $\frac{2}{3}$ в противном случае). Вершины x_S ($S \subseteq V_n$) образуют переключательный класс. Отношение смежности между разрезными векторами $\delta(S)$ и вершинами x_T (для $S, T \subseteq V_n$) описано в Деза и Деза [1994b]. Именно, две вершины $\delta(S)$ и x_T смежны в $\text{MET}_n^\square$ тогда и только тогда, когда разрезные векторы $\delta(S)$ и $\delta(T)$ не смежны в графе свернутого n -куба, т. е. если $|S \Delta T| \neq 1, n-1$. В случае $n=5$ разрезные векторы $\delta(S)$ и векторы x_T (для $S, T \subseteq V_5$) образуют все вершины $\text{MET}_5^\square$. Следовательно, граф остова $\text{MET}_5^\square$ полностью известен; его диаметр равен 2.

Деза и Деза [1994b] проанализировали смежность вершин следующего вида: разрезные векторы $\delta(S)$, x_T ($S, T \subseteq V_n$) и их гейт-расширения. Это позволило, в частности, описать граф остова $\text{MET}_6^\square$, диаметр которого равен 2.

Вершины $\text{MET}_7^\square$ и их смежность описаны в Деза, Деза и Фукуда [1996]; в частности, граф остова $\text{MET}_7^\square$ имеет диаметр 3. В таблице 31.6.8 показаны 13 орбит вершин $\text{MET}_7^\square$; для каждой орбиты O_i дана ее вершина-представитель v_i , мощность орбиты $|Q_i|$, число A_i соседей v_i в графе остова и число I_i треугольных фасет, содержащих v_i .

Ридж-граф полуметрического многогранника. Ридж-граф G_n полуметрического многогранника $\text{MET}_n^\square$ детально изучен в Деза и Деза [1994b]. Граф G_n имеет $4\binom{n}{3}$ вершин и, для $n \geq 4$, две треугольные фасеты смежны в G_n тогда и только тогда, когда они неконфликтны. (Два неравенства треугольника называются *конфликтными*, если существует пара ij , такая что эти неравенства имеют на позиции ij ненулевые координаты разного знака.) Например, $G_3 = K_4$ и $G_4 = K_4 \times K_4$. В общем случае, для $n \geq 4$ дополнение G_n является локально¹⁾ букетом²⁾ из $n-3$ копий $K_3 \times K_3$ с общим K_3 ; его валентность равна $k = 3(2n-5)$, две смежных вершины имеют $\lambda \in \{2(n-2), 4\}$ общих соседей,

¹⁾ Под локальной структурой графа G мы понимаем подграф, порожденный соседями данной вершины, при предположении, что эти порожденные подграфы одинаковы для всех вершин.

²⁾ Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, и для $U \subseteq V$ пусть $H = G[U]$ есть порожденный подграф G . Пусть $G_i = (V_i, E_i)$ ($i = 1, \dots, k$) есть k изоморфных копий G , таких что $V_i \cap V_j = U$ для всех $i \neq j$. Тогда граф $(\cup_{i=1}^k V_i, \cup_{i=1}^k E_i)$ называется букетом k копий G с общим H .

орбита	вершина-представитель	O_i	I_i	A_i
O_1	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	64	105	55 226
O_2	$\frac{2}{3}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	64	35	896
O_3	$\frac{2}{3}(1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	1 344	40	763
O_4	$\frac{2}{3}(1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	6 720	45	594
O_5	$\frac{2}{3}(1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$	2 240	49	496
O_6	$\frac{1}{4}(1, 2, 3, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 1)$	20 160	30	96
O_7	$\frac{1}{3}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$	4 480	26	76
O_8	$\frac{2}{5}(2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2)$	23 040	28	57
O_9	$\frac{1}{3}(2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2)$	40 320	22	46
O_{10}	$\frac{1}{3}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2)$	40 320	23	39
O_{11}	$\frac{2}{7}(1, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1)$	40 320	25	30
O_{12}	$\frac{1}{5}(3, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 2, 2)$	40 320	25	30
O_{13}	$\frac{1}{6}(1, 2, 4, 2, 2, 2, 1, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 4, 2, 2, 4)$	80 640	23	24
всего		275 840		

Рис. 31.6.8. Орбиты вершин $\text{MET}_7^\square$

в то время как две несмежных вершины имеют μ общих соседей с $\mu \in \{4, 8\}$ для $n = 5$ и $\mu \in \{0, 4, 2(n-1)\}$ для $n \geq 6$. В частности, диаметр G_n равен 2 для $n \geq 4$. Заметим, что дополнение ридж-графа G_5 для $\text{MET}_5^\square$ дает пример³⁾ регулярного графа, квадрат матрицы смежности которого лежит в некоторой алгебре Боуза–Меснера размерности 3.

Деза и Деза [1994b] описали также ридж-граф G'_n полуметрического конуса MET_n , который является порожденным подграфом G_n . Именно, для $n \geq 4$, дополнение G'_n является локально букетом $n-3$ копий циклов C_6 с общим ребром. Граф G'_n имеет диаметр 2 для $n \geq 4$.

Ридж-граф разрезного многогранника. Ридж-граф разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$ изучен в Деза и Деза [1994a]. (Достаточно рассмотреть случай $n \geq 5$, так как для $n \leq 4$ $\text{CUT}_n^\square = \text{MET}_n^\square$.) Ридж-граф

³⁾ Это обобщение понятия сильно регулярного графа было рассмотрено в Деза и Хуанг [1997].

$\text{CUT}_n^\square$ описан здесь для $n \leq 7$. В частности, две фасеты $\text{CUT}_5^\square$ смежны в ридж-графе тогда и только тогда, когда они неконфликтны, но это неверно для $n \geq 6$. Ридж-граф $\text{CUT}_n^\square$ имеет диаметр 2 для $n = 4, 5$, диаметр 3 для $n = 6$, и его диаметр принадлежит множеству $\{3, 4\}$ для $n = 7$. Следующая гипотеза принадлежит Деза и Деза [1994a].

Гипотеза 31.6.9. *Каждая фасета $\text{CUT}_n^\square$ смежна в ридж-графе $\text{CUT}_n^\square$ по меньшей мере одной треугольной фасете.*

Из этой гипотезы следует, что ридж-граф $\text{CUT}_n^\square$ имеет диаметр ≤ 4 . Показано, что эта гипотеза справедлива для $n \leq 7$. Дальнейшие свойства и вопросы, относящиеся к ридж-графу разрезного конуса, можно найти в Деза и Деза [1994a].

n	объем $\text{MET}_n^\square$	объем $\text{CUT}_n^\square$	отношение ρ_n
3	1/3	1/3	100%
4	2/45	2/45	100%
5	4/1 701	32/14 175	$\sim 96\%$
6	71 936/1 477 701 225	2 384/58 046 625	$\sim 84\%$

Рис. 31.6.10. Объемы разрезного и полуметрического многогранника для $n \leq 6$

Изучались и другие комбинаторные свойства разрезных и полуметрических полиэдров. Например, Деза и Деза [1995] полностью описали решетки граней как разрезного многогранника $\text{CUT}_n^\square$, так и полуметрического многогранника $\text{MET}_n^\square$, для $n \leq 5$. Деза, Деза и Фукуда [1996] нашли реберную связность (наименьшее число ребер графа, которые нужно удалить для того, чтобы граф стал несвязным) для графов остовов и ридж-графов разрезного и полуметрического многогранников. Упомянем теперь некоторые факты об объемах разрезных и полуметрических многогранников.

Одной из мер близости релаксации $\text{CUT}_n^\square$ до $\text{MET}_n^\square$ является отношение их объемов

$$\rho_n := \frac{\text{vol } \text{CUT}_n^\square}{\text{vol } \text{MET}_n^\square}.$$

К сожалению, вычисление объема многогранника в общем случае является трудной задачей. Указанные объемы были вычислены для

$n \leq 6$ в Деза, Деза и Фукуда [1996]; мы приводим эти результаты в таблице 31.6.10.

В заключение упомянем о некоторых родственных малых метрических полиэдрах, которые были рассмотрены в последнее время:

- (i) квази-метрические конусы и конусы ориентированных мультираз-
- (ii) резов (см. Деза и Пантелсева [1999]);
- (iii) конусы m -полуметрик и $m+1$ -разбиение m -полуметрик (см. Деза и Розенберг [1999]);

конус всех билинвариантных метрик симметрической группы (см., например, раздел 1 из Деза и Хуанг [1998] и библиографию в этой работе).

31.7. Расстояния от фасет до центра тяжести

Каким может быть минимальное возможное расстояние от фасеты до центра тяжести в многограннике $\text{CUT}_n^\square$? Большинство результатов в этой области получены Деза, Лоран и Поляк [1992].

Пусть $b := (\sum_{S \subseteq V_n, |I \notin S} \delta(S)) / 2^{n-1}$ обозначает центр тяжести многогранника $\text{CUT}_n^\square$. Тогда

$$b = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right).$$

евклидово расстояние от b до гиперплоскости, определенной уравнением $v^T x = \alpha$, определяется по формуле

$$\frac{|v^T b - \alpha|}{\|v\|_2}.$$

Легко проверить, что расстояние от b до фасеты F сохраняется при переключении F . В частности, расстояние от b до любой треугольной фасеты равно $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Следующая гипотеза поставлена Деза, Лоран и Поляк [1992].

Гипотеза 31.7.1. *Расстояние от центра тяжести b до любой фасеты $\text{CUT}_n^\square$ больше либо равно $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, наименьшее расстояние в точности соответствует треугольным фасетам.*

Они показали, что гипотеза справедлива для всех чистых фасет, т. е. для всех фасет, определяемых неравенствами с коэффициентами $0, \pm 1$.

Теорема 31.7.2. Пусть $v^T x \leq \alpha$ есть неравенство, определяющее фасету $\text{CUT}_n^\square$, и такое, что $v \in \{-1, 0, 1\}^n$. Тогда расстояние от этой фасеты до центра тяжести b больше или равно $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Кроме того, это наименьшее расстояние реализуется в точности тогда, когда $v^T x \leq \alpha$ есть неравенство треугольника. ■

Доказательство теоремы 31.7.2 опирается на нахождение хорошей нижней оценки для задачи о максимальном разрезе в графе K_n с реберными весами v . Для вектора $v \in \mathbb{R}^{E_n}$ положим

$$mc(K_{n,v}) := \max(v_T \delta(S) \mid S \subseteq V_n).$$

Тогда, как показано в Деза, Лоран и Поляк [1992],

$$mc(K_{n,v}) \geq \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} v_{ij} \right) / 2 + \|v\|_2 (2\sqrt{3})^{-1}$$

для каждого $v \in \{0, \pm 1\}^{E_n}$. Заметим, что если это неравенство верно для *любого* $v \in \mathbb{R}^{E_n}$, то гипотеза 31.7.1 справедлива.

Вычисление точного расстояния до центра тяжести для некоторых классов фасет может оказаться полезным. Например, пусть $D(r, p)$ обозначает расстояние от центра тяжести b до гиперплоскости, определяемой клико-паутинным неравенством:

$$\text{CW}_{2p-2r-1}^r(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$$

(с p коэффициентами 1 и $p - 2r - 1$ коэффициентами -1). Тогда

$$D(r, p) = \frac{r+1}{2} \sqrt{\frac{p-2r-1}{2p-r-1}}.$$

Следовательно, для $r = 0$ (гиперметрический случай), $D(0, p) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p-1}{2p-1}}$, что асимптотически равно $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ($> \frac{1}{2\sqrt{3}}$), когда $p \rightarrow \infty$. В случае $p = 2r+3$ (случай неравенства бициклически нечетного колеса), $D(r, 2r+3) = \frac{r+1}{\sqrt{6r+10}}$, что стремится к $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ($> \frac{1}{2\sqrt{3}}$), когда $r \rightarrow \infty$.

Можно проверить, что расстояние от b до гиперплоскости, определяемой (не чистым) клико-паутинным неравенством:

$$\text{CW}_{p(r+1)-2r-1}^r(r, \dots, r, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$$

(с p коэффициентами r и $p - 2r - 1$ коэффициентами -1) асимптотически равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$, когда $r, p \rightarrow \infty$.

В таблице 31.7.3 мы показали, чему равны точные расстояния от центра тяжести для каждого из одиннадцати типов фасет $\text{CUT}_7^\square$. Эти одиннадцать типов фасет обозначены, как и в разделе 30.6, как F_i для $i = 1, \dots, 11$. Вторая строка таблицы 31.7.3 дает точное значение для расстояния $D(F)$ от центра тяжести b до гиперплоскости, содержащей фасету F . Третья строка дает приближенное значение величины $D(F) \cdot 2\sqrt{3}$, т. е. отношение $\frac{D(F)}{D(F_1)}$, где F_1 есть треугольная фасета. Следовательно, пентагональная фасета есть следующая ближайшая к центру тяжести фасета, в то время как самой удаленной от центра тяжести является фасета F_8 .

F	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}
расст.	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{2}{\sqrt{31}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{11}}$	$\frac{7}{2\sqrt{69}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2\sqrt{11}}$	$\frac{9}{2\sqrt{133}}$	$\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\frac{5}{2\sqrt{29}}$
отн.	1	1,09	1,24	1,13	1,28	1,46	1,73	2,61	1,35	1,85	1,61

Рис. 31.7.3. Расстояние фасет CUT_7 до центра тяжести

В заключение дадим результаты, касающиеся ширины и диаметра разрезного многогранника. Для данного многогранника P его *шириной* называется величина

$$\text{width}(P) := \min_{\|c\|_2=1} \left(\max_{x \in P} c^T x - \min_{x \in P} c^T x \right).$$

Диаметр P уже был определен в разделе 31.1 как $\max_{x,y \in P} \|x - y\|_2$. Легко видеть, что он может быть альтернативно определен также как

$$\text{diam}(P) = \max_{\|c\|_2=1} \left(\max_{x \in P} c^T x - \min_{x \in P} c^T x \right).$$

Другим словами, ширина и диаметр являются, соответственно, наибольшим и наименьшим расстояниями между двумя опорными гиперплоскостями для P . Rote (неопубликовано) вычислил ширину $\text{CUT}_n^\square$.

Предложение 31.7.4. *Ширина многогранника $\text{CUT}_n^\square$ равна 1.*

Доказательство. Доказательство основано на следующем неравенстве: пусть $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ — такие N скаляров, что $\sum_{i=1}^N a_i = 0$ и

$\sum_{i=1}^N a_i^2 = N$. Тогда

$$\max_i a_i - \min_i a_i \geq 2.$$

(Действительно, предположим, что $a_1 \leq \dots \leq a_N$, и пусть $s := \frac{a_1 + a_N}{2}$. Если $a_N - a_1 < 2$, то $|a_i - s| < 1$ для всех i . Следовательно, $a_i^2 + s^2 - 2a_i s < 1$ для всех i . Суммируя по i , получим, что $N + Ns^2 < N$, откуда следует противоречие.)

Пусть $c \in \mathbb{R}^{E_n}$, где $\|c\|_2 = 1$. Для $S \subseteq V_n$ положим $x_S := e - 2\delta(S)$ (где e обозначает вектор, все координаты которого равны 1) и положим $a_S := c^T x_S$. Тогда легко проверить, что $\sum_S a_S = 0$ и $\sum_S (a_S)^2 = N(= 2^{n-1})$. Применяя вышеприведенное неравенство, мы получим, что $2 \leq \max_S c^T x_S - \min_S c^T x_S$. Это показывает, что $1 \leq \max_S c^T \delta(S) - \min_S c^T \delta(S)$. Следовательно, ширина $\text{CUT}_n^\square$ больше или равна 1. Но величина 1 может быть достигнута, например, если взять в качестве c единичный координатный вектор. Следовательно, $\text{CUT}_n^\square$ имеет ширину 1. ■

Таким образом, разрезный многогранник имеет ту же ширину, что и единичный гиперкуб. Поляк и Туза [1995] вычислили диаметр разрезного многогранника.

Предложение 31.7.5. Диаметр $\text{CUT}_n^\square$ равен $\sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$, что равно $\frac{n}{2}$ для четного n и $\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2}$ для нечетного n .

Доказательство. Пусть $\alpha := \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$. Пусть $c \in \mathbb{R}^{E_n}$ имеет евклидову норму 1. Пусть $\delta(S)$ и $\delta(T)$ — два разрезных вектора, реализующие, соответственно, максимум и минимум $c^T x$ по всем $x \in \text{CUT}_n^\square$. Определим $c' := c^{\delta(T)}$, т. е. $c'_{ij} := -c_{ij}$, если $|T \cap \{i, j\}| = 1$, и $c'_{ij} = c_{ij}$ в противном случае. Тогда

$$c^T \delta(S) - c^T \delta(T) = (c')^T \delta(S \Delta T) \leq \sqrt{|\delta(S \Delta T)|} \leq \alpha$$

(предпоследнее неравенство следует из того, что $\sum_{1 \leq i \leq n} u_i \leq \sqrt{n}$ для любого вектора $u \in \mathbb{R}^n$ евклидовой нормы 1). С другой стороны, нижеприводимый вектор c реализует равенство. Пусть $S \subseteq V_n$ с $|S| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Положим $c_{ij} := \frac{1}{\alpha}$, если $\delta(S)_{ij} = 1$, и $c_{ij} := 0$, если $\delta(S)_{ij} = 0$. Тогда $\max c^T x = \alpha$ достигается на $\delta(S)$, и минимум достигается на $\delta(\emptyset)$. ■

31.8. Симплициальные фасеты

Здесь мы дадим дополнительную информацию о симплициальных фасетах $\text{CUT}_n^\square$. В разделе 31.6 мы видели, что $\text{CUT}_n^\square$ имеет много симплициальных граней до размерности $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Оказывается, $\text{CUT}_n^\square$ также имеет очень много и симплициальных фасет.

Мы приводим известные классы симплициальных фасет; подробности см. в работе Деза и Лоран [1993a].

Для $n \geq 3$ гиперметрическое неравенство:

$$(31.8.1) \quad Q_n(n-4, 1, 1, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$$

определяет симплициальную фасету $\text{CUT}_n^\square$ (Деза и Розенберг [1984]; напомним следствие 28.2.12).

Для $n \geq 6$ клико-паутинное неравенство:

$$(31.8.2) \quad \text{CW}_n^{n-6}(n-4, n-5, n-5, -1, \dots, -1)^T x \leq 0$$

определяет симплициальную фасету $\text{CUT}_n^\square$ (Деза и Лоран [1992c]). Для $n = 6$ два неравенства (31.8.1) и (31.8.2) совпадают. В действительности, для $n \leq 6$ все симплициальные фасеты $\text{CUT}_n^\square$ возникают из (31.8.2) (с точностью до перестановок и переключений).

Для $n = 7$, в дополнение к симплициальным фасетам, которые получаются из (31.8.1) и (31.8.2) перестановками и переключениями, появляются четыре новых группы симплициальных фасет; а именно, клико-паутинные фасеты, определяемые неравенствами

$$\text{CW}_7^1(2, 2, 1, 1, -1, -1, -1)^T x \leq 0,$$

$$\text{CW}_7^1(1, 1, 1, 1, -1, -1)^T x \leq 0,$$

фасета, определяемая парашютным неравенством $(\text{Par}_7)^T x \leq 0$ (напомним (30.4.1)), и фасета, определяемая неравенством Гришухина $(\text{Gr}_7)^T x \leq 0$ (напомним (30.5.1)).

Следовательно, среди одиннадцати типов фасет $\text{CUT}_7^\square$ шесть являются симплициальными, именно, фасеты типов с номерами 6–11 в разделе 30.6. Таким образом, используя данные таблицы 30.6.1, можно вычислить точное число симплициальных фасет $\text{CUT}_7^\square$. Среди всех своих 116 764 фасет $\text{CUT}_7^\square$ имеет 113 536 симплициальных фасет. Следовательно, приблизительно 97,2 процента от общего числа фасет являются симплексами! Деза и Деза [1994a] предположили, что этот феномен является общим, т. е. что абсолютное большинство фасет

$\text{CUT}_n^\square$ являются симплексами. Пытаясь понять глобальные очертания разрезного многогранника, они получили следующий результат:

«Мы думаем, что очертания разрезного многогранника существенно зависят от несимплициальных фасет, в частности, от треугольных фасет, и что подавляющее большинство фасет $\text{CUT}_n^\square$ являются симплексами, которые только “полируют” их.»

Интересно, что каждая описанная выше симплициальная фасета имеет следующее свойство (31.8.3) (см. Деза и Лоран [1993a] для доказательства). Пусть F обозначает симплициальную фасету, и пусть $\delta(S_k)$ ($1 \leq k \leq \binom{n}{2}$) обозначают ее корни. Пусть $d \in F$ имеет разложение $d = \sum_{1 \leq k \leq \binom{n}{2}} \lambda_k \delta(S_k)$, где $\lambda_k \geq 0$ для всех k . Тогда

$$(31.8.3) \quad \begin{array}{l} d \text{ принадлежит разрезной решетке } \mathcal{L}_n \\ \text{(т. е. } d \in \mathbb{Z}^{E_n} \text{ и удовлетворяет условию четности (24.1.1))} \\ \downarrow \\ \text{все } \lambda'_k \text{ — целые.} \end{array}$$

Другими словами, в терминологии части 4, для класса расстояний $d \in F$ условие четности достаточно для вложимости в гиперкуб.