

М. Деза, В. П. Гришухин, М. И. Штогрин

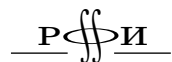
Scale-Isometric Polytopal
Graphs in Hypercubes
and Cubic Lattices

Изометрические
полиэдральные подграфы
в гиперкубах и кубических
решетках

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК ????
ББК ????
Д26

Издание осуществлено при поддержке РФФИ
(издательский проект № 06-01-14077)



Д26 **Деза М., Гришухин В., Штогрин А. И.**
Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах
и кубических решетках. — М.: МЦНМО, 2007. — 192 с.
ISBN ??-?-???-???-?
Текст аннотации. Текст аннотации. Текст аннотации. Текст ан-
нотации. Текст аннотации. Текст аннотации. Текст аннотации. Текст
аннотации. Текст аннотации. Текст аннотации. Текст аннотации. Текст
аннотации. Текст аннотации. Текст аннотации. Текст аннотации. Текст
аннотации. Текст аннотации.
ББК ????

Авторы
Изометрические полиэдральные подграфы
в гиперкубах и кубических решетках

ISBN ??-?-???-???-?
© Деза М., Гришухин В., Штогрин А. И., 2007,
© МЦНМО, 2007.

Оглавление

Введение	8
Глава 1	
Введение: Графы и их изометрические вложения со шкалой	10
1.1. Графы	10
1.2. Вложения графов	12
1.3. Вложения плоских графов	20
1.4. Типы регулярности многогранников и паркетов	26
1.5. Операции на многогранниках	29
1.6. Разбиения Вороного и Делоне	31
1.7. Бесконечные графы	32
Глава 2	
Пример: вложение фуллеренов	37
2.1. Вложимость фуллеренов и двойственных к ним полиэдров	38
2.2. Бесконечные семейства ℓ_1 -невложимых фуллеренов	42
2.3. Модель Кацеры для пузырьковых клеток	44
Глава 3	
Правильные паркетты и соты	46
3.1. Правильные паркетты и соты	46
3.2. Планарный случай	47
3.3. Звездные соты	51
3.4. Случай размерности $d \geq 3$	52
Глава 4	
Полуправильные полиэдры и многогранники, родственные призмам и антипризмам	56
4.1. Полуправильные полиэдры	56
4.2. Московский граф, графы глобуса и паутины	60

4.3. Звездные k -угольники, куполы и антипаутины	62
4.4. Каппингованные антипризмы и колонки из антипризм . .	64
Глава 5	
Усечение, каппинг и шамферинг	67
5.1. Усечения правильных разбиений	67
5.2. Частичные усечения и каппинги платоновых тел	69
5.3. Шамферинг платоновых тел	73
Глава 6	
92 правильных полиэдра (не полуправильные)	77
Глава 7	
Полупроводниковые и правильные n-многогранники	84
7.1. Полуправильные (но не правильные) n -многогранники . .	84
7.2. Правильные n -многогранники (но не полуправильные) . .	85
7.3. Архимедовы 4-многогранники	85
7.4. Вложимость снаб 24-ячейки	87
Глава 8	
Полициклы и другие графы, имеющие химические приложения	88
8.1. (r, q) -полициклы	88
8.2. Квази- $(r, 3)$ -полициклы	91
8.3. Координационные полиэдры и металлополиэдры	93
Глава 9	
Плоские паркеты	97
9.1. 58 вложимых мозаик	97
9.2. Другие специальные плоские паркеты	108
9.3. Правильногранные двугранные плоские паркеты	111
Глава 10	
Однородные разбиения 3-пространства и родственные им	113
10.1. 28 равномерных разбиений	114
10.2. Другие специальные разбиения	117
Глава 11	
Решетки, бирешетки и паркеты	122
11.1. Неприводимые решетки корней	122
11.2. Случай размерности 3	123
11.3. Дайсинги	125
11.4. Паркетины решетчатых разбиений	126

Глава 12	
Малые многогранники	131
12.1. Полиэдры, у которых не больше семи граней	131
12.2. Простые полиэдры, у которых не больше восьми граней	132
Глава 13	
Полиэдры с двумя типами граней	135
13.1. Медиальные полиэдры Гольдберга	138
13.2. Правильногранные полиэдры с двумя типами граней . . .	141
13.3. Операции над полиэдрами с двумя типами граней	144
13.4. Полиэдры 3_n и 4_n	145
13.5. Еще раз о полиэдрах 5_n (фуллеренах)	150
13.6. Полиэдры os_n (октаэдриты)	151
Глава 14	
Специальные ℓ_1-графы	154
14.1. Эквиварезные ℓ_1 -графы	154
14.2. Вложения со шкалой один	163
Глава 15	
Некоторые обобщения ℓ_1-вложимости	172
15.1. Квазивложения	172
15.2. Липшицево вложение	176
15.3. Полиэдральные гиперметрики	176
15.4. Симплициальные n -многообразия	179
Литература	181
Предметный указатель	189

Введение

Эта монография служит продолжением книги М. Деа и М. Лоран «Геометрия разрезов и метрик», опубликованной в 1997 году издательством Springer-Verlag, Берлин (русский перевод появился в 2001 году, издательство МЦНМО, Москва). Предметом изучения той книги были ℓ_1 -метрики, то есть такие метрики, которые изометрически вложимы со шкалой в некоторый гиперкуб H_m , а если они бесконечны — то в некоторую кубическую решетку Z_m . За последние шесть лет большой успех был достигнут в изучении специального случая ℓ_1 -метрики: расстояния на графе остова многогранника (конечного или бесконечного).

Эта монография посвящена в основном выяснению вопроса, являются ли такие многогранники комбинаторно ℓ_1 -вложимыми для интересных примеров графов многогранников. Это такие графы, что соответствующие им многогранники либо хорошо известны в математике (регулярные разбиения, решетки корней, правильные многогранники и т. д.), либо имеют химические приложения (фуллерены, полициклы и т. п.). Вложимость, если она имеет место, применима к химическим графам, и приводит к новым комбинаторным перспективам для аффинных многогранных объектов.

Примеры графов многогранников в этой книге возникли с известным ℓ_2 -вложением из самых разных областей геометрии, кристаллографии и теории графов. Только для того, чтобы ввести их, требуется много определений. В книге уделяется особое внимание таким точным и по возможности независимым определениям. Изометрическая вложимость со шкалой — главный вопрос, объединяющий их; все изученные примеры графов рассматривались с этой точки зрения. Эта вложимость будет представлена с минимальными техническими подробностями.

Основные семейства рассмотренных графов возникли из разнообразных обобщений правильных многогранников (или паркетов), из (точечных) решеток и из химических приложений.

В частности, были получены такие результаты:

1. Все вложимые правильные паркеты и соты размерностей $d > 2$, за исключением гипер-симплексов и гипер-октаэдров, — это в точности такие разбиения и соты, у которых двудольный остов: гиперкубы, кубические решетки и 11 специального вида паркетов в гиперболическом пространстве.
2. Если P — Архимедов полиэдр или плоское разбиение, отличное от треугольной призмы, тогда в точности один из двух — либо P , либо двойственный к нему — вложим.
3. Для правильного 4-мерного многогранника 24-ячейки его обыкновенное и золотое усечение (полуправильный 4-многогранник Госсета) вложены в куб H_{12} и полукуб $\frac{1}{2}H_{12}$ соответственно.
4. Остовы паркета Вороного для решетки A_n и двойственной ей решетки A_n^* вложимы в Z_{n+1} и $Z_{\binom{n+1}{2}}$ соответственно.

Книга организована следующим образом.

В довольно длинном введении (глава 1) приведены основные обозначения, а также методы вложений. Ознакомившись с ним, остальные главы можно читать в независимом порядке.

Главы 14 и 15 рассматривают соответственно частные случаи и обобщения понятия вложимости. Каждая из глав 2–15 посвящена вложимости определенных видов графов. Мы попытались дать точное и по возможности независимое описание этих видов; так что у читателей с различной подготовкой будет возможность читать по отдельности те главы, предмет которых им знаком и которые им интересны.

Главы 2, 4, 5, 6, 12, 13 имеют дело с разными видами трехмерных многогранников. В главах 9, 10 и 11 рассматриваются бесконечные графы, к которым приводят паркеты $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ и решетки. В главы 3, 7, 11 рассматриваются графы в $\mathbb{R}^n$. И наконец, главы 2, 8 и 11 могут быть интересны для тех, кто работает в области математической химии и кристаллографии.

Авторы благодарны Марии Гриндель, Жаку Бейгбедеру и в особенности Маттье Дютуру за разнообразную помощь: по созданию иллюстраций, редактированию и вдохновлению.

Глава 1

Введение: Графы и их изометрические вложения со шкалой

В этой главе мы введем некоторые основные определения, относящиеся к графам, вложениям и многогранникам. Здесь мы представим только базовые понятия, дальнейшие определения будут приведены позднее. За более детальной информацией читатель может обратиться к книгам [Grün67], [Coxe73], [CoSl88], [DeLa97], [Crom97].

1.1. Графы

Простой граф $G = (V, E)$ состоит из множества V вершин и множества E ребер. Каждое ребро $e \in E$ представляет собой пару вершин u и v , которые мы называем его *концами*, при этом мы полагаем $e = (u, v)$. Такие две вершины называются *смежными*, и каждая из них *инцидентна* ребру e . *Степень вершины* $v \in V$ — это число ребер, содержащих v .

Если любые две вершины G смежны, то такой граф называется *полным*. Полный граф с n вершинами обозначается K_n . Если у графа нет ребер, то он называется *пустым*. Для $U \subseteq V$ обозначим E_U множество ребер, оба конца которых принадлежат U . Тогда граф $G_U := (U, E_U)$ называется *подграфом графа* G , *индуцированным* U .

Граф G называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на две непустые части,

$$V = V_1 \cup V_2,$$

таким образом, что оба графа, индуцированные V_1 и V_2 , пусты. Если граф G — двудольный с биразбиением (V_1, V_2) и если каждая вершина V_1 смежна каждой вершине V_2 , то G называется *полным двудольным* графом. Обозначим $K_{m,n}$ полный двудольный граф, если $|V_1| = n$ и $|V_2| = m$. Полный двудольный граф $K_{1,m}$ ($m \geq 1$) называется *звездой*.

Множество E' ребер называется *паросочетанием*, если ни у какой пары ребер из E' нет общих вершин. Паросочетание называется *совершенным*, если каждая вершина является концом этого паросочетания. (Только у графов с четным числом вершин могут быть совершенные паросочетания.)

В этой книге мы часто будем использовать такие графы:

Многодольный граф $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, множество вершин которого можно разбить на k частей, состоящих из $n_1, n_2, \dots, n_k$ вершин соответственно, причем концы каждого ребра принадлежат разным частям. Примером может служить полный двудольный граф $K_{m,n}$ ($k = 2$).

Путь $P_n = P_{\{v_1, v_2, \dots, v_n\}}$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и с ребрами (v_i, v_{i+1}) при $1 \leq i \leq n-1$.

Цикл $C_n = C_{\{v_1, v_2, \dots, v_n\}}$ (или *n -угольник*) получается из пути $P_n = P_{\{v_1, v_2, \dots, v_n\}}$ добавлением ребра (v_1, v_n) .

Граф гиперкуба H_n с множеством вершин $V = \{0, 1\}^n$, ребра которого — пары векторов $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ из $\{0, 1\}^n$ такие, что $|\{i : x_i \neq y_i\}| = 1$.

Граф полукуба $(1/2)H_n$ с множеством вершин

$$V = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n x_i \text{ четно} \right\}$$

(в *четных* представлениях, и $\sum_{i=1}^n x_i$ нечетно в *нечетных* представлениях), ребра которого — это такие пары $x, y \in \{0, 1\}^n$, что $|\{i : x_i \neq y_i\}| = 2$.

Граф кубической решетки Z_n — бесконечный граф с множеством вершин

$$\mathbb{Z}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}\}$$

и с ребрами $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$ такими, что

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = 1.$$

Граф полукубической решетки $\frac{1}{2}Z_n$ — бесконечный граф с множеством вершин

$$V = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^n x_i \text{ четно} \right\},$$

ребра которого — это пары векторов $x, y \in V$ такие, что

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = 2.$$

(У графа $\frac{1}{2}Z_n$ то же самое множество вершин, что и у решетки корней D_n ; см. гл. 11).

Граф вечеринки $K_{n \times 2}$ получается из полного графа K_{2n} удалением ребер совершенного паросочетания.

Имеются изоморфизмы среди таких графов:

$$K_{2,2} = C_4 = H_2 = K_{2 \times 2}, \quad K_2 = P_2 = \frac{1}{2}H_2, \\ \frac{1}{2}H_3 = K_4, \quad \frac{1}{2}H_4 = K_{3 \times 2}.$$

В обозначениях Коксетера α_n , β_n , γ_n и $\frac{1}{2}\gamma_n$ обозначают соответственно следующие n -мерные выпуклые многогранники: правильный n -симплекс, n -ортаэдр, n -куб и n -полукуб. Им соответствуют графы 1-остовов (см. раздел 1.4 ниже) K_{n+1} , $K_{n \times 2}$, H_n и $\frac{1}{2}H_n$.

Граф G называется *связным*, если для любых двух вершин u , v из G имеется путь в G , связывающий u и v . Если это не так, то граф называется *несвязным*.

Пусть заданы два графа

$$G_1 = (V_1, E_1) \quad \text{и} \quad G_2 = (V_2, E_2).$$

Их *прямым произведением* $G_1 \times G_2$ называется граф $G := (V_1 \times V_2, E)$ с множеством вершин

$$V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) : v_1 \in V_1 \text{ и } v_2 \in V_2\},$$

ребра которого — это пары $((u_1, u_2), (v_1, v_2))$, где $u_1, v_1 \in V_1$ и $u_2, v_2 \in V_2$, так что либо $(u_1, v_1) \in E_1$ и $u_2 = v_2$ либо $(u_2, v_2) \in E_2$ и $u_1 = v_1$.

Надстройкой ∇G графа G называется граф, полученный из G добавлением новой вершины (называемой *отмеченной точкой* ∇G), соединенной со всеми вершинами G . Графы ∇C_n и $C_n \times K_2$ называются *n -колесом* и *n -призмой* соответственно.

Реберным графом $L(G)$ графа G называется граф, вершинами которого служат ребра графа G . Причем две вершины $L(G)$ смежны в $L(G)$, если у соответствующих ребер в G есть общая вершина. Для $L(K_n)$ мы используем обозначение $T(n)$. Этот граф представляет собой специальный случай графа Джонсона $J(n, k)$, соответствующий $k = 2$. Множеством вершин *графа Джонсона* $J(n, k)$ служит семейство всех k -элементных подмножеств множества из n элементов. Две вершины графа $J(n, k)$ смежны, если и только если мощность пересечения соответствующих k -элементных подмножеств равна $k - 1$. В частности, $J(n, 1) = K_n$.

1.2. Вложения графов

Прежде чем напомнить некоторые понятия метрик, связанных с графами, мы коротко обсудим важность такого вложения. Граф G может быть *изометрически вложен* в *полукуб* $\frac{1}{2}H_m$, если мы можем

пометить или занумеровать вершины G строками длины m из нулей и единиц с четным числом единиц так, что квадрат евклидового расстояния между двумя такими строками вдвое больше длины пути, соединяющего вершины в графе G .

Кроме того, вложение называется ℓ_1 -жестким, если такой способ нумерации единственный. Такое помечивание вершин может быть очень полезно в химии для перечисления фуллеренов (см. гл. 2), а так же для вычисления молекулярных параметров, зависящих только от расстояний в графах, таких как индексы Винера J , и другие (см., например, [BLKBSSR95]).

Полуметрикой на множестве V называется действительная симметрическая функция $d(x, y)$, определенная на всех парах точек $x, y \in V$, удовлетворяющая уравнению $d(x, x) = 0$, а для всех упорядоченных троек (x, y, z) точек множества V — следующему *неравенству треугольника*:

$$d(x, y) + d(y, z) - d(x, z) \geq 0.$$

Просуммировав два таких неравенства для троек (x, y, z) и (x, z, y) , мы получим неравенство $2d(y, z) \geq 0$. Следовательно, любая полуметрика d *неотрицательна*, то есть принимает только неотрицательные значения. *Метрикой* называется *положительная* полуметрика, то есть такая, что $d(x, y) = 0$ если и только если $x = y$.

Пусть $G = (V, E)$ — связный граф (конечный или нет), а V и E — множества его вершин и ребер соответственно. Определим *метрику кратчайшего пути* d_G ассоциированную с графом G , как метрику с целыми значениями на парах вершин графа G , такую, что для двух вершин v и u величина $d_G(v, u)$ равна длине кратчайшего пути в G , соединяющего v и u , где длины пути измеряются числом его ребер.

Сумма всех $n(n-1)/2$ расстояний между вершинами n -вершинного графа G обозначается $W(G)$. Химики называют его *числом Винера*.

Связный подграф G_1 графа G называется *изометрическим подграфом* G , если $d_G = d_{G_1}$ на вершинах G_1 , то есть если расстояния из G сохраняются в G_1 . В таком случае записывают $G_1 \prec G$.

Геодезической в G называется простой путь P (возможно, бесконечный в одном или двух направлениях), обладающий тем свойством, что $d_P(x, y) = d_G(x, y)$ для всех $x, y \in P$. Длина максимальной геодезической в G называется его *диаметром* $d(G)$.

Метрика d_G позволяет нам ввести выпуклые подмножества на V . Подмножество $S \subseteq V$ называется *выпуклым подмножеством*, если для любых вершин $u, v \in S$ все вершины каждого кратчайшего (u, v) -пути (то есть геодизической соединяющей u и v) принадлежат S .

Множество $\mathbb{Z}^n$ естественным образом снабжено ℓ_1 -метрикой. А именно, для $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ из $\mathbb{Z}^n$, ℓ_1 -расстояние между x и y выражается как

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Z_n — это граф множества $\mathbb{Z}^n$, метрика кратчайшего пути которого совпадает с ℓ_1 -метрикой d . Аналогично, граф гиперкуба H_n — это подграф Z_n , индуцированный $\{0, 1\}^n$. (Метрика кратчайшего пути d_{H_n} — является также квадратом евклидовой ℓ_2 -метрики.)

ℓ_1 -*граф* — это такой граф G , метрика кратчайшего пути d_G которого с точностью до шкалы λ изометрически вложима в гиперкуб H_m , или, если G бесконечен, — в Z_m . Другими словами, для некоторых $\lambda, m \in \mathbb{N}$ существует отображение $\phi: V \rightarrow H_m$ или Z_m такое, что

$$\lambda \cdot d_G(v_i, v_j) = \|\phi(v_i) - \phi(v_j)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^m |\phi_k(v_i) - \phi_k(v_j)|,$$

где $v_i \in V$ и $\phi(v_i) = (\phi_1(v_i), \dots, \phi_m(v_i)) \in H_m$ или Z_m . Наименьшее целое λ называется *минимальной шкалой* вложения.

Например, граф полукуба $\frac{1}{2}H_n$ и граф полукубической решетки естественно вкладываются соответственно в H_n и Z_n со шкалой $\lambda = 2$. Следовательно, $\frac{1}{2}H_n$ и $\frac{1}{2}Z_n$ суть ℓ_1 -графы.

Напомним, что 2^m вершин m -куба H_m можно пометить с помощью всех 2^m подмножеств множества $\{1, 2, \dots, m\}$, так что две вершины с метками A и B смежны если и только если $|A \Delta B| = 1$, где $A \Delta B$ — симметрическая разность множеств A и B . Следовательно, существование вложения $\phi: V \rightarrow H_m$ со шкалой λ эквивалентно помечиванию каждой вершины $v \in V(G)$ с помощью множества $\phi(v)$ таким образом, что вершины v и u смежны если и только если $|\phi(v) \Delta \phi(u)| = \lambda$. С другой стороны, такой способ помечивания порождает помечивание *ребер* (v, u) с помощью множеств $\phi(v) \Delta \phi(u)$. Для $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ назовем i -*зоной* или просто *зоной* множество ребер, метки которых содержат i . Оба такие помечивания вершин и ребер G используются, например, в рисунках гл. 2.

Если G вложен в гиперкуб, то любое разбиение H_m на противоположные фасеты порождает разбиение $S \cup \bar{S} = V$ множества вершин G . Такое разбиение $S \cup \bar{S} = V$ называется *разрезом* $\{S, \bar{S}\}$. Множество ребер $E(S, \bar{S})$ разреза $\{S, \bar{S}\}$ состоит из ребер, один конец которых принадлежит S , а другой — $\bar{S}$. Очевидно, что удалив $E(S, \bar{S})$ из G , мы получим граф по крайней мере с двумя, связными компонентами;

другими словами, $E(S, \bar{S})$ — разрезное множество ребер. Ребра множества $E(S, \bar{S})$ *разрезаны* разрезом $\{S, \bar{S}\}$.

Разрез $\{S, \bar{S}\}$ определяет *разрезную полуметрику* $\delta(S)$ на множестве V :

$$\delta(S)(i, j) = \delta_{\{S, \bar{S}\}}(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i, j \in S \text{ или } i, j \in \bar{S}, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Спроектируем гиперкуб H_m с вложенным графом G вдоль ребер, соединяющих две противоположные фасеты. Тогда мы получим вложение G в H_{m-1} , причем некоторые расстояния из G уменьшатся на единицу. Другими словами, мы вкладываем G с новой полуметрикой $d_G - \delta(S)$.

Таким образом мы получаем разложение метрики кратчайшего пути d_G некоторого ℓ_1 -вложимого графа G (на самом деле, любой ℓ_1 -метрики) в неотрицательную линейную комбинацию разрезных полуметрик.

Все ℓ_1 -полуметрики на n вершинах (т. е. все ℓ_1 -полуметрические пространства (V_n, d) , для которых $|V_n| = n$), рассматриваемые как точки некоторого $\binom{n}{2}$ -мерного пространства, образуют $\binom{n}{2}$ -мерный конус, который называется *разрезным конусом*. Он порождается $2^{n-1} - 1$ крайними лучами. Каждый такой луч — это ненулевая разрезная полуметрика $\delta(S)$ для некоторого собственного подмножества S множества $V_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Другими словами, граф G (или произвольная метрика) ℓ_1 -вложим если и только если метрика кратчайшего пути является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами разрезных полуметрик

$$d_G = \sum_{S \subset V_n} a_S \delta(S), \quad \text{где } a_S \geq 0 \text{ для всех } S.$$

Если G вложим в H_m со шкалой λ , то тогда описанное выше разложение можно переписать следующим образом:

$$\lambda d_G = \sum_{S \subset V_n} a_S \delta(S), \quad \text{где } a_S \geq 0 \text{ целые для всех } S. \quad (1.1)$$

У формулы (1.1) есть то преимущество, что она позволяет классифицировать ℓ_1 -вложения G с точностью до эквивалентности: разные решения (1.1) с целыми неотрицательными a_S такими, что

$$\text{НОД}(\lambda, a_S) = 1,$$

соответствуют разным вложениям. Если такое решение единственно, то граф G называется ℓ_1 -*жестким графом* (см. [DeLa94]).

Жесткость произвольной ℓ_1 -метрики определяется аналогично. Говоря в терминах разрезного конуса, метрика ℓ_1 -жесткая, если и только если она принадлежит грани разрезного конуса, которая является симплицальным подконусом.

Если G есть ℓ_1 -граф, то для каждого разреза $\{S, \bar{S}\}$ возникающего в ℓ_1 -разложении d_G (другими словами, когда $a_S > 0$), оба множества S и $\bar{S}$ выпуклы. Такой разрез мы называем *выпуклым разрезом*. Следующий факт был установлен в [DeTu96].

Предположение 1.1 [DeTu96]. *Граф G вложим со шкалой λ в гиперкуб, если и только если существует полный набор $\mathcal{C}(G)$ (не обязательно различных) выпуклых разрезов G такой, что каждое ребро G разрезано ровно λ разрезами из $\mathcal{C}(G)$.*

При $\lambda = 1$ это представляет собой хорошо известную характеризацию Дьюковича ([Djok73]) графов, изометрически вложимых в гиперкубы.

Лемма 1.1 [CDG97]. *Любой ℓ_1 -граф, не содержащий K_4 , является ℓ_1 -жестким.*

Мы говорим, что полиэдр P является ℓ_1 -вложимым, если его *остов* $G(P)$ (то есть граф, образованный его вершинами и ребрами) — это ℓ_1 -граф. Граф G называется *графом многогранника*, если найдется многогранник P (возможно, бесконечный), для которого $G(P) = G$.

При вложении метрики d в m -куб со шкалой λ отношение

$$s(d) = \frac{m}{\lambda}$$

называется *размером* вложения. Для графа G с n вершинами имеются следующие верхняя и нижняя границы для размера $s(d_G)$ (см. [DeLa97], с. 45):

$$\frac{W(G)}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \leq s(d_G) \leq \frac{W(G)}{n-1}. \quad (1.2)$$

Напомним, что здесь

$$W(G) = \sum_{i,j \in V} d_G(i, j).$$

Когда в левой части неравенства (1.2) имеет место равенство, мы говорим, что G — *эквиразрезный граф*. Это означает, что для такого графа каждое подмножество S в формуле eq11 удовлетворяет условию $a_S \neq 0$ если и только если S разбивает V на части размера $\lfloor n/2 \rfloor$ и $\lfloor n/2 \rfloor$, где $n = |V|$.

С другой стороны, правое из неравенств (1.2) обращается в равенство в очень частном случае.

Лемма 1.2.

$$s(d_G) = \frac{W(G)}{n-1} \quad \text{если и только если } G \text{ — звезда } K_{1,n-1}.$$

В качестве примера рассмотрим вложение n -симплекса α_n , для которого $G(\alpha_n) = K_{n+1}$. Любой симплекс α_n при $n \geq 3$ не является ℓ_1 -жестким, то есть допускает по крайней мере два различных вложения. Мы приведем три вложения α_n со шкалой λ в m -кубы H_m , которые осуществляют соответственно максимальное, минимальное и среднее (при $n > 4$) значения размера m/λ . Для симплекса α_n границы (1.2) принимают вид

$$s_n := \frac{n(n+1)}{2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} \leq s(\alpha_n) \leq \frac{n+1}{2} < \frac{n(n+1)}{2(n-1)} = \frac{W(K_{n+1})}{n-1}.$$

Левое соотношение можно записать как

$$s_n = 2 - \frac{1}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}, \quad \text{то есть } s_n = \frac{2n}{n+1}$$

для нечетных n , и $s_n = \frac{2(n+1)}{n+2}$ для четных n .

Верхняя граница достигается при таком вложении $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}$, когда вершины α_n отображаются в вершины x полукуба $\frac{1}{2}H_{n+1}$, для которых $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$ (в нечетных представлениях $\frac{1}{2}H_{n+1}$).

К среднему (для $n > 4$) размеру приводит следующее построение. Возьмем множество всех $n(n+1)/2$ ребер (ij) , $1 \leq i < j \leq n+1$ графа K_{n+1} в качестве множества индексов (координат) V гиперкуба $H_m \subset \mathbb{R}^V$, то есть $m = n(n+1)/2$. Отобразим вершину i симплекса α_n (то есть вершин K_{n+1}) в подмножество

$$V_i = \{(ij) : 1 \leq j \leq n+1, j \neq i\} \subset V.$$

Тогда $|V_i \Delta V_j| = 2(n-1)$ и есть шкала λ . В этом случае

$$s(\alpha_n) = \frac{n(n+1)}{4(n-1)}.$$

При $n = 4$ это дает $s(\alpha_4) = s_4 = \frac{5}{3}$, то есть нижнюю границу для $n = 4$.

Определим λ_n как наименьшее положительное четное число t такое, что ts_n — целое. Тогда существует вложение α_n в $\lambda_n s_n$ -куб со шкалой λ_n , реализующее наименьшую границу s_n . Это эквиразрезное вложение (ср. с п. (i) теоремы 1.1, ниже).

Любой ортаэдр β_n при $n \geq 4$ тоже не является ℓ_1 -жестким. Все вложения β_n осуществляются в 2λ -куб с такой четной шкалой λ , что

α_{n-1} вложим в m -куб, $m \leq 2\lambda$, со шкалой λ . Для минимальной такой шкалы, обозначим ее μ_n , известно следующее утверждение. Выполняется двойное неравенство

$$n > \mu_n \geq 2 \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$$

с равенством для нижней границы при любом $n \leq 80$, и, если $n > 80$, то равенство справедливо, если и только если существует матрица Адамара порядка n . В частности, β_3 и β_4 вложимы в $\frac{1}{2}H_4$ (фактически, $G(\beta_4) = \frac{1}{2}H_4$, но имеется два вложения β_4 в $\frac{1}{2}H_4$), а β_5 вложимо лишь со шкалой четыре (в H_8).

Размер $s(d_G)$ обладает следующими свойствами, которые мы сформулируем в терминах $n = |V|$.

Теорема 1.1 [DePa01]. Пусть G — ℓ_1 -граф.

- (i) $s(d_G) = s_{n-1} = 2 - \frac{1}{\lceil n/2 \rceil}$ если и только если $G = K_n$;
- (ii) $s(d_G) = 2$ если и только если G не является полным подграфом, графа вечеринки $K_{n \times 2}$;
- (iii) $s(d_G) = n - 1$ если и только если G — дерево;
- (iv) $2 < s(d_G) < n - 1$ в остальных случаях.

Ясно, что вложимость в H_m со шкалой λ влечет вложимость в $\frac{1}{2}H_m$ со шкалой 2λ . Более того, для любого графа G , который вложим в гиперкуб со шкалой λ , имеем:

- (i) $\lambda = 1 \Leftrightarrow G$ — изометрический подграф гиперкуба; в таком случае мы пишем: $G \rightarrow H_m$.
- (ii) $\lambda = 1$ или $2 \Leftrightarrow G$ — изометрический подграф m -полукуба; в таком случае мы пишем: $G \rightarrow \frac{1}{2}H_m$.

Аналогично, для бесконечного графа G :

- (i) $\lambda = 1 \Leftrightarrow G$ — изометрический подграф кубической решетки; в таком случае мы пишем $G \rightarrow Z_m$.
- (ii) $\lambda = 1$ или $2 \Leftrightarrow G$ — изометрический подграф полукубической решетки; в таком случае мы пишем $G \rightarrow \frac{1}{2}Z_m$.

Лемма 1.3 [CDG97]. Шкала λ плоского ℓ_1 -графа равна либо единице, либо двум.

И наконец, мы напомним, что граф G называется *гиперметрическим* (за подробностями можно обратиться к [DeGr93]) если его

метрика кратчайшего пути d_G удовлетворяет каждому *гиперметрическому неравенству*, заданному в виде

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_G(v_i, v_j) \leq 0, \quad (1.3)$$

где

$$b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \in Z^n, \quad \sum_{i=1}^n b_i = 1,$$

а v_i при $1 \leq i \leq n$ — различные произвольные вершины G .

Заметим, что приведенное выше определение гиперметричности *локально*, поскольку в нем идет речь лишь о конечном множестве вершин. А *бесконечный* граф называется *гиперметрическим*, если каждый конечный его подграф гиперметричен.

Если

$$\sum_{i=1}^n |b_i| = 2k + 1,$$

то выписанное неравенство называется $(2k + 1)$ -гональным неравенством (см. [Deza60]), а граф, удовлетворяющий всем $(2q + 1)$ -гональным неравенствам для $q \leq k$, называется $(2k + 1)$ -гональным.

Ясно, что случай $k = 1$ соответствует обыкновенному неравенству треугольника. Ниже мы опишем случай $k = 2$, который соответствует 5-гональному неравенству. Оно представляет собой важное необходимое и во многих случаях достаточное (см. ниже) условие для вложения графов. А именно, при

$$b_a = b_b = b_c = 1, \quad b_x = b_y = -1$$

неравенство (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned} d(x, y) + (d(a, b) + d(a, c) + d(b, c)) &\leq \\ &\leq (d(x, a) + d(x, b) + d(x, c)) + (d(y, a) + d(y, b) + d(y, c)) \end{aligned} \quad (1.4)$$

для расстояний между любыми пятью вершинами a, b, c, x, y .

Используя приведенное выше определение разрезной полуметрики $\delta(S)$, нетрудно проверить, что

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j \delta(S)(i, j) = \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} b_i b_j = \left(\sum_{i \in S} b_i \right) \left(1 - \sum_{i \in S} b_i \right) \leq 0,$$

поскольку $\sum_{i \in S} b_i$ — целое число. В соответствии с разложением (1.1), отсюда следует, что любая ℓ_1 -полуметрика гиперметрична.

Для метрики кратчайшего пути графа G связи между свойствами этой метрики выражаются следующими импликациями:

$$\begin{aligned} G &\text{ — изометрический подграф гиперкуба } \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_G \text{ является } \ell_1\text{-жесткой } \Rightarrow \\ \Rightarrow G &\text{ — изометрический подграф полукуба } \Rightarrow \\ &\Rightarrow G \text{ является } \ell_1\text{-графом } \Rightarrow \\ \Rightarrow d_G &\text{ гиперметрична } \Rightarrow d_G - (2k + 1)\text{-гональная } \Rightarrow \\ \Rightarrow d_G &- (2k - 1)\text{-гональная } \Rightarrow d_G - 3\text{-гональная (= метрике)}. \end{aligned}$$

Напомним еще, что характеристика Дьоковича ℓ_1 -графов со шкалой $\lambda = 1$ может быть переформулирована (см. Авис, [Avis80]) следующим образом: граф является изометрическим подграфом гиперкуба, если и только если он двудольный и 5-гональный.

Вообще говоря, граф G является ℓ_1 -графом если и только если G — изометрический подграф прямого произведения графов вечеринок (то есть остовов многогранников, двойственных гиперкубам) и графов полукуба, см. [Shpe93] (другое доказательство приведено в [DeGr93]).

Что касается сложности: выяснение того, что некоторая метрика ℓ_1 -вложима (то есть изометрически вложима в ℓ_1^m), является NP -полной задачей (см. [Karz85]), а алгоритм, устанавливающий, что граф ℓ_1 -вложим, является полиномиальным (см. [DeSh96]). Общее исследование ℓ_1 метрик можно найти в [DeLa97].

1.3. Вложения плоских графов

Несмотря на то, что для установления ℓ_1 -вложимости графа требуется полиномиальный алгоритм, для произвольных планарных графов в [CDG97] был предложен более простой алгоритм. Он очень полезен, поскольку графы трехмерных многогранников и двумерных паркетов планарны. Доказательство всех предложений раздела 1.3 можно найти в [CDG97].

Напомним, что согласно лемме 1.3 шкала планарного ℓ_1 -графа G равна 1 или 2; она равна 1, если и только если G — двудольный граф. Согласно предложению 1.1, для того, чтобы найти ℓ_1 -вложение планарного графа, который не является двудольным, достаточно найти такой набор выпуклых разрезов, что любое ребро G разрезано в точности двумя разрезами из этого набора. Упомянутый выше алгоритм позволяет явно найти такой набор.

Пусть G есть планарный *локально* конечный граф (то есть степени всех его вершин конечны). Предположим, что задано плоское изображение G , то есть G — плоский граф. *Внутренней гранью* G называется цикл в G , который ограничивает простую односвязную область. Обозначим G^* плоский граф, двойственный к G . Будем считать, что задано плоское изображение G^* , так что вершины и ребра G^* соответствуют граням и ребрам G .

Обозначим $Z(S, \bar{S})$ семейство внутренних граней G , которые пересекает разрез $\{S, \bar{S}\}$. Мы будем говорить, что $Z(S, \bar{S})$ — *пояс* разреза $\{S, \bar{S}\}$. Определим $C(S, \bar{S})$ — частичный подграф G^* — следующим образом: вершинами $C(S, \bar{S})$ являются грани $Z(S, \bar{S})$, и две такие грани смежны в $C(S, \bar{S})$, если и только если у них есть общее ребро из $E(S, \bar{S})$.

Лемма 1.4. *Если $\{S, \bar{S}\}$ — выпуклый разрез и F — грань плоского графа G , то $|E(S, \bar{S}) \cap E(F)| = 0$ или 2. В частности, $C(S, \bar{S})$ — либо путь, либо цикл.*

С геометрической точки зрения лемма 1.4 утверждает, что если мы разрезаем плоскость вдоль $C(S, \bar{S})$, то, достигнув некоторой грани $Z(S, \bar{S})$, мы должны покинуть эту грань через какое-нибудь другое ребро, после чего уже больше никогда не придем к этой грани. В частности, у линии, вдоль которой идет разрез, нет самопересечений. Более того, множества $S \cap Z(S, \bar{S})$ и $\bar{S} \cap Z(S, \bar{S})$ являются либо путями, либо циклами. Обозначим их $bd(S)$ и $bd(\bar{S})$ и будем называть их *граничными линиями* разреза $\{S, \bar{S}\}$.

Теперь предположим, что планарный граф G вложен в евклидову плоскость, причем выполняется такое свойство:

- (а) *Граница любой внутренней грани — изометрический цикл графа G .*

(Хотя это свойство выглядит вполне естественно, можно построить планарные ℓ_1 -графы, для которых нельзя указать планарного вложения в плоскость, удовлетворяющего условию (а). Например, *книга*, то есть совокупность по крайней мере трех 4-циклов с общим ребром.)

Два ребра $e = (u, v)$ и $e' = (u', v')$ принадлежащие одной общей внутренней грани F , называются *противоположными*, если

$$d_G(u, u') = d_G(v, v')$$

и эти расстояния равны диаметру цикла F . Если F — *четная* грань (т.е. она ограничена циклом четной длины), то у каждого ее ребра есть только одно противоположное. Если же длина F нечетная,

то у каждого ребра $e \in E(F)$ есть два противоположных ребра e^+ и e^- . В последнем случае, если F ориентирована по часовой стрелке, для ребра e мы будем различать *левое противоположное ребро* e^+ и *правое противоположное ребро* e^- . Если каждая грань $Z(S, \bar{S})$ пересечена разрезом $\{S, \bar{S}\}$ по двум противоположным ребрам, то мы говорим, что $\{S, \bar{S}\}$ — *противоположный разрез* графа G .

Если выпуклый разрез $\{S, \bar{S}\}$ графа G входит во внутреннюю грань F через ребро e , то из выпуклости S и $\bar{S}$, а также из изометричности F следует, что $\{S, \bar{S}\}$ покидает F через ребро, противоположное e . Мы говорим, что разрез $\{S, \bar{S}\}$ — *прямой* на четной грани F , и что он *поворачивает* на нечетной грани F . Этот поворот может быть *правым* или *левым*, в зависимости от того, которое из противоположных ребер e^- или e^+ мы пересекаем.

Лемма 1.5. *В плоском графе с изометрическими гранями все выпуклые разрезы противоположны.*

Если G — плоский граф с изометрическими гранями только четной длины (т.е. если G — двудольный), то G является ℓ_1 -графом, если и только если каждый противоположный разрез — выпуклый. Это свойство очень полезно для проверки, является ли ℓ_1 -вложимым граф G или нет.

Противоположный разрез плоского графа G называется *альтернирующим разрезом*, если его повороты чередуются. Для многих важных плоских ℓ_1 -графов выпуклые разрезы, участвующие в ℓ_1 -разложении, оказываются альтернирующими. Следовательно, если G — двудольный граф, то альтернирующие разрезы — это в точности противоположные разрезы G . Согласно лемме 1.5, каждый выпуклый разрез двудольного графа G — альтернирующий.

Еще один класс плоских графов с этим свойством дает следующая лемма (мы говорим, что две внутренние грани *смежны*, если у них есть общее ребро).

Лемма 1.6. *Пусть G — плоский граф, в котором все внутренние грани ограничены изометрическими циклами нечетной длины. Если объединение границ каждой пары смежных граней — изометрический подграф G , то любой выпуклый разрез G является альтернирующим.*

Самый известный класс плоских графов, удовлетворяющий условиям леммы 1.6, — это *триангуляции* (то есть плоские графы, все внутренние грани которых представляют собой треугольники) без 4-клик. В [BaCh00] установлено, что всякая конечная триангуляция,

обладающая тем свойством, что степени всех вершин, не принадлежащих внешней грани, больше пяти, является ℓ_1 -вложимой. Более того, все такие графы ℓ_1 -жестки.

Из леммы 1.6 вытекает следующее свойство триангуляций:

Если триангуляция с остовом G не содержит K_4 в качестве индуцированного подграфа (то есть, если степени всех внутренних вершин не меньше 4), то любой выпуклый разрез графа G является альтернирующим.

Цикл C плоского графа G называется *альтернирующим* (или *лево-правым циклом*, или *путем Петри*, или *зигзагом*), если каждая грань G либо не пересекается с C , либо у нее есть в точности два общих последовательных ребра с этим циклом. Ясно, что любое ребро G покрывается ровно двумя циклами из семейства альтернирующих циклов G . Другими словами, у G есть двойное покрытие своими альтернирующими циклами.

Граф G^* , двойственный кубическому плоскому графу G , является плоской триангуляцией. Каждый альтернирующий *простой* цикл G соответствует альтернирующему разрезу G^* , и наоборот, каждый выпуклый альтернирующий разрез G^* определяет простой альтернирующий цикл G . Таким образом, мы получаем следующее необходимое условие вложимости G^* :

Если граф, двойственный к конечному плоскому кубическому графу G является ℓ_1 -вложимым, то все его альтернирующие циклы просты.

Но это условие недостаточно; например, у фуллеренов $C_{20a^2}(I_h)$ (см. гл. 2) есть в точности $6a$ альтернирующих циклов, длина каждого из них равна $10a$, и все они просты, однако двойственные им полиэдры вложимы только при $a = 1$ (икосаэдр).

Цикл C плоского *Эйлера* (то есть с четной степенью любой вершины) графа G называется *центральным* (или *прямым*) циклом, если входя в любую вершину, он покидает ее через противоположное ребро. Ясно, что любое ребро G покрывается только одним циклом из семейства центральных циклов G ; другими словами, множество ребер G разбивается его центральными циклами, т.е. G обладает покрытием своими центральными циклами.

Граф G^* , двойственный Эйлерову плоскому графу G , есть плоский двудольный граф. Каждый центральный простой цикл G соответствует противоположному разрезу G^* , и наоборот, каждый выпуклый противоположный разрез G^* определяет простой центральный кон-

Чтобы получить ℓ_1 -вложимость G , нам следует наложить следующее метрическое условие на граничные линии альтернирующих разрезов, построенных по нашему способу (к счастью, эти естественные требования легко проверяются во многих важных частных случаях):

(b) Любая граничная линия $bd(S)$ и $bd(\bar{S})$ любого альтернирующего разреза $\{S, \bar{S}\}$ является изометрическим циклом или геодезической.

Очевидно, из (b) следует условие (a).

Предположение 1.2. Если G — плоский граф, удовлетворяющий условию (b), тогда разрез $\{S, \bar{S}\}$ графа G альтернирующий, если и только если он выпуклый. Тогда G — жесткий ℓ_1 -граф.

Фактически, из леммы 1.6 и условия (b) мы получаем, что каждое ребро G пересечено в точности двумя альтернирующими разрезами. Согласно предложению 1.2 можно сделать вывод, что G вложим со шкалой два в гиперкуб. Поскольку любой выпуклый разрез G альтернирующий, мы заключаем, что это ℓ_1 -вложение G единственно.

Напомним, что конечный планарный граф G называется *внешнепланарным графом*, если существует вложение G в евклидову плоскость такое, что все вершины G принадлежат внешней грани. Применяя полученные результаты к внешнепланарным графам, мы получим

Предположение 1.3. Любой внешнепланарный граф является жестким ℓ_1 -графом.

Легко видеть, что каждый вложимый конечный плоский граф вкладывается в $H_{\frac{p}{2}+z}$, если он двудольный, и в $\frac{1}{2}H_{p+z}$ в противном случае. Здесь p — длина периметра, а z — число *замкнутых* (т.е. обладающих только неграничными ребрами) альтернирующих зон.

1.4. Типы регулярности многогранников и паркетов

В этой книге мы будем рассматривать ℓ_1 -вложения графов, т.е. $G(P)$ 1-остовов (реберных остовов) n -многогранников P (выпуклых). Кроме того, мы рассмотрим некоторые обобщения n -многогранников: невыпуклые n -многогранники, паркеты, соты и т.д. Многогранник P мы будем называть ℓ_1 -вложимым, если ℓ_1 -вложим его граф $G(P)$.

Выпуклый n -многогранник — это n -мерное компактное выпуклое подмножество евклидова n -пространства, образованное пересечением

конечного числа полупространств, см. [Grün76]. Пересечения размерности k n -многогранника с несущими плоскостями для $0 \leq k \leq n-1$ называются его *k -гранями*. В частности, при $k=0, 1$ и $n-1$, они есть его *вершины*, *ребра* и *фасеты* соответственно. n -многогранник называется *простым*, если у каждой из его вершин есть в точности n соседних вершин.

При $n=3$, мы будем иногда называть 3-многогранник *полиэдром*. Граф реберного остова полиэдра планарный. Полиэдр называется *k -эдром* если у него k фасет. Например, тетраэдр является 4-эдром, куб — 6-эдром, октаэдр — 8-эдром, додекаэдр — 12-эдром и икосаэдр — 20-эдром.

Полиэдр, все фасеты которого — *правильные* треугольники, называется *дельтаэдром*. Существует в точности восемь (выпуклых) дельтаэдров с правильными треугольными фасетами, среди них тетраэдр, октаэдр и икосаэдр.

Двойственным многогранником выпуклого n -многогранника P называется такой n -многогранник P^* , что k -границы P^* при $0 \leq k \leq n-1$ взаимнооднозначно соответствуют $(n-k-1)$ -границам P и соответствующие грани ортогональны. Планарные графы остовов двойственных полиэдров тоже двойственны.

Кроме того, мы будем рассматривать *невыпуклые n -многогранники*. Они являются компактными множествами с внутренними точками и имеют кусочно-линейную структуру границ. Они гомотетичны n -шару.

сотами называется бесконечное множество n -многогранников, которые плотно прилегают друг к другу, заполняя все n -пространство таким образом, что каждая фасета каждого многогранника принадлежит в точности одному из других многогранников; они называются *разбиением*, если все эти многогранники выпуклы.

Понятие вершинной фигуры очень важно для введения понятия правильности. *Вершинной фигурой* некоторого n -многогранника или, в более общем случае, разбиения или сот, называется выпуклая оболочка срединных точек всех ребер, инцидентных данной вершине.

Вершинная фигура n -многогранника представляет собой выпуклый $(n-1)$ -многогранник. Но вершинная фигура n -разбиения или n -сот может быть бесконечной и/или невыпуклой.

Правильность n -многогранника определяется индукцией по его размерности в предположении, что точка считается выпуклым правильным 0-многогранником.

Выпуклый n -многогранник называется *правильным*, если все его фасеты и вершинные фигуры — правильные $(n-1)$ -многогранники.

n -многогранником с правильными гранями называется такой n -многогранник, все фасеты которого — правильные $(n - 1)$ -многогранники. Все n -многогранники с правильными гранями известны.

Изогональным n -многогранником называется такой n -многогранник, группа симметрий которого транзитивна на вершинах.

Полуправильным n -многогранником называется изогональный n -многогранник с правильными гранями. Полуправильный 3-многогранник — то же самое, что и однородный полиэдр.

Чтобы ввести последнее понятие однородности, мы будем опираться на определение полуправильных 3-многогранников. При $n \geq 4$ изогональный n -многогранник называется *однородным*, если все его фасеты однородны. (Таким образом, при $n = 4$, фасеты являются полуправильными полиэдрами).

Квазиправильным n -многогранником называется полуправильный многогранник, группа симметрий которого транзитивна на ребрах.

Пять правильных полиэдров (Платоновых тела) и полуправильные полиэдры (13 Архимедовых тел, призмы, антипризмы) известны со времен античности. Архимедовы полиэдры и двойственные им (полиэдры Каталана) были переоткрыты в эпоху ренессанса, тогда же Кеплер [Kep1619] дал им современные имена. Мы приведем традиционные обозначения пяти Платоновых тел:

- симплекс α_3 = тетраэдр; он самодвойственен, $G(\alpha_3) = K_4$;
- куб γ_3 , $G(\gamma_3) = H_3$ и двойственный ему октаэдр β_3 , $G(\beta_3) = K_{3 \times 2}$;
- икосаэдр Ico и двойственный ему додекаэдр Do .

Мы будем обозначать $\frac{1}{2}\gamma_n$ выпуклую оболочку половины вершин n -куба γ_n такую, что ее остов образует граф $\frac{1}{2}H_n$. n -многогранник Джонсона $P_J(n)$ — это выпуклая оболочка вершин γ_{n+1} , лежащих в гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 2$. Его остовом $G(P_J(n))$ служит $J(n + 1, 2) = T(n + 1) = L(K_{n+1})$.

Точно так же, как и для графов, выполняются соотношения

$$\frac{1}{2}\gamma_2 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1, \quad P_J(2) = \alpha_2, \quad P_J(3) = \beta_3, \\ \frac{1}{2}\gamma_4 = \text{ВРуг}(P_J(3)) = \beta_4, \quad \frac{1}{2}\gamma_3 = \alpha_3.$$

Определение *бипирамиды* $\text{ВРуг}(P)$ см. ниже.

Кстати, $\left(\frac{1}{2}\gamma_m\right)^* = \alpha_3, \gamma_4$, при $m = 3, 4$ соответственно; если $m \geq 5$ граф $\left(\frac{1}{2}\gamma_m\right)^*$ содержит изометрический подграф $K_5 - K_3$ и поэтому не является 5-гональным.

Все правильные многогранники и многогранники с правильными гранями известны. При $n > 4$ можно перечислить все правильные n -многогранники таковы:

- n -симплекс α_n , для которого $G(\alpha_n) = K_{n+1}$,
- n -ортаэдр β_n , для которого $G(\beta_n) = K_{n \times 2}$,
- и n -куб γ_n , для которого $G(\gamma_n) = H_n$.

Над тем, чтобы найти все 92 многогранника с правильными гранями, работали многие авторы, в особенности Джонсон и Зальгаллер (см., например, [John66], [Zalg69], [Berm71], [KoSu92]). Наконец, в книге [BlBl91], был приведен полный список n -многогранников с правильными гранями.

Полуправильные n -многогранники были найдены Госсетом в 1897 году. Доказано (для $n = 4$ в [Мака88] и для произвольного n в [BlBl91]), что список Госсета полон (исторический обзор можно найти в [Сохе73] и [Grün67]). В дальнейшем мы часто будем использовать названия и номера 112 правильных и архимедовых полиэдров, а также полиэдров с правильными гранями из списка, который приведен в [Berm71]. Например, № 1—5 являются правильными полиэдрами. В [Berm71] и [Zalg69] полиэдры с правильными гранями описаны в виде объединения 28 базовых полиэдров $M_1 - M_{28}$.

1.5. Операции на многогранниках

Мы будем использовать некоторые операции, переводящие один многогранник в другой.

Прямое произведение. Прямым произведением n -многогранника P и m -многогранника P' называется $(n + m)$ -многогранник $P \times P'$, для которого $G(P \times P') = G(P) \times G(P')$. Иногда его называют еще *Декартовым произведением*.

Построение призмы. Призмой с основанием P называется многогранник $\text{Prism } P := \alpha_1 \times P$. Prism_n обозначает призму, основанием которой служит n -угольник, т.е. $\text{Prism}_n = \text{Prism}(C_n)$.

Вытягивание. Пусть C — простой контур в 3-многограннике (или, вообще говоря, в произвольном плоском графе) P . Вытягивание P вдоль C состоит в замене C кольцом 4-угольников. Вытягивание P вдоль контура C , ограничивающего грань, означает построение призмы с основанием на этой грани.

Усечение. Усечение (при вершине v) многогранника P отсекает вершину v . Другими словами, вершина v многогранника P заме-

няется фасетой, которая является вершинной фигурой P . Многогранник P называется *усеченным* и обозначается как $\text{tr}(P)$, если все вершины P усечены. В большинстве случаев мы можем осуществить усечение на расстоянии $1/3$ длины ребра от вершины.

Каппинг. Эта операция в каком-то смысле обратна усечению. *Каппинг* многогранника P на его фасете F состоит в добавлении новой вершины v к P таким образом, что эта вершина v смежна со всеми вершинами F . t -каппингованный многогранник P получается каппингом на t различных фасетах $P^{(1)}$.

Построение пирамиды. Выпуклая оболочка n -многогранника P и некоторой вершины v , не лежащей в пространстве, натянутом на P , называется *пирамидой* над P (с вершиной v) и обозначается $\text{Pyr}(P)$. Мы полагаем $\text{Pyr}_n = \text{Pyr}(C_n)$. Мы обозначаем $\text{Pyr}^t(P)$ результат t -кратного последовательного применения операции построения пирамиды. Ясно, что $G(\text{Pyr}^t(P)) = \nabla^t G(P)$.

$\text{VPyr}(P)$ обозначает $(n+1)$ -*бипирамиду*, основанием которой служит n -многогранник P . У нее две вершины, которые противоположны относительно гиперплоскости, натянутой на P . $G(\text{VPyr}(P))$ — это $\nabla^2 G(P) - e$, где e — ребро, соединяющее две отмеченные вершины $\nabla^2 G(P)$. Мы полагаем $\text{VPyr}_n = \text{VPyr}(C_n)$.

Шамферинг. Эта операция применима только к 3-многогранникам. *Шамферинг* полиэдра P — это полиэдр, обозначаемый $\text{Cham}(P)$, который получается построением призм на всех фасетах P и удалением первоначальных ребер. t -кратный шамферинг обозначается $\text{Cham}_t(P)$ (см. также конец гл. 5)²⁾.

Амбо-операция. Выпуклая оболочка срединных точек всех ребер P называется его *амбо-многогранником* и обозначается $\text{Ambo}(P)$. Мы ограничимся только теми случаями, когда срединные точки ребер, инцидентные любой заданной вершине лежат в одной плоскости. Если P — полиэдр, то степень каждой вершины полиэдра $\text{Ambo}(P)$ равна четырем. Это обусловлено тем, что каждое ребро P инцидентно двум граням, и в каждой грани ребро смежно двум ребрам. Остов $\text{Ambo}(P)$ называется еще *медиальным графом* остова P . Остов $\text{Ambo}(P)$ — линейный граф остова P , если последний является простым полиэдром. Ясно, что $\text{Ambo}(\alpha_3) = \beta_3$, $\text{Ambo}(\beta_4) = 24$ -ячейка.

¹⁾От англ. *cap* — шапка; операция каппинга состоит в том, что на фасету P «надевается шапочка». — Прим. перев.

²⁾Так на французский манер произносится английское слово *chamfering*, которое обозначает снятие фаски, стесывание. — Прим. перев.

1.6. Разбиения Вороного и Делоне

Конечное или бесконечное множество X точек $\mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если существует положительное число r такое, что шар радиуса r с центром в некоторой точке X не содержит других точек X .

n -мерная *точечная решетка* — особый вид бесконечного дискретного множества в $\mathbb{R}^n$. Она представляет собой множество концевых точек векторов $\sum_{i=1}^n z_i b_i$, где векторы b_i линейно независимы, и $z_i \in \mathbb{Z}$ для всех i .

Любое дискретное множество точек X определяет два разбиения (паркета) $\mathbb{R}^n$ многогранниками *Вороного* и *Делоне*. Вороной, который и разработал эту теорию (для решеток) в своих последних двух работах, назвал их *M*- и *L*-многогранниками соответственно. Для каждой решетки имеется в точности один аффинный тип многогранников Вороного и конечное число типов многогранников Делоне.

Каждый многогранник Вороного $P(x)$ связан с некоторой точкой $x \in X$ такой, что $P(x)$ представляет собой множество всех точек $\mathbb{R}^n$, которые отстоят от x не дальше, чем от любой другой точки X . Мы будем обозначать $\text{Vo}(X)$ остовный граф разбиения Вороного. В частности, для решетки L , $\text{Vo}(L)$ — остов разбиения Вороного, определенного решеткой L .

Разбиение Делоне двойственно разбиению Вороного (и в комбинаторном и в метрическом смысле). Его можно получить, используя *метод Делоне пустой сферы*. Возьмем точку $y \notin X$ в качестве центра сферы S_y , не содержащей точек X . Затем будем увеличивать радиус S_y до тех пор, пока точка $x \in X$ не достигнет S_y . После чего будем перемещать центр y так, чтобы можно было еще увеличить радиус S_y , оставляя x на S_y , до тех пор пока еще одна точка $x' \in X$ не достигнет S_y . Продолжая, мы получим (локально максимальную) *пустую* (то есть не содержащую точек решетки L внутри) сферу S_y , с $(n+1)$ аффинно независимыми точками множества X на S_y . Выпуклая оболочка всех точек X , лежащих на S_y , называется многогранником Делоне P_D разбиения Делоне. Не исключен случай, когда радиус S_y бесконечен.

Обозначим $\text{De}(X)$ остовный граф разбиения Делоне. В частности, для решетки L , $\text{De}(L)$ — остов разбиения Делоне этой решетки L . Ребра $\text{De}(L)$ являются минимальными векторами простых смежности классов $L/2L$. Напомним, что если L — решетка корней D_n , то у графов $\text{De}(D_n)$ и $\frac{1}{2}Z_n$ одинаковые множества вершин, но сами графы различны.

1.7. Бесконечные графы

Вначале мы дадим пример такой последовательности графов многогранников, что все они вложимы с возрастающими шкалами, в то время как предельный граф не является вложимым. Рассмотрим i точек a_j , $1 \leq j \leq i$ на координатной оси, с положительными целыми координатами j . Будем считать любую пару соседних точек a_{j-1} , a_j антиподальными вершинами ортаэдра β_{m_j} размерности $m_j := 2^j$, такого, что у β_{m_j} есть общие вершины только с $\beta_{m_{j-1}}$ (а именно, a_{j-1}) и $\beta_{m_{j+1}}$ (а именно, a_j). Обозначим W_i граф, полученный таким присоединением i остовов ортаэдров. Ясно, что β_{m_i} и W_i вложимы в Z_{m_i} со шкалой

$$\lambda_i = \frac{m_i}{2} = 2^{i-1}.$$

Обозначим W_∞ предел W_i при $i \rightarrow \infty$. Тогда $\lambda_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$; итак, W_∞ не может быть вложимым с конечной шкалой даже в Z_∞ .

Теперь (следуя [DeSt02a]) мы рассмотрим кубические комплексы, и в частности, введем *бесконечномерный куб*.

В [Novi86] Новиков предложил изучить *кубические* комплексы, то есть такие, которые состоят из кубов разных размерностей (а не из симплексов). Простейшим примером кубического комплекса служит евклидов куб произвольной размерности (с гранями всех размерностей). Другой пример кубического комплекса — это обычная кубическая решетка, представляющая разбиение евклидова n -пространства на n -кубы, соприкасающиеся фасета к фасете. Этот комплекс состоит из счетного числа кубов конечной размерности. Каждая точка комплекса принадлежит только одному кубу, если она внутренняя, и конечному числу кубов, если она граничная.

Построим теперь третий пример кубического комплекса. Пусть $\mathcal{E}_\infty = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k, \dots)$ — предел при $n \rightarrow \infty$ ортонормальных систем координат $\mathcal{E}_n = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. Возьмем k произвольных целых чисел $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ из $\mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, и построим на соответствующих k векторах $\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}$ из $\mathcal{E}_\infty$ замкнутый куб $I^k(O, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$. Начало координат O будет одной из его вершин. Возьмем объединение всех таких кубов

$$\cup_{i_1 < i_2 < \dots < i_k; i_j \in \mathbb{N}, j=1,2,\dots,k; k \in \mathbb{N}} I^k(O, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}).$$

Семейство кубов этого объединения, включающее грани всех размерностей, составляет бесконечномерный кубический комплекс. Действительно, сразу ясно, что каждый куб семейства — либо куб вида $I^k(O, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$, либо его грань. Поэтому каждая грань куба I^k является кубом семейства. Кроме того, очевидно, что любые два

куба семейства — грани куба вида $I^k(O, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$. А значит, их пересечение — тоже один из кубов семейства.

Поскольку каждый куб вида $I^k(O, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$ является k -мерной гранью n -мерного куба $I^n(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, где n не меньше максимального индекса i_k , наше семейство допускает более простую запись $\cup_{n \in \mathbb{N}} I^n$. Здесь I^n — просто краткое обозначение куба $I^n(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. Поскольку $I^1 \subset I^2 \subset \dots \subset I^n \subset \dots$, наш кубический комплекс можно рассматривать как семейство граней всех размерностей куба I^n , увеличивающегося бесконечно при бесконечном росте n . Размерности кубов, составляющих комплекс, конечны, но верхней границы для всех этих размерностей не существует. Поэтому этот комплекс не может быть конечномерным.

Этот кубический комплекс определяет многогранник бесконечной размерности, будем обозначать его W . Тело многогранника W представляет собой объединение всех открытых кубов комплекса; он незамкнут. Фактически, у бесконечной последовательности точек

$$M_i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i+1}}, 0, 0, \dots \right),$$

каждая из которых принадлежит многограннику W , есть предельная точка

$$M_\infty = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i+1}}, \dots \right),$$

когда $i \rightarrow \infty$. Точка M_∞ не принадлежит W , так как она не принадлежит никакому конечномерному кубу I^n описанного выше объединения. (Многогранник W — это собственное подмножество *куба Тихонова* I^τ , который есть топологическое произведение τ копий единичного интервала действительной оси, мощности $\tau = \aleph_0$. Этот частный случай куба Тихонова гомеоморфен *кубу Гильберта*, то есть подпространству гильбертова пространства l_2 , состоящему из всех точек $x = (x_1, x_2, \dots)$, для которых $0 \leq x_n \leq 1$, $n \geq 1$. Реберный остов многогранника W , рассматриваемый как граф, представляет собой максимальную связную компоненту реберного остова куба I^∞ счетной размерности.)

Мы рассматриваем множество точек, координаты которых в базисе $\mathcal{E}_\infty$ равны 0 и 1, и число единиц конечно. Это не все точки с такими координатами. Этому множеству принадлежат лишь точки, которые можно достичь из начала координат O (или из любой другой точки множества) по некоторому конечному кратчайшему пути, ребра которого — единичные векторы в базисе $\mathcal{E}_\infty$. Эти точки (и только они) являются вершинами многогранника W . Расстояние между точками $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots)$ и $z = (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots)$ многогранника W

(в частности, между вершинами W) задается формулой

$$\rho(y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - z_k|.$$

Для любой пары точек (y, z) многогранника W эта сумма содержит бесконечно много членов, но лишь конечное их число отлично от нуля (они равны 1 в случае вершин). Следовательно, на самом деле расстояние вычисляется по конечной формуле. Мы обозначим $\mathcal{H}^\infty$ граф, индуцированный множеством вершин многогранника W . (Метрическое пространство $\mathcal{H}^\infty$ — это особый предел бесконечной последовательности метрических пространств $\mathcal{H}^n$ при $n \rightarrow \infty$. Оно содержит все $\mathcal{H}^n$, $n \in \mathbf{N}$. Оказывается, что это пространство $\mathcal{H}^\infty$ — универсальный носитель графических метрик всех графов, вложимых в гиперкубы и кубические решетки.)

Поскольку у каждого конечного множества вершин *бесконечномерного куба* I^∞ есть лишь конечное число координат, равных 1 (и бесконечно много нулевых координат), оно принадлежит конечномерному кубу. Поэтому такое конечное множество вершин удовлетворяет каждому гиперметрическому неравенству. Это позволяет нам сформулировать

Предположение 1.4. *Метрическое пространство $\mathcal{H}^\infty$ гиперметрично.*

Теперь мы хотим доказать, что метрическое пространство $\mathcal{Z}^n$ тоже гиперметрично.

Очевидно, простой путь P_n длины $n - 1$ изометрически вложим в остов n -мерного куба. Любое же вложение пути P_n в куб размерности, меньшей чем n , изометрическим быть не может. На самом деле, если P_n вложим в H_k при $k < n$, то существуют два параллельных ребра во вложенном P_n . Подпуть, состоящий из любых двух ближайших параллельных ребер и всех ребер между ними составляет путь вида $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_1$. Только крайние векторы в этой сумме коллинеарны. Эти коллинеарные векторы должны быть противоположно направлены, поскольку в противном случае путь не может принадлежать одному кубу. Кратчайший путь в кубе между конечными точками описанного пути представляет собой $\mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_k$. Он на 2 звена короче начального пути, и значит, вложение не изометрично.

Но в то время как реберный путь длины n может быть изометрично вложен в конечный куб H_n , реберный луч (то есть реберный путь из бесконечного числа ребер) нельзя изометрически вложить ни в какой конечномерный куб. Реберный луч изометрически вкладывается лишь в бесконечномерный куб $\mathcal{H}_\infty$.

Эти рассуждения пригодятся нам при изучении n -мерной кубической решетки. Пусть ортонормальный базис $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ в $\mathbb{R}^n$ — базис n -мерной кубической решетки. Распишем этот базис до счетного ортонормального базиса $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \dots)$, который мы будем считать базисом бесконечномерного куба.

В n -мерной решетке имеются $2n$ лучей, которые выходят из O в $2n$ направлениях вдоль единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ и $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \dots, -\mathbf{e}_n$. Каждый из этих лучей можно отобразить в реберный остов многогранника W (он является собственным подмножеством куба счетной размерности).

А именно, возьмем прямолинейный луч на остове n -мерной решетки, который направлен вдоль $\mathbf{e}_i$ (другими словами, который идет вдоль положительного направления i -й оси, $1 \leq i \leq n$), и отобразим его ребро за ребром в ломаный путь

$$\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1 \cdot 2n} + \mathbf{e}_{i+2 \cdot 2n} + \dots + \mathbf{e}_{i+k \cdot 2n} + \dots$$

на остове многогранника W . Здесь первое ребро начинается в точке O , а ребро $\mathbf{e}_{i+j \cdot 2n}$ — в концевой точке ребра $\mathbf{e}_{i+(j-1) \cdot 2n}$, $j = 1, 2, 3, \dots$

И аналогично, мы отобразим прямолинейный реберный луч в n -мерной кубической решетке, направленный вдоль $-\mathbf{e}_i$ (то есть идущий вдоль отрицательного направления i -й оси, $1 \leq i \leq n$), в реберный путь

$$\mathbf{e}_{i+n} + \mathbf{e}_{i+n+1 \cdot 2n} + \mathbf{e}_{i+n+2 \cdot 2n} + \dots + \mathbf{e}_{i+n+k \cdot 2n} + \dots$$

реберного остова W , где ребро $\mathbf{e}_{i+n}$ начинается в начале координат O , а ребро $\mathbf{e}_{i+n+j \cdot 2n}$ — в концевой точке ребра $\mathbf{e}_{i+n+(j-1) \cdot 2n}$, $j = 1, 2, 3, \dots$

Возьмем ребро остова стандартной кубической решетки. Рассмотрим гиперплоскость, которая ортогональна этому ребру и пересекает его посередине. Эта гиперплоскость дает *срединный разрез* разбиения (то есть разная n -мерной кубической решетки). Все ребра разбиения, которые пересечены этой гиперплоскостью, образуют один *класс эквивалентности*. Все ребра одного класса взаимно параллельны и идут в одинаковом направлении. Такой класс эквивалентности всегда содержит ребро прямолинейного луча, который начинается в O и идет вдоль соответствующей координатной оси (в положительном или отрицательном направлении). Описанное отображение переводит это ребро в вектор базиса $\mathcal{E}_\infty$. Этот вектор будет служить нам меткой всех ребер из того класса эквивалентности, которому принадлежит это ребро. Тогда ребра различных классов эквивалентности получат разные метки.

Разные классы эквивалентности соответствуют различным срединным разрезам, даже если гиперплоскости срединных разрезов параллельны. Когда мы пометим все ребра одномерного остова стандартной кубической решетки векторами базиса $\mathcal{E}_\infty$, мы построим отображение остова исходной кубической решетки в остов многогранника W (а также в остов бесконечномерного куба). Само эта конструкция показывает, что такое отображение переводит каждый кратчайший реберный путь (конечной длины) в кратчайший путь. Значит построенное отображение является вложением, и более того, — изометрическим вложением. (Это отображение можно распространить так, чтобы осуществить непрерывное локально изометрическое клеточное отображение нормального разбиения n -мерного евклидова пространства на кубы в n -мерный остов многогранника W .)

Предположение 1.5. *Существует вложение*

$$\mathcal{Z}^n \rightarrow \mathcal{H}^\infty.$$

Поскольку вложение $\mathcal{Z}^n \rightarrow \mathcal{H}^\infty$ изометрично, а любое метрическое подпространство гиперметрического пространства в свою очередь гиперметрично, справедливо такое

Следствие 1.1. Метрическое пространство $\mathcal{Z}^n$ гиперметрично.

Ясно, что метрическое пространство $\mathcal{H}^\infty$ нельзя вложить в метрическое пространство $\mathcal{Z}^n$ ни при каком *конечном* n .

Рассмотрим в пространстве с базисом $\mathcal{E}_\infty$ множество всех точек, к которым из начала координат O ведут реберные пути со звеньями, представляющими собой векторы базиса $\mathcal{E}_\infty$. Координаты любой точки этого множества в базисе $\mathcal{E}_\infty$ — целые, и среди них есть лишь конечное число ненулевых. Обозначим это множество точек (с естественной ℓ_1 -метрикой) как $\mathcal{Z}^\infty$. Ясно, что каждое конечное множество точек $\mathcal{Z}^\infty$ содержится в $\mathcal{Z}^n \subset \mathcal{Z}^\infty$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mathcal{Z}^n$ — гиперметрическое пространство, метрическое пространство $\mathcal{Z}^\infty$ тоже является гиперметрическим.

Предположение 1.6. *Справедливы следующие вложения*

$$\mathcal{Z}^\infty \rightarrow \mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{Z}^\infty.$$

Тот факт, что выполняется изометрическое вложение $\mathcal{Z}^\infty \rightarrow \mathcal{H}^\infty$, можно доказать так же, как и предыдущее предложение. Единственное отличие состоит в том, что теперь имеется счетное число лучей в обоих направлениях. Но и в этом случае мы можем пометить ребра каждого луча различными метками. Это можно сделать, поскольку объединение счетного числа счетных множеств в свою очередь счетно.

Пример: вложение фуллеренов

Для того, чтобы проиллюстрировать введенные нами понятия ℓ_1 -вложимости и их применения, мы начнем с *фуллеренов*. Это ряд очень важных в химии полиэдров. В этой главе мы введем понятие фуллеренов, затем дадим общую лемму, после чего опишем ℓ_1 -статус более чем 4000 малых фуллеренов и им двойственных. Кроме того, мы рассмотрим некоторые бесконечные семейства невложимых фуллеренов. Компьютерную проверку ℓ_1 -статуса провели Д. Пасечник и М. Дютур.

Фуллерен — это углеродная молекула, которую можно рассматривать как простой полиэдр. Мы будем обозначать его F_n . Его n вершин — атомы углерода — собраны в 12 пятиугольников и $(n/2 - 10)$ шестиугольников, а $(3/2)n$ ребер соответствуют углерод-углеродным связям. Фуллерены F_n могут быть построены для всех четных $n \geq 20$, за исключением $n = 22$ (см. [Grün67], с. 271). Для данного n возможно разное расположение фасет, такие фуллерены называются *изомерами*. Например, существуют 1, 1, 1, 2, 3, 40, 271 и 1812 фуллеренов F_n при

$$n = 20, 24, 26, 28, 30, 40, 50 \text{ и } 60$$

соответственно.

Фуллерены, у которых нет пятиугольников со смежными ребрами, обозначаются C_n и называются *предпочтительными фуллеренами* (или еще *IP-фуллеренами*, это сокращение для *Isolated Pentagons* — изолированных пятиугольников). Например, единственный предпочтительный фуллерен, образованный 60 атомами углерода C_{60} — это усеченный икосаэдр, который называют еще *фуллереном Бакминстера*.

Обычно для того, чтобы как-то различать изомеры, приводят их группу симметрий. Например, $C_{180}(I_h)$ — это единственный предпочтительный фуллерен с 180 вершинами и группой симметрий I_h (расширенная икосаэдральная группа порядка 120). В то время как $C_{60}(I_h)$ представляет собой футбольный мяч, $F_{32}(D_3)$, $C_{70}(D_{5h})$ и $C_{84}(D_{2d})$ похожи на мячи для тенниса, регби и бейсбола соответственно. Общим справочником по фуллеренам служит [FoMa95]. В этой главе мы сконцентрируемся на таком вопросе, касающемся метрик:

Можно ли вложить в гиперкуб граф, образованный вершинами и ребрами фуллерена так, чтобы с точностью до шкалы расстояния сохранялись?

2.1. Вложимость фуллеренов и двойственных к ним полиэдров

Лемма 2.1. *Фуллерен F_n (и двойственный ему F_n^*)*

- (i) либо является ℓ_1 -жестким изометрическим подграфом полукуба,
- (ii) либо не удовлетворяет $(2k+1)$ -гональному неравенству для некоторого целого $k \geq 2$.

Доказательство. Собственно говоря, (i) — это прямое следствие из леммы 1.6. Поскольку фуллерен F_n — простой полиэдр и у двойственного к нему F_n^* нет вершин валентности три, оба они не содержат K_4 и поэтому являются ℓ_1 -жесткими (а также изометрическими подграфами полукуба; последнее вытекает из следствия, приведенного в гл. 1.2), если они ℓ_1 -вложимы.

Если же F_n или F_n^* не являются вложимыми, то, как сказано в [DeGr93], диаметр гиперметрического, но не ℓ_1 -вложимого графа равен двум или трем. А поскольку известно, что F_{20}^* является ℓ_1 -полиэдром и поскольку диаметр любого фуллерена (а также двойственного к нему, за исключением F_{20}^*) равен по меньшей мере четырем, ясно, что он не гиперметрический. Отсюда и следует (ii). $\square$

Таблица 2.1

Вложимость малых фуллеренов: из всех F_n и F_n^* при $n < 60$ только семь ℓ_1 -вложимы

Фуллерен	ℓ_1 -вложимость F_n	ℓ_1 -вложимость F_n^*
$F_{20}(I_h)$	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$	$\rightarrow \frac{1}{2}H_6$
$F_{26}(D_{3h})$	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{12}$	не 5-гональный
$F_{28}(T_d)$	не 5-гональный	$\rightarrow \frac{1}{2}H_7$
$F_{36}(D_{6h})$	не 5-гональный	$\rightarrow \frac{1}{2}H_8$
$F_{40}(T_d)$	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{15}$	не 5-гональный
$F_{44}(T)$	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{16}$	не 5-гональный

Таблица 2.2

Вложимость малых предпочтительных фуллеренов: из всех 102 C_n и C_n^* при $n < 86$, только два ℓ_1 -вложимы

Фуллерен	ℓ_1 -вложимость F_n	ℓ_1 -вложимость F_n^*
$C_{60}(I_h)$	не 5-гональный	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$
$C_{80}(I_h)$	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{22}$	не 5-гональный

Среди фуллеренов F_n и двойственных к ним при $n < 60$, а также среди всех предпочтительных фуллеренов C_n и двойственных к ним

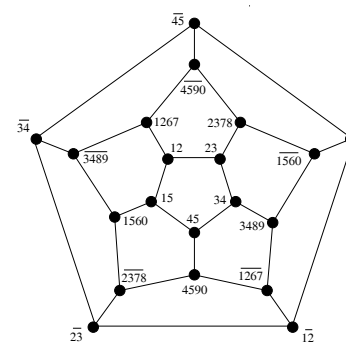


Рис. 2.1. Вложение $F_{20}(I_h)$
в $\frac{1}{2}H_{10}$

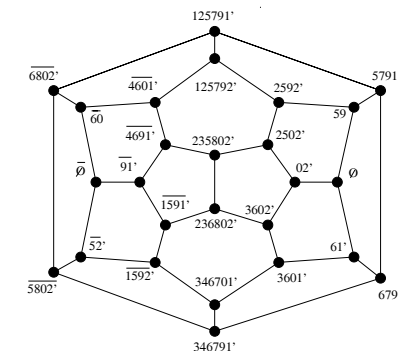


Рис. 2.2. Вложение $F_{26}(D_{3h})$
в $\frac{1}{2}H_{12}$

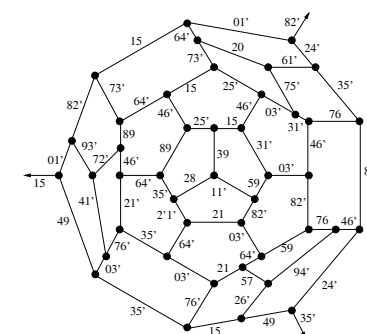


Рис. 2.3. Вложение $F_{44}(T)$ в $\frac{1}{2}H_{16}$

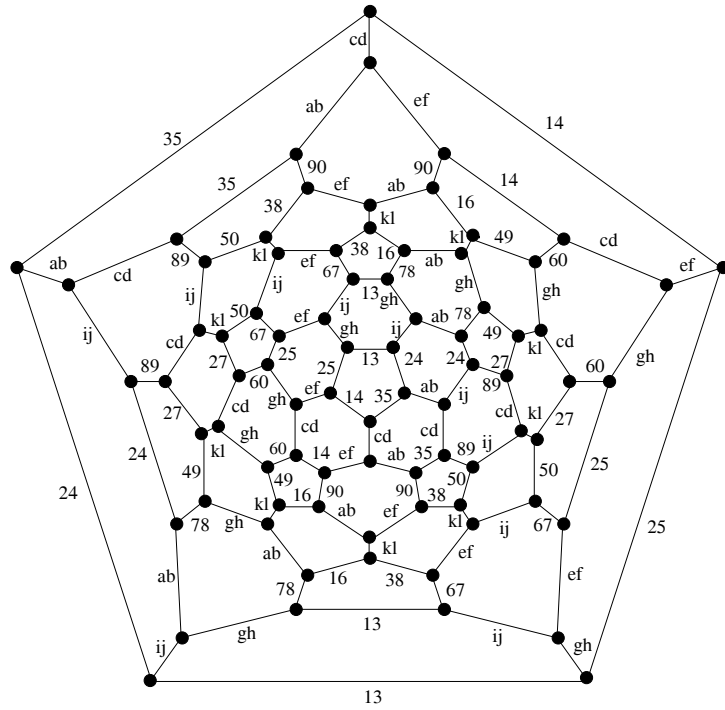


Рис. 2.4. Вложение $C_{80}(I_h)$ в $\frac{1}{2}H_{22}$

при $n < 86$, только пять фуллеренов, $F_{20}(I_h)$, $F_{26}(D_{3h})$, $F_{40}(T_d)$, $F_{44}(T)$, и $C_{80}(I_h)$, и только четыре двойственных к фуллеренам, $F_{20}^*(I_h)$, $F_{28}^*(T_d)$, $F_{36}^*(D_{6h})$ и $C_{60}^*(I_h)$, оказываются ℓ_1 -вложимыми (см. табл. 2.1 и 2.1). Вложение подробно показано на рис. 2.1, 2.1, 2.1 и 2.5, где каждая вершина $\frac{1}{2}H_m$ помечена множеством $S \subset V_m$ его ненулевых координат. Вершины V помечены числами $0, 1, 2, \dots, 9$ и $0', 1', 2', \dots$, а также буквами $a, b, c, \dots$. На рис. 2.1 и 2.4 ребра помечены симметрической разностью между множествами ненулевых координат соответствующих вершин $\frac{1}{2}H_{16}$ и $\frac{1}{2}H_{22}$.

В то время, как существуют 5-гональные, но не 7-гональные полиэдры (например, квадратная антипризма; см. рис. 6.4с) внизу), мы не могли найти такие фуллерены или двойственные к ним. Возможно, все ℓ_1 -невложимые фуллерены F_n (или F_n^*) не являются к тому же 5-гональными.

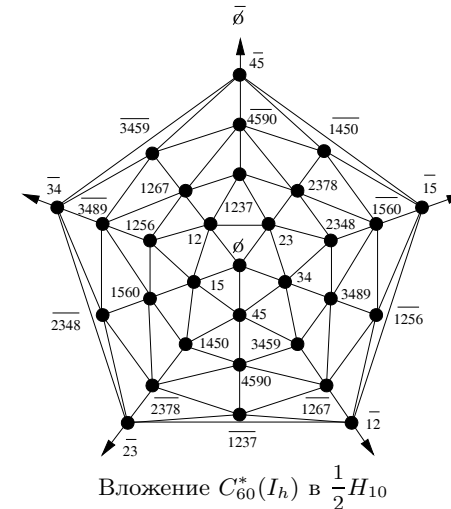
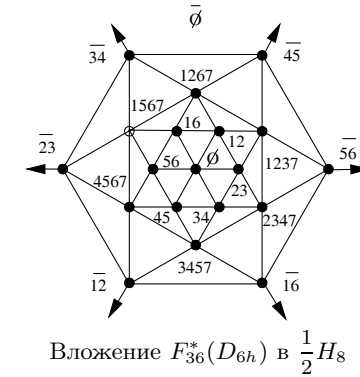
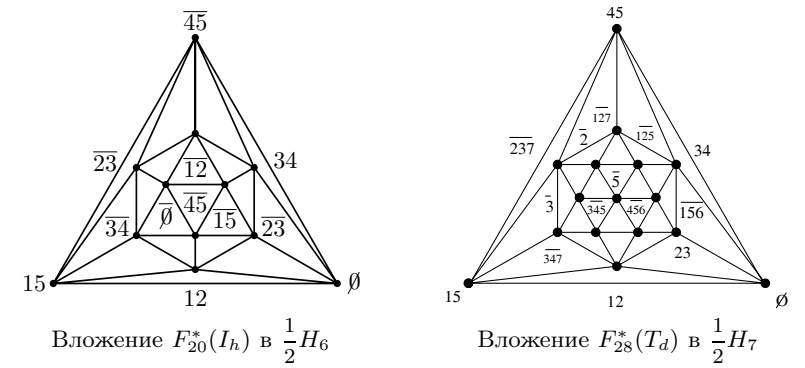


Рис. 2.5. Двойственные вложения

С другой стороны, мы полагаем, что пять фуллеренов F_n и четыре двойственных к фуллеренам F_n^* , приведенных в табл. 2.1 и 2.1 — единственные ℓ_1 -вложимые.

2.2. Бесконечные семейства ℓ_1 -невложимых фуллеренов

Теперь мы представим два семейства интересных ℓ_1 -невложимых фуллеренов. Начнем с фуллерена F_n , который можно разбить на две полусферы, разрезав пять (соответственно, шесть) ребер. Между этими полусферами мы поместим слой из пяти (соответственно, шести) шестиугольников следующим образом. Разрезав F_n , мы получим две полусферы, и у каждой из них окажется пять (или шесть) *хвостов*. Аналогично мы можем представить кольцо из k шестиугольников как кольцо из k прямоугольников, у внутренней и внешней границ которого есть по k хвостов. Взяв $k = 5$ (или $k = 6$) мы можем склеить эти внешние хвосты с хвостами одной из полусфер, а внутреннюю — с хвостами другой полусферы для того, чтобы получить фуллерен, у которого будет уже больше шестиугольников. У нового фуллерена уже $n + 10$ вершин (соответственно, $n + 12$) и он называется *1-слойным* F_n . Вставив i слоев, мы получим i -слойный F_n . Например, разрезав каким-нибудь образом F_{20} и вставив i слоев, мы получим i -слойный додекаэдр определенный как $F_{10(i+2)}(D_{5h})$ для нечетных i и $F_{10(i+2)}(D_{5d})$ для четных i (см. рис. 2.6). (Это весьма *напряженный, антиароматический, наименее устойчивый* фуллерен, поскольку в отличие от предпочтительных фуллеренов, у него наибольшее

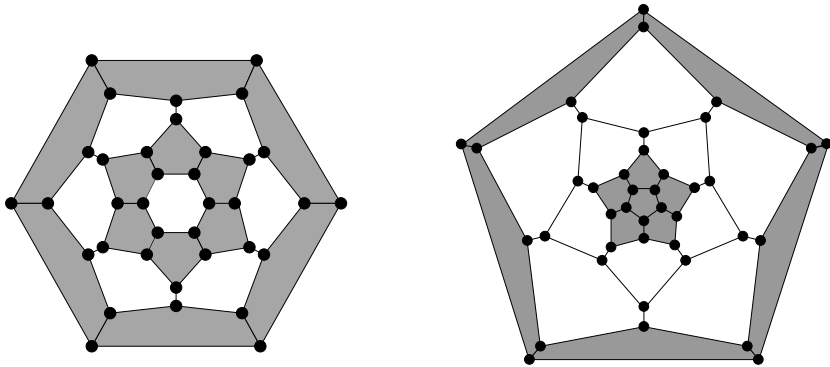


Рис. 2.6. $F_{36}(D_{6h}) = 1$ -слойный $F_{24}(D_{6d})$ и $F_{40}(D_{5d}) = 2$ -слойный додекаэдр

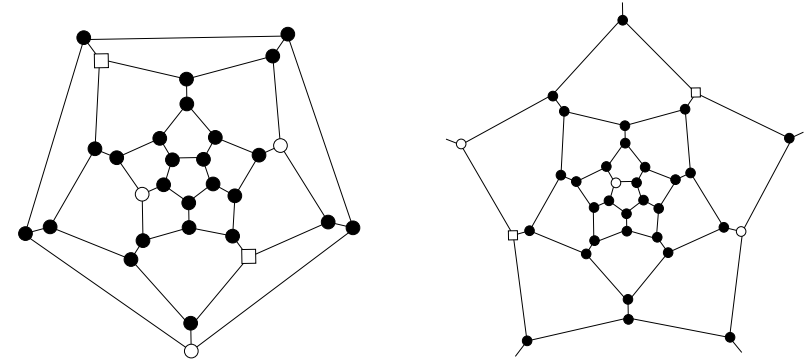


Рис. 2.7. Не 5-гональные конфигурации в i -слойных $F_{10(i+2)}$ при $i = 1$ и при $i \geq 2$

число смежных пар пятиугольных граней.) Отправляясь от $F_{24}(D_{6d})$ и вставляя i слоев из 6 шестиугольников между двумя полусферами, образованными пятью пятиугольниками, окружающими шестиугольник, мы получим i -слойный $F_{24}(D_{6d})$: $F_{12(i+2)}(D_{6h})$ для нечетных i и $F_{12(i+2)}(D_{6d})$ для четных i , как показано на рис. 2.6.

Предположение 2.1. Для любого целого $i \geq 1$:

- (i) i -слойный фуллерен (и двойственный ему) $F_{10(i+2)}(D_{5h}$ или $D_{5d})$ не является ℓ_1 -вложимым, и
- (ii) i -слойный фуллерен (и двойственный ему, кроме случая $i = 1$) $F_{12(i+2)}(D_{6h}$ или $D_{6d})$ не является ℓ_1 -вложимым.

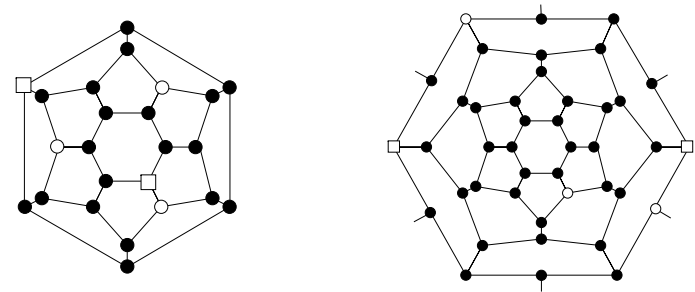


Рис. 2.8. Не 5-гональные конфигурации в i -слойных $F_{12(i+1)}$ при $i = 1$ и при $i \geq 2$

Доказательство. Чтобы доказать, что перечисленные фуллерены не являются ℓ_1 -вложимыми, мы просто укажем не 5-гональную конфигурацию, содержащуюся в их остовах. Коэффициенты b_i нарушаемого 5-гонального неравенства (см. (1.4) в разделе 1.2) равны, соответственно, 0 для черных вершин, -1 для квадратных, и 1 для вершин, отмеченных белыми кружками. $\square$

2.3. Модель Кацуры для пузырьковых клеток в сравнении с вложимыми двойственными к фуллеренам

Оказывается, что все известные фуллерены, для которых двойственные к ним ℓ_1 -вложимы — включая плоское разбиение правильными шестиугольниками (*разбиение Вороного гексагональной решетки* A_2), которое можно рассматривать как бесконечный фуллерен C_∞ — удовлетворяет следующей модели Кацуры для *клеток окаймленных пузырьков* (см. [Kats83]). Более точно, n вершин фуллерена F_n разбиваются на четыре типа $T_{a,b}$ в соответствии с числами a пятиугольников и b шестиугольников, которым они инцидентны, то есть $T_{3,0}$, $T_{0,3}$, $T_{1,2}$ и $T_{2,1}$. Затем Кацура рассматривает среднюю энергию натяжения его n вершин в предположении *эластичности Гука* и только близкое взаимодействия только на *коротких расстояниях*. *Устойчивыми* фуллеренами, то есть теми, которые в этой модели обладают минимальной энергией (в зависимости от того, энергия какого типа вершин минимальна) являются следующие:

- Додекаэдр (минимальная энергия на $T_{3,0}$ вершинах); двойственный ему

$$F_{20}^*(I_h) \rightarrow \frac{1}{2}H_6.$$

- Шестиугольный лист C_∞ (минимальная энергия на $T_{0,3}$ вершинах); двойственный ему

$$(\text{разбиение Делоне } A_2) \rightarrow \frac{1}{2}Z_3.$$

- Фуллерен Бакминстера (минимальная энергия на $T_{1,2}$ вершинах); двойственный ему

$$C_{60}^*(I_h) \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}.$$

- Вытянутая шестиугольная бочка $F_{36}(D_{6h})$ (минимальная энергия на $T_{2,1}$ вершинах); двойственный ему

$$F_{36}^*(D_{6h}) \rightarrow \frac{1}{2}H_8.$$

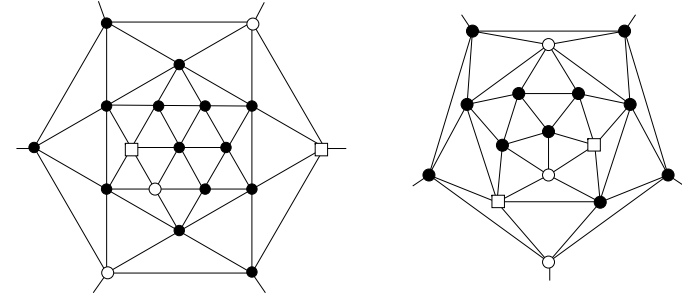


Рис. 2.9. Не 5-гональные конфигурации в двойственных i -слойных $F_{12(i+1)}^*$ и $F_{10(i+1)}^*$

- $F_{28}(T_d)$ (минимальная энергия на $T_{2,1}$ вершинах); двойственным ему является гексакис усеченный тетраэдр, причем

$$F_{28}^*(T_d) \rightarrow \frac{1}{2}H_7.$$

Энергия двух оставшихся устойчивых фуллеренов тоже минимальна на $T_{2,1}$ вершинах; это теннисный мяч $F_{32}(D_3)$ и $F_{36}(D_{2d})$, двойственные к ним невложимы.

Правильные паркеты и соты

3.1. Правильные паркеты и соты

Фуллерены из второй главы можно рассматривать как разбиения двумерной сферы. В этой главе мы рассмотрим *правильные разбиения* Евклидова n -пространства, n -сферы или паркеты n -мерного евклидова пространства, n -сферы и гиперболического n -мерного пространства; результаты взяты в основном в [DeSt00c].

Мы будем использовать следующие обозначения, принятые в [Coxe37]:

- $\{p\}$ обозначает многоугольник с p вершинами;
- $\left\{\frac{p}{r}\right\}$ обозначает звездный многоугольник с p вершинами и ребром между теми вершинами, расстояние между которыми равно r ;
- двумерный паркет называется *регулярным* типа $\{p, q\}$, или упрощенно, типа pq , если у каждой грани имеется p вершин и каждая вершина принадлежит q граням (для каждого паркета типа pq имеется двойственное разбиение типа qp).

В качестве примера мы приведем обозначения пяти платоновых тел.

- симплекс α_3 типа 33, он самодвойственен;
- куб γ_3 типа 43 и двойственный ему октаэдр β_3 типа 34;
- икосаэдр Ico типа 35 и двойственный ему додекаэдр Do типа 53.

Все рассматриваемые в этой главе вложимые паркеты, за исключением гиперсимплексов α_n и гипероктаэдров β_n (см. Замечание 3.3), оказываются ℓ_1 -жесткими и поэтому (в соответствии с результатом из [Shpe93]) со шкалой 1 или 2 (последнее справедливо только не для двудольных планарных паркетов). Эти вложения были получены построением полной системы альтернирующих зон (см. раздел 1.3)

В действительности паркеты — это специальный случай сот, но мы будем использовать последний термин в особенности в том случае, когда его ячейка или вершинная фигура есть звездный многогранник. Таким образом, соты покрывают пространство несколько раз; кратность покрытия называется его *плотностью*.

Вложения платоновых тел были приведены в [Kell75] и для додекаэдра уточнены в [AsDe80]. Затем в [Asso81] показано, что паркеты

36, 63, и mk (для четных $m \geq 8$ и $m = \infty$) вложимы. Оставшийся случай нечетных m и предельные случаи $m = 2, \infty$ были исследованы в [DeSt96]; все эти результаты сведены вместе в теореме 3.1.

Все четыре звездные многогранника Келлера-Пуансо вложимы. Большой икосаэдр $3\frac{5}{2}$ Пунсо и большой звездный додекаэдр $\frac{5}{2}3$ Кеплера обладают остовом (и даже более того, поверхностью) икосаэдра и додекаэдра соответственно; плотность каждого из них равна 7. Все десять звездных 4-многогранников невложимы.

Среди всех правильных паркетов всех размерностей с компактными фасетами и вершинными фигурами вложимые паркеты были указаны в [DeSt96], [DeSt97].

Кокстер (см. [Coxe54]) распространил понятие правильного паркета, допустив бесконечные ячейки и вершинные фигуры, но с группы симметрии конечного объема. В качестве второго обобщения он допустил соты. В двумерном случае, описанные выше обобщения приводят лишь к следующим новым сотам: $\frac{m}{2}m$ и $m\frac{m}{2}$ для всех нечетных $m \geq 7$ (они служат гиперболическим аналогом сферического звездного многогранника $\frac{5}{2}5$, это малый звездный додекаэдр Кеплера) и $5\frac{5}{2}$ (большой додекаэдр Пуансо). Оба они, и $\frac{5}{2}5$ и $5\frac{5}{2}$ обладают остовом икосаэдра. Для любого нечетного m описанные выше соты трижды покрывают пространство (2-сферу для $m = 5$). Остов $m\frac{m}{2}$, очевидно, такой же, как у $3m$, поскольку его можно рассматривать как $3m$ с теми же самыми вершинами и ребрами, образующими m -угольники вместо треугольников. Грани $\frac{m}{2}m$ — это звездные грани $m3$, а сам $\frac{m}{2}m$ имеет те же самые вершины, что и $3m$.

3.2. Планарный случай

Все подслучаи представлены в табл. 3.1; обозначения в ней следующие:

- 1) Строка указывает фасету (ячейку) паркета (или сот), столбец указывает ее вершинную фигуру. Для удобства в табл. 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 паркеты и соты приведены в своих сокращенных (т. е. без скобок и запятых) обозначениях Шлэфли.
- 2) Через $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \text{Ico}, \text{Do}$ и δ_2 мы обозначили правильный тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр и квадратную решетку Z_2 . Число m в 8-й строке и в 8-м столбце табл. 3.1 — любое, большее или равное 7; а в 10-й строке и в 10-м столбце — любое нечетное число, большее или равное семи.

Таблица 3.1

Двумерные правильные паркеты и соты

	2	3	4	5	6	7	m	∞	$\frac{m}{2}$	$\frac{5}{2}$
2	22	23	24	25	26	27	2m	2 ∞		
3	32	α_3	β_3	Ico	36	37	3m	3 ∞		$3\frac{5}{2}$
4	42	γ_3	δ_2	45	46	47	4m	4 ∞		
5	52	Do	54	55	56	57	5m	5 ∞		$5\frac{5}{2}$
6	62	63	64	65	66	67	6m	6 ∞		
7	72	73	74	75	76	77	7m	7 ∞		
m	$m2$	$m3$	$m4$	$m5$	$m6$	$m7$	mm	$m\infty$	$m\frac{m}{2}$	
∞	$\infty 2$	$\infty 3$	$\infty 4$	$\infty 5$	$\infty 6$	$\infty 7$	∞m	$\infty \infty$		
$\frac{m}{2}$							$\frac{m}{2}m$			
$\frac{5}{2}$		$\frac{5}{2}3$		$\frac{5}{2}5$						

- 3) Мы считаем, что $2m$ — мультиграф с двумя вершинами и m ребрами. Двойственный к нему $m2$ можно рассматривать как m -угольник; все вершины $m\infty$ лежат на абсолютном коническом сечении в бесконечности (ее степень бесконечна); грани ∞ графа ∞m вписаны в орициклы.

Теорема 3.1. Все двумерные паркеты tk вложимы, а именно:

- (i) если $\frac{1}{m} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$ (2-сфера), то
 $2m \rightarrow H_1$ для любого m , $m2 \rightarrow \frac{1}{2}H_m$ для нечетных m и $m2 \rightarrow H_{\frac{m}{2}}$ для четных m ;
 $33 = \alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_3$, $\frac{1}{2}H_4$; $43 = \gamma_3 \rightarrow H_3$; $34 = \beta_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_4$;
 $35 = \text{Ico} (\sim 3\frac{5}{2} \sim 5\frac{5}{2} \sim \frac{5}{2}5) \rightarrow \frac{1}{2}H_6$ и $53 = \text{Do} (\sim \frac{5}{2}3) \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$;
- (ii) если $\frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ (Евклидова плоскость), то
 $2\infty \rightarrow H_1$, $\infty 2 \rightarrow Z_1$;
 $44 = \delta_2 \rightarrow Z_2$, $36 \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$, $63 \rightarrow Z_3$;

- (iii) если $\frac{1}{m} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ (гиперболическая плоскость), то

$$mk \rightarrow \frac{1}{2}Z_\infty, \quad \text{если } t \text{ нечетно,} \quad k \leq \infty,$$

$$\text{и } tk \rightarrow Z_\infty, \quad \text{если } t \text{ четно или равно } \infty, \quad k \leq \infty.$$

В следующих двух замечаниях уместно будет привести некоторые наблюдения о вложениях правильных карт и невыпуклых многогранников, связанных с правильными многогранниками.

Замечание 3.1. (Обозначения и терминологию взяты в [Сохе37], [Сром97]):

- (i) Вложение икосаэдра 35 в $\frac{1}{2}H_6$ было упомянуто в [Сохе35] на с. 450—451, как *правильный скошенный икосаэдр*. Имеется 5 собственных фрагментов 35 с правильными гранями: 5-пирамида, 5-антипризма, парауменьшенный 35, метабуменьшенный 35, and триуменьшенный 35; 5-пирамида вложима в $\frac{1}{2}H_5$, а все остальные — в $\frac{1}{2}H_6$.

- (ii) Антиподальные отношения (вложимых, согласно тереме 3.1 (i)) куба, икосаэдра, додекаэдра — это правильные карты $\{4, 3\}_3$, $\{3, 5\}_5$, $\{5, 3\}_5$ на проективной плоскости. Они являются K_4 , K_6 , графом Петерсена и вложимы, соответственно, в $\frac{1}{2}H_m$ при $m = 4, 6, 6$.

- (iii) Кроме 44, 36, 63 (вложимых, согласно теореме 3.1 (ii)), имеется еще ровно три других бесконечных правильных полиэдра — это *правильные скошенные полиэдры* $\{4, 6|4\}$, $\{6, 4|4\}$, $\{6, 6|3\}$. Они являются лабиринтами в 3-пространстве, полученными удалением половины всех клеток из паркетов 3-пространства, образованных кубами (Z_3), усеченными октаэдрами (паркет Вороного для решетки A_3^*), правильными тетраэдрами и усеченными тетраэдрами (однородный паркет Фешля, появляющийся как № 6 в табл. 10.1, 10.2 ниже). Они, соответственно, вложимы в Z_3 , вложимы в Z_6 , не 5-гональны. Перечислим все конечные правильные скошенные 4-многогранники: семейство $\{4, 4|m\}$ самодвойственных квадрильяжей тора (когда он является произведением двух m -циклов, то он вложим в $\frac{1}{2}H_{2m}$ для нечетных m или в H_m для четных m), три не 5-гональных таких многогранника $\{6, 4|3\}$, $\{4, 6|3\}$, $\{8, 4|3\}$ и еще один, о вложимости которого пока ничего нельзя сказать — $\{4, 8|3\}$ (двойственный к последнему из перечисленных).

- (iv) Приведем еще примеры других интересных правильных карт. Это карта Дика, $\{3, 8\}_6$ (8-валентная карта с 12 вершинами и 32 треугольными гранями), $\{3, 7\}_8$ (7-валентная карта с 24 вершинами

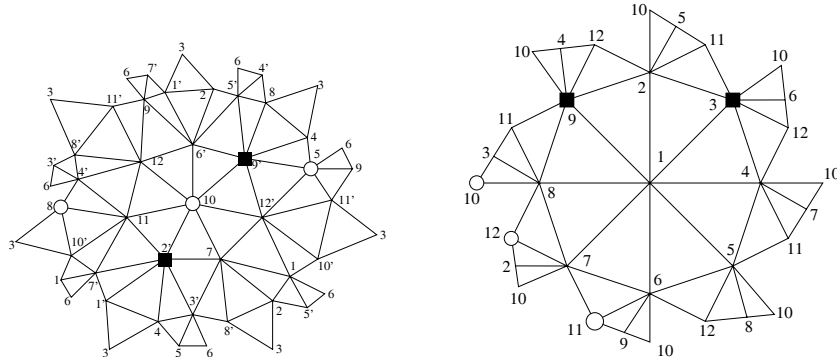


Рис. 3.1. Примеры не 5-гональных правильных карт: карта Клейна $\{3, 7\}_8$ и карта Дика $\{3, 8\}_6$

и 56 треугольными гранями), а также $\{4, 5\}_5$ (5-валентная карта с 16 вершинами и 20 четырехугольными гранями). Эти карты (все они ориентированного рода 3) возникают из гиперболических паркетов 38, 37, 54, соответственно (согласно теореме 3.1 (iii), они вложимы) при идентификации некоторых вершин единичной ячейки. Эти три карты и двойственные к ним не 5-гональны. Но, например, 3-валентное разбиение тора на четыре шестиугольника вложимо: это куб на торе.

Замечание 3.2. (Обозначения и терминологию взяты в [Сохе73], [Wenn71] и [Crom97]):

(i) Перечислим все разбиения платоновых тел на фасеты, которые сами платоновыми телами не являются (см. [Сохе73], с. 100). Это четыре звездных полиэдра $\frac{5}{2}5$, $5\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}3$, $3\frac{5}{2}$ и четыре $2\alpha_3$ (Кеплеров *стелла октадула*), $5\gamma_3$, $5\alpha_3$, $10\alpha_3$. Остается еще правильный компаунд $5\beta_3$, двойственный к $5\gamma_3$. Только в этом замечании, в отличие от теоремы 3.1 (i), мы рассматриваем все видимые «вершины» полиэдров, а не только те, что принадлежат их оболочкам, то есть (как было сказано в [GrSh98] на с. 78, 80) «мы наивно интерпретируем диаграммы как твердые тела с треугольными гранями, забывая о звездчатости и самопересечениях». При этом оказывается, что у $\frac{5}{2}5$, $5\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}3$, $3\frac{5}{2}$, $2\alpha_3$, $5\beta_3$ те же самые остовы, что у усеченных двойственных к 35, 53, 53, усеченному 35, γ_3 , икосидодекаэдру, соответственно. У $5\alpha_3$ такой же остов, что и у двойственного плосконосому додекаэдру. Из всех четырех звездных полиэдров, пяти правильных составных многогранников

и девяти им двойственных, вложимы следующие:

$$\frac{5}{2}5 \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}, \quad 5\frac{5}{2} \left(\sim \frac{5}{2}3 \right) \rightarrow \frac{1}{2}H_{26}, \quad 3\frac{5}{2} \rightarrow \frac{1}{2}H_{70}, \quad 2\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_{12},$$

$$\text{двойственный } 5\beta_3 (\sim 5\gamma_3) \rightarrow H_{15}, \quad \text{двойственный } 5\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_{15}.$$

(ii) Из восьми звездных форм $A - H$ многогранника 35 (основная последовательность приведена в [Crom97] на с. 272) вложимыми являются $A = 35$, $B \sim 5\frac{5}{2}$ и $G \sim H \sim 3\frac{5}{2}$. Кроме того, у двойственного к звездной форме De_2f_2 многогранника 35 такой же остов, как у ромбоикосидодекаэдра. Он вложим в $\frac{1}{2}H_{16}$. Звездные формы $\text{De}_1 \sim Fg_2 \sim C = 5\alpha_3$ и Fg_1 , De_2f_2 вложимыми не являются.

(iii) Рассмотрим многогранники, составленные из двух, двойственных платоновым телам и двойственные им. Из них вложим $2\alpha_3$ и, кроме того, двойственный к $35 + 53$ вложим в $\frac{1}{2}H_{28}$. Среди всех 53 невыпуклых неправильных однородных полиэдров (№ 67–119 в [Wenn71]) имеется два квазиправильных: додекадодекаэдр и большой икосидодекаэдр (см. [Сохе73], с. 101 и № 73, 94 в [Wenn71]). По-прежнему мы рассматриваем все видимые «вершины» и считаем пентаграмму $\frac{5}{2}$ *пентациклом* (то есть 10-сторонним невыпуклым многоугольником). Тогда оба упомянутых выше полиэдра и двойственные к ним не вложимы. Но вот дитригональный додекаэдр (№ 80 в [Wenn71], родственник № 73 там же), например, вложим в $\frac{1}{2}H_{20}$.

Возвращаясь к правильному двумерному случаю, мы закончим его изучение следующей теоремой.

Теорема 3.2. Для любого нечетного $m \geq 7$

- (i) $\frac{m}{2}m$ не вложим;
- (ii) $m\frac{m}{2} (\sim 3m) \rightarrow \frac{1}{2}Z_\infty$.

Эта и следующие теоремы доказаны в [DeSt00c]; доказательствам недостает упорядоченности, но это проистекает от того, что очень сложно наглядно представить звездчатые соты.

3.3. Звездные соты

Кроме звездных многоугольников, четырех правильных звездных полиэдров на 2-сфере, которые все вложимы (последние четыре изоморфны Ico или Do) и кроме тех, что рассмотрены в теореме 3.2 выше, имеются ([Сохе54]) еще лишь следующие правильные звездные

соты: десять правильных звездных многогранников на 3-сфере и четверо звездных сот в гиперболическом 4-пространстве; см. табл. 3.1, 3.2, 3.3, 3.4. Здесь мы покажем, что никакие из последних четырнадцати невозможны. Вначале рассмотрим случай 3-сферы.

Имеется шесть правильных 4-многогранников (два самодвойственных: 4-симплекс α_4 и 24-ячейка; а также две пары двойственных друг другу: 4-кросс-многогранник β_4 с 4-кубом γ_4 и 600-ячейка с 120-ячейкой), и кроме того, десять звездных 4-многогранников; см. гл. 14 в [Сохе73]. Ассуад [Ассо81] показал что 24- и 600-ячейки невозможны; в [DeGr97b] это было сделано для 120-ячейки. Ясно, что γ_4 и β_4 сами являются H_4 и $\frac{1}{2}H_4$. α_4 вложим в $\frac{1}{2}H_5$; кроме того, он вложим например, со шкалой 6 в 10-куб (см. раздел 1.2).

Изоморфизмы между десятью звездными 4-многогранниками, см. с. 266—267 в [Сохе73], сохраняют все инцидентности и влекут, разумеется, изоморфизмы остовов этих многогранников. Перечислим эти изоморфизмы *графов*, используя обозначения Шлэфли:

- (i) $\frac{5}{2}53 \sim 5\frac{5}{2}3$;
- (ii) $\frac{5}{2}33 \sim 120$ -ячейка (вспомните изоморфизм между $\frac{5}{2}3$ и 53);
- (iii) все оставшиеся семь остовов изоморфны остову 600-ячейки (более того, у $35\frac{5}{2}$ те же самые грани; вспомните изоморфизм между $3\frac{5}{2}$ и 35).

Итак, восемь звездных многогранников, упомянутых в (ii) и (iii) выше, невозможны. Остается еще случай (i), он описывается теоремой 3.3. Для доказательства используется 5-гональное неравенство.

Теорема 3.3. *Ни один из десяти звездных 4-многогранников невозможен.*

Следствие 3.1. Ни одни из четырех звездных сот в гиперболическом 4-пространстве невозможны.

3.4. Случай размерности $d \geq 3$

Таблицы 3.2, 3.3, 3.4 представляют все подслучаи для размерностей 3, 4, 5; для высших размерностей d , d -симплексы α_d , d -ортеэдры β_d , d -кубы γ_d и кубические решетки δ_d могут быть только правильными.

В этих таблицах 24-, 600-, 120-ячейки являются правильными сферическими 4-многогранниками 343, 335, 533 с указанным числом клеток, а $\text{De}(D_4)$, $\text{Vo}(D_4)$ — правильными разбиениями 3343, 3433

Таблица 3.2

3-мерные правильные паркеты и соты

	α_3	γ_3	β_3	Do	Ico	δ_2	63	36	$3\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}3$	$5\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}5$
α_3	α_4^*		β_4^*		600-			336	$33\frac{5}{2}$			
β_3		24-				344						
γ_3	γ_4^*		δ_3^*		435*			436*				
Ico				353							$35\frac{5}{2}$	
Do	120-		534		535			536	$53\frac{5}{2}$			
δ_2		443*				444*						
36							363					
63	633*		634*		635*			636*				
$\frac{5}{2}3$	$\frac{5}{2}33$				$\frac{5}{2}35$							
$3\frac{5}{2}$												$3\frac{5}{2}5$
$\frac{5}{2}5$				$\frac{5}{2}53$						$\frac{5}{2}5\frac{5}{2}$		
$5\frac{5}{2}$										$5\frac{5}{2}3$		$5\frac{5}{2}5$

Таблица 3.3

4-мерные правильные паркеты и соты

	α_4	γ_4	β_4	24-	120-	600-	δ_3	$35\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}53$	$5\frac{5}{2}5$
α_4	α_5^*		β_5^*			3335				
β_4				$\text{De}(D_4)$						
γ_4	γ_5^*		δ_4^*			4335*				
24-		$\text{Vo}(D_4)$					3434			
600-								$335\frac{5}{2}$		
120-	5333		5334			5335				
δ_3				4343*						
$\frac{5}{2}53$					$\frac{5}{2}533$					
$35\frac{5}{2}$										$35\frac{5}{2}5$
$5\frac{5}{2}5$									$5\frac{5}{2}53$	

Таблица 3.4

5-мерные правильные паркеты и соты

	α_5	γ_5	β_5	$\text{Vo}(D_4)$	$\text{De}(D_4)$	δ_4
α_5	α_6^*		β_6^*			
β_5					33343	
γ_5	γ_6^*		δ_{5*}			
$\text{De}(D_4)$				33433		
$\text{Vo}(D_4)$		34333				34334
δ_4					43343*	

Евклидова 4-пространства. Они являются также разбиениями Делоне, соответственно, Вороного, ассоциированными с (точечной) решеткой D_4 . Евклидовы случаи (их три для размерностей 2, 4 и один для размерностей 3, 5) выделены жирным шрифтом.

Все случаи вложимости в этих таблицах помечены звездочкой *.

Теоремы 3.1, 3.2 показывают, что вложимы все правильные двумерные паркеты и звездные соты, кроме $\frac{m}{2}m$ для всех нечетных $m \geq 7$. В следующей теореме 3.4 рассмотрены все оставшиеся правильные подслучаи.

Теорема 3.4. *Все вложимые правильные паркеты и соты размерности $d \geq 3$ таковы;*

- (i) либо α_{d+1} , либо β_{d+1} , либо
- (ii) все с двудольными остовами:
 - (ii.1) все с ячейкой γ_d : γ_{d+1} , δ_d и три гиперболических: 435, 4335, некомпактный 436;
 - (ii.2) все четыре с ячейкой δ_{d-1} : гиперболические некомпактные 443, 444, 4343, 43343;
 - (ii.3) все 4 с ячейкой 63: гиперболические некомпактные 633, 634, 635, 636.

Все ℓ_1 -жесткие правильные паркеты двудольны. Все, за исключением самих γ_{d+1} и δ_d , двудольные паркеты вложимы в Z_∞ .

Замечание 3.3. Все бесконечные семейства правильных паркетов вложимы. Фактически, n -угольники n , $\delta_n = Z_n$, $\gamma_n = H_n$, α_n , β_n вложимы, и более того, первые три из них ℓ_1 -жестки. Но о вложимости остовов α_n при $n \geq 4$ и β_n судить труднее. Этот вопрос подробно изучен (в терминах соответствующих графов K_{n+1} и $K_{n \times 2}$) в гл. 23 и гл. 7.4 [DeLa97] соответственно; см. также раздел 1.2 выше).

Замечание 3.4. Все невложимые правильные паркеты не 5-гональны. Для двух самых сложных случаев, 120-ячейки и 600-ячейки, это было показано в [DeGr97b] и [Duto02] соответственно. Для 120-ячейки был найден изометрический не 5-гональный 70-вершинный подграф ее остова. Для 600-ячейки компьютерная проверка выявила (среди всех 190 578 024 пятерок вершин) все 93 орбиты 986 400 пятерок (т.е. приблизительно одна из 193), которые нарушают 5-гональное неравенство. Все, кроме трех, из 93 орбит соответствуют не 5-гональным изометрическим подграфам остова с диаметром 4 или 5. Но наименьший такой подграф — это 7-вершинный планарный граф диаметра 3, который получается из K_4 добавлением срединных точек трех ребер его подграфа P_3 .

Полуправильные полиэдры и многогранники, родственные призмам и антипризмам

4.1. Полуправильные полиэдры

Результаты, относящиеся к ℓ_1 -вложимости полуправильных полиэдров и двойственных им, представлены в табл. 4.1, 4.2 ниже. Мы получили их прямой проверкой; в качестве примера рассмотрим такую проверку вложимости антипризм.

Напомним, что антипризма APrism_n — это полиэдр, $2n$ вершин которого лежат на двух параллельных фасетах F и F' . Пусть i, i' , $1 \leq i, i' \leq n$ — вершины, лежащие на F и F' соответственно. Тогда ребра антипризмы APrism_n — это пары $(i, i + 1)$, (i, i') , $(i + 1, i')$, $(i', i' + 1)$ (здесь и ниже сложение идет по модулю n).

Давайте опишем, например, вложение $\text{APrism}_n \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}$. Мы дадим вложение $\text{APrism}_n \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}$, сопоставив вершине v следующее подмножество $a(v)$ набора $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ для всех трех возможных случаев (ниже мы считаем, что $1 \leq i \leq n$).

1) $n = 2k + 1$:

$$\begin{aligned} a(i) &= \{i, i + 1, \dots, i + k\}, \\ a(i') &= \{i, i + 1, \dots, i + k - 1\} \cup \{n + 1\}, \end{aligned}$$

2) $n = 4k + 2$:

$$\begin{aligned} a(i) &= \{i, i + 1, \dots, i + k\}, \\ a(i') &= \begin{cases} \{n + 1\} \cup (a(i) - \{i\}), & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ \{n + 1\} \cup a(i) \cup \{i + k + 1\}, & \text{если } i \text{ четно;} \end{cases} \end{aligned}$$

3) $n = 4k$:

$$\begin{aligned} a(i) &= \{i, i + 1, \dots, i + 2k - 1\}, \\ a(i') &= \begin{cases} \{n + 1\} \cup (a(i) - \{i\}) & \text{если либо } 1 \leq i \leq 2k \text{ и } i \text{ нечетно,} \\ & \text{либо } 2k < i \leq 4k \text{ и } i \text{ четно,} \\ \{n + 1\} \cup a(i) \cup \{i + k + 1\} & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Таблица 4.1

Вложения полуправильных полиэдров

полиэдр P face-vector	ℓ_1 -вложимость P	$J(m, k)$?	разрезы	d
тетраэдр (3.3.3)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_3$	нет	$\frac{v}{2}$	1
куб (4.4.4)	$\rightarrow H_3$	$J(6, 3)$	$\frac{v}{2}$	3
додекаэдр (5.5.5)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$	нет	$\frac{v}{2}$	5
кубоктаэдр (3.4.3.4)	не 5-гональный			3
икосидодекаэдр (3.5.3.5)	не 5-гональный			5
tr(тетраэдр) (3.6.6)	не 5-гональный			3
tr(октаэдр) (4.6.6)	$\rightarrow H_6$	$J(12, 6)$	$\frac{v}{2}$	6
tr(куб) (3.8.8)	не 5-гональный			6
tr(икосаэдр) (5.6.6)	не 5-гональный			9
tr(додекаэдр) (3.10.10)	не 5-гональный			10
ромбокубооктаэдр (3.4.4.4)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$	$J(10, 5)$	$\frac{v}{2}$	5
ромбикосидодекаэдр (3.4.5.4)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{16}$	нет	$\frac{v}{2}$	8
tr(кубоктаэдр) (4.6.8)	$\rightarrow H_9$	$J(18, 9)$	$\frac{v}{2}$	9
tr(икосидодекаэдр) (4.6.10)	$\rightarrow H_{15}$	$J(30, 15)$	$\frac{v}{2}$	15
скрученный куб (3.3.3.3.4)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_9$	нет	$\frac{v}{2}$	4
скрученный додекаэдр (3.3.3.3.5)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{15}$	нет	$\frac{v}{2}$	7
Prism ₃ (4.3.4)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_5$	$J(5, 2)$	$\frac{v-2}{2}, \frac{v}{2}$	2
Prism _{$n \geq 5$, нечетные} (4.n.4)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{n+2}$	$J\left(n+2, \frac{n+1}{2}\right)$	$\frac{v-2}{2}, \frac{v}{2}$	$\frac{n+1}{2}$
Prism _{$n \geq 6$, четные} (4.n.4)	$\rightarrow H_{\frac{n+2}{2}}$	$J\left(n+2, \frac{n+2}{2}\right)$	$\frac{v}{2}$	$\frac{n+2}{2}$
APrism _{$n \geq 5$, нечетные} (3.3.n.3)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}$	$J\left(n+1, \frac{n+1}{2}\right)$	$\frac{v}{2}$	$\frac{n+1}{2}$
APrism _{$n \geq 4$, четные} (3.3.n.3)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}$	нет	$\frac{v}{2}$	$\frac{n}{2}$

Таблица 4.2

Вложения двойственных полуправильных полиэдром

полиэдр P face-vector	ℓ_1 -вложимость P^*	$J(m, k)?$	разрезы	d
тетраэдр (3.3.3)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_4$	$J(4,1)$	1	1
куб (4.4.4)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_4$	$J(4,2)$	$\frac{v}{2}$	2
додекаэдр (5.5.5)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_6$	нет	$\frac{v}{2}$	3
кубоктаэдр (3.4.3.4)	$\rightarrow H_4$	$J(8,4)$	$\frac{v}{2}$	4
икосидодекаэдр (3.5.3.5)	$\rightarrow H_6$	$J(12,6)$	$\frac{v}{2}$	6
tr(тетраэдр) (3.6.6)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_7$	нет	$1, \frac{v}{2}$	2
tr(октаэдр) (4.6.6)	не 5-гональный			3
tr(куб) (3.8.8)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{12}$	$J(12,6)$	$1, \frac{v}{2}$	3
tr(икосаэдр) (5.6.6)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$	нет	$\frac{v}{2}$	5
tr(додекаэдр) (3.10.10)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{26}$	нет	$1, \frac{v}{2}$	5
ромбокубоктаэдр (3.4.4.4)	не 5-гональный			5
ромбикосаэдр (3.4.5.4)	не 5-гональный			8
tr(кубоктаэдр) (4.6.8)	не 5-гональный			4
tr(икосидодекаэдр) (4.6.10)	не 5-гональный			6
скрученный куб (3.3.3.3.4)	не 5-гональный			7
скрученный додекаэдр (3.3.3.3.5)	не 5-гональный			15
Prism ₃ (4.3.4)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_4$	нет	$1, \frac{v-1}{2}$	2
Prism _{$n \geq 5$, нечетные} (4.n.4)	не 5-гональный			2
Prism _{$n \geq 6$, четные} (4.n.4)	не 5-гональный			2
APrism _{$n \geq 5$, нечетные} (3.3.n.3)	не 5-гональный			3
APrism _{$n \geq 4$, нечетные} (3.3.n.3)	не 5-гональный			3

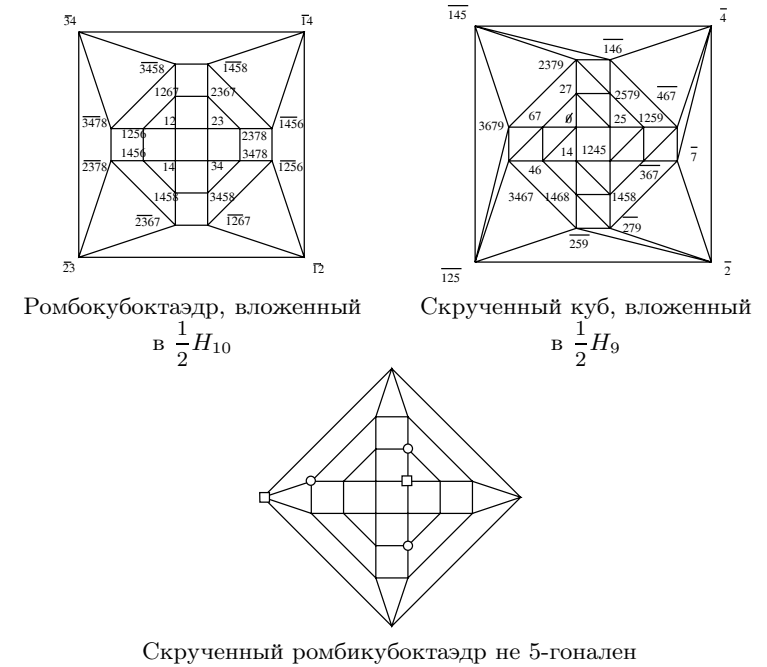


Рис. 4.1. Вложимость ромбокубоктаэдра, скрученного ромбокубоктаэдра и снаб куба

Замечание 4.1.

- (i) «четырнадцатое архимедово тело (скрученный Rcuboctahedron) на рис. 4.1 (единственный новый полиэдр, возникающий, если мы ослабим вершинную транзитивность до единственности вершинной фигуры) и двойственный ему не 5-гональны.
- (ii) [PSC90] дает $P \rightarrow \frac{1}{2}H_m$ для любого 3-многогранника без треугольных граней и без вершин третьей степени. Усеченный икосаэдр представляет собой пример 3-многогранника без треугольных граней (но все его вершины третьей степени), который не 5-гонален.

В таблицах 4.1, 4.2 $d = d(Q)$ и $v = v(Q)$ обозначают соответственно диаметр и число вершин полиэдра Q , где Q является P^* или P ; последний из них — платоново тело или полуправильный полиэдр. Все ℓ_1 -полиэдры в этих таблицах ℓ_1 -жесткие, за исключением

тетраэдра и двойственного к Prism_3 . У них обоих есть по два вложения. Для каждого из двух вложений двойственного к призме Prism_3 все элементы табл. 4.1, 4.2 совпадают, а для двух вложений тетраэдра они различны. Для удобства в табл. 4.1, 4.2 оба вложения этого самодвойственного полиэдра представлены как вложения тетраэдра и двойственного ему соответственно.

Два возможных свойства вложений (см. также гл. 14) представлены в столбцах « $J(m, k)?$ » и «разрезы» табл. 4.1, 4.2, в [Duto02] для них проведена компьютерная проверка. В столбцах « $J(m, k)?$ » дана информация о изометрической вложимости в граф Джонсона $J(m, k)$. Другими словами, указано, являются ли у рассматриваемого вложения в полу- m -куб все адресные множества, соответствующие в этом вращении вершинам, одной мощности. Оказывается, что $m = 2k$ для каждого такого ℓ_1 -полиэдра Q в этих таблицах, который изометрически вкладывается в некоторый $J(m, k)$. Исключениями служат случаи $m = 2k + 1$ для всех призм с нечетным числом граней, а также $m = 4$ для второго вложения ($\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_4$) тетраэдра. Более того, $k = d(Q)$ во всех случаях, исключая двойственный к усеченному кубу. В столбцах «разрезы» указаны все значения $w(S) := \min(|S|, v - |S|)$, где S — любое подмножество (v -множества V вершин), такое что коэффициент a_S в уравнении (1.1) положителен, то есть такое, что в рассматриваемом вложении возникает разрез $\delta(S)$. Значения $w = 1, \lfloor \frac{v}{2} \rfloor$ соответствуют *одноэлементному разрезу* и *эквирезу* $\delta(S)$ соответственно (см. подробности в гл. 14).

4.2. Московский граф, графы глобуса и паутины

Будем называть

$$\text{Prism}_n^m := P_{m+1} \times C_n \quad (m \geq 1, n \geq 3)$$

московским графом, поскольку в вычислительной геометрии его метрика кратчайшего пути называется (или *расстоянием Карлсруэ*). Московский граф иногда называют *кольцевым графом городских улиц*, а его метрика иногда упоминается под названием . Prism_n — это московский граф в случае $m = 1$.

Ясно, что $\text{Prism}_n^m \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+2m}$, поскольку $P_{m+1} \rightarrow H_m$ (поэтому $P_{m+1} \rightarrow \frac{1}{2}H_{2m}$) и $C_n \rightarrow \frac{1}{2}H_n$. Кроме того, $\text{Prism}_{2k}^m \rightarrow H_{k+m}$, так как $C_{2k} \rightarrow H_k$.

Московский граф полиэдральный, поскольку он планарный и 3-связный. Этот полиэдр можно представлять себе как колонку из m

копий Prism_n расположенных последовательно одна на другой так, что их n -угольные грани совпадают.

Будем называть $(\text{Prism}_n^m)^*$ графом *глобуса* и обозначать его 2-Prism_n^{m-1} (поскольку его можно рассматривать как московский граф Prism_n^{m-1} , капшингованный на обеих своих n -угольных гранях) или ВРуг_n^m (поскольку его можно рассматривать как $(m-1)$ -*вытянутую* бипирамиду). При $m = 1$ это обыкновенная ВРуг_n , а при $m = 2$ — обыкновенная вытянутая бипирамида.

В дальнейшем мы будем ссылаться на список из 112 полиэдров с правильными гранями, приведенный в [Berm71]. Номера 34, 35, 36 этого списка — это частные случаи ВРуг_n^2 при $n = 3, 4, 5$. Кроме того, случай $n = 2m + 2$ рассмотрен на с. 106–107 в [Crom97]; в частности, *сфера Кампануса*, известная во времена Возрождения, соответствует ВРуг_n^m в случае $(n, m) = (12, 5)$.

Предположение 4.1.

$$\text{ВРуг}_n^m \begin{cases} \rightarrow \frac{1}{2}H_{2m+2} & \text{если } n = 3, 4, \\ \text{не 5-гональна} & \text{если } n \geq 5. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим граф *паутины* Руг_n^m , определенный как ВРуг_n^m у которого удалена одна капшингованная вершина, другими словами, 1-капшингованный московский граф. При $m = 1$ это обыкновенная пирамида. Очевидно, что это остов самодвойственного полиэдра — $(m-1)$ -*вытянутой* пирамиды.

Следствие 4.1.

$$\text{Руг}_n^m \begin{cases} \rightarrow \frac{1}{2}H_{2m+n-2} & \text{если } n = 3, 4, 5, \\ \text{не 5-гональная} & \text{если } m \geq 2, n \geq 6. \end{cases}$$

Другим (отличным от московского графа) обобщением $\text{Prism}_n = P_2 \times C_n$ служит граф Ли $\prod_{i=1}^t C_{n_i}$; его метрика кратчайшего пути — это *расстояние Ли* (дискретный аналог эллиптического расстояния)

$$d_{\text{Lee}}(x, y) = \sum_{i=1}^t \min(|x_i - y_i|, n_i - |x_i - y_i|),$$

оно используется в теории кодирования. Напомним, что $H_4 = C_4 \times C_4$, поскольку $C_4 = H_2$; любой $C_m \times C_n$ при $m, n \geq 3$ является графом 4-многогранника.

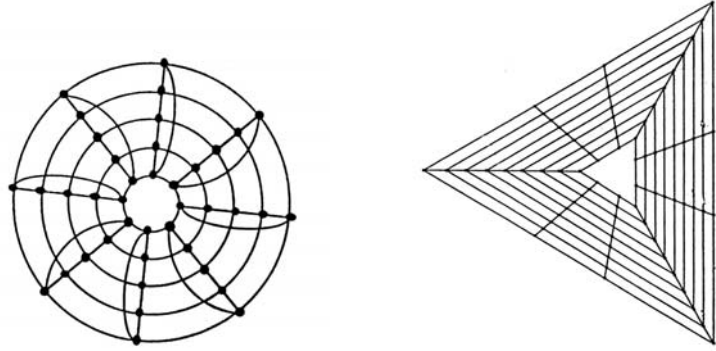


Рис. 4.2. Граф Ли $C_5 \times C_8$ и московский граф $\text{Prism}_9^8 = P_9 \times C_9$

Очевидно, что

$$\prod_{i=1}^t C_{n_i} \rightarrow \frac{1}{2} H_n$$

(и более того, $\rightarrow H_{n/2}$ если все n_i четны), где $n = \sum_{i=1}^t n_i$.

Имеется также вложение $\prod_{i=1}^t P_{n_i} \rightarrow H_{n-t}$; это *сеточный граф* с обыкновенным *сеточным расстоянием*, то есть ℓ_1 -расстоянием $\sum_{i=1}^t |x_i - y_i|$. И наконец,

$$\prod_{i=1}^t K_{n_i} \rightarrow \frac{1}{2} H_{n-t};$$

это хеммингов граф с расстоянием хемминга $|\{1 \leq i \leq t: x_i \neq y_i\}|$. Например, у $(2m-1)$ -мерного симплекса, кроме вложения $\alpha_{2m-1} \rightarrow \frac{1}{2} H_{2m}$ (и других, с точностью до шкалы изометричных вложений в гиперкубы), есть вложения

$$\alpha_{2m-1} \rightarrow \frac{1}{2} (P_3^m) \rightarrow \frac{1}{2} Z_m \rightarrow I_1^m$$

(взяты все $2m$ вершин сетки P_3^m , которые смежны центральной точке) и изометрическое вложение $\alpha_{2m-1} \rightarrow K_{2m}$ в хеммингов граф.

4.3. Звездные k -угольники, куполы и антипаутины

Будем называть *звездным k -угольником* (и обозначать его Stel_k) $2k$ -цикл $C_{\{1,1',2,2',\dots,k,k'\}}$ с дополнительными ребрами k -цикла

$C_{\{1,2,\dots,k\}}$. Таким образом, Stel_k — это цикл C_k с треугольником на каждом ребре; кроме того Stel_k можно охарактеризовать как APrism_k без ребер k -цикла $C_{\{1',2',\dots,k'\}}$. При $n = 5, 6, 7, 8$ — это хорошо известные символы (Красная Звезда, Звезда Давида, звезда шерифа в США, мусульманская звезда, соответственно).

Обозначим Sun_{2k} изометрический подграф Stel_{2k} , полученный удалением вершин $(2i-1)'$, $1 \leq i \leq k$.

Предположение 4.2. *Имеют место следующие вложения:*

- (i) $\text{Stel}_k \rightarrow \frac{1}{2} H_{2k}$,
- (ii) $\text{Sun}_{2k} \rightarrow \frac{1}{2} H_{3k}$.

Купол Cup_n — это граф с вершинами i, i', i'' ($1 \leq i \leq n$) и ребрами внутреннего цикла $C_{\{1,\dots,n\}}$, внешнего цикла $C_{\{1',1'',\dots,n',n''\}}$, а также путей $P_{\{i',i,i''\}}$ для всех $1 \leq i \leq n$. Таким образом, Cup_n является остовом полиэдра; при $n = 3, 4, 5$ это треугольный, квадратный и пятиугольный куполы: в списке 112 полиэдров с правильными гранями они идут под номерами 23, 24, 25 (см. гл. 6).

Предположение 4.3. *Справедливы утверждения:*

- (i) $\text{Cup}_n \rightarrow \frac{1}{2} H_{2n}$, если $n \geq 4$,
- (ii) Cup_3 и Cup_n^* , $n \geq 3$, не 5-гональны.

Приведем следующее явное вложение $\text{Cup}_n \rightarrow \frac{1}{2} H_{2n}$. Возьмем вложение внутреннего цикла $C_{\{1,\dots,n\}} \rightarrow \frac{1}{2} H_n$. Пусть в этом вложении вершина i отображается в подмножество $a(i)$ n -множества V . Пусть $a(1) = \emptyset$, а $V \cap \{1, 2, \dots, n\} = \emptyset$. Тогда отобразим вершины i' и i'' в множества $a(i) \cup \{i, i+1\}$ и $a(i) \cup \{i+1, i+2\}$ соответственно (сложение идет по модулю n). Заметим, что кратчайший путь между не смежными вершинами внешнего цикла проходит через внутренний цикл. Следовательно, нетрудно убедиться, что полученное вложение изометрично при $n \geq 4$. С другой стороны, Cup_n^* включает $K_{2,3}$ как изометрический подграф при $n \geq 3$; поэтому он не 5-гонален.

Антипаутина AW_n при $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, — это граф с вершинами $0, 1, \dots, n-1$ и $i \sim i+1, i+2, \dots, i+k \pmod{n}$. (Здесь $i \sim j$ означает, что вершина i смежна с вершиной j .) Это обыкновенное обобщение следующих вложимых многогранных графов:

- $\text{AW}_n^1 = C_n \rightarrow \frac{1}{2} H_n$ (и $\rightarrow H_{n/2}$ если n четно),
- $\text{AW}_n^2 = G(\text{APrism}_{\frac{n}{2}}) \rightarrow \frac{1}{2} H_{(n+2)/2}$ если n четно,

- $AW_n^{[n/2]} = K_n = G(\alpha_{n-1}) \rightarrow \frac{1}{2}H_n$,
- $AW_n^{\frac{n}{2}-1} = K_{\frac{n}{2} \times 2} = G(\beta_{\frac{n}{2}}) \rightarrow \frac{1}{2}H_{4m}$ (для некоторых m) если n четно. (Напомним, что $G(P)$ – это остовной граф P .)

В следующем предложении (см. доказательство в [DeGr97a]) говорится, что все остальные антипаутины не являются ℓ_1 -графами. Легко проверить, что диаметр AW_n^k равен 2, если и только если

$$\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

Предположение 4.4. За исключением описанных выше четырех случаев все AW_n^k неволожимы. Кроме того,

- (i) они не 5-гональны в следующих подслучаях:
 - (i.1) $k = 2$, $n = 7$ или $n \geq 13$ и нечетно,
 - (i.2) $n = 4k + 3$, $k \geq 3$ или $n = 4k + 4$, $k \geq 4$,
 - (i.3) $\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \leq k < \frac{n}{2} - 1$;
- (ii) AW_{11}^2 , AW_{13}^3 и AW_{16}^4 не 7-гональны;
- (iii) AW_9^2 , AW_{12}^3 и AW_{14}^3 гиперметрические, но не- ℓ_1 .

4.4. Каппингованные антипризмы и колонки из антипризм

Будем обозначать 1-APrism_m (или соответственно, 2-APrism_m) антипризму APrism_m , на одной (или, соответственно, на обеих) m -угольных гранях которой расположена пирамида Pyg_m .

Предположение 4.5. О вложимости всех $i\text{-APrism}_n$ (при $n \geq 3$ и $i = 1, 2$) и двойственных им, можно сказать следующее:

- (i) $i\text{-APrism}_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_{i+4}$, $(i\text{-APrism}_3)^* \rightarrow \frac{1}{2}H_{i+6}$, $i\text{-APrism}_5 \rightarrow \frac{1}{2}H_6$, но $i\text{-APrism}_4$ гиперметрическая, но не- ℓ_1 ;
- (ii) $1\text{-APrism}_6 \rightarrow \frac{1}{2}H_7$, $1\text{-APrism}_7 \rightarrow \frac{1}{2}H_8$; $(1\text{-APrism}_4)^* \rightarrow \frac{1}{2}H_8$,
 $\text{Do} = (2\text{-APrism}_5)^* \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$;
- (iii) $(2\text{-APrism}_4)^* = \text{Barrel}_4$ не 7-гональна;
- (iv) все остальные не 5-гональны.

Определим индукцией по k следующий 4-валентный полиэдр APrism_m^k . $\text{APrism}_m^1 := \text{APrism}_m$, а APrism_m^{k+1} получается из APrism_m^k вписыванием нового m -угольника в нижнюю из двух ее противоположных (называется, верхней и нижней) m -угольных граней таким образом, что все вершины нового m -угольника являются

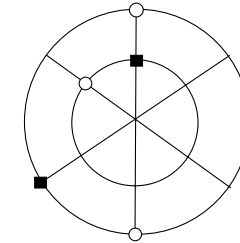
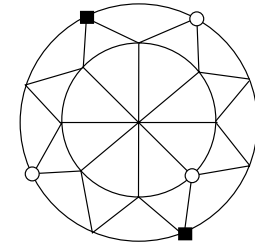
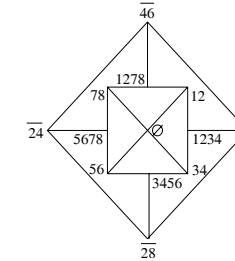
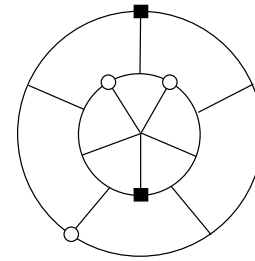
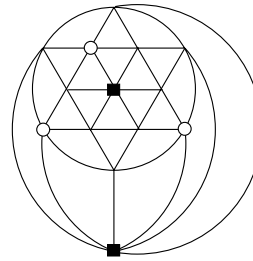
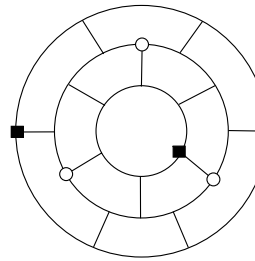
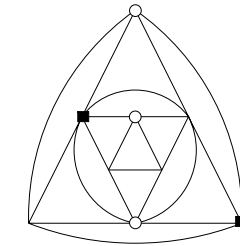
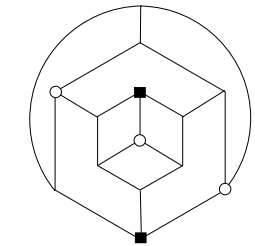
a) 1-Prism₆b) 1-APrism₈c) $(1\text{-APrism}_4)^* \rightarrow \frac{1}{2}H_8$ d) $(1\text{-APrism}_5)^*$ e) 2-APrism₆f) $(2\text{-APrism}_6)^* = \text{Barrel}_6 = 5_{24}$ g) $\text{Tower}_3^2 = \beta_3 + \beta_3$ h) двойственный Tower_3^2

Рис. 4.3. Призмы и их родственники

серединными точками ребер этой m -угольной грани. Двойственная антипризма APrism_m^{m-2} — это *полярный* зонотоп $Pz(m) \rightarrow H_m$, рассмотренный в гл. 14. Можно проверить, что $\text{APrism}_3^2 \rightarrow \frac{1}{2}H_6$ и что APrism_m^2 не 5-гональны для всех $m \geq 4$.

Определим индукцией по k следующий $(4, 6)$ -валентный полиэдр Tower_m^k . $\text{Tower}_m^1 := \text{APrism}_m$, а Tower_m^{k+1} получается из Tower_m^k добавлением грань-к-грани новой APrism_m на одну из двух его противоположных m -угольных граней. Можно проверить, что Tower_m^2 не 5-гональны при всех $m \geq 3$.

Обозначим Barrel_m^k 3-валентный полиэдр, состоящий из двух противоположных m -угольных граней, каждая из которых окружена кольцом из m пятиугольников, и разделенных $k - 1$ последовательными кольцами из m шестиугольников. Barrel_m^1 — это Barrel_m , рассмотренный в гл. 13; очевидно, $\text{Barrel}_m = (2\text{-APrism}_m)^*$. Barrel_5^k — это k -слойный додекаэдр из гл. 2. Легко видеть, что $(\text{Barrel}_m^k)^*$ — это 2-Tower_m^k ; другими словами, это Tower_m^k с пирамидами Pyg_m , помещенными на обоих его противоположных m -угольных гранях.

На рис. 4.3 внизу приведены примеры графов из этой главы.

В конце мы укажем два интересных не 5-гональных графа, APrism_5^3 и граф Коэстера, изображенных на рис. 6.4f) и g). Первый из них — это проекция 5-зацепления Борромео. Любые два из его пяти компонент образуют тривиальное зацепление. Второй замечателен тем, что его хроматическое число равно четырем, в то время как любой из его собственных подграфов допускает 3-раскраску; этот граф может быть превращен в икосидодекаэдр удалением большого центрального цикла.

Усечение, каппинг и шамферинг

5.1. Усечения правильных разбиений

Запись (F, V) для правильного разбиения P означает, что его гранями являются F , а его вершинными фигурами — V . Далее, $\text{tr}(P)$, $\text{gtr}(P)$ и $\text{Ambo}(P)$ обозначают обыкновенное усечение, (т. е. $\frac{1}{3}$ -усечение), золотое (естественное) и усечение в срединной точке (т. е. $\frac{1}{2}$ -усечение) P . Каждое ребро P в этих случаях усечено в отношении $a : b = 2$, $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ и 1, соответственно.

Вначале рассмотрим вложение $\text{tr}(P)$, двойственного к нему (всюду каппингованного P^*) а также вложение $\text{Ambo}(P)$ для правильных паркетов размерности два, см. табл. 3.1. Для пяти платоновых тел все вложения перечислены в табл. 4.1, 4.2. Напомним, что β_3 — это $\text{Ambo}(\alpha_3)$, кубоктаэдр — это $\text{Ambo}(\beta_3) = \text{Ambo}(\gamma_3)$, а икосидодекаэдр — это $\text{Ambo}(P)$ и для икосаэдра и для додекаэдра.

Для трех правильных разбиений $P = (r^q)$ евклидовой плоскости все такие вложения перечислены в табл. 9.1, см. № 1–6 в ней. На самом деле

$$\begin{aligned} \text{tr}(4^4) &= (4.8^2), & \text{tr}(3^6) &= (6^3), & \text{tr}(6^3) &= (3.12^2) \\ \text{и } \text{Ambo}(4^4) &= (4^4), & \text{Ambo}(3^6) &= \text{Ambo}(6^3) &= (3.6.3.6). \end{aligned}$$

Остается случай всех правильных разбиений $P = (r^q)$ гиперболической плоскости. О нем говорится в предложении ниже.

Предположение 5.1.

- (i) $\text{tr}(r^q) = (q.2r^2)$; оно не 5-гонально, для $q = 3$, оно вложимо в $\frac{1}{2}Z_\infty$, если $q \geq 5$ нечетно и вложимо в Z_∞ , если $q \geq 4$ четно;
- (ii) $\text{tr}(r^q)^*$ не 5-гонально, если $q = 4$ и вложимо в $\frac{1}{2}Z_\infty$ в противном случае;
- (iii) $\text{Ambo}(r^q) = (r.q.r.q)$; оно не 5-гонально, для $r = 3$, а q четно, или если $q = 3$, а r четно, но оно вложимо в Z_∞ , если r, q четны и в $\frac{1}{2}Z_\infty$ в противном случае.

Таблица 5.1

Золотые и обычные усечения

размерность	2	3	4	5
$P = (F, V)$	$\alpha_2 = (\gamma_1, \gamma_1)$	$\beta_3 = (\alpha_2, \gamma_2)$	24ячейка = = (β_3, γ_3)	$\text{Vo}(D_4) =$ (24ячейка, γ_4)
$\text{tr}(P)$	$\text{tr}(\alpha_2) = C_6$	$\text{tr}(\beta_3)$	$\text{tr}(24\text{ячейка})$	$\text{tr}(\text{Vo}(D_4))$
границы	$\text{tr}(\gamma_1) = \gamma_1$	$\text{tr}(\alpha_2), \gamma_2$	$\text{tr}(\beta_3), \gamma_3$	$\text{tr}(24\text{ячейка}), \gamma_4$
вложимость в	H_3	H_6	H_{12}	Z_{12}
$\text{gtr}(P)$	$\text{gtr}(\alpha_2) = C_3$	$\text{gtr}(\beta_3) = \text{Ico}$	$\text{gtr}(24\text{ячейка}) =$ $= s(3, 4, 3)$	$\text{gtr}(\text{Vo}(D_4)) =$ $= s(3, 4, 3, 3)$
границы	γ_1	α_2	Ico, α_3	$s(3, 4, 3), \alpha_4, \beta_4$
вложимость в	$\frac{1}{2}H_3$	$\frac{1}{2}H_6$	$\frac{1}{2}H_{12}$	$\frac{1}{2}Z_{12}$
размерность	3	4	5	
паркет	$\text{Vo}(A_2^* = A_2) =$ $= (6^3)$	$\text{Vo}(A_3^* = D_3^*)$	$\text{tr}(\text{Vo}(D_4^* = D_4))$	
элементы паркета	$\text{tr}(\alpha_2)$	$\text{tr}(\beta_3)$	$\text{tr}(24\text{ячейка}), \gamma_4$	
вложимость в	Z_3	Z_6	Z_{12}	

Приведем примеры результатов по вложимости для высших размерностей:

$$\text{Ambo}(\alpha_d) = T(d+1) \rightarrow \frac{1}{2}H_{d+1} \quad \text{для } d \geq 3$$

(выпуклая оболочка всех бинарных последовательностей длины $d+1$, в которые входят ровно две единицы), а вот $\text{Ambo}(\beta_d)$, $\text{Ambo}(\gamma_d)$ для $d \geq 3$ и $(\text{Ambo}(P))^*$ для всех шести правильных 4-многогранников P не 5-гональны.

В таблице 5.1, мы используем обозначения Коксетера $s(3, 4, 3)$ и $s(3, 4, 3, 3)$ для снаб 24-ячейки (которая возникает как золотое усечение 24-ячейки; см. также гл. 7) и для сотов, возникающих как золотое усечение разбиения Вороного $\text{Vo}(D_4)$ (см. [Сохе35]).

Вложение $s(3, 4, 3, 3) \rightarrow \frac{1}{2}Z_{12}$ приведено в [DDS05]. Шпекторов заметил также, что вложение разбиений $\text{gtr}(P)$. Таблицы 5.1 могут быть получены из вложений $\text{tr}(P)$ так же как графы $\text{gtr}(P)$ (для четырех, указанный в табл. 5.1 разбиений) изоморфны двудольным удвоениям графов $\text{tr}(P)$.

Таблица 5.2

Все вложимые правильные $P = (F = \gamma_n, V)$

V	α_n	β_n	$C_{k \geq 5}$	Ico	600-ячейка
размерность n	≥ 2	≥ 2	2	3	4
вложимость в	H_{n+1}	Z_n	Z_∞	Z_∞	Z_∞

Замечания к табл. 5.1:

- (i) в случае размерностей $d = 2, 3, 4$ имеются вложения

$$\text{tr}(P) \rightarrow H_n, \quad \text{gtr}(P) \rightarrow \frac{1}{2}H_n, \quad \text{где } n = 3 \times 2^{d-2},$$

а полиэдры $\text{tr}(P)$, $\text{gtr}(P)$ имеют по $n \times 2^{2^{d-2}}$, $n \times 2^{2^{d-2}-1}$ вершин соответственно;

- (ii) $\text{Ambo}(P)$ не 5-гонален, если $P = \beta_3$, 24-ячейка, $\text{Vo}(D_4)$;
 (iii) $\text{tr}(P)$ является зонотопом, если $P = \alpha_2, \beta_3$, 24-ячейка, $\text{Vo}(D_4)$, но для всех остальных правильных d -мерных паркетов при $d \geq 3$ $\text{tr}(P)$ не 5-гонален;
 (iv) сравните табл. 5.1, характеризующую правильные $P = (F, V = \gamma_n)$, с табл. 5.2, характеризующей правильные $P = (F = \gamma_n, V)$.

5.2. Частичные усечения и каптинги платоновых тел

Будем называть i -усечением и i -каптингом (обыкновенное короткое) усечение при i вершинах многогранника P и, соответственно, добавление пирамид на i его гранях. Триакис- (тетракис-, пентакис-, гексакис-) i -каптинг — это i -каптинг только на 3-гранях (4-, 5-, 6-гранях соответственно). Каптинг на всех гранях называется также *омпи-каптингом* *всюду* или *стелляция*.

Предположение 5.2.

- (i) i -усеченный $\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_{4+i}$, $0 \leq i \leq 3$; 4-усеченный α_3 не 5-гонален; двойственный i -усеченный $\alpha_3 = i$ -каптингованный $\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_{3+i}$, $0 \leq i \leq 4$.
 (ii) i -усеченный $\beta_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_4, \frac{1}{2}H_6, H_4, H_6$ при $i = 0, 1, 2$ (на двух противоположных вершинах), 6 (т. е. на всех 6 вершинах), не 7-гонален (когда обе две вершины ребра не усечены); не 5-гонален в противоположном случае;

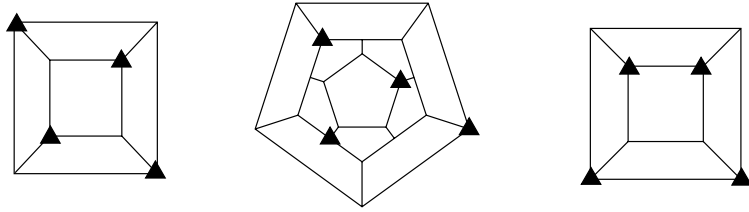


Рис. 5.1. Три дуально вложимых 3_n , $n = 16, 28, 16$

двойственный i -усеченный $\beta_3 = i$ -каппингованный $\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_6$, если $i \leq 2$ или если $i = 3$ и любые две каппингованные грани γ_3 не противоположны; в противном случае не 5-гонален.

- (iii) i -усеченный $\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_{6+i}$, если $i = 0, 1, 2$ (расстояние между двумя усеченными вершинами равно одному или трем), 3 (они образуют P_3), 4 (эти три вершины образуют C_4); в противном случае не 5-гонален;

двойственный i -усеченный $\gamma_3 = i$ -каппингованный $\beta_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_{4+i}$ при $0 \leq i \leq 8$.

- (iv) i -каппингованный икосаэдр $\rightarrow \frac{1}{2}H_{6+i}$ при $0 \leq i \leq 20$;
 i -каппингованный додекаэдр $\rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$ при $0 \leq i \leq 12$.

Замечание 5.1.

- (i) Среди перечисленных выше ℓ_1 -графов единственный не ℓ_1 -жесткий — это $\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_3, \frac{1}{2}H_4$.
- (ii) γ_3 , 4-усеченный при четырех несмежных вершинах, или на четырех вершинах, образующих два противоположных ребра, является $\text{Cham}(\alpha_3)$ или скрученным $\text{Cham}(\alpha_3)$ соответственно; они изображены на рис. 5.1. Остаются еще четыре способа 4-усечь γ_3 : когда эти четыре вершины индуцируют один из графов $C_4, P_4, P_3 + K_1$ и $K_{1,3}$. Все три способа 3-усечь γ_3 соответствуют трем графам относятся к вершинам на $P_3, P_2 + K_1$ и $3K_1$, порожденных усекаемыми вершинами.

Вложения $P + \text{Pyr}_3$

Пусть G — плоский граф, вложимый в $\frac{1}{2}H_m$, и пусть $F = (a, b, c)$ — его фиксированная треугольная грань. Зафиксируем вложение E графа G в $\frac{1}{2}H_m$; пусть t_a, t_b, t_c — разрезы (из полного семейства

выпуклых разрезов, соответствующего фиксированному вложению) такие, что t_a проходит через стороны (a, b) и (a, c) , t_b проходит через стороны (b, a) и (b, c) , а t_c проходит через стороны (c, a) и (c, b) треугольной грани $F = (a, b, c)$. Мы будем говорить, что вложение E A -продолжаемо (или B -продолжаемо) до вложения графа G , каппингованного на треугольной грани F , если мы получаем вложение простым пополнением разрезов вложения E , проходящих через F (или, соответственно, таким пополнением разрезов и добавлением нового разреза). A - и B -продолжения соответствуют вложениям $\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_3$ и $\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_4$ для пирамиды α_3 на треугольной грани F . Очевидно, что A -продолжение дает вложение каппингованного G в тот же самый полукуб $\frac{1}{2}H_m$, в то время как B -продолжение дает вложение в $\frac{1}{2}H_{m+1}$. Будем называть a -, b - или c -вторичным каждое ребро G , которое смежно соответствующей вершине a, b или c грани F , но отлично от сторон F , смежных этой вершине.

Предположение 5.3.

- (i) Фиксированное вложение E графа G одновременно и A -, и B -продолжаемо до вложения его каппинга на треугольной грани F если и только если ни один из разрезов t_a, t_b, t_c не проходит ни через одно из a -, b - или c -вторичных ребер.
- (ii) Вложение E A -продолжаемо, если и только если никакой из разрезов t_i ($i = a, b, c$) не проходит через j -вторичное ребро ($j = a, b, c$, но $j \neq i$).
- (iii) Вложение E B -продолжаемо, если и только если никакой из разрезов t_i ($i = a, b, c$) не проходит через i -вторичное ребро.
- (iv) В противном случае вложение E не продолжаемо ни до какого вложения каппинга G на грани F .

Например, единственное вложение $\text{Prism}_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_5$ одновременно и A -, и B -продолжаемо до вложений $\text{Prism}_3 + \text{Pyr}_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_5, \frac{1}{2}H_6$. Вложения $\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_3, \rightarrow \frac{1}{2}H_4$ в действительности являются A - и B -продолжениями единственного вложения $C_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_3$. Первое из них допускает только B -продолжение, а второе — только A -продолжение; оба они дают вложение 1-каппингованного α_3 (т.е. двойственного Prism_3) в $\frac{1}{2}H_4$. И наконец, единственное вложение плоской триангуляции

$$K_{\{1,2,3,4,5,6\}} - P_{3142} \rightarrow \frac{1}{2}H_5$$

не допускает ни A -, ни B -продолжения, если поместить Pyr_3 на его грань (1, 5, 6) или грань (4, 5, 6); действительно, при этом получается не 5-гональный граф¹⁾.

Каптинг некоторых почти правильных ℓ_1 -полиэдров на треугольных и четырехугольных гранях

1. Ясно, что сформулированное выше предложение позволяет судить о вложимости любого триакс i -каптинга ℓ_1 -полиэдра P .

2. i -каптингованная $\text{Pyr}_4 \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}H_{4+i}, & \text{если каптингована 4-уголь-} \\ & \text{ная грань,} \\ \frac{1}{2}H_{3+i}, & \text{в противном случае;} \end{cases}$

1-усеченная Pyr_4 (=двойственная 1-каптингованной Pyr_4) = γ_3 , если усечена вершина, или, в противном случае, это №43* (и таким образом, она не 5-гональна).

3. i -пополненная Prism_m — это Prism_m каптингованная на i 4-угольных гранях, которые, (при $m = 4$) не являются двумя m -угольными гранями оснований; i -пополненная

$$\text{Prism}_m(m = 3, 4) \rightarrow \frac{1}{2}H_{m+2} \quad \text{для } i = 0, 1, 2$$

она ℓ_1 -невложима для $i \geq 3$.

4. Снаб куб $\rightarrow \frac{1}{2}H_9$, но любой его тетракис- i -каптинг не 5-гонален.
5. Ромбикубоктаэдр $\rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$. Единственный 5-гональный его тетракис- i -каптинг (который к тому же вложим в $\frac{1}{2}H_{10}$) является каптингом не более чем на двух или трех непротивоположных 4-угольных гранях, выбранных среди шести 4-угольных граней, смежных только с 4-угольными гранями. Следует обратить внимание на аналогию с каптингом γ_3 (Утверждение 5.2 (ii)).
6. Всюду тетракис каптингованного усеченного $\beta_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_{12}$.
7. Всюду каптингованный α_3 ($3_{12}^*(T_d)$) и всюду каптингованный усеченный α_3 ($3_{36}^*(T_d)$) вложимы в $\frac{1}{2}H_7$ и $\frac{1}{2}H_{11}$ соответственно, но всюду каптингованный $3_{36}(T_d)$ ($3_{108}^*(T_d)$) и всюду каптингованный усеченный куб ℓ_1 -невложимы. (Здесь мы используем обозначения $3_n, 4_n, 5_n$, введенные в разделе 12.2.)

¹⁾Планарный граф $K_{123456} - P3142$ является реберным остовом трех плоских триангуляций (трех разных триангуляций одного треугольника) или единственной триангуляции сферы.

Вложение вытягиваний вдоль простых циклов

Определение таких вытягиваний дано в разделе 1.5. Будем называть неизометричный простой цикл C в плоском графе G почти изометричным, если для любых двух вершин a и b на нем таких, что

$$d_C(a, b) > d_G(a, b),$$

справедливо

$$d_C(a, b) = 1 + d_G(a, b),$$

и существуют два геодезических пути из a в b (т. е. длины $d_G(a, b)$), один из которых полностью лежит внутри, а другой полностью снаружи (простого) цикла C . На рис. 5.2 приведен пример плоского графа, вложимого в $\frac{1}{2}H_8$ и такого, что отмеченный простой 8-цикл почти изометричен (на этом 8-цикле отмечены две противоположные вершины).

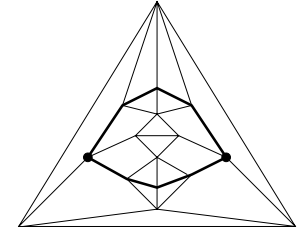


Рис. 5.2. Плоский граф, вложимый в $\frac{1}{2}H_8$ и такой, что отмеченный простой 8-цикл не изометричен, хотя почти изометричен

Предположение 5.4. Пусть G — плоский граф, вложимый в $\frac{1}{2}H_m$, а C — его фиксированный простой цикл. Тогда для вытягивания G вдоль C справедливо следующее:

- (i) оно вложимо, если и только если C изометричен или почти изометричен,
- (ii) если оно вложимо, то оно вложимо в $\frac{1}{2}H_{m+2}$. Полное семейство выпуклых разрезов состоит из всех таких разрезов G (пополненного еще одним, если он пересекает C ; и остается или нет альтернирующим, судя по тому, каким он был в G), к которым добавлены два противоположных разреза через кольцо 4-угольников, заменяющее простой цикл C ,
- (iii) оба простых цикла, на которые распадается C при этом вытягивании вдоль C , изометричны в вытягивании, если C изометричен в G ; они ни изометричны, ни почти изометричны, если C почти изометричен.

5.3. Шамферинг платоновых тел

Напомним, что $\text{Cham}(P)$ обозначает шамферинг полиэдра P , а $\text{Cham}_t(P)$ обозначает t -кратную итерацию шамферинга. $\text{Cham}(P)$

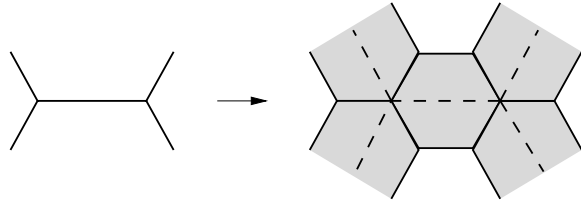
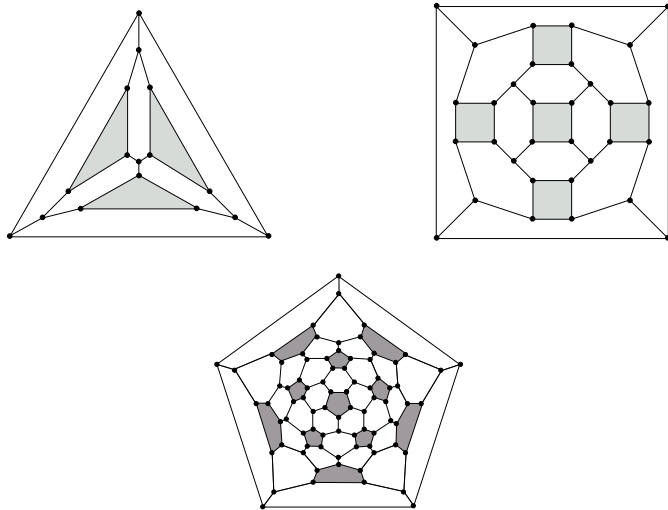


Рис. 5.3. Шамферинг

получается добавлением призм на все грани P и удалением первоначальных ребер; см. рис. 5.3, 5.4.

Предположение 5.5. Пусть P — одно из пяти платоновых тел и $t \geq 1$. Тогда $\text{Cham}_t(P)$ или двойственный ему являются ℓ_1 -графами только в следующих случаях:

- (i) $(\text{Cham}(\alpha_3))^* \rightarrow \frac{1}{2}H_8$,
- (ii) $\text{Cham}(\gamma_3) \rightarrow H_7$ (зоноэдр, порожденный $e_1, e_2, e_3, e_1 \pm e_2, e_1 \pm e_3$; это двойственный тетракис-кубоктаэдр),
- (iii) $\text{Cham}(\text{Do}) \rightarrow \frac{1}{2}H_{22}$ (двойственный пентакис-иксидодекаэдр; см. рис. 2.4).

Рис. 5.4. Шамферинг $GC_{2,0}(G_0)$, когда G_0 — тетраэдр, куб и додекаэдр

Замечание 5.2.

- (i) $\text{Cham}(P)$ — это частично усеченный зоноэдр в следующих случаях:
 - $\text{Cham}(\alpha_3)$, т.е. куб, усеченный при четырех несмежных вершинах,
 - $\text{Cham}(\beta_3)$, $\text{Cham}(\gamma_3)$ — это ромбические додекаэдры, усеченные при всех 3-валентных и, соответственно, при всех 4-валентных вершинах,
 - $\text{Cham}(\text{Ico})$, $\text{Cham}(\text{Do})$ — это триаконтаэдры, усеченные при всех 3-валентных и, соответственно, при всех 5-валентных вершинах.
- (ii) Более того, $\text{Cham}_t(\alpha_3)$ ($t = 1, 2$), $\text{Cham}_t(\beta_3)$ ($t = 1, 2$), $\text{Cham}_t(\gamma_3)$ ($t \geq 2$), $\text{Cham}_2(\text{Ico})$, $(\text{Cham}_t(\beta_3))^*$ ($t \geq 1$), $(\text{Cham}(\gamma_3))^*$, $(\text{Cham}(\text{Ico}))^*$, $(\text{Cham}(\text{Do}))^*$ не 5-гональны. (Пример доказательства: $\text{Cham}(P)$ не 5-гонален, если полиэдр P содержит индуцированный $K_4 - e$, поскольку в таком случае $\text{Cham}(P)$ содержит изометрический не 5-гональный 11-вершинный граф, состоящий из цикла C_{10} с новой точкой, смежной только с точками 1, 5, 6 цикла C_{10} .)
- (iii) $\text{Cham}(\text{Prism}_6)$, $\text{Cham}(\text{RbDo})$ не 5-гональны.

Итерированные шамферинги и двойственные им используются при сжатии изображений; например, $(\text{Cham}_t(\gamma_3))^*$ возникает там как $(t+1)$ -я аппроксимация некоторого фрактального распределения на β_3 .

Двойственные t -шамферинговым тетраэдру, кубу и додекаэдру (см. примеры на рис. 5.5) используются для триангуляции, рассматриваемые как метод разбиения (геометрической области на полиэдральные элементы), в геометрическом компьютерном дизайне, в графической визуализации, объемном моделировании и в конечноэлементном анализе. В частности, они используются для изучения сферических вейвлетов, приводящих к эффективным алгоритмам в компьютерной графике.

Понятие шамферинга может быть распространено на неполиэдральные графы. Например, призму Prism_m можно рассматривать как шамферинг цикла C_m . С другой стороны, это понятие может быть естественным образом распространено на простой n -многогранник P . Обозначим $\tilde{\text{Cham}}(P)$ двойственный выпуклой оболочке всех вершин P^* и срединных точек всех ребер P^* . В качестве обобщения сформулированного выше предложения получаем

$$(\tilde{\text{Cham}}(\alpha_n))^* \rightarrow \frac{1}{2}H_{2n+2}.$$

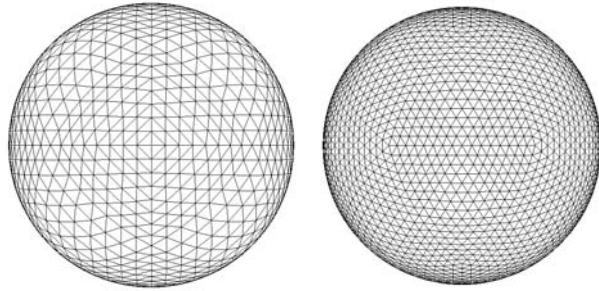


Рис. 5.5. Двойственный 4-шамферингованному кубу $4_{2048}^*(O_h)$ и двойственный 4-шамферингованному додекаэдру $5_{5120}^*(I_h)$

Заметим, что

$$\alpha_n \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}, \quad \text{Ambo}(\alpha_n) \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}$$

и $(\text{Cham}(\alpha_n))^* = \text{conv}(V(\alpha_n) \cup V(\text{Ambo}(\alpha_n)))$.

(Напомним, что $V(P)$ означает множество вершин P). $\text{Cham}(P)$ — это $(2, 0)$ -липфрэг в терминах [Sah94]. Двойственный к $(3, 0)$ -липфрогу соответствует размещению каптингованных антипризм на всех гранях P и заменой каждого из первоначальных ребер антипризмы (рассматриваемого как диагональ четырехугольника) второй диагональю.

92 правильных полиэдра (не полуправильные)

Теперь мы покажем, что ровно 36 из 92 правильных многогранников вложимы.

Эти полиэдры были найдены в [John66] и [Zalg69]. Мы используем названия и номера правильных полиэдров (не полуправильных) из [Berm71], где они даны под номерами №21–112 из списка всех 112 полиэдров с правильными гранями; в [Zalg69] они идут под номерами 1–92. В обеих статьях они даны в виде подходящих комбинаций 28 базовых полиэдров $M_1 - M_{28}$. В [KoSu92] можно найти координаты и прекрасные изображения этих полиэдров.

28 базовых полиэдров с правильными гранями включают:

- правильные M_1, M_{15} ; пирамиды M_2, M_3 ; куполы $M_4 - M_6$;
- девять архимедовых полиэдров M_i при $i \in \{10-12, 16-19, 26, 27\}$ (это все архимедовы полиэдры без двух квазиправильных и без усечений этих последних двух квазиправильных полиэдров);
- M_{13}, M_{14} (это триуменьшенный, парауменьшенный RIDo, где мы используем обозначение ромбоикосидодекаэдра RIDo); M_7 (это триуменьшенный Ico); пятиугольная ротунда M_9 ;
- и еще восемь других, их сложные названия отражают их крайнее своеобразие (M_{25} называется либо *снаб дисфеноид*, либо *додекаэдр сиамеча*).

Остаются еще четыре архимедовых полиэдра из табл. 4.1, 4.2, мы опишем их в терминах этих комбинаций:

$$\text{кубоктаэдр Cbt} = \text{Cup}_3 + \overline{\text{Cup}_3},$$

$$\text{икосидодекаэдр} = M_9 + \overline{M_9},$$

$$\text{RIDo} = M_{14} + 2\text{Cup}_5,$$

$$\text{ромбокубоктаэдр Rcbt} = \text{Cup}_4 + \text{Prism}_8 + \text{Cup}_4.$$

(Сумма $P + \overline{P}$ обозначает объединение двух копий P по их грани с нечетным числом вершин; причем одна из копий повернута по отношению к другой.)

Лемма 6.1. *Справедливы утверждения:*

- (i) M_n не 5-гональны при $n = 4, 8, 10-13, 19-21, 23-25$,
- (ii) M_{28} (= №105, *снаб APrism_4*) не 7-гонален,

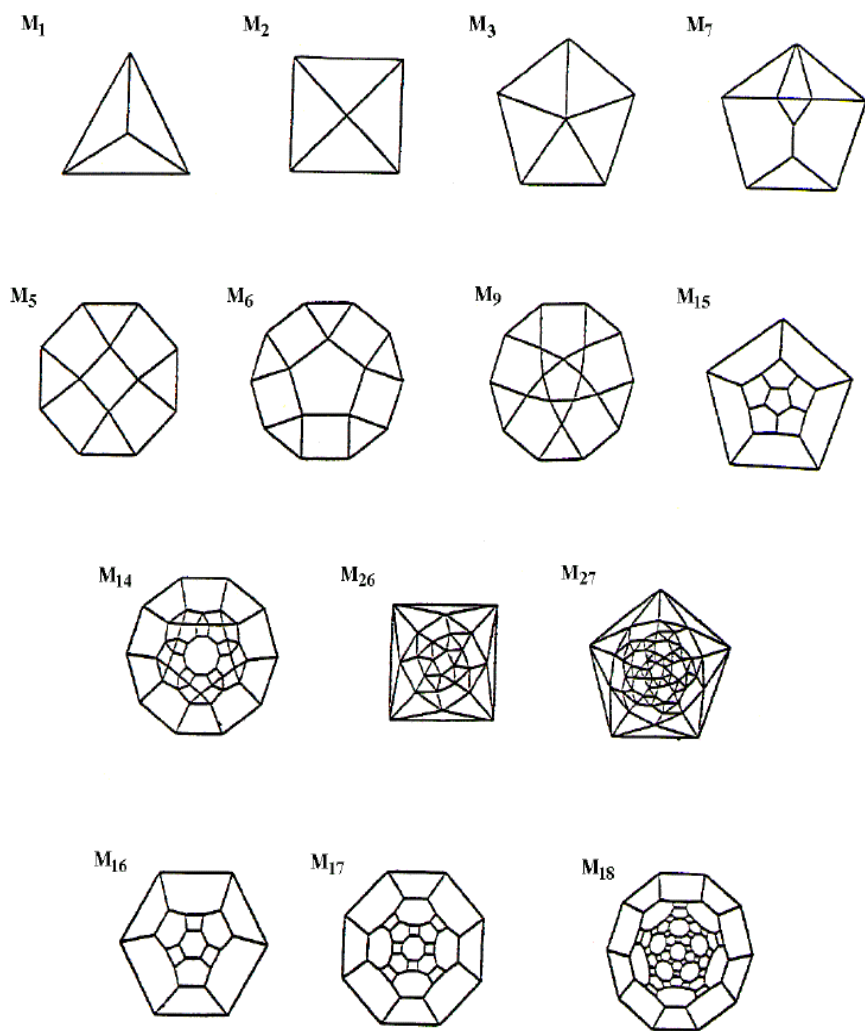


Рис. 6.1. Все вложимые базисные правильные полиэдры M_i , $1 \leq i \leq 28$

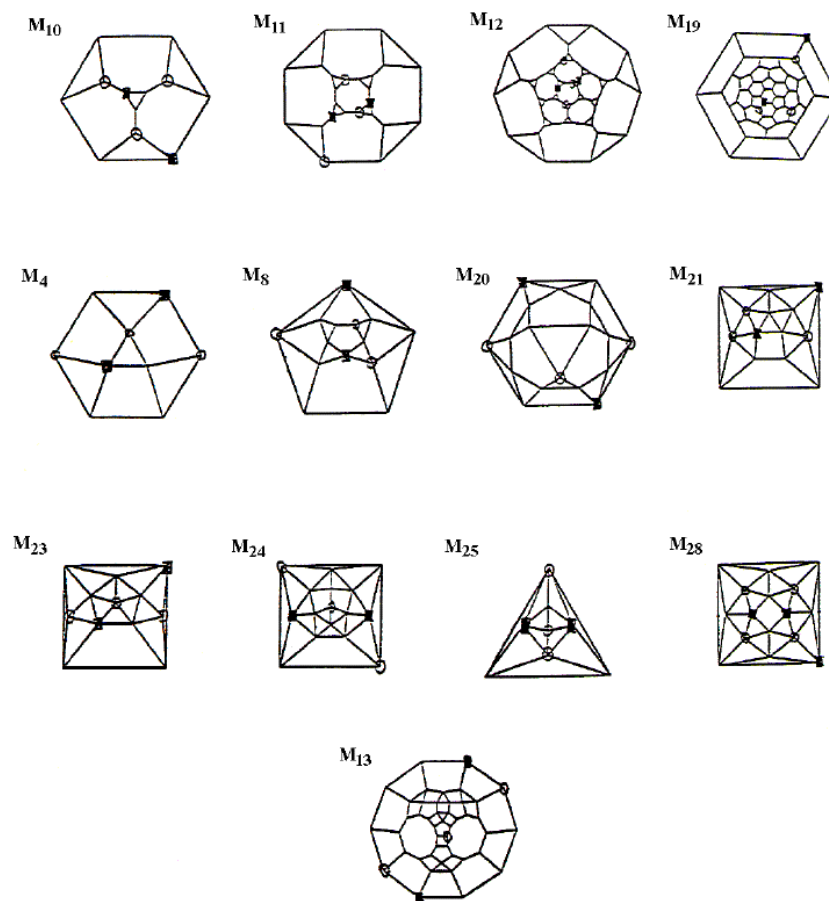


Рис. 6.2. Все не гиперметрические базовые правильные полиэдры M_i , $1 \leq i \leq 28$

- (iii) M_{22} (= № 106, сфенокорона) является гиперметрическим, но не ℓ_1 ,
- (iv) оставшиеся 14 полиэдров M_n обладают ℓ_1 -остовами (см. рис. 6.1),
- (v) M_n^* обладает ℓ_1 -остовом при $n = 1-3, 10-12, 15, 16, 19, 23, 25$, и они не 5-гональны для остальных 17 полиэдров M_n .

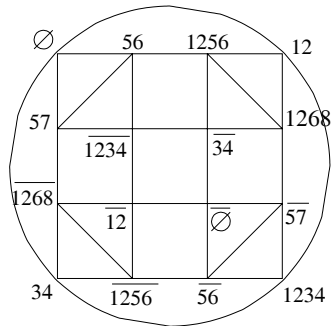
Лемма 6.2. Остовы следующих пяти полиэдров являются гиперметрическими, но не ℓ_1 (три из них изображены на рис. 15.4):

- № 30 = $\text{APrism}_4 + \text{Pyr}_4$ (жировытянутая $\text{Py}_4 = 1\text{-APrism}_4$),
- № 37 = $\text{Py}_4 + \text{APrism}_4 + \text{Py}_4$ (жировытянутая $\text{BPy}_4 = 2\text{-APrism}_4$),
- № 71 = $\text{Prism}_3 + 3\text{Py}_4$ (трипополненная Prism_3),
- № 106 = M_{22} (сфенокорона),
- № 107 = $M_{22} + \text{Py}_4$ (пополненная сфенокорона).

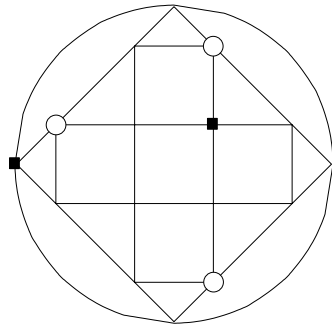
Предположение 6.1. Кроме не 7-гональных № 105 и описанных выше пяти ℓ_1 -невложимых гиперметрических (№ 30, 37, 71, 106, 107) остаются еще 86 правильных полиэдров. Они включают 50 не 5-гональных и 36, обладающих ℓ_1 -вложимыми остовами: № 21, 22, 24–29, 31, 32, 34, 39–41, 44, 48, 69, 70, 72–76, 78–84, 92–95, 100.

Следствие 6.1. Об ℓ_1 -статусе восьми выпуклых дельтаэдров можно утверждать следующее:

- (i) $\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_3$, № 32 = $\text{BPy}_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_5$, $\beta_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_4$, икосаэдр $\rightarrow \frac{1}{2}H_6$,
- (ii) № 33 = BPy_5 и № 104 = M_{25} (снаб дисфеноид) не 5-гональны,
- (iii) № 37, 71 гиперметричны и ℓ_1 -невложимы.

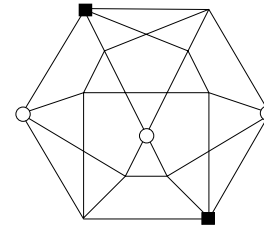


Квадратная ортобикупола
№ 48 = $\text{Cup}_4 + \text{Cup}_4 \rightarrow \frac{1}{2}H_8$

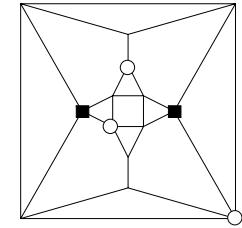


Квадратная гиروبикупола
№ 49 = $\text{Cup}_4 + \text{Cup}_4$, не 5-гональный

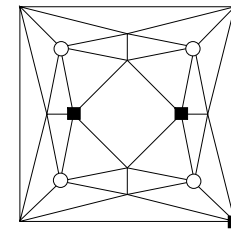
Рис. 6.3. Две бикуполы



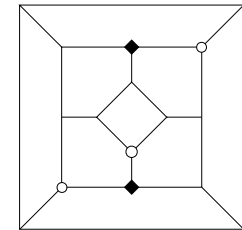
а) Триангулированная гебисфеноротонда M_{20} ,



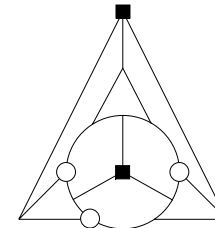
б) Билунабиротонда M_8 ,



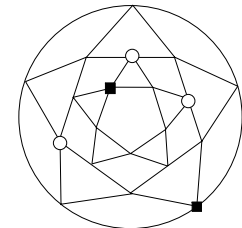
с) M_{28} , плоскооская APrism_4 ,



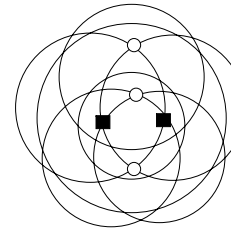
д) Barrel_4 ,



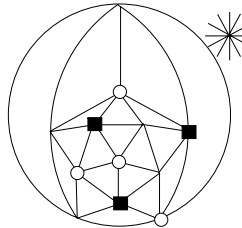
е) Двойственный трипополненной призме Prism_3 ,



ф) Двойственный ромбоикосаэдру $Pz(5)^* = \text{APrism}_5^3$,

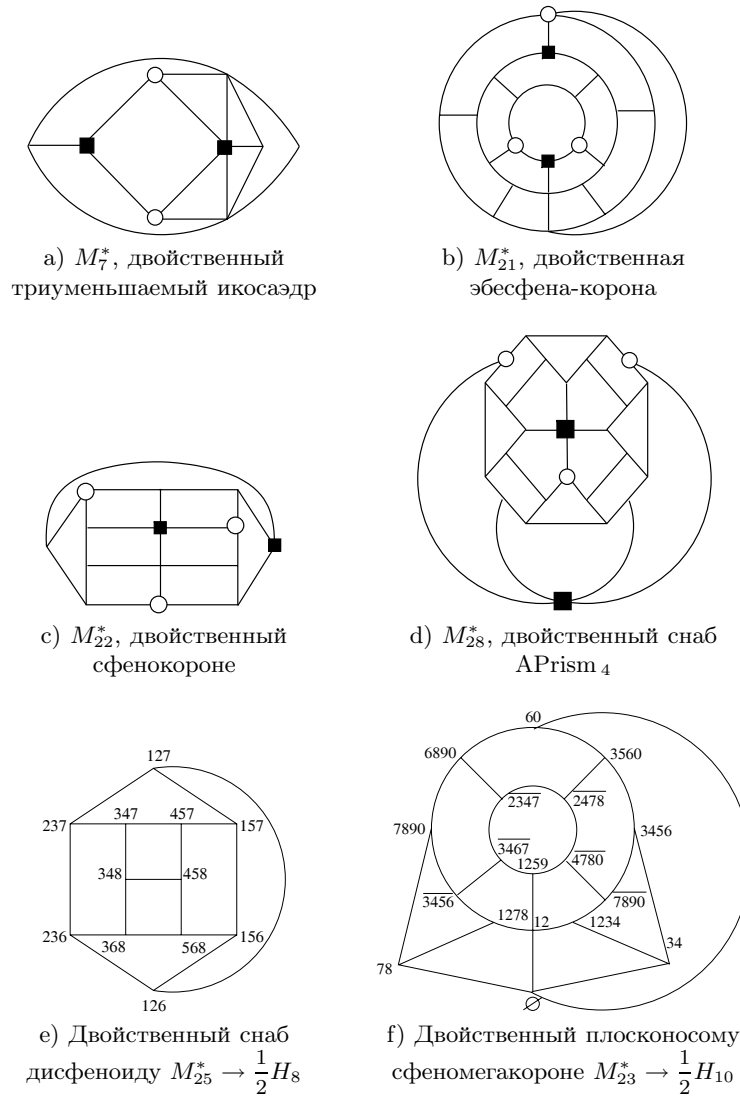


г) Граф Кёстера,



h) 4-многогранник Руг (икосаэдр)

Рис. 6.4. Примеры не гиперметрических многогранников

Рис. 6.5. Некоторые двойственные базовым полиэдрам M_i

Заметим, что все пять *двойственных* усеченному P , где P — платоново тело, симплициальны и обладают ℓ_1 -остовами. Они вкладываются в $\frac{1}{2}H_n$ при $n = 7, 6, 12, 10, 16$, если $P = \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, Ico, Do$ соответственно. Среди других симплициальных каталановых полиэдров, а именно $Prism_n^*$ и двойственных усеченным Q (где Q — кубоктаэдр или икосидодекаэдр), только $Prism_n^*$ ($n = 3, 4$) 5-гональны; среди оставшихся девяти каталановых полиэдров (включая $APrism_n^*$, $n \geq 4$) только двойственные Q 5-гональны.

Замечание 6.1. Двойственные правильные полиэдрам с правильными гранями.

Примерами не 5-гональных полиэдров служат двойственные № 23–25 (куполы M_4 – M_6), № 46 (жиробифастигиум); № 26, 83, 100, 103, 105, 109–112, которые являются M_i при $i = 9, 7, 14, 13, 28, 21, 24, 8, 20$ соответственно.

Примерами ℓ_1 -графов двойственных ℓ_1 -графам служат двойственные № 21–22, 27–29, 32–35 и не двойственные 5-гональным № 36, 104 ($=M_{25}$), 108 ($=M_{23}$). А именно, $M_{23}^* \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$, $M_{25}^* \rightarrow \frac{1}{2}H_8$. Кстати, M_{25}^* ([Well84], с. 75) вместе с 17-эдром заполняет 3-пространство. Двойственные к № 34–36 — это $Prism_n^2$ для $n = 3, 4, 5$.

Кроме того, двойственные к ℓ_1 -невложимым, но гиперметрическим, № 30, 37 первый вложим в $\frac{1}{2}H_8$, а второй не 7-гонален, в то время как двойственные к № 71, 106 ($=M_{22}$), 107 не 5-гональны.

Приведем еще примеры пар (P, P^*) двойственных многогранников, оба из которых обладают ℓ_1 -остовами:

- $(\alpha_n, \alpha_n), (\beta_n, \gamma_n), (Pug_n^m, Pug_n^m)$ при $n \in \{3, 4, 5\}, (Ico, Do)$,
- $(i$ -каппингованный α_3 , двойственный ему) при $i \neq 4$,
- $(i$ -каппингованный β_3 , двойственный ему) при $i \leq 2$,
- $(Prism_n^m, VPrism_n^m)$ при $n \in \{3, 4\}$.

Полупроводниковые и правильные n -многогранники

Напомним, что *правильный n -многогранник* — это такой многогранник, у которого фасеты и вершинные фигуры (выпуклые оболочки всех срединных точек ребер, проходящих через данную вершину) правильные.

Правильногранный n -многогранник с правильными гранями — это такой многогранник, у которого правильные только фасеты. *Полуправильный n -многогранник* — это правильногранный n -многогранник с эквивалентными вершинами (т. е. группа симметрий этого многогранника транзитивна на вершинах). Он *квазиправильный*, если кроме того, эта группа транзитивна на ребрах. Все правильные многогранники с правильными гранями известны.

7.1. Полуправильные (но не правильные) n -многогранники

Они входят в следующий список, открытый Госсетом в 1897 году (см., например, [BlBl91]; мы будем использовать обозначения из [Coxe73]).

В размерности 4: $0_{21} = \text{Ambo}(\alpha_4)$ с остовом $G(0_{21}) = T(5) \rightarrow \frac{1}{2}H_5$,

снаб 24-ячейка $s(3, 4, 3) \rightarrow \frac{1}{2}H_{12}$ и *октикаосаэдрический многогранник* (не 5-гональный).

В размерности 5: 1_{21} с остовом $G(1_{21}) = \frac{1}{2}H_5$.

В размерности 6: 2_{21} с гиперметрическим, но ℓ_1 -невложимым остовом.

В размерности 7: 3_{21} с гиперметрическим, но ℓ_1 -невложимым остовом.

В размерности 8: 4_{21} , остов которого — это корневой граф всех 240 корней системы корней E_8 . (Это не ℓ_1 -граф, поскольку он содержит остов 2_{21} в качестве индуцированного подграфа диаметра два, а значит, изометрического подграфа.)

Итак, кроме последовательностей n_{21} многогранников размерности $(n+4)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$, имеются еще два исключительных многогранника, оба они 4-мерны: $s(3, 4, 3)$ и еще один невлжимый, у которого есть 120 икосаэдральных и 600 октаэдральных фасет (октикаосаэдральный многогранник). $G(0_{21})$ — это граф Джонсона $J(5, 2)$, а $G(1_{21}) = \frac{1}{2}H_5$; оставшиеся три невлжимы. 2_{21} и 3_{21} — это многогранники Делоне решеток E_6 и E_7 ; они гиперметричны.

$s(3, 4, 3)$ возникает как выпуклая оболочка 96 точек, делящих все 96 ребер 24-ячейки в одном и том же отношении $\tau : 1$, где $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ обозначает золотое отношение. Икосаэдр возникает таким же образом из октаэдра. Все перестановки $(\pm\tau, \pm\tau, 0, 0)$ дают все вершины 24-ячейки; все четные перестановки $(\pm\tau, \pm 1, \pm\frac{1}{\tau}, 0)$ дают вершины $s(3, 4, 3)$. У $s(3, 4, 3)$ есть 120 тетраэдральных и 24 икосаэдральных фасет. Применив операцию каппинга (т. е. поместив пирамиду к каждой икосаэдральной ячейке, мы получим правильную 600-ячейку, которая невлжима, поскольку $G(\text{Руг}(\text{Ико}))$ — не 7-гональный изометричный подграф графа $G(600\text{-ячейка})$ (на самом деле, $G(600\text{-ячейка})$ также не 5-гонален).

7.2. Правильные n -многогранники (но не полуправильные)

Рассматривая список таких многогранников, приведенный в [BlBl91], мы получаем: $G(\text{Руг}(\beta_{n-1})) = K_{1,2,\dots,2}$ — изометричный подграф $K_{n \times 2}$, а $G(\text{ВРуг}(\alpha_{n-1})) = K_{n+2} - e = K_{2,1,\dots,1}$ — изометричный подграф $K_{(n+1) \times 2}$.

Итак, оба эти графа являются ℓ_1 -графами. Кроме того, для следующих двух 4-многогранников справедливо:

- $\text{Руг}(\text{Ико})$ не 7-гонален, $\text{ВРуг}(\text{Ико})$ не 5-гонален (его остов содержит $K_5 - P_2 - P_3$);
- Объединение 0_{21} и $\text{Руг}(\beta_3)$ (где β_3 — фасета 0_{21}) $\rightarrow \frac{1}{2}H_5$;
- и наконец, любой 4-многогранник, получающийся из 600-ячейки путем специальных сечений вершин, за исключением снаб 24-ячейки, невлжим.

7.3. Архимедовы 4-многогранники

Однородным разбиениям 3-пространства родственны конечные аналоги — *архимедовы 4-многогранники*. Это многогранники, имею-

щие транзитивную на вершинах группу симметрии, а их ячейки — платоновы или архимедовы многогранники, а также правильные призмы или антипризмы. Поэтому они представляют собой далекое обобщение полуправильных 4-многогранников. Все они перечислены в [Conw67]:

- 1) 44 многогранника (отличных от призмы с основаниями на γ_3), полученных с помощью конструкции калейдоскопа Витхоффа из 4-мерных неприводимых (точечных) групп отражений;
- 2) 17 призм над платоновыми (отличных от γ_3) и архимедовыми телами;
- 3) призмы над APrism_n при всех $n > 3$;
- 4) дважды бесконечное множество многогранников, которые являются прямыми произведениями двух правильных многоугольников (если один из многоугольников — квадрат, тогда мы получаем призмы над 3-мерными призмами);
- 5) снаб 24-ячейка;
- 6) новый многогранник, называемый *большой антипризмой*, у которого 100 вершин (все из 600-ячейки), 300 клеток α_3 и 20 клеток APrism_5 (эти антипризмы образуют две сцепленных трубки).

Многогранники, полученные конструкцией Витхофа из п. 1) выше, иногда обозначаются $P(V)$, где P есть правильный 4-мерный многогранник, а $V \leq \{0, 1, 2, 3, 4\}$. В таблице 2 [DDS04] приведены все такие вложимые многогранники, а именно:

$$\begin{array}{ll} \alpha_4(\{0, 1, 2, 3, 4\}) \rightarrow H_1 0; & \alpha_4(\{1, 4\}) = O_{21} = J(5, 2); \\ \beta_4(\{0, 1, 2, 3\}) \rightarrow H_1 6; & \beta_4(\{0, 3, 4\}) \rightarrow \frac{1}{2} H_{12}; \\ 24\text{-ячейка}(\{0, 1, 2, 3\}) \rightarrow H_2 0; & \beta_4(\{0, 1, 2\}) \rightarrow H_{12}; \\ 600\text{-ячейка}(\{0, 1, 2, 3\}) \rightarrow H_6 0; & (\alpha_4(\{0, 3\})^*) \rightarrow H_5; \end{array}$$

Используя факт, что прямое произведение двух графов ℓ_1 -вложимо если и только если вложим каждый из них, и характеристику вложимых архимедовых полиэдров из [DeSt96] (см. табл. 4.1, 4.2 выше), мы можем решить вопрос о вложимости для случаев 2)–4). Итак, снаб 24-ячейка вложима в $\frac{1}{2}H_{12}$ (см. ниже), а Большая Антипризма (как и сама 600-ячейка) не удовлетворяет 7-гональному неравенству, которое представляет необходимое условие вложимости. Отсюда вытекает такое следствие.

Следствие 7.1. Кроме не 7-гональной Большой Антипризмы, шести не 5-гональных призм (над усеченным α_3 , усеченным γ_3 , куб-

октаэдром, усеченным икосаэдром, усеченным додекаэдром и икосидодекаэдром) и перечисленных в случае (1)(см. выше), все архимедовы 4-многогранники вложимы.

7.4. Вложимость снаб 24-ячейки

Снаб 24-ячейку ввел Госсет в 1897 году. У нее 96 вершин, $288+144$ ребер на двух орбитах, $96+96+288$ треугольных граней в трех орбитах и три орбиты ячеек: 24 + 96 тетраэдров и 24 икосаэдра. Ребра одной орбиты окружены одним тетраэдром и двумя икосаэдрами, другой — тремя тетраэдрами и одним икосаэдром. Вершинная фигура (и локальный граф остова) снаб 24-ячейки является триуменьшаемым икосаэдром (тело с правильными гранями $M_7 = \text{№}83$ из списка [Berm71]); она вложима в $\frac{1}{2}H_6$.

Мы приведем вложение снаб 24-ячейки в $\frac{1}{2}H_{12}$ как 48 вектор-столбцов, представляющих некоторые 48 вершин из 96. Оставшиеся 48 столбцов получаются прибавление по модулю 2 к каждому из этих 48 столбцов вектора, состоящего из единиц.

[illegible]

Полициклы и другие графы, имеющие химические приложения

8.1. (r, q) -полициклы

Напомним, что граф G называется k -связным (вершинно), если удаление любых $k-1$ вершин из G не нарушает его связности. *Обхват графа G* — это длина наибольшего изометрического цикла G .

Полицикл или, более точно, (r, q) -полицикл — это простой планарный 2-связный (вершинно) конечный или счетный локально конечный граф G с обхватом r и наибольшей степенью вершин q , что допускает его реализацию на плоскости такую, что:

- (i) степень всех внутренних вершин равна q ,
 - (ii) все внутренние грани являются (комбинаторно) r -угольниками.
- В [DeSt02d] показано, что из (i) и (ii) следует
- (iii) все вершины, ребра и внутренние грани образуют *клеточный комплекс* (т.е. пересечение любых двух граней — ребро, вершина или $\emptyset$).

При этом из (i), (iii) не следует (ii), точно так же, как из (ii), (iii) не следует (i).

Ясно, что полицикл является остовом 3-многогранника если и только если его плоская реализация 3-связна, т.е. степень каждой граничной вершины не меньше трех и у каждой внутренней грани есть хотя бы одно граничное ребро.

Главным примером (r, q) -полицикла служит остов (r^q) , т.е. q -валентного разбиения сферы S^2 , евклидовой плоскости R^2 или гиперболической плоскости H^2 на правильные r -угольники. При $(r, q) = (3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5)$ мы получаем соответственно платоновы тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр на S^2 , но с исключенной внешней гранью; при $(r, q) = (6, 3), (3, 6), (4, 4)$ — это правильные паркетные $63, 36, 44$ плоскости R^2 ; все остальные (r^q) — это правильные разбиения H^2 .

Назовем полицикл *собственным* если он является (остовом) правильного разбиения (r^q) . Назовем собственный (r, q) -полицикл *индуцированным* (более того, *изометрическим*) если он — индуцированный (более того, изометрический) подграф (rq) .

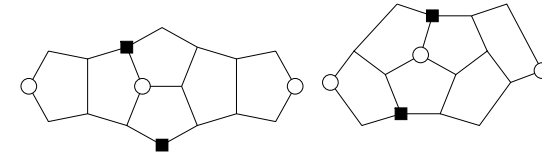


Рис. 8.1. Запрещенные индуцированные подграфы, для вложимых $(5, 3)$ -полициклов

(r^q) вложим $\frac{1}{2}H_3, H_3, \frac{1}{2}H_4, \frac{1}{2}H_{10}, \frac{1}{2}H_6; Z_3, \frac{1}{2}Z_3, Z_2$ и $\frac{1}{2}Z_\infty$ (или, более того, в Z_∞) при $(r, q) = (3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5); (6, 3), (3, 6), (4, 4)$ и $\max(r, q) \geq 7$ (или при четном r), соответственно. Итак, любой изометрический полицикл вложим.

Назовем *вершинно-расщепленным* (34) такой $(3, 4)$ -полицикл, который возникает из (34) следующим образом. Пусть $\nabla C_{\{a,b,c,d\}}$ — (индуцированное в (34)) 4-колесо с отмеченной вершиной x ; заменим ребра $(x, a), (x, b)$ полицикла (34) ребрами $(x', a), (x', b)$, где x' — новая вершина. Эта конструкция изображена справа на рис. 13.3. Аналогично определяется *вершинно-расщепленный* (35). Примерами невложимых полициклов служат: (43) — e , (34) — e , (53) — e , (35) — e , вершинно-расщепленный (34), вершинно-расщепленный (35) и четыре полицикла, изображенные на рис. 8.1 и 8.2. Среди этих десяти полициклов только вершинно-расщепленные (34) и (35) не являются собственными; а среди восьми собственных только те, что изображены справа на рис. 8.1 и 8.2 — индуцированные.

Теорема 8.1 [DeSt01], [DeSt02b], [DeSt02c].

- (i) При $(r, q) \neq (5, 3), (3, 5)$, есть ровно три невложимых полицикла: (43) — e , (34) — e и вершинно-расщепленный (34),
- (ii) за исключением самого (53), любой $(5, 3)$ -полицикл вложим, если и только если он не содержит в качестве индуцированного подграфа ни одного из двух собственных полициклов с $p_5 = 6$, изображенных на рис. 8.1.
- (iii) за исключением (35) и (35) — v , любой $(3, 5)$ -полицикл вложим, если и только если он не содержит в качестве индуцированного подграфа ни одного из двух собственных 10-вершинных полициклов, изображенных на рис. 8.2.

Перечислим вложимые среди всех 39 собственных $(5, 3)$ -полициклов: (53), три, у которых $p_5 = 7$ (см. рис. 8.3), девять, у которых $p_5 = 6$ (все кроме двух на рис. 8.1) и все 14, у которых $p_5 \leq 5$.

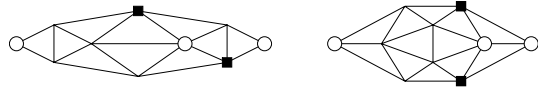


Рис. 8.2. Запрещенные индуцированные подграфы, для вложимых $(3, 5)$ -полициклов

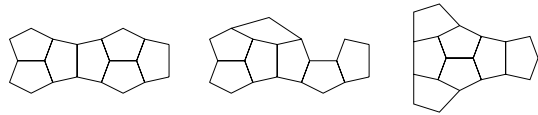


Рис. 8.3. Вложимые $(5, 3)$ -полициклы, у которых $p_5 = 7$

Любой внешнепланарный полицикл вложим, так же как и любой связный внешнепланарный граф.

Шкала λ вложимых (r, q) -полициклов равна 1, если r четно, и 2 в противном случае. Рассмотрим любой конечный вложимый полицикл, периметр которого равен p , и у которого z замкнутых зон противоположных (альтернирующих левых и правых противоположных, если r нечетно) неграничных ребер. Тогда (см. Введение) он вложим в $H_{\frac{p}{2}+z}$, если r четно (отсюда следует, что и p тоже четно), и он вложим со шкалой два в H_{p+z} , если r нечетно.

Имеется континуум $(6, 3)$ -полициклов, которые вложимы только в Z_∞ . Пометим шесть последовательных ребер шестиугольника числами 1, 2, ..., 6. Тогда у противоположных ребер будет разная четность. Назовем ребра с нечетными метками *нечетными*. Теперь рассмотрим полицикл, который является *нечетным деревом* $\mathcal{T}$ шестиугольников. В нечетном дереве шестиугольники смежны только по нечетным ребрам и ни одного цикла из шестиугольников нет. Например, бесконечная цепь — это нечетное дерево $\mathcal{T}_0$, в котором каждый шестиугольник h_i , $-\infty < i < \infty$, смежен ровно с двумя другими шестиугольниками h_{i-1} и h_{i+1} . Пусть (p_i, q_i) — метки ребер таких, по которым h_i смежен с h_{i-1} и h_{i+1} . Мы получаем бесконечную последовательность $\{(p_i, q_i) : -\infty < i < \infty\}$, $p_i, q_i \in \{1, 3, 5\}$, соответствующую $\mathcal{T}_0$. Очевидно, что это семейство последовательностей содержит континуум. Заметим, что каждый шестиугольник из $\mathcal{T}_0$ содержит свободное нечетное ребро. Поэтому мы можем соединить $\mathcal{T}_0$ по свободному нечетному ребру с конечной или бесконечной ветвью. Итак, мы получаем континуум бесконечных нечетных деревьев с конечными или бесконечными ветвями.

Назовем (r, q) -горафом конечный плоский граф, у которого все внутренние грани имеют не меньше r вершин все внутренние вершины имеют степень не меньше q . Любой (r, q) граф, у которого $(r, q) = (4, 4)$ или $(r, q) = (3, 6)$, $(6, 9)$ вложим в полукуб. (Первое доказано в [PSC90], а второе в [CDV06])

8.2. Квази- $(r, 3)$ -полициклы

В [DeSt00b] была рассмотрена вложимость *квази- $(r, 3)$ -полициклов*, т.е. $(r, 3)$ -полициклов, на которые не накладывается условие (ii): допускается некоторое число внутренних r' -угольных граней при $r' \neq r$. Пусть P — такая плоская реализация графа и пусть p_{int} обозначает последовательность $(p_3, p_4, \dots)$, где p_i — число i -угольников среди внутренних граней P . Такие графы, особенно те, для которых $p_{int} = (p_6)$, $(p_4 = 1, p_6)$, $(p_5 = 1, p_6)$, $(p_4 = 2, p_6)$, $(p_5 = 2, p_6)$, представляют интерес для органической химии (а именно, как *полициклические ароматические гидрокарбонаты*). Такие соединения, как бензол, бифенил, флуорантен, терфенил, индацен соответствуют $p_6 = 2, 2, 3, 1, 1$, в пяти описанных случаях. На рис. 8.4 представлены (в терминах атомов углерода C и водорода H, соответствующих вообще всем и всем 2-валентным вершинам): бензол C_6H_6 , нафталин $C_{10}H_8$, азулен $C_{10}H_8$, индацен $C_{12}H_8$, пентацен C_8H_6 , бифенилин $C_{12}H_8$ соответственно.

Вложимость таких графов полезна для вычисления некоторых индексов, связанных с расстояниями в этих графах, а также для целей номенклатуры. Теорема 8.2 ниже описывает вложимость мно-

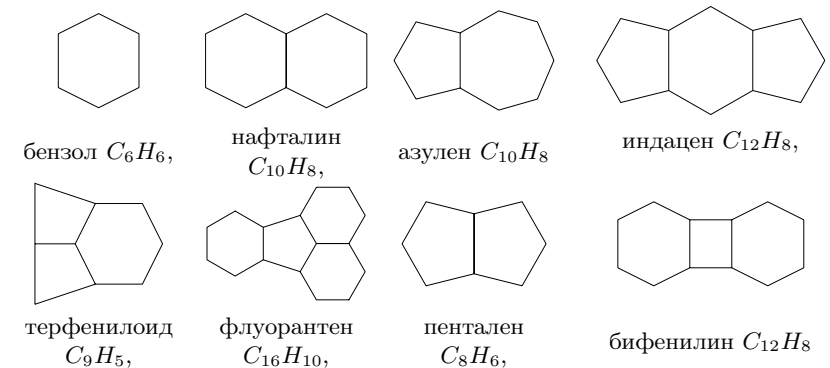


Рис. 8.4. Некоторые малые квази- $(r, 3)$ -полициклы

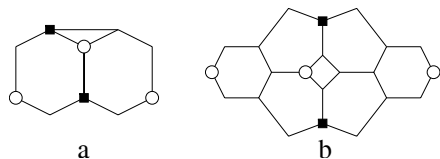


Рис. 8.5. Запрещенные изометрические подграфы при $p_{int} = (p_3 \leq 2, p_6)$ и при $p_{int} = (p_4 = 1, p_6)$

гих квази- $(r, 3)$ -полициклов в терминах запрещенных *изометрических* подграфов; в случаях (iv) и (v) этой теоремы множество таких запрещенных графов бесконечно. Примером графа из теоремы 8.2 (i) служит *коранулен* $C_{20}H_{10}$, состоящий из пятиугольника, окруженного пятью шестиугольниками. Он вкладывается в $\frac{1}{2}H_{15}$.

Теорема 8.2 (DS5). Квази- $(r, 3)$ -полицикл P вложим

- (i) при $p_3 = p_4 = 0, p_5 \leq 1$: всегда,
- (ii) при $p_{int} = (p_3 \leq 2, p_6)$: если и только если у каждого треугольника имеется вершина степени 2 (т. е. P не включает графа, изображенного на рис. 8.5 а) в качестве изометрического подграфа),
- (iii) при $p_{int} = (p_4 = 1, p_6)$: если и только если P не включает графа, изображенного на рис. 8.5 б) в качестве изометрического подграфа,
- (iv) при $p_{int} = (p_4 = 2, p_6)$: только если P не включает графов $G_{s,t}$ (изображенных на рис. 8.6 а), б) при $(s, t) = (3, 2), (1, 1)$, или G_u (изображенного на рис. 8.6 с) при $u = 4, 1$, или изображенного на рис. 8.6 д) в качестве изометрического подграфа,
- (v) при $p_{int} = (p_5 = 2, p_6)$: только если P не включает графов $F_{s,t}$ (изображенных на рис. 8.7 а), б) при $(s, t) = (3, 2), (1, 1)$ или F_u (изображенного на рис. 8.7 с) при $u = 3$) в качестве изометрического подграфа.

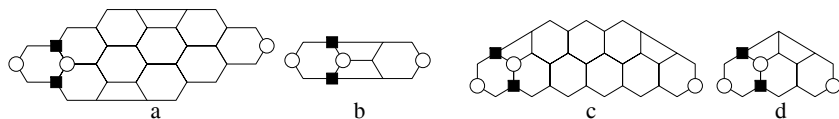


Рис. 8.6. Некоторые запрещенные изометрические подграфы при $p_{int} = (p_4 = 2, p_6)$

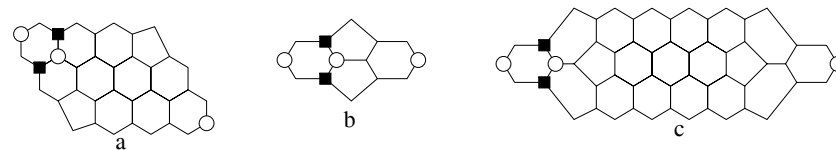


Рис. 8.7. Некоторые запрещенные изометрические подграфы при $p_{int} = (p_5 = 2, p_6)$

Заметим, что вложимый граф на рис. 2.1 (см. гл. 2) содержит запрещенный граф $F_{1,1}$, изображенный на рис. 8.7 б), но он не является изометрическим подграфом.

Теорема 8.3 (Desh05a). Единственными вложимыми 3-валентными разбиениями тора на 6-угольники являются Prism_{2m} , $m \geq 2$ (два разбиения при $m = 2$). Все 3-валентных разбиения бутылки Клейна на 6-угольники не вложимы.

8.3. Координационные полиэдры и металлополиэдры

Согласно Уэллсу [Well84], химическая кристаллическая структура обычно описывается *координационным полиэдром* (т. е. выпуклой оболочкой анионов, образующих группу ближайших соседей каждого металлического иона) или *доменами атома* (т. е. полиэдрами Вороного).

Координационные полиэдры — упорядоченные наборы ближайших соседей в кристаллах, молекулах и ионах. Более точно, как определяют Франк и Каспер в химии, *координационных полиэдр* — это выпуклая оболочка зеркальных отображений центра области Вороного-Дирихле в каждой из ее граней. Заметим, что координационный полиэдр, вообще говоря, не двойственен области Вороного и отличается от контактного многогранника сферической упаковки. Например, в то время, как полиэдр Вороного точки *bcc-решетки* (т. е. объемно-центрированной кубической решетки A_3^*) — усеченный октаэдр, его координационный полиэдр — это ромбический додекаэдр.

В дополнение к некоторым часто встречающимся координационным полиэдрам, ℓ_1 -статус некоторых металлополиэдров (выпуклых оболочек атомов) или металлических и кислородных полиэдров (см, например, [King91, Well84]) даны в табл. 8.1. Названия и номера (как правильных полиэдров с правильными гранями) взяты из списка 112 таких полиэдров, приведенного в [Berm71, Zalg69].

Например, рис. 4.1 иллюстрирует вложение ромбокубктаэдра (№ 13) и не 5-гональность скрученного ромбокубктаэдра (№ 57). Кубоктаэдр и скрученный кубоктаэдр (треугольный ортобикупол № 47) являются координационными полиэдрами *fcc* и *hcr-решеток* соответственно; двойственные к ним заполняют пространство, причем двойственный ко второму из них не 5-гонален.

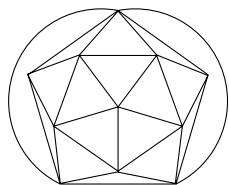


Рис. 8.8. Икосаэдр со склеенными ребрами

Полиэдры с правильными гранями из табл. 8.1 с № 1, 2, 4, 32, 33, 37, 71 и 104 — это восемь выпуклых дельтаэдров с правильными (треугольными) гранями и с n вершинами, где $2 \leq n \leq 12$, $n \neq 11$. Эти дельтаэдры двойственны

к первым восьми медиальным полиэдрам F_n , изображенным на рис. 13.1 при $n = 4, 8, 20, 6, 10, 16, 14$ и 12.

Последние три ℓ_1 -вложимых полиэдра из табл. 8.1 — это капшингованные или 2-капшингованные платоновы тела. Напомним, что i -капшингованный тетраэдр $\rightarrow \frac{1}{2}H_{3+i}$ при $1 \leq i \leq 4$, i -капшингованный октаэдр $\rightarrow \frac{1}{2}H_{4+i}$ при $1 \leq i \leq 8$, i -капшингованный куб $\rightarrow \frac{1}{2}H_6$ при $1 \leq i \leq 2$ или $i = 3$ без противоположного капшинга, и i -капшингованный куб не 5-гонален при $4 \leq i \leq 6$ или $i = 3$ с противоположным капшингом.

Таблица 8.1

Вложимость некоторых наиболее часто встречающихся химических полиэдров

Полиэдр (его номер из списка полиэдров с правильными гранями)	ℓ_1 -вложимость	Пример из химии
Тетраэдр(1)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_3$	$\text{Rh}_4(\text{CO})_{12}$
Окатаэдр (2)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_4$	$[\text{Os}_6(\text{CO})_{18}]^{2-}$
Куб (3)	$\rightarrow H_3$	CsCl
Икосаэдр (4)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_6$	$[\text{Mo}_{12}\text{O}_{30}(\text{CeO}_{12})]^{8-}$
Кубоктаэдр (6)	не 5-гонален	$[\text{Mo}_{12}\text{O}_{36}(\text{SiO}_4)]^{4-}$
Усеченный тетраэдр (8)	не 5-гонален	$[\text{Mo}_{12}(\text{HOAsO}_3)_4\text{O}_{34}]^{4-}$

Продолжение см. на следующей странице

Продолжение таблицы 8.1

Полиэдр (его номер из списка полиэдров с правильными гранями)	ℓ_1 -вложимость	Пример из химии
Ромбокубктаэдр (13)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$	$[\text{V}_{18}\text{O}_{42}(\text{SO}_4)]^{8-}$
Треугольная призма (19)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_5$	$[\text{Rh}_6\text{C}(\text{CO})_{15}]^{2-}$
Квадратная антипризма (20)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_5$	$[\text{Co}_8\text{C}(\text{CO})_{18}]^{2-}$
Квадратная пирамида (21)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_4$	$\text{Fe}_5\text{C}(\text{CO})_{15}$
Треугольный купол (23)	не 5-гонален	$[\text{W}_9\text{O}_{30}(\text{PO}_4)]^{9-}$
Жировытянутая квадратная пирамида (30)	экстремальный гиперметрический	$[\text{Co}_9\text{Si}(\text{CO})_{21}]^{2-}$
Треугольная бипирамида (32)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_4$	$\text{Os}_5(\text{CO})_{16}$
Пятиугольная бипирамида (33)	не 5-гонален	K_3ZrF_7
Вытянутая квадратная бипирамида (35)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_6$	$[\text{W}_{10}\text{O}_{32}]^{4-}$
Жировытянутая квадратная бипирамида (37)	экстремальный гиперметрический	$[\text{V}_{10}\text{O}_{26}]^{4-}$
Треугольный ортобикупол (47)	не 5-гонален	$[\text{W}_{12}\text{O}_{36}(\text{SiO}_4)]^{4-}$
Квадратный гиробикупол (49)	не 5-гонален	$[\text{V}_{10}\text{O}_{26}]^{4-}$
Вытянутый треугольный бикупол (55)	не 5-гонален	$\alpha - [\text{W}_{18}\text{P}_2\text{O}_{62}]^{6-}$
Вытянутый треугольный гиробикупол (56)	не 5-гонален	$\beta - [\text{W}_{18}\text{P}_2\text{O}_{62}]^{6-}$
Скрученный ромбокубктаэдр (57)	не 5-гонален	$[\text{H}_4\text{V}_{18}\text{O}_{42}(\text{Br})]^{9-}$
Вытянутый пятиугольный бикупол (58)	не 5-гонален	$[\text{W}_{30}\text{P}_5\text{O}_{110}(\text{Na})]^{14-}$
Пополненная треугольная призма (69)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_5$	$\text{Na}_5\text{Zr}_2\text{F}_{13}$

Окончание см. на следующей странице

Окончание таблицы 8.1

Полиэдр (его номер из списка полиэдров с правильными гранями)	ℓ_1 -вложимость	Пример из химии
Биполненная треугольная призма (70)	$\rightarrow \frac{1}{2}H_5$	$N_2H_6(ZrF_6)$
Триполненная треугольная призма (71)	экстремальный гиперметри- ческий	$Eu(OH)_3$
Плосконосый дисфеноид (104)	не 5-гонален	K_4ZrF_8
Октаэдр + Pyr_3	$\rightarrow \frac{1}{2}H_5$	$[Ru_7(CO_{16})]^{3-}$
Октаэдр + 2 Pyr_3	$\rightarrow \frac{1}{2}H_6$	$[Os_8(CO_{22})]^{2-}$
Тетраэдр + 2 Pyr_3	$\rightarrow \frac{1}{2}H_5$	$[Os_6(CO_{18})]^{2-}$
со силесными ребрами икосаэдр (рис. 8.8)	экстремальный гиперметри- ческий	$[B_{11}H_{11}]^{2-}$

Плоские паркеты

9.1. 58 вложимых мозаик

Здесь мы рассмотрим *мозаики* T и двойственные к ним T^* (т.е. паркеты евклидовой плоскости, образованные *правильными* многоугольниками, прилегающими ребро-к-ребру), мы устанавливая возможную вложимость, изометрическую с точностью до шкалы λ , остовов T или остовов T^* двойственных к ним T^* в кубическую решетку Z_n для некоторого n . Основным результатом этой главы является классификация, приведенная в табл. 9.1 всех таких мозаик среди всех мозаик каталога из [Chav89], и включающего все основные классификации мозаик.

Оказывается, что все невложимые мозаики T и двойственные к ним T^* , рассмотренные здесь, не 5-гональны. В таблице 9.1, невложимость T или T^* обозначена знаком «—» в 4 или 5 столбце соответственно. Все вложимости были найдены тем же методом полной системы альтернирующих зон, что и в [DeSt96], [DeSt97], [CDG97].

Мозаика здесь обозначается своим стандартным *гранным вектором* ([GrSh87]), перечисляющим все *звезды* вершин каждого типа (звезда — это список всех граней, окружающих вершину). Обозначим v, t, e число *типов* (т.е. число орбит относительно группы симметрии $Aut T$ мозаики T) вершин, граней и ребер соответственно. Мозаика называется *вершинно-однородной*, если любые две вершины с конгруэнтными звездами принадлежат одной и той же орбите вершин. Мозаика называется *реберно-однородной*, если любые две конгруэнтные грани принадлежат одной и той же орбите граней. Мозаика называется *реберно-однородной* (или *сильно реберно-однородной*), если любые две ее реберные фигуры (слабые реберные фигуры) принадлежат одной и той же орбите ребер. *Реберная фигура* — это ребро со всеми инцидентными ему ребрами, а *слабая реберная фигура* — это ребро с двумя инцидентными гранями.

165 мозаик из [Chav89] включают следующие классификации мозаик:

- 135 вершинно-однородных (и 20 с $v = 2$), найденных в [Kröt69], [Kröt70a], [Kröt70b];
- 22 грани-однородных (и 13 с $t = 2$), найденных в [DbLa81];

- 22 сильно реберно-однородных, найденных в [Chav84];
- все 11, 20, 61 мозаик с $v = 1, 2, 3$;
- все 3, 13, 26 мозаик с $t = 1, 2, 3$;
- и все 4, 4, 10 мозаик с $e = 1, 2, 3$.

(Кстати, в табл. 1, 2 из [Chav89] количество мозаик с $t = 3$ должны быть 26, 27 (вместо 25, 26 соответственно).)

Среди этих 165 все 58 мозаик таких, что T или T^* вложима, указаны в табл. 9.1 в лексиграфическом порядке их векторов (v, t, e) . В этой главе приведены изображения этих 58 мозаик в том же порядке. Представители орбит вершин обозначены на них большими черными кружками. В правой части табл. 9.1 вершинная, гранная, реберная и сильно реберная однородность (если она имеет место) T отмечена знаком $+$. Для каждой мозаики указана также ее группа симметрии $\text{Aut } T$ в стандартных кристаллографических обозначениях. Напомним, что зеркальное отображение паркета T не может быть наложено на прообраз (т. е. имеются две энантоморфные формы T) если и только если ни « t », ни « g » не содержатся в этих обозначениях $\text{Aut } T$.

Таблица 9.1

58 мозаик T с вложимым остовом T или T^*

№	мозаика T ; гранный вектор	$\text{Aut } T$	$T \rightarrow$	$T^* \rightarrow$	v, t, e	однородность
1	$(4^4) = \text{Vo}(Z_2) = \text{De}(Z_2)$	p4m	Z_2	Z_2	1, 1, 1	+, +, +, +
2	$(6^3) = \text{Vo}(A_2)$	p6m	Z_3	$\frac{1}{2}Z_3$	1, 1, 1	+, +, +, +
3	$(3^6) = \text{De}(A_2)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_3$	Z_3	1, 1, 1	+, +, +, +
4	сеть Кагоме; $(3.6.3.6)$	p6m	—	Z_3	1, 2, 1	+, +, +, +
5	усеченная (6^3) ; (3.12^2)	p6m	—	$\frac{1}{2}Z_\infty$	1, 2, 2	+, +, +, +
6	у усеченная (4^4) ; (4.8^2)	p4m	Z_4	—	1, 2, 2	+, +, +, +
7	двойственная сети Каира; $(3^2.4.3.4)$	p4g	$\frac{1}{2}Z_4$	—	1, 2, 2	+, +, +, +
8	$(3^3.4^2)$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	1, 2, 3	+, +, +, +
9	$(3.4.6.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_3$	—	1, 3, 2	+, +, +, +
10	$(4.6.12)$	p6m	Z_6	—	1, 3, 3	+, +, +, +

Продолжение таблицы см. на следующей странице

Продолжение таблицы 9.1

№	мозаика T ; гранный вектор	$\text{Aut } T$	$T \rightarrow$	$T^* \rightarrow$	v, t, e	однородность
11	$(3^4.6)$	p6	$\frac{1}{2}Z_6$	—	1, 3, 3	+, -, +, -
12	$(3^6; 3^2.6^2)$	p6m	—	Z_∞	2, 2, 3	+, +, +, +
13	$(3^4.6; 3^2.6^2)$	cmm	$\frac{1}{2}Z_5$	—	2, 2, 4	+, +, +, -
14	$(3^3.4^2; 4^4)_1$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	2, 2, 4	+, +, +, -
15	$(3^6; 3^2.4.3.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	2, 3, 3	+, -, +, -
16	$(3^6; 3^3.4^2)_1$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	2, 3, 4	+, -, +, -
17	$(3.4^2.6; 3.6.3.6)_2$	cmm	—	Z_3	2, 3, 4	+, +, +, +
18	$(3^3.4^2; 4^4)_2$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	2, 3, 5	+, -, -, -
19	$(3^3.4^2; 3.4.6.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_3$	—	2, 4, 4	+, -, +, +
20	$(3^6; 3^3.4^2)_2$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	2, 4, 5	+, -, -, -
21	$(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_1$	p4g	$\frac{1}{2}Z_6$	—	2, 4, 5	+, -, +, -
22	$(3^6; 3^4.6)_2$	p6	$\frac{1}{2}Z_6$	—	2, 5, 7	+, -, -, -
23	$(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_2$	pgg	$\frac{1}{2}Z_4$	—	2, 6, 6	+, -, +, -
24	$(3^6; 3^2.6^2; 6^3)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	3, 2, 3	+, +, +, +
25	$(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)$	pmg	$\frac{1}{2}Z_5$	—	3, 2, 5	+, +, +, -
26	$(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$	p4g	—	Z_4	3, 3, 4	+, +, +, +
27	$(3^6; 3^3.4^2; 4^4)_1$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 3, 5	+, -, +, -
28	$(3^6; 3^4.6; 3^2.6^2)_2$	cmm	$\frac{1}{2}Z_5$	—	3, 3, 6	+, -, +, -
29	$(3^3.4^2; 4^4; 4^4)_1$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 3, 6	-, -, -, -
30	$(3^6; 3^3.4^2; 3^2.4.3.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	3, 4, 5	+, -, +, -
31	$(3.4^2.6; 3.6.3.6; 4^4)_2$	cmm	—	Z_3	3, 4, 5	+, -, +, -
32	$(3^3.4^2; 3^2.4.3.4; 4^4)$	p4	$\frac{1}{2}Z_4$	—	3, 4, 6	+, -, +, -

Продолжение таблицы см. на следующей странице

Продолжение таблицы 9.1

№	мозаика T ; гранный вектор	Aut T	$T \rightarrow$	$T^* \rightarrow$	v, t, e	однородность
33	$(3^6; 3^3.4^2; 4^4)_2$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 4, 6	$+, -, -, -$
34	$(3^6; 3^3.4^2; 4^4)_3$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 4, 6	$+, -, -, -$
35	$(3^6; 3^3.4^2; 3^3.4^2)_1$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 4, 6	$-, -, -, -$
36	$(3^3.4^2; 3^3.4^2; 4^4)_1$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 4, 6	$-, -, -, -$
37	$(3.4^2.6; 3.6.3.6; 3.6.3.6)_1$	pmg	—	Z_3	3, 4, 6	$-, -, -, -$
38	$(3^3.4^2; 4^4; 4^4)_2$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 4, 7	$-, -, -, -$
39	$(3^6; 3^6; 3^3.4^2)_1$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 5, 6	$-, -, -, -$
40	$(3^6; 3^3.4^2; 4^4)_4$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 5, 7	$+, -, -, -$
41	$(3.4^2.6; 3.6.3.6; 4^4)_4$	cmm	—	Z_3	3, 5, 7	$+, -, -, -$
42	$(3^3.4^2; 3^3.4^2; 4^4)_2$	pmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 5, 7	$-, -, -, -$
43	$(3^6; 3^3.4^2; 3^3.4^2)_2$	pmg	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 5, 7	$-, -, -, -$
44	$(3^3.4^2; 3^3.4^2; 3^2.4.3.4)$	pgg	$\frac{1}{2}Z_4$	—	3, 5, 8	$-, -, -, -$
45	$(3^6; 3^3.4^2; 3.4.6.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 6, 6	$+, -, +, -$
46	$(3^6; 3^6; 3^3.4^2)_2$	cmm	$\frac{1}{2}Z_3$	—	3, 6, 7	$-, -, -, -$
47	$(3^3.4^2; 3^2.4.3.4; 3^2.4.3.4)$	p2	$\frac{1}{2}Z_4$	—	3, 6, 9	$-, -, -, -$
48	$(3^6; 3^6; 3^4.6)_3$	p6	$\frac{1}{2}Z_6$	—	3, 7, 9	$-, -, -, -$
49	$(3^6; 3^2.4.3.4; 3^2.4.3.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	3, 8, 5	$-, -, +, -$
50	$(3^6; 3^2.6^2; 6^3; 6^3)_1$	p6	—	$\frac{1}{2}Z_\infty$	4, 2, 5	$-, +, -, -$
51	$(3^6; 3^2.6^2; 6^3; 6^3)_2$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	4, 3, 5	$-, -, -, -$
52	$(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3; 6^3)$	cmm	$\frac{1}{2}Z_5$	—	4, 3, 6	$-, -, -, -$
53	$(3^6; 3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)_4$	pmg	$\frac{1}{2}Z_5$	—	4, 3, 7	$+, -, +, -$
54	$(3^6; 3^3.4^2; 3^2.4.3.4; 4^4)$	p4g	$\frac{1}{2}Z_4$	—	4, 4, 6	$+, -, +, -$

Окончание таблицы см. на следующей странице

Окончание таблицы 9.1

№	мозаика T ; гранный вектор	Aut T	$T \rightarrow$	$T^* \rightarrow$	v, t, e	однородность
55	$(3^6; 3^2.4.3.4; 3.4^2.6; 3.4.6.4)$	p6m	$\frac{1}{2}Z_6$	—	4, 6, 7	$+, -, +, -$
56	$(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3; 6^3; 6^3)$	pmg	$\frac{1}{2}Z_5$	—	5, 3, 7	$-, -, -, -$
57	$(3^2.4.3.4; 3^2.6^2; 3.4^2.6; 3.4.6.4; 6^3)$	p3m1	$\frac{1}{2}Z_6$	—	5, 6, 8	$+, -, +, -$
58	$(3^4.6; 3^3.4^2; 3^2.4.3.4; 3^2.6^2; 3.4^2.6; 3.4.6.4)$	cmm	$\frac{1}{2}Z_5$	—	6, 9, 13	$+, -, +, -$

Заметим, что для любой мозаики T , из вложимости T или T^* в Z_n или $\frac{1}{2}Z_n$ следует, что n делится на 3 (или 2), если Aut T содержит тройную (или четверную) поворотную ось, т. е. если Aut T — одна из групп $p6m$, $p6$, $p31m$, $p3m1$, $p3$ (или $p4m$, $p4g$, $p4$ соответственно).

Интересно, что для мозаик из табл. 9.1 справедливо:

- 1) № 4, 17, 31, 37, 41 (все мозаики T с вершиной $(3.6.3.6)$) имеют вложимость $T^* \rightarrow Z_3$ и наоборот;
- 2) № 7, 15, 21, 23, 30, 32, 44, 47, 49, 54, 55, 57, 58 (все T с вершиной $(3^2.4.3.4)$) имеют вложимость $T \rightarrow \frac{1}{2}Z_4$ или $T \rightarrow \frac{1}{2}Z_6$ (исключая № 58, содержащий также вершину $(3^4.6)$), причем в их число входят все шесть мозаик T , вложимых в $\frac{1}{2}Z_4$;
- 3) № 11, 13, 22, 25, 28, 48, 52, 53, 56, 58 (все T с вершиной $(3^4.6)$) имеют вложимость $T \rightarrow \frac{1}{2}Z_5$ или $T \rightarrow \frac{1}{2}Z_6$, причем в их число входят все 7 мозаик, вложимых в $\frac{1}{2}Z_5$.

У следующих групп мозаик в табл. 9.1 один и тот же гранный вектор:

14, 18; 21, 23; 27, 33, 34, 40; 29, 38; 31, 41; 35, 43; 36, 42; 50, 51.

В каждом из этих восьми случаев, за исключением второго и восьмого, вложимость одинаковая.

В таблицу 9.1 вошли 41 (из 135) вершинно-однородных, 18 (из 22) грани-однородных и 15 (из 22) сильно реберно-однородных мозаик. Кроме того, в нее входят

- все 11 мозаик с $v = 1$, 12 (из 20) мозаик с $v = 2$ и 26 (из 61) мозаик с $v = 3$;
- все 3 мозаики с $t = 1$, 11 (из 13) мозаик с $t = 2$ и 15 (из 26) мозаик с $t = 3$;
- все 4 мозаики с $e = 1$, все 4 мозаики с $e = 2$ и 6 (из 10) мозаик с $e = 3$.

В таблицу 9.1 не вошли только следующие 3 мозаики с однородностью $+, +, +, +$: $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$, $(3.4.3.12; 3.12^2)$, $(3.4.6.4; 4.6.12)$ с $(v, t, e) = (2, 2, 3)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$ соответственно. Кроме того, в нее не вошли 2 мозаики с $t = 2$: упомянутая выше $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$ и еще одна: $(3^2.6^2; 3.6.3.6; 6^3)_1$ с $(v, t, e) = (3, 2, 4)$ и однородностью $+, +, +, -$.

Вложения, приведенные в табл. 9.1 взяты из [DeSt96], [DeSt97] и [DeSt99]. Кстати, среди №1—11 (все Архимедовы паркетты в табл. 9.1) все, кроме №7, 8 и 11, появляются с помощью конструкции калейдоскопа Витхоффа из правильных паркеттов №1—3 (см. табл. 3 в [DDS04]). Среди всех 13 архимедовых полиэдров все, кроме двух плосконосых, возникают при помощи той же конструкции из платоновых тел.

Изображения 58 мозаик из табл. 9.1 даны ниже в том же порядке.

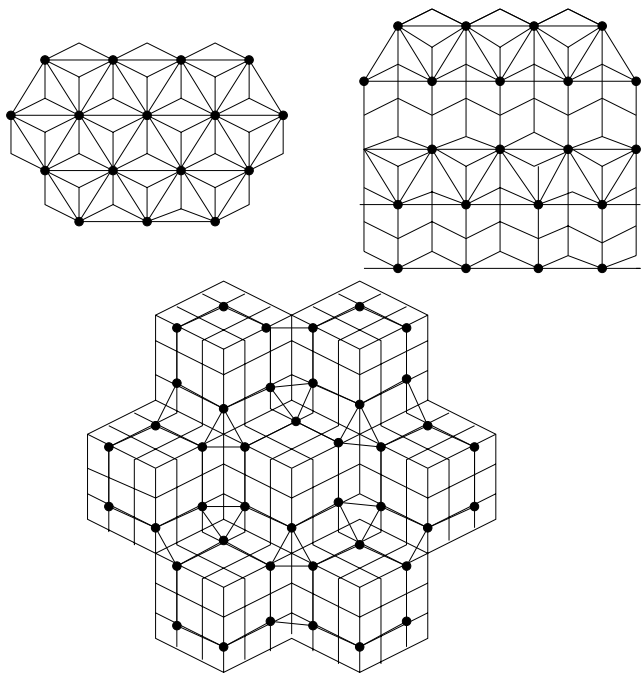


Рис. 9.1. Примеры мозаик, вложимых в $\frac{1}{2}Z_3$: (3^6) , $(3.4.6.4)$ и $(3^3.4^2)$

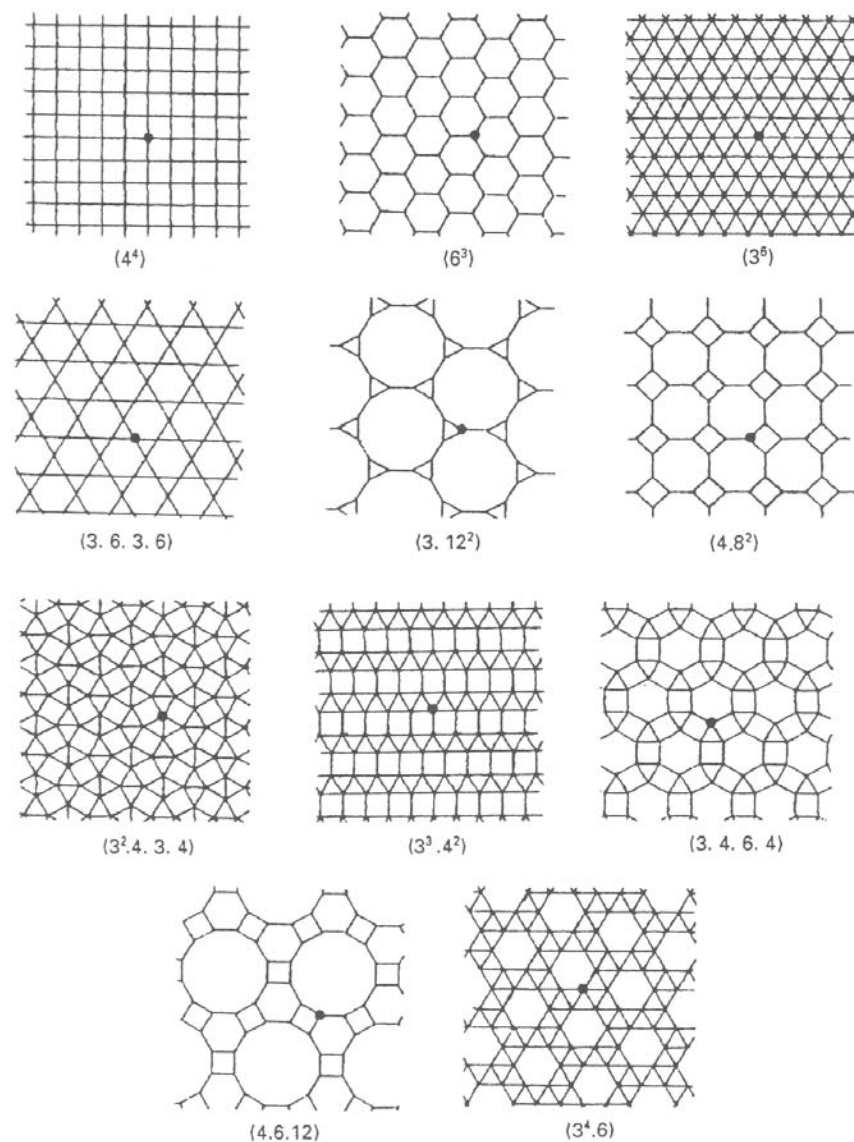


Рис. 9.2. Мозаики 1—11 из табл. 9.1

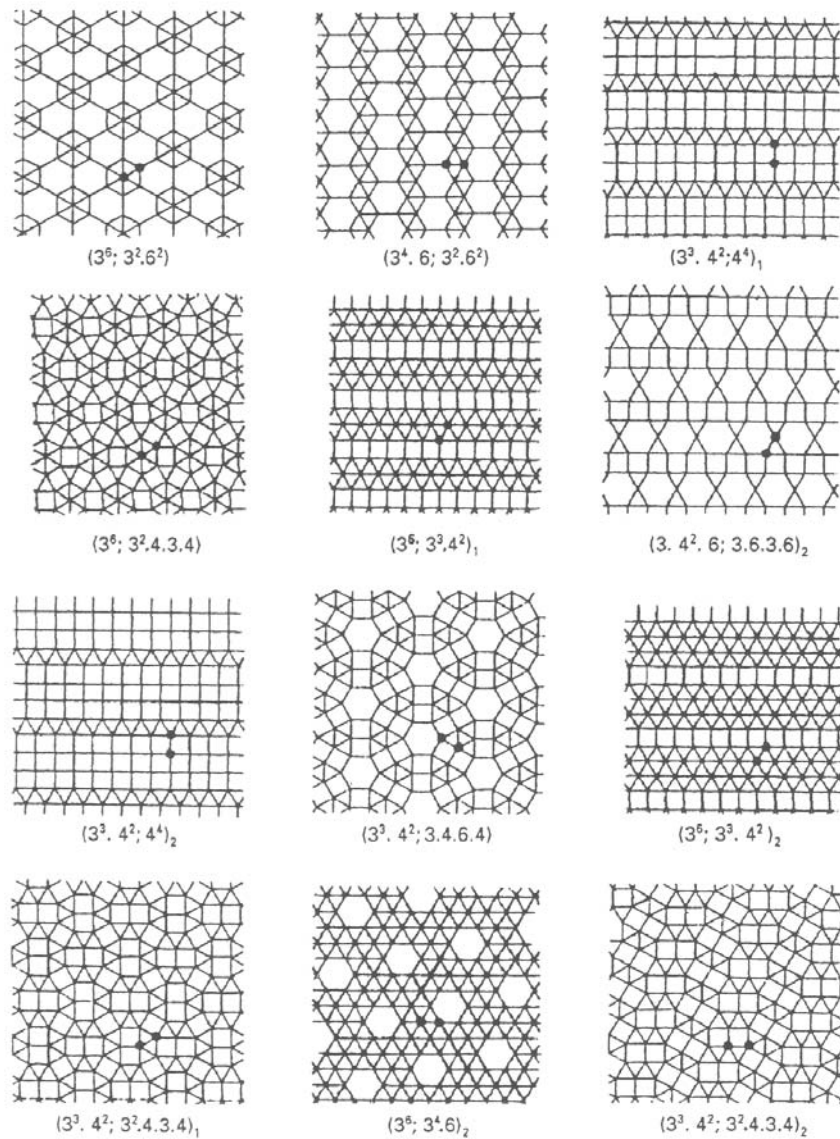


Рис. 9.3. Мозаики 12—23 из табл. 9.1

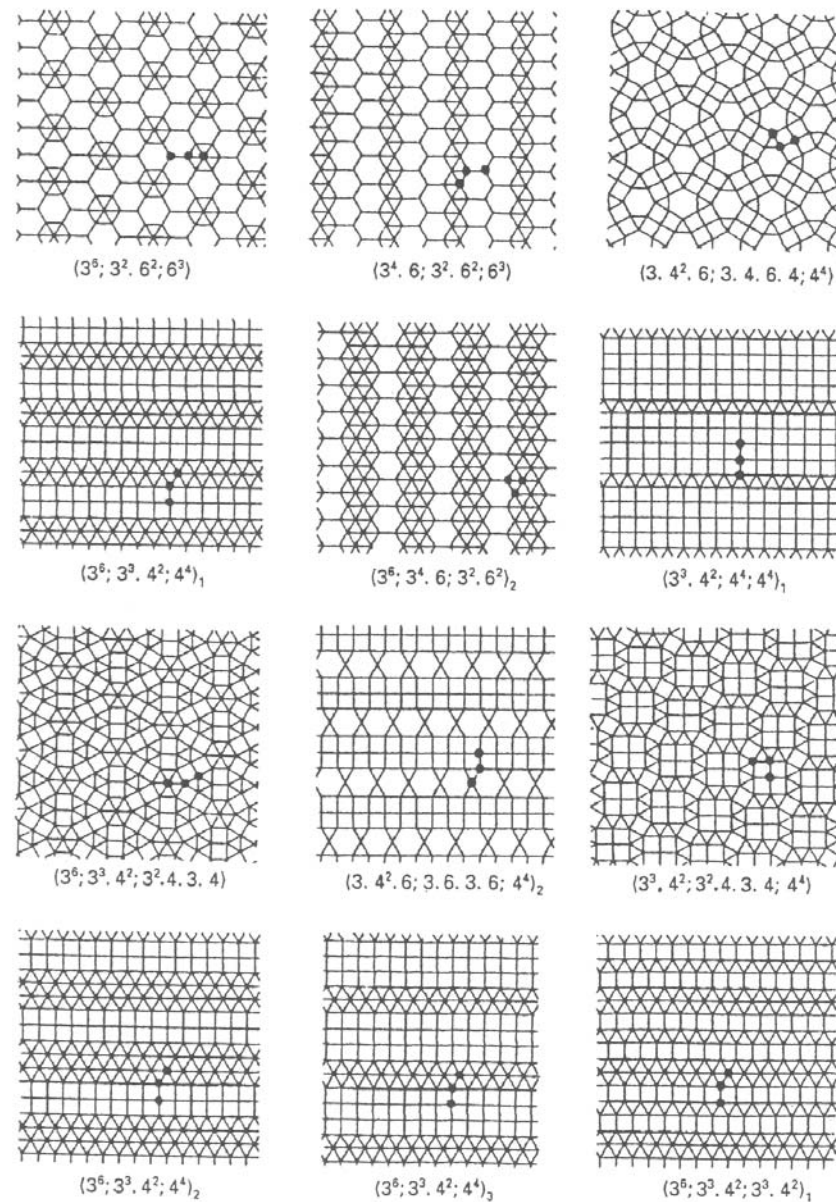


Рис. 9.4. Мозаики 24—35 из табл. 9.1

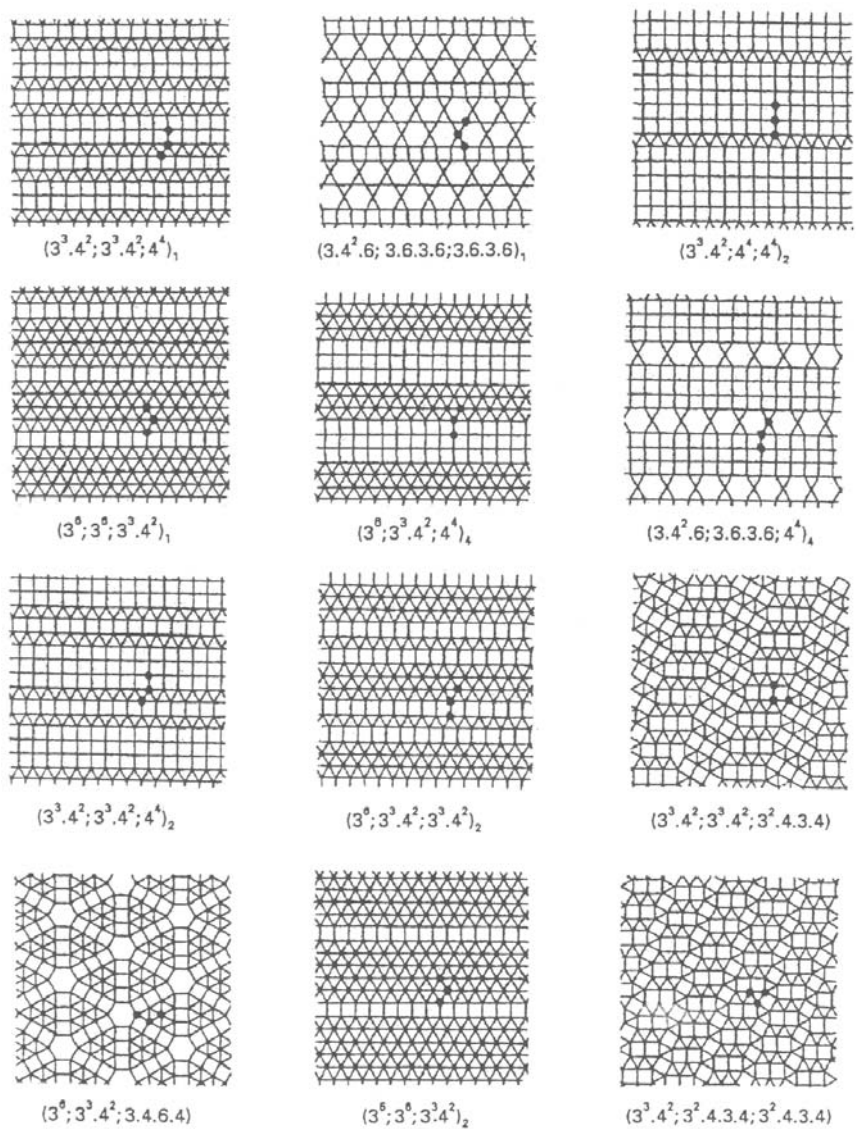


Рис. 9.5. Мозаики 36—47 из табл. 9.1

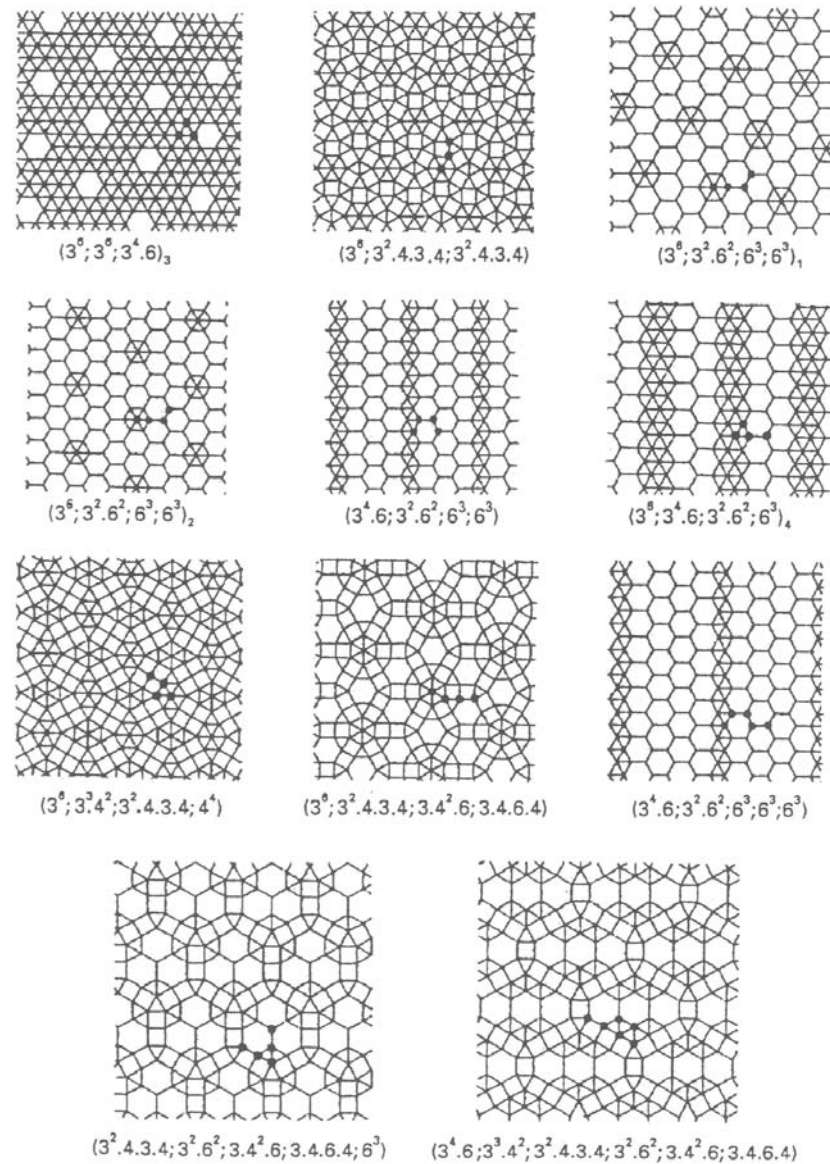


Рис. 9.6. Мозаики 48—58 из табл. 9.1

9.2. Другие специальные плоские паркетты

В [DeSt97] были рассмотрены другие интересные плоские разбиения (*произвольными* многоугольниками). Например, зонотопное разбиение Пенроуза плоскости, полученное при помощи двух золотых ромбов (или его аналог для 3-пространства, при помощи двух золотых ромбоэдров) вкладывается в Z_5 (соответственно, в Z_6). Вложение паркета Пенроуза в Z_5 (его фрагмент можно увидеть на рис. 9.7 б)) показано на рис. 9.7 а), где изображены пять его зон.

Подразделение Робинсона описанного зонотопного паркета Пенроуза и 10-угольная тюбингенская триангуляция (они изображены на рис. 9.8 а) и б)) не 5-гональны: пять вершин, нарушающих 5-гональное неравенство, отмечены на отдельном графе с семью вершинами. Этот граф — изометрический подграф обеих этих триангуляций (см. рис. 9.8 с)). Три вершины, отмеченные кружками, берутся со знаком «+», а две вершины, отмеченные квадратиками, берутся со знаком «-».

Интересно, что разбиение Вороного для системы вершин паркета Пенроуза не 5-гонально, но у всех найденных нами пятерок вершин, нарушающих 5-гональное неравенство, диаметр больше 17. Этот паркет Вороного двойственен триангуляции Делоне, которая получается из паркета Пенроуза добавлением коротких диагоналей всех ромбов, так что все полученные треугольники остроугольные. (Напомним, что существуют два взаимно двойственных разбиения n -пространства, соответствующих любому дискретному набору точек в этом пространстве; они называются разбиениями Делоне и Вороного соответственно. Мы рассматриваем эти разбиения для набора вершин

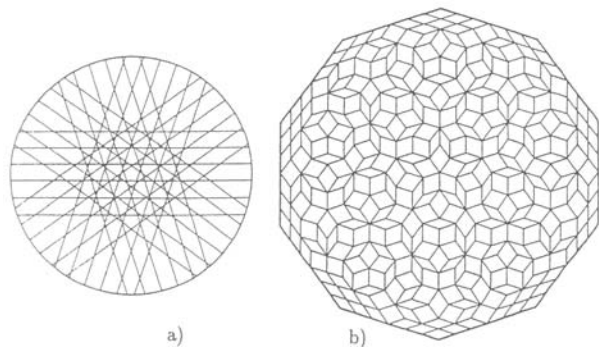


Рис. 9.7. Ромбический паркет Пенроуза: а) 5 зон, б) фрагмент

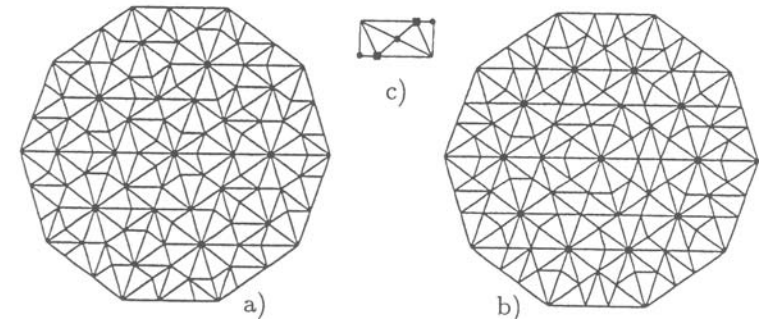


Рис. 9.8. а) Подразделение Робинсона ромбического паркета Пенроуза, б) Тюбингенская триангуляция, в) Их не 5-гональный изометрический подграф

паркета Пенроуза.) Разбиение Вороного состоит из 5-, 6-, 7-угольников трех, двух и двух типов соответственно. Существование пяти точек, нарушающих 5-гональное неравенство, следует из наличия пятиугольников, поскольку остоу любого нормального разбиения плоскости без 3-, 4- и 5-угольников вложим (см. [DeSt00b], теорема 3).

Следующие паркетты не 5-гональны (см. [Well91], с. 104, 89, а также рис. 9.9 а) и б) ниже): паркет Дюрера (образованный правильными пятиугольниками и ромбами) и паркет из греческих крестов (комбинаторно эквивалентный (4^4) с двумя новыми вершинами на каждом ребре). В действительности фрагмент паркета Дюрера, изображенный на рис. 9.9 а), допускает единственное продолжение до плоского паркета из конгруэнтных пятиугольников и ромбов. В этом фрагменте на один (тридцать второй) пятиугольник больше, чем на фрагменте, приведенном в [Well91], с. 104. Последний вложим в $\frac{1}{2}H_{45}$ (и его периметр равен 45).

Кроме того, не 5-гонален паркет из правильных треугольников с ребрами длины 1, 2 и $\sqrt{5}$ (см. [Radi94]; грани этого паркета не соприкасаются ребром к ребру, но мы рассматриваем его как паркет ребро-к-ребру из треугольников и четырехугольников).

Пусть $\text{Cham}(T)$ обозначает *шамферинг* T , т.е. плоский паркет, полученный из мозаики T добавлением призм на все ее грани с последующим удалением всех первоначальных ребер. Тогда $\text{Cham}(6^3) = (6^3)$, $\text{Cham}(3^6)$ — не 5-гональный и зонотопный паркет, $\text{Cham}(4^4)$ вкладывается в Z_4 . Три стилизованных старинных паркета, комбинаторно эквивалентные $\text{Cham}(4^4)$, изображены на рис. 9.10 внизу. Паркет

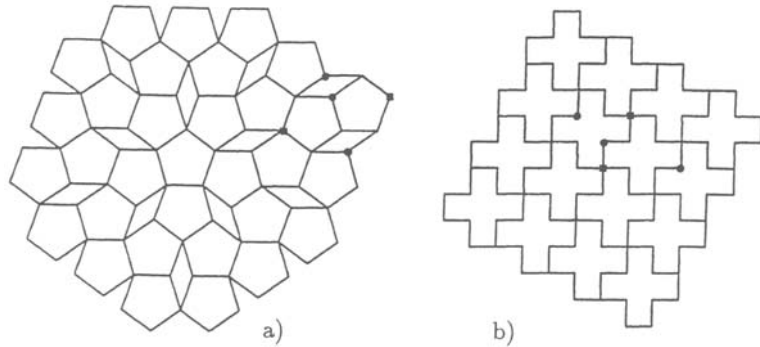


Рис. 9.9. Фрагменты а) паркета Дюрера, б) паркета из греческих крестов

$\text{Cham}(4^4)$ двойственен (4^4) , рассматриваемому как бесконечная шахматная доска с пирамидами на всех черных клетках.

(4^4) доставляет единственное нормальное разбиение евклидовой плоскости на многоугольники с четным числом сторон и только с четными степенями вершин. Нет ни одного такого разбиения 3-сферы, а у гиперболической плоскости их бесконечно много и все они вложимы в Z_∞ .

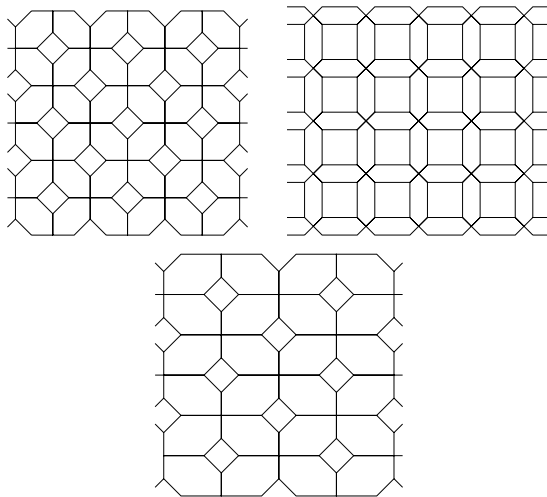


Рис. 9.10. Три старинных паркеты, изображающие $\text{Cham}(4^4)$

И наконец, граф фрагмента некоторой вложимой T или T^* , ограниченный простым циклом длины n и содержащий k замкнутых зон внутренних ребер является изометрическим подграфом $H_{k+\frac{n}{2}}$, если у всех граней четное число сторон, и подграфом $\frac{1}{2}H_{k+n}$ в противном случае.

9.3. Правильногранные двугранные плоские паркетты

Все *правильногранные* двугранные плоские паркетты евклидовой плоскости были найдены в [Deza02]. У вершин этих паркетов одна и та же степень k , и есть только два комбинаторных типа граней (скажем, a - и b -угольники); более того, у любого a -угольника (соответственно, любого b -угольника) одно и то же число t_a (соответственно, t_b) смежных a -угольников (соответственно, b -угольников). Отсюда следует, что каждый a -угольник смежен с $a - t_a$ b -угольниками, и каждый b -угольник смежен с $b - t_b$ a -угольниками.

Перечислим все вложимые среди них: это три архимедовых паркеты (4.8^2) , $(3^2.4.3.4)$, $(3^3.4^2)$ (т. е. № 6–8 из табл. 9.1, вложимые в Z_4 , $\frac{1}{2}Z_4$, $\frac{1}{2}Z_3$ соответственно), а также следующие паркетты A , B и континуумы D , D паркеттов (№ 3', 13_C и континуумы № 33 и № 29 в обозначениях [Deza02]), которые вложимы в $\frac{1}{2}Z_3$, $\frac{1}{2}Z_8$, $\frac{1}{2}Z_4$, $\frac{1}{2}Z_5$ соответственно.

Паркет A — это правильный паркет (6^3) , усеченный при «половине» своих вершин, так что ровно один конец любого ребра усечен.

Паркет B — это архимедов паркет (4.8^2) , в котором «половина» восьмиугольников разрезана на два шестиугольника новым вертикальным ребром, а все остальные восьмиугольники разрезаны на два шестиугольника новым горизонтальным ребром; при этом любые два смежных восьмиугольника разрезаны по-разному.

Паркет C — это континуум всех паркеттов, полученных из архимедова паркеты $(3^3, 4^2)$, когда вместо фиксированного горизонтального ряда квадратов берут любую другую (бесконечную в обоих направлениях) последовательность квадратов, каждый из которых присоединяется к предыдущему «сверху» и/или «справа» произвольно. После этого весь паркет соответственно сдвигается.

Континуум D возникает как все описанные ниже видоизменения архимедова паркеты (4.8^2) , рассматриваемого комбинаторно как плоский паркет из параллельных горизонтальных зон (бесконечных в обоих направлениях). Каждая зона состоит из (перемежающихся)

четырёх- и восьмиугольников, так что их ребра смежности параллельны и противоположны в каждом четырёх- и восьмиугольнике. Добавим в каждой зоне диагонали, разрезающие каждый четырёхугольник на два треугольника или каждый восьмиугольник на два пятиугольника, так что все эти диагонали идут в одном направлении: либо с юго-запада на северо-восток, либо с северо-запада на юго-восток. При этом мы получаем континуум таких видоизменений (4.8^2).

Параметры $(k; a, b; t_a, t_b)$ семи описанных выше вложимых типов с правильными паркетами соответственно таковы: $(3; 4, 8; 0, 4)$, $(5; 3, 4; 1, 0)$, $(5; 3, 4; 2, 2)$, $(3; 3, 9; 0, 6)$, $(3; 4, 7; 0, 5)$, $(5; 3, 4; 2, 2)$, $(4; 3, 5; 1, 3)$.

Первые три из них (архимедовы) встречаются в настоящих кристаллических структурах: они изображены на рис. 7.20, 6.51 и 6.50 в [OkHy96] как сети, представляющие парацельсий $\text{BaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$, U_3Si_2 и Fe_2AlB_2 соответственно.

Однородные разбиения 3-пространства и родственные им

Напомним, что *униформный* полиэдр — это то же самое, что и полуправильный полиэдр. Нормальное разбиение 3-пространства называется *униформным* разбиением, если все его фасеты (ячейки) — униформные полиэдры, а группа симметрии вершинно-транзитивна.

Существует в точности 28 униформных разбиений 3-пространства. Вот краткая история этого результата. В 1905 году Андриени в [Andr05] предложил, считая его полным, список из 25 таких разбиений. Но одно из них ($13'$, в его обозначениях) оказалось неуниформным; по-видимому, первым это обнаружил Коксетер (см. [Coxe54], с. 334). Кроме того, Андриени пропустил разбиения 25—28 (в нашей нумерации, данной ниже). До последнего времени математическая литература изобиловала неполными списками этих разбиений. Например, [Crit70], [Will72] и [Pear78] (ни в одной из этих книг не указаны разбиения 24—28). Первым полный список опубликовал Грюнбаум в [Grün94]. Но при этом он написал, что уже после того, как получил этот список, он понял, что в рукописи [John91] содержались все 28 разбиений. Независимо мы тоже получили все 28 разбиений, правда, только в 1996 году. Результаты, представленные в этой главе, мы взяли из [DeSt00a].

Все вложимые разбиения в этой главе оказываются ℓ_1 -жесткими, и, таким образом, со шкалой один или два. Эти вложения были получены построением полной системы альтернирующих зон; см. гл. 1 и [CDG97], [DeSt96], [DeSt97], [DeSt98]. Кроме того, все невложимые разбиения, рассмотренные в этой главе, не 5-гональны.

Напомним, что $\text{De}(T)$ и $\text{Vo}(T)$ — разбиения Делоне и Вороного 3-пространства, ассоциированные с заданным множеством точек T . Хотя это не совсем правильно, мы будем использовать то же обозначение для графа, то есть остова разбиения. Напомним еще, что P^* — это разбиение, двойственное разбиению P ; его не следует смешивать с таким же обозначением для двойственной решетки.

10.1. 28 uniformных разбиений

В таблицах 10.1, 10.2, которые описывают эти 28 разбиений, содержание столбцов следующее:

- 1: номер, который мы присвоили разбиению;
- 2 и 3: его номера в [Andr05] (если оно там указано) и в [Grün94];
- 4: характеристика (если она есть) разбиения;
- 5: грани разбиения и количества граней им номера в звезде Делоне;
- 5*: грани двойственного разбиения;
- 6 и 6*: вложимость (если она имеет место) разбиения и двойственного ему.

Мы используем следующие специальные обозначения для граней, данных в табл. 10.1, 10.2:

Cbt и Rcbt для архимедова кубоктаэдра и ромбокубкаэдра;

RhDo, скрученный RhDo и RhDo — v_3 для ромбического додекаэдра Каталана, для его скрученного варианта и для RhDo с удаленной вершиной третьей степени; BDS* для двойственного плосконосому дисфеноиду.

Замечания к табл. 10.1, 10.2:

- Разбиение 15* — единственное, вложимое в Z_∞ (в действительности, со шкалой два).
- Разбиения, вложимые со шкалой один, все, за исключением 25*, зоноэдральны. Грань Вороного разбиения 25* не является центрально симметричной. Было бы интересно найти нормальный паркет 3-пространства, вложимый со шкалой 1, и такой, что каждая грань центрально симметрична. Такой паркет, не являющийся нормальным, указан в [Shto80]: см. №3 в табл. 10.3 ниже.
- Вложимость граней необходима, но не достаточна для вложимости всего паркета. Например, 26* и 27* не вложимы, в то время как их грани вложимы в H_4 и $\frac{1}{2}H_8$, соответственно. На самом деле, у всех двойственных uniformных разбиениям P^* в табл. 10.1, 10.2, за исключением 24*, нет невложимых граней. Среди всех одиннадцати невложимых uniformных разбиений лишь у 11, 15, 24 и 26 имеют только вложимые грани. То же самое можно сказать о паркетах 30, 33 и 32*, 33*, 34*, 46* из табл. 10.3.
- Среди всех 28 разбиений только у 1, 2, 5, 6, 8 имеют одно и то же окружение ребер: многоугольники (4.4.4.4), (4.6.6), (3.3.3.3), (3.3.6.6), (3.3.4).
- Оба разбиения, 8 и 24, являются разбиениями Делоне (т. е. бирешетки, в которой окружения всех точек идентичны, возможно,

Таблица 10.1

Вложения uniformных разбиений и двойственных им: разбиения 1–14

1	2	3	4	5	5*	6	6*
№				грани	грани двойственного	вложимость	вложимость двойственного
1	1	22	De (Z_3), Po	γ_3	γ_3	Z_3	Z_3
2	3	28	Vo ($A_3^* = \text{bcc}$) содалит,	$\text{tr}(\beta_3)$	$\sim \alpha_3$	Z_6	—
3	4	11	De ($A_2 \times Z$) высоконапорный Si	Prism 3	Prism 6	$\frac{1}{2}Z_4$	Z_4
4	5	26	Vo ($A_2 \times Z$) B в AlB ₂	Prism 6	Prism 3	Z_4	$\frac{1}{2}Z_4$
5	2	1	De ($A_3 = \text{fcc}$), Cu	α_3, β_3	RhDo	$\frac{1}{2}Z_4$	Z_4
6	13	6	фаза Лавеса MgCu ₂	$\alpha_3, \text{tr}(\alpha_3)$	$\sim \gamma_3$	—	Z_4
7	14	8	борид CaB ₆	$\beta_3, \text{tr}(\gamma_3)$	Pyr ₄	—	—
8	15	7	De (J -комплекс) перовскит (ABX ₃)	β_3, Cbt	$\sim \beta_3$	—	—
9	22	27	цеолит-ро	Prism 8, tr(Cbt)	$\sim \alpha_3$	Z_9	—
10	6	24	De ($4.8^2 \times Z$)	Prism 8, γ_3	$\sim \text{Prism 3}$	Z_5	—
11	8	18	De ($3.6.3.6 \times Z$)	Prism 3, Prism 6	$\sim \gamma_3$	—	Z_4
12	12	17	De ($3^4.6 \times Z$)	Prism 3, Prism 6	$\sim \text{Prism 5}$	$\frac{1}{2}Z_7$	—
13	11	13	De ($3^3.4^2 \times Z$), борид Fe ₂ AlB ₂	Prism 3, γ_3	$\sim \text{Prism 5}$	$\frac{1}{2}Z_4$	—
14	11'	14	De ($3^2.4.3.4 \times Z$), силицид U ₃ Si ₂	Prism 3, γ_3	$\sim \text{Prism 5}$	$\frac{1}{2}Z_5$	—

1	2	3	4	5	5*	6	6*
№				грани	грани двойственного	вложения-мость	вложимость двойственного
15	7	19	De (3.12 ² × Z)	Prism ₃ ,	~ Prism ₃	—	$\frac{1}{2}Z_\infty$
16	18	25	цеолит Линде A	Prism ₁₂	~ α ₃	Z ₉	—
17	20	21		γ ₃ , tr(β ₃), tr(Cbt)	~ α ₃	—	—
18	17	9		tr(α ₃), tr(γ ₃), tr(Cbt)	~ α ₃	—	—
19	16	5		γ ₃ , Cbt, Rcbt	~ Bγt ₃	—	—
20	21	10	оксифторид Ag ₇ O ₈ F	α ₃ , γ ₃ , Rcbt	~ Bγt ₃	$\frac{1}{2}Z_7$	—
21	9	16	борид UB ₁₂	tr(α ₃), tr(β ₃), Cbt	~ Rγt ₄	—	—
22	10	23	De (3.4.6.4 × Z)	γ ₃ , Prism ₃ ,	~ γ ₃	$\frac{1}{2}Z_4$	—
23	19	20	De (4.6.12 × Z)	Prism ₆	~ γ ₃	Z ₇	—
24	24	2	селенид Pd ₁₇ Se ₁₅	γ ₃ , Prism ₆ ,	~ Prism ₃	—	—
25	—	3	De (hcr), Zn	Prism ₁₂	~ Rγt ₄	—	—
26	—	4	De (вытянутый A ₃), MoS ₂	γ ₃ , Prism ₈ ,	tw RhDo	$\frac{1}{2}Z_4$	Z ₄
27	—	12	De (вытянутый hcr), TiP	tr(γ ₃), Rcbt	RhDo — v ₃	—	—
28	—	15	сигнид ThSi ₂	α ₃ , β ₃	BDS*	$\frac{1}{2}Z_5$	—
			De (вытянутый 27)	Prism ₃ , β ₃ , α ₃	~ RhDo	$\frac{1}{2}Z_5$	—
				Prism ₃	~ BDS*	$\frac{1}{2}Z_5$	—
				Prism ₃ , γ ₃	~ Prism ₅	$\frac{1}{2}Z_5$	—

Вложения униформных разбиений и двойственных им: разбиения 15–28

Таблица 10.2

с измененной ориентацией): *J-комплекс* и *hcr*; грань Vo (*J* комплекс) имеет форму гальки (*jackstone*) (это объясняет происхождение термина «*J-комплекс*») и комбинаторно эквивалентен β₃.

- Разбиения 1, 3, 5 — это разбиения Делоне решеток Z_3 , $A_2 \times Z$, $A_3 = fcc$. Разбиения 2 и 4 — это разбиения Вороного решеток $A_3^* = bcc$ и $A_2 \times Z$. Номера 10, 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22 — это призматические разбиения Делоне над восемью архимедовыми разбиениями плоскости. Вложения их самих и двойственных им такие же, как в табл. 4.1, 4.2, но размерность увеличена на единицу.
- В химии, разбиения 1, 5, 24 появляются, например, как металлы полоний Po, медь Cu, цинк Zn; разбиения 4, 7, 13, 20 — как бориды AlB₂, CaB₆, Fe₂AlB₂, UB₁₂; разбиения 9 и 16 как цеолиты-ро и Линде A; разбиения 3 и 14, 27 — как Si под высоким давлением и силициды U₃Si₂, ThSi₂. И наконец, разбиения 2, 6 (известные как разбиения Фёпла), 8, 19, 23, 25, 26 появляются как содалит Na₄Al₃Si₃O₁₂Cl, фаза Лавеса MgCu₂, перовскит (ABX₃), Ag₇O₈F, Pd₁₇Se₁₅, MoS₂, TiP. Прекрасные изображения всех этих структур и подробности, относящиеся к химии, можно найти в гл. 6 и 7 книги [OkHy96].
- Отношения чисел граней двух типов в разбиениях таковы:

1 : 1 для 6, 7, 8, 10	2 : 1 для 5, 11, 13, 14, 24, 28	3 : 1 для 9
8 : 1 для 12	2 : 1 : 1 для 17, 19, 20	3 : 1 : 1 для 16, 18
3 : 2 : 1 для 21, 22, 25, 26	3 : 3 : 1 : 1 для 23	

10.2. Другие специальные разбиения

В таблице 10.3 мы сгруппировали некоторые другие относящиеся к делу разбиения. Здесь L_5 обозначает 3-мерную решетку пятого федерковского типа (т. е. полученную с помощью полиэдра Вороного), а ElDo обозначает ее полиэдр Вороного, называемый *вытянутым додекаэдром*. Оставшиеся четыре решетки появляются в табл. 10.1, 10.2 следующим образом номерами

$$\text{№ } 1 = \text{De}(Z_3) = \text{Vo}(Z_3),$$

$$\text{№ } 5 = \text{De}(A_3),$$

$$\text{№ } 2 = \text{Vo}(A_3^*),$$

$$\text{№ } 3 = \text{De}(A_2 \times Z_1),$$

$$\text{№ } 4 = \text{Vo}(A_2 \times Z_1).$$

Таблица 10.3

Вложимость некоторых других разбиений

29	De (L_5)	α_3 , Pyt_4	ElDo	$\frac{1}{2}Z_4$	Z_5
30	De (D -комплекс)	α_3 , $\sim \beta_3$	триакис $\text{tr}\alpha_3$	$\frac{1}{2}Z_5$	—
31	De (Кельвин)	α_3 , β_3	RhDo, tw RhDo	—	—
32	De (Грюнбаум)	Prism_3	Prism_6 , BDS*	$\frac{1}{2}Z_5$	—
33	De (вытянутый Кельвин)	α_3 , β_3 , Prism_3	$\text{RhDo} - v_3$	—	—
34	De (вытянутый Грюнбаум)	Prism_3 , γ_3	$\sim \text{Prism}_5$	$\frac{1}{2}Z_5$	—
35	$P(S_1)$	S_1		Z_3	—
36	$P(S_2)$	S_2		Z_4	—
37	$P(S_3)$	S_3		Z_5	—
38	A-19	Prism_∞		Z_2	
39		Prism_∞		Z_2	
40	A-20, n четно A-20, n нечетно	$C_n \times P_Z$ $C_n \times P_Z$		Z_∞ $\frac{1}{2}Z_\infty$	
41	A-22	Aprism_∞		$\frac{1}{2}Z_3$	
42	A-23	Prism_∞ , Aprism_∞		$\frac{1}{2}Z_3$	
43	-тип	γ_3 , $C_4 \times P_Z$		Z_3	
44	⊥-тип	γ_3 , $C_4 \times P_Z$		Z_3	
45	шахматный тип	γ_3 , $C_4 \times P_Z$		Z_3	
46	A-13'	α_3 , $\text{tr}(\alpha_3)$	R , скрученный R	—	—

Заметим, что $\text{De}(L_5)$ и $\text{De}(A_2 \times Z_1)$ совпадают как графы, но отличаются как разбиения.

Ниже через $\text{De}(\text{Кельвин})$ мы обозначаем любую упаковку Кельвина, полученную с использованием α_3 и β_3 (в отношении 2:1), которая является *собственной*, т.е. отличную от решетки $A_3 = fcs$ и бирешетки hcr . У каждого собственного разбиения Кельвина, так же как и у разбиения 13' в [Andr05] (в табл. 10.3 оно идет под номером 46; Андриени ошибочно считал его равномерным), есть ровно две вершинные фигуры. Грани паркета Вороного 46 — это два ромбоэдра: скажем, ромбоэдр (т.е. куб, стянутый вдоль диагонали) R , и скрученный R ; оба они эквивалентны γ_3 .

То же самое можно сказать о каждом разбиении Грюнбаума; см. № 32–34 в табл. 10.3.

Мы будем называть нормальное разбиение 3-пространства на платоновы и архимедовы полиэдры *почти равномерным*, если группа симметрии не является вершинно-транзитивной, но все вершинные фигуры конгруэнтны. Грюнбаум [Grün94] привел два бесконечных класса таких разбиений и заметил, что ему неизвестны другие примеры. В нашей терминологии они называются *вытянутыми собственными* разбиениями *Кельвина* и *Грюнбаума*. Разбиения Кельвина и Грюнбаума единственным образом определяются бесконечными последовательностями из нулей и единиц, характеризующими порядок, в котором слои следуют один за другим. В разбиении Кельвина слои из α_3 и β_3 следуют друг за другом двумя различными способами (скажем, a и b), в то время как в разбиении Грюнбаума слои из Prism_3 следуют друг за другом таким образом, что их высоты располагаются параллельно или перпендикулярно. Несобственные разбиения Кельвина дают равномерные разбиения 5 и 24 для последовательностей $\dots aaa \dots$ (или $\dots bbb \dots$) и $\dots ababab \dots$ соответственно. Собственные разбиения Кельвина и Грюнбаума не являются почти равномерными; они даже ∞ -равномерны (возьмите непериодическую последовательность).

Теперь рассмотрим вытягивания этих разбиений. Мы будем периодически добавлять слои из Prism_3 для разбиений Кельвина, и из кубов — для разбиений Грюнбаума.

Заметим, что $\text{RhDo} - v$ (грань разбиений Вороного 25, 26, 33) можно рассматривать как половину RoDo , разделенного надвое, и этот tw RoDo получается из RoDo скручиванием (поворотом на 90°) этих половин. Грани многогранника Вороного для собственного разбиения Кельвина — это и RhDo , и tw RhDo , хотя только один из них остается для двух несобственных случаев 5, 24. Точно так же, грань Вороного для 34 (специальная 5-призма) можно рассматривать как половину Prism_6 , разделенной надвое, а BDS* можно рассматривать аналогично как скрученную Prism_6 . Грани многогранника Вороного для собственного разбиения Грюнбаума 32 — это и Prism_6 , и BDS*, и только один из них остается для двух несобственных случаев 3, 27.

Кроме двух несобственных случаев 25, 26 (вытягиваний равномерных 5, 24), которые равномерны, имеется континуум собственных вытянутых разбиений Кельвина (обозначенных 33 в табл. 4), которые почти равномерны. Среди них есть счетное число периодических разбиений, соответствующих периодическим (a, b) -последовательностям. Оставшийся континуум состоит из аperiodических паркетов 3-пространства, полученных из α_3 , β_3 , Prism_3 по очень простому правилу: у каждого из них есть единственная звезда Делоне, состо-

ящая из шести Prism_3 (сложенных вместе так, чтобы образовывать 6-призму), трех α_3 и трех β_3 (помещенных поочередно на шесть треугольников, на которые делится шестиугольник) и одного α_3 , заполняющего пространство, оставшееся в звезде. Каждое b в (a, b) -последовательности, определяющей такой паркет, соответствует скручиванию, меняющему местами описанные выше три α_3 и три β_3 (т.е. повороту конфигурации из четырех α_3 , трех β_3 на 60°).

Похожая ситуация имеет место для вытянутых разбиений Грюнбаума. Кроме двух uniformных несобственных случаев 13, 28 (вытягиваний uniformных 3, 27), имеется континуум собственных вытянутых разбиений Грюнбаума (обозначенных 34 в табл. 4), которые почти uniformны. Апериодичные (a, b) -последовательности дают континуум апериодических паркетов, полученных при помощи Prism_3 , γ_3 по похожему простому правилу: единственная звезда Делоне, состоящая из четырех γ_3 (сложенных таким образом, чтобы образовать 4-призму), четырех Prism_3 , помещенных на них и две Prism_3 , заполняющие оставшееся пространство звезды. Каждое b в (a, b) -последовательности, определяющей паркет, соответствует повороту всей конфигурации из шести Prism_3 на 90° .

D -комплекс — это алмазная бирешетка; у триаксис $\text{tr}(\alpha_3)$ имеет Pug_3 на каждой из его треугольных граней. Оба разбиения 29 и 30 из табл. 10.3 вершинно-транзитивны, но у них есть несколько неархимедовых граней: Pug_4 для № 29 и неправильный полиэдр того же комбинаторного типа, что и β_3 , для № 30.

Разбиения 35, 36, 37 табл. 10.3 — это в точности все три ненормализуемые паркеты 3-пространства, полученные из выпуклых параллелоэдров, которые были найдены в [Sht080] (см. теорему 11.3 ниже). Многогранники, обозначенные S_1 , S_2 и S_3 , это центрально симметричные 10-гранники, полученные видоизменением параллелепипеда. S_1 эквивалентен β_3 , усеченному на двух противоположных вершинах. $P^*(S_i)$ при $i = 1, 2, 3$ являются различными разбиениями 3-пространства невыпуклыми телами, у которых одинаковый не 5-го-нальный остов.

Мы будем обозначать здесь некомпактные uniformные разбиения, введенные в параграфах 19, 20, 22, 23 книги [Andr05], через A-19, A-20, A-22, A-23 соответственно. В табл. 10.3 они идут под номерами 38, 40, 41, 42. Обозначим Prism_∞ , APrism_∞ и $C_n \times P_Z$ ∞ -гранную призму, ∞ -гранную антипризму и цилиндр на C_n соответственно.

A-19 получается, если поместить Prism_∞ на сеть δ_2 . При этом его остовом оказывается Z_2 . Под номером 39 идет разбиение, которое от-

личается от 38 только другим расположением некоторых бесконечных призм *под* сетью δ_2 , т.е. перпендикулярно тем, которые лежат выше.

A-20 получается, если поместить цилиндры на δ_2 , A-22 — если поместить APrism_∞ на (36), а A-23 — если поместить Prism_∞ и APrism_∞ на $(3^3.4^2)$.

В разделе 20' [Andr05] упоминается также разбиение на два полупространства, разделенных некоторыми из десяти архимедовых (и одной вырожденной) сетей, т.е. uniformных плоских разбиений. Можно также взять две параллельные сети (скажем, T) и заполнить пространство между ними обыкновенными призмами (при этом остов окажется прямым произведением графов T и K_2) или, при $T = \delta_2$ либо $(3^3.4^2)$ заполнять, комбинацией обыкновенной и бесконечной призм. Аналогичные uniformные разбиения получаются, если мы возьмем бесконечное число параллельных сетей T .

Разбиения 43, 44, 45 из табл. 10.3 отличаются только расположением кубов и цилиндров. В 43 слои цилиндров остаются параллельными ($\parallel$ -тип); в 44 они перпендикулярны цилиндрам каждого предшествующего слоя. В 45 мы рассматриваем δ_2 как бесконечную шахматную доску; цилиндры располагаются на «белых» ячейках, а стопки кубов — на «черных».

Некомпактные uniformные разбиения можно получить видоизменением Prism_∞ в 38, 39.

Решетки, бирешетки и паркеты

Напомним, что $\text{Vo}(L)$ и $\text{De}(L)$ обозначают остовы разбиений Вороного и Делоне для решетки L . При этом ребра этих графов являются ребрами параллелотопа Вороного и многогранников Делоне решетки L ; любой минимальный вектор L является ребром $\text{De}(L)$, но обратное, вообще говоря, неверно.

Нам интересно выяснить, вложим ли изометрически (или с удвоенными расстояниями) бесконечный граф G , где $G = \text{Vo}(L)$ или $\text{De}(L)$, в Z_m при некотором $m \geq n$.

Здесь мы излагаем результаты, полученные на эту тему для неприводимых корневых решеток, для двух обобщений алмазной бирешетки и для 3-мерного случая.

Понятия теории решеток вводятся в [Voro1908], [RyBa79] и [CoSl88].

И опять оказывается, что все случаи невложимости, данные в этой главе, появляются из-за нарушения 5-гонального неравенства.

11.1. Неприводимые решетки корней

Рассмотрим неприводимые корневые решетки, т. е. A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 .

Для малых размерностей n , имеем:

$$\text{De}(A_2) = (3^6) \rightarrow \frac{1}{2}Z_3, \quad \text{Vo}(A_2) = (6^3) \rightarrow Z_3$$

([Asso81]) и, конечно же,

$$D_2 = Z_2, \quad A_2^* = A_2, \quad D_3 = A_3.$$

Теорема 11.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- (i) $\text{De}(E_n)$ не 5-гонален при $n = 6, 7, 8$;
- (ii) при $n \geq 3$, $\text{De}(A_n) \rightarrow \frac{1}{2}Z_{n+1}$, $\text{Vo}(A_n) \rightarrow Z_{n+1}$, $\text{Vo}(A_n^*) \rightarrow Z_m$ (где $m = \binom{n+1}{2}$), $\text{De}(A_n^*)$ не 5-гонален;
- (iii) для $n \geq 4$, $\text{De}(D_n)$, $\text{Vo}(D_n)$, $\text{De}(D_n^*)$ не 5-гональны.

Например, $\text{De}(D_4)$ невложим (и это противоречит утверждению 2(b) [Asso81]): для того, чтобы убедиться в этом, достаточно взять 5

точек таких, что

$$a = (0, 0, 0, 0), \quad b = (1, 1, 0, 0),$$

$$x = (1, 0, 1, 0), \quad y = (1, 0, -1, 0), \quad z = (0, 1, 0, 1),$$

образующих не 5-гональный изометрический подграф $K_5 - K_3$. В действительности (x, y) не является ребром, поскольку середина отрезка $[x, y]$ — это центр квадрата (a, x, c, y) , где $c = (2, 0, 0, 0)$, с ребрами (a, x) , (x, c) , (c, y) , (y, a) принадлежат графу $\text{De}(D_4)$. И далее, $\text{De}(D_4)$ — метрическое подпространство $\text{De}(D_n)$ при $n \geq 5$.

Заметим еще, что имеются изометрические вложения Z_n в $\text{De}(D_{2n})$ и Z_2 в $\text{De}(A_3)$.

11.2. Случай размерности 3

Теперь мы рассмотрим пять типов (определяемых своими полиэдрами Вороного) 3-мерных решеток, полученных Федоровым [Fedo1885]. Кроме Z_3 , $A_3 = fcc$ и $A_3^* = bcc$, существуют еще два других типа решеток, для которых полиэдрами Вороного служат 6-призма и вытянутый додекаэдр. Возьмем $A_2 \times Z_1$ и, скажем, L_5 в качестве представителей решеток этих двух типов. Напомним, что $\text{De}(A_3)$, $\text{De}(L_5)$ совпадают как графы, но разбиения $\mathbb{R}^3$ (остовами которых они являются) различны.

Теорема 11.2. *Справедливы утверждения:*

- (i) $\text{De}(A_2 \times Z_1) \rightarrow \frac{1}{2}Z_4$, $\text{Vo}(A_2 \times Z_1) \rightarrow Z_4$;
- (ii) $\text{De}(L_5) \rightarrow \frac{1}{2}Z_4$, $\text{Vo}(L_5) \rightarrow Z_5$.

Итак, разбиение Делоне общей решетки A_3^* — единственное невложимое среди разбиений $\text{De}(L)$, $\text{Vo}(L)$ для пяти типов Вороного 3-мерных решеток L .

В $\mathbb{R}^3$ комбинаторный тип параллеледра P определяет комбинаторный тип соответствующего паркета, который образован P ; точно также тип двойственного разбиения определяется типом его *звезды* (т. е. конфигурацией вокруг вершины). Для нормальных разбиений имеется пять типов параллеледров и пять двойственных типов разбиений (есть четыре типа их остовов, об этом говорилось уже в [Fedo1885]); их вложения описаны в предыдущей теореме.

В [Shto80] были найдены все три типа выпуклых параллеледров для существенно ненормальных (т. е. ненормализуемых) разбиений $\mathbb{R}^3$ (см. табл. 10.3 выше). Обозначим эти параллеледры S_1 , S_2 , S_3 ; обозначим еще $P(S_i)$, $P^*(S_i)$ паркет, образованный S_i и двойственное разбиение при $i = 1, 2, 3$. Все S_i ($i = 1, 2, 3$) — центрально-симметричные 10-эдры, полученные видоизменением прямоугольного параллелепипе-

да; их p -векторами являются $(p_4 = 10)$, $(p_4 = 6, p_6 = 4)$, $(p_4 = 4, p_6 = 4, p_8 = 2)$ соответственно. $S_1 = \gamma_3 + \gamma_3$ — это (комбинаторно) β_3 , усеченный при двух противоположных вершинах; у S_2 и S_3 есть 2-валентные вершины. В все $P^*(S_i)$ имеют одинаковый комбинаторный тип остова; они являются разбиениями $\mathbb{R}^3$, образованными невыпуклыми телами.

Теорема 11.3. $S_i \rightarrow H_{3+i}$, $P(S_i) \rightarrow Z_{2+i}$ и $P^*(S_i)$ не 5-гонален при $i = 1, 2, 3$.

Два самых интересных решетчатых комплекса в 3-пространстве — это бирешетки J -комплекс и D -комплекс (D -комплекс называется еще алмазной или тетраэдральной упаковкой и обозначается D_3^+).

Теорема 11.4. Справедливы утверждения:

- (i) $\text{De}(D\text{-комплекс}) \rightarrow \frac{1}{2}Z_5$, но $\text{Vo}(D\text{-комплекс})$, $\text{De}(J\text{-комплекс})$, $\text{Vo}(J\text{-комплекс})$ не 5-гональны;
- (ii) у любой упаковки Кельвина K , образованной α_3 и β_3 (исключая A_3 , но включая бирешетку hcr), не 5-гональные $\text{De}(K)$, $\text{Vo}(K)$.

Среди упаковок 3-пространства, рассмотренных выше, паркеты $\text{De}(Z_3)$, $\text{De}(A_2 \times Z_1)$, $\text{Vo}(A_2 \times Z_1)$, $\text{De}(A_3)$, $\text{Vo}(A_3^*)$, $\text{De}(J\text{-комплекс})$, $\text{De}(hcr)$ являются однородными разбиениями номеров 1, 3, 4, 5, 2, 8, 24 из табл. 10.1, 10.2.

Теперь рассмотрим еще две бирешетки, обобщающие D -комплекс:

$$D_n^+ := D_n \cup (d + D_n),$$

где новая точка d — центр наибольшего многогранника Делоне; а также

$$A_n^+ := A_n \cup (a + A_n),$$

где новая точка a — центр правильного n -симплекса, который является многогранником Делоне A_n , см. [CoSl88].

D_n^+ — решетка если и только если n четно; $D_2^+ = Z_2$, $D_4^+ = Z_4$, $D_8^+ = E_8$. A_n^+ — всегда бирешетка; она получается из A_n описанной выше центрированной его наименьшего многогранника Делоне, являющегося правильным n -симплексом α_n . Центрирование всех многогранников Делоне A_n дает A_n^* . Напомним, что

$$\text{De}(A_2^+) = \text{Vo}(A_2) = (6^3) \rightarrow Z_3, \quad \text{Vo}(A_2^+) = (3^6) \rightarrow \frac{1}{2}Z_3, \quad A_3^+ = D_3^+.$$

Теорема 11.5. Справедливы следующие утверждения:

- (i) $\text{De}(D_3^+) \rightarrow \frac{1}{2}Z_5$, $\text{Vo}(D_3^+)$ не 5-гонален, $\text{De}(D_n^+)$ не 5-гонален при $n \geq 5$;
- (ii) $\text{De}(A_n^+) \rightarrow \frac{1}{2}Z_{n+2}$ при $n \geq 3$.

Все эти результаты получены методами, описанными в [CDG97] и [DeSt96]. Например, не 5-гональность $\text{De}(A_n^*)$, $n \geq 3$ дают 5 точек:

$$a = (0, 0, 0, 0, \dots, 0), \quad b = (1, 1, 1, 0, \dots, 0),$$

$$x = (1, 0, 0, 0, \dots, 0), \quad y = (0, 1, 0, 0, \dots, 0), \quad z = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

в редуцированном репере Зеллинга решетки; точки a , x , $x + y$, b — это вершины некоторой грани симплекса Делоне.

11.3. Дайсинги

Теперь рассмотрим семейство равноудаленных параллельных гиперплоскостей, которые разрезают $\mathbb{R}^n$ на слои одинаковой толщины. Если мы возьмем n таких независимых семейств гиперплоскостей, мы получим пространство $\mathbb{R}^n$ разрезанного на равные параллелепипеды с вершинами, образующими n -мерную решетку. Вообще, дайсинг $\mathcal{D}$ — это набор гиперплоскостей, образованный семействами равноудаленных параллельных гиперплоскостей, который удовлетворяет следующим свойствам:

- (i) среди семейств есть n независимых,
- (ii) через каждую вершину дайсинга проходит одна гиперплоскость из каждого семейства.

Условие (i) гарантирует, что ячейки $\mathcal{D}$ — многогранники. Из условия (ii) следует, что множество вершин $L(\mathcal{D})$ дайсинга $\mathcal{D}$ — это решетка, и что множество вершин любого поддайсинга (удовлетворяющего (i)) совпадает с $L(\mathcal{D})$. Решетка $L(\mathcal{D})$ называется *решеткой дайсинга*.

Разбиение $\mathbb{R}^n$, которое получено разрезанием гиперплоскостями дайсинга $\mathcal{D}$, — это разбиение Делоне дайсинговой решетки $L(\mathcal{D})$.

Сформулируем основное свойство дайсинговой решетки (см. [Erda98]):

Многогранник Вороного решетки является зонотопом если и только если эта решетка — дайсинговая.

Поскольку остов зонотопа Z_m диаметра m вложим в H_m , остов разбиения Вороного любой дайсинговой решетки вложим в Z_m при том же m .

Нас интересует вопрос: существуют ли в числе не зонотопальных центрально-симметричных многогранников с вложимыми остовами такие, которые являются параллелоэдрами (т.е. замощают пространство при параллельном переносе) или более точно, многогранниками Вороного решеток? Если ответ положительный, то задача состоит в том, чтобы выяснить вложимо ли соответствующее разбиение Воро-

ного в некоторое Z_m (напомним, что вложимый RhDo — v_3 является паркетинной разбиений Вороного № 25*, 26* из табл. 10.1, 10.2, и среди них только № 25* вложим и служит, возможно, бесконечным аналогом нереализуемого ориентированного матроида (см. гл. 14). Если же ответ *отрицательный*, тогда мы получаем новую характеристику дэйсинговых решеток как таких решеток, остов многогранника Вороного которых вложим в H_m при некотором m .

Сложнее случай вложимости разбиения Делоне дэйсинговой решетки. На первый взгляд кажется, что разбиение Делоне, образованное m семействами гиперплоскостей, должно быть вложимо в Z_m . Но это не всегда так. Например, граф разбиения Делоне дэйсинговой решетки A_n^* , $n \geq 3$, не вложим.

11.4. Паркетинны решетчатых разбиений

В этом разделе дискретное множество точек является точечной решеткой.

Многогранники Вороного

Напомним, что разбиение n -пространства называется *примитивным*, если каждая вершина разбиения принадлежит в точности $(n+1)$ -многогранникам (паркетинам) разбиения. В противном случае, разбиение называется *непримитивным*. Многогранник (паркетина), определяющий(-щая) примитивное или непримитивное разбиение, называется *примитивным* или *непримитивным* соответственно.

Итак, бывают примитивные и непримитивные многогранники Вороного. Для каждой размерности $n \geq 2$ среди всех примитивных n -многогранников Вороного существует только один, а именно n -мерный перестановочный многогранник, который является зонотопом. Этот $(n+1)!$ -вершинный зонотоп является многогранником Вороного решетки A_n^* ; он вкладывается в $H_{\binom{n+1}{2}}$.

При $n = 2$ оба многогранника Вороного (непримитивный прямоугольник и примитивный центрально-симметричный шестиугольник) являются зонотопами, а их остовы — $C_4 = H_2$ и $C_6 \rightarrow H_3$.

При $n = 3$ все пять многогранников Вороного являются зонотопами (примитивный усеченный октаэдр и четыре непримитивных: куб, Prism_6 , ромбический додекаэдр, вытянутый додекаэдр) и, таким образом, их остовы вложимы со шкалой один в H_m (при $m = 6, 3, 4, 4, 5$ соответственно).

При $n = 4$ имеется три примитивных многогранника Вороного. В 1937 году Делоне перечислил $3(\text{примитивных}) + 48 = 51$ n -многогран-

ников Вороного. Они приведены в [Delo37]; в 1968 году Штогрин обнаружил последний оставшийся (у этого пятьдесят второго 24 фасеты, которые являются 8-эдрами двух типов: 18 одного и 6 другого). Среди 52 этих 4-многогранников 17 являются зонотопами (№ 1 и 3–19); они вкладываются в H_m при $m = 10, 9, 8, 8, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 6, 5, 4, 9$ соответственно. Мы проверили, что все остальные не 5-гональны; более того, только у № 33 (единственного не зонотопа с двудольным остовом), № 45, № 48, № 50, № 51 (правильной 24-ячейка) и № 52 есть только 5-гональные 3-грани. Остов i -грани, вообще говоря, не является изометрическим подграфом остова выпуклого n -многогранника (например, шестиугольник — не изометрическая грань в 6-пирамиде), но это так, если многогранник — параллелоэдр.

Говорят, что две решетки одного L -типа, если их разбиения Вороного (а, значит, и Делоне) аффинно эквивалентны. Рышков и Барановский в [RuBa76] нашли 221 различных *общих* (т.е. в конусе положительных полуопределенных квадратичных форм соответствующих областям наибольшей размерности) L -типов 5-мерных решеток. Каждый общий L -тип определяет примитивный многогранник Вороного. Используя компьютер, Энгель [Enge98], обнаружил 222 различных примитивных 5-многогранников Вороного. С использованием этих результатов L -тип, пропущенный в [RuBa76], был явно дан в [EnGr02]. Кроме того, Энгель [Enge98] обнаружил, что существуют в точности 179377 5-многогранников Вороного; среди непримитивных 80 являются зонотопами.

Заметим, что перечислить все n -многогранники Вороного, которые являются зонотопами — это вполне рутинная работа: существует взаимно-однозначное отображение между такими n -многогранниками Вороного и неизоморфными *унимодулярными матроидами* ранга n . Это аналогично тому, что все n -зонотопы взаимно-однозначно соответствуют *реализуемым ориентируемым матроидам* ранга n (см. гл. 14).

Многогранники Делоне

Теперь мы рассмотрим многогранники Делоне малых размерностей и некоторые операции на многогранниках Делоне.

При $n = 2$ остовами многогранников Делоне (треугольников с острыми углами и прямоугольников) являются $C_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_3$ и $C_4 = H_2$.

При $n = 3$ остовы всех пяти многогранников Делоне — тоже ℓ_1 -графы:

$$\gamma_3 = H_3, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}H_3, \quad \beta_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_4, \quad \text{Pyr}_4 \rightarrow \frac{1}{2}H_4, \quad \text{Prism}_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_5.$$

Все 19 типов 4-многогранников Делоне приведены в [ErRu87]. Прямой проверкой мы получили следующее утверждение, в котором приводится список всех вложимых среди них; № i , $1 \leq i \leq 16$ (только в этой главе) и буквы A , B , C соответствуют обозначениям из [ErRu87].

В 1997 году Кононенко вычислил, что существуют 138 пятимерных многогранников Делоне, а Дютур в 2002 году нашел все 6241 шестимерных многогранников Делоне.

Предположение 11.1.

- (i) № 16 = $\gamma_4 = \alpha_1 \times \gamma_3 = H_4$;
(ii) $P \rightarrow \frac{1}{2}H_4$ для следующих многогранников P :

$$\begin{aligned} \text{№ 2} &= \text{Pyg}(\text{Pyg}_4) & c\,G(\text{№ 2}) &= K_{2,2,1,1}, \\ B &= \text{Pyg}(\beta_3) & c\,G(B) &= K_{2,2,2,1}, \end{aligned}$$

$$C = \text{ВPyg}(\beta_3) = \beta_4 = \frac{1}{2}H_4;$$

- (iii) $P \rightarrow \frac{1}{2}H_5$ для следующих полиэдров P :

$$\begin{aligned} \text{№ 1} &= \text{Pyg}(\alpha_3) = \alpha_4, & \text{№ 3} &= \text{Pyg}(\text{Prism}_3), & \text{№ 5}, \\ \text{№ 7} &= \alpha_1 \times \alpha_3 = \text{Prism}(\alpha_3), & \text{№ 9}, \\ \text{№ 13} & \quad c\,G(\text{№ 13}) = T(5) = J(6, 2); \end{aligned}$$

- (iv) $P \rightarrow \frac{1}{2}H_6$ для следующих полиэдров P :

$$\begin{aligned} \text{№ 10} &= \alpha_2 \times \alpha_2, & \text{№ 11} &= \alpha_1 \times \text{Pyg}_4 = \text{Prism}(\text{Pyg}_4), \\ \text{№ 15} &= \alpha_1 \times \beta_3 = \text{Prism}(\beta_3), \end{aligned}$$

A с $G(A) = K_6$ (циклический 4-многогранник);

- (v) $P \rightarrow \frac{1}{2}H_7$ для $P = \text{№ 14} = \alpha_1 \times \text{Prism}_3 = \text{Prism}(\text{Prism}_3)$;
(vi) следующие полиэдры P не 5-гональны:

$$\begin{aligned} \text{№ 4}, & \quad \text{№ 6} = \text{ВPyg}(\text{Prism}_3), \\ \text{№ 8} &= \text{Pyg}(\gamma_3), & \text{№ 12} &= \text{ВPyg}(\gamma_3). \end{aligned}$$

Хорошо известно, что прямое произведение $P \times P'$ многогранников Делоне P и P' — в свою очередь многогранник Делоне, и $G(P \times P') = G(P) \times G(P')$. Кроме того, для каждого многогранника Делоне P существует пирамида $\text{Pyg}(P)$ и (если P центрально-симметричен) бипирамида $\text{ВPyg}(P)$, которые являются многогранниками Делоне (см. [DeGr93]).

Конструкция прямого произведения сохраняет ℓ_1 -вложимость многогранников Делоне. Например, $G(P \times P') \rightarrow \frac{1}{2}H_{m+m'}$ если $G(P) \rightarrow \frac{1}{2}H_m$ и $G(P') \rightarrow \frac{1}{2}H_{m'}$. Но конструкции пирамиды и бипирамиды могут привести к не 5-гональным многогранникам Делоне, даже если исходить из многогранников с ℓ_1 -остовами. Рассмотрим, например, такие многогранники Делоне:

α_n , β_n , γ_n , $\frac{1}{2}\gamma_n$ ($n \geq 5$), $\text{Ambo}(\alpha_n)$ ($n \geq 4$), n -многогранник Джонсона P_J с $G(P_J) = J(n+1, k)$ ($3 \leq k \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$), $\alpha_{n-1} \times \alpha_{n-1}$ для $n \geq 3$; Prism_3 , Pyg_4 .

У всех у них ℓ_1 -остовы:

$$\text{Ambo}(\alpha_n) \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}, \quad P_J \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}, \quad \text{Prism}_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_5, \quad \text{Pyg}_4 \rightarrow \frac{1}{2}H_4.$$

Конструкции пирамиды и бипирамиды из них дают ℓ_1 -многогранники в следующих случаях:

$$\text{Pyg}^m(\alpha_n), \quad \text{Pyg}^m(\beta_n), \quad \text{ВPyg}^m(\beta_n), \quad \text{Pyg}^m(\text{Pyg}_4).$$

Дополнительно, мы получаем следующие ℓ_1 -вложения:

$$\begin{aligned} - & \text{Pyg}^2(\text{Prism}_3) \rightarrow \frac{1}{2}H_5, \\ - & \text{Pyg}(\text{Ambo}(\alpha_n)) \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}, \\ - & \text{Pyg}(\alpha_{n-1} \times \alpha_{n-1}) \rightarrow \frac{1}{2}H_{2n}. \end{aligned}$$

Включения (i), (ii) ниже показывают, что остовы упомянутых в них многогранников не 5-гональны, и поэтому они не являются ℓ_1 -графами:

- (i) граф $K_5 - K_3$ — изометрический подграф остовов следующих восьми типов многогранников:
- $\text{Pyg}(\gamma_n)$,
 - $\text{ВPyg}(\gamma_n)$,
 - $\text{Pyg}^2(\text{Ambo}(\alpha_n))$, $n \geq 6$,
 - $\text{Pyg}(P_J)$ (поскольку $K_{1,k}$ — изометрический подграф $J(n+1, k)$),
 - $\text{Pyg}\left(\frac{1}{2}H_n\right)$, $n \geq 6$,
 - $\text{Pyg}^2(\alpha_{n-1} \times \alpha_{n-1})$,
 - $\text{ВPyg}(\text{Ambo}(\alpha_n))$, $n \geq 6$ и чётно,
 - $\text{ВPyg}\left(\frac{1}{2}H_n\right)$, $n \geq 6$ и чётно;
- (ii) граф $K_5 - P_2 - P_3$ является изометрическим подграфом остова $\text{ВPyg}(\text{Prism}_3)$.

И наконец, следующие остовы гиперметрические, но не ℓ_1 (см. предложение 4.4 [DeGr93]):

- $\text{Pyr}\left(\frac{1}{2}\gamma_5\right)$,
- $\text{Pyr}^2\left(\frac{1}{2}\gamma_5\right)$,
- $\text{Pyr}^2(\text{Ambo}(\alpha_4))$,
- $\text{Pyr}^3(\text{Ambo}(\alpha_4))$,
- $\text{Pyr}^3(\text{Prism}_3)$, $\text{Pyr}^4(\text{Prism}_3)$.

Малые многогранники

12.1. Полиэдры, у которых не больше семи граней

В этой главе №1 означает лишь №1—10, 11—44 из рис. 12.1, 12.2.

Что касается ℓ_1 -статуса всех десяти полиэдров, у которых не больше шести граней, о них можно сказать, что все они либо ℓ_1 -вложимы, либо не 5-гональны.

К ℓ_1 -вложимым относятся

- $\frac{1}{2}H_4 : \alpha_3 \simeq \alpha_3^*$, $\text{Pyr}_4 \simeq \text{Pyr}_4^*$, $\text{VPyr}_3 = \text{Prism}_3^*$, $\gamma_3^* = \beta_3$,
- $\frac{1}{2}H_5 : \text{Pyr}_5 \simeq \text{Pyr}_5^*$, $\text{Prism}_3 \simeq \text{VPyr}_3^*$, $(2\text{-усеченный } \alpha_3)^*$, и еще один (№43 на рис. 12.2);
- $\frac{1}{2}H_6 : \gamma_3$, 2-усеченный α_3 .

Кроме того, остаются еще: самодвойственный полиэдр с остовом $K_6 - P_6$, полиэдр, у двойственного к которому остовом является $K_{3 \times 2} - e$, двойственный к нему (№44 на рис. 12.2) и еще один, у двойственного к которому остовом является $K_6 - P_5$.

Предположение 12.1. О 34 полиэдрах (№11—44 на рис. 12.2) с семью гранями, и двойственных к ним, можно сказать следующее

- $\frac{1}{2}H_5$: 20*, 21*, 29*, 35, 36*, 38*, 39 $\simeq$ 39*, 43;
- $\frac{1}{2}H_6$: 12*, 14*, 16*, 17*, 18, 19 $\simeq$ 19*;
- $\frac{1}{2}H_7$: 12, 20, 23;

гиперметрический, но ℓ_1 -невложим: 13*;

не 7-гональны: 32*, 37*, и не 5-гональны: все остальные (включая 40* = 42 и самодвойственные 34, 41).

Замечание 12.1.

- (i) Среди перечисленных выше ℓ_1 -полиэдров только γ_3 двудольный и только три не являются ℓ_1 -жесткими: $\alpha_3 \simeq \alpha_3^* \rightarrow \frac{1}{2}H_3, \frac{1}{2}H_4$; $\text{VPyr}_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_4$ (два способа) и $39 \simeq 39^* \rightarrow \frac{1}{2}H_5, \frac{1}{2}H_6$. Простыми многогранниками среди всех 10+34 полиэдров, у которых не больше

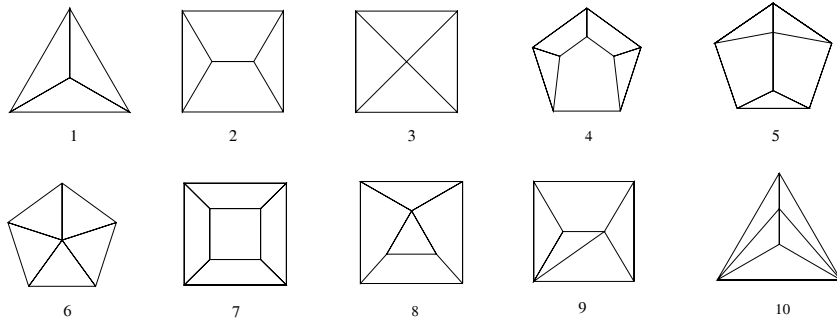


Рис. 12.1. Все 3-многогранники с не более чем шестью гранями

ше семи граней, являются: α_3 , $\text{Prism}_3 = 1$ -усеченный α_3 , 2-усеченный α_3 , γ_3 и № 11, 12 (3-усеченный α_3), 13, 20 (1-усеченный γ_3), 23 = Prism_5 .

- (ii) Среди всех 44 полиэдров, у которых не больше семи граней, 20 — комбинаторно эквиваленты таким, которые заполняют пространство: все десять, кроме Pug_5 , из тех, у которых не больше шести граней (включая все три не 5-гональные) и № 12, 15, 18, 20, 22, 23, 28, 30, 36, 43, 44 (среди них № 12, 18, 20, 23, 43 являются ℓ_1 -графами).

12.2. Простые полиэдры, у которых не больше восьми граней

Предположение 12.2. Среди всех 27 кубических графов у которых не больше десяти вершин, 19 не являются 5-гональными, а оставшиеся восемь являются ℓ_1 -графами: не полидральный граф Петерсена $\rightarrow \frac{1}{2}H_6$ и 7 простых полиэдров: i -усеченный $\alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_{4+i}$ для всех $0 \leq i \leq 3$, i -усеченный $\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_{6+i}$ для $i = 0, 1$ и $\text{Prism}_5 \rightarrow \frac{1}{2}H_7$.

Предположение 12.3. Среди остовов всех 14 простых полиэдров с восемью гранями (т. е. с 12 вершинами) четыре являются ℓ_1 -графами (все вложимы в $\frac{1}{2}H_8$): Prism_6 , двойственный скрученному дисфеноиду BDS^* , октаэдр Дюрера и γ_3 , усеченный у двух смежных вершин. Двойственные к первым двум не 5-гональны, а к последним двум $\rightarrow \frac{1}{2}H_6$. 4-усеченный α_3 , а также γ_3 , усеченный

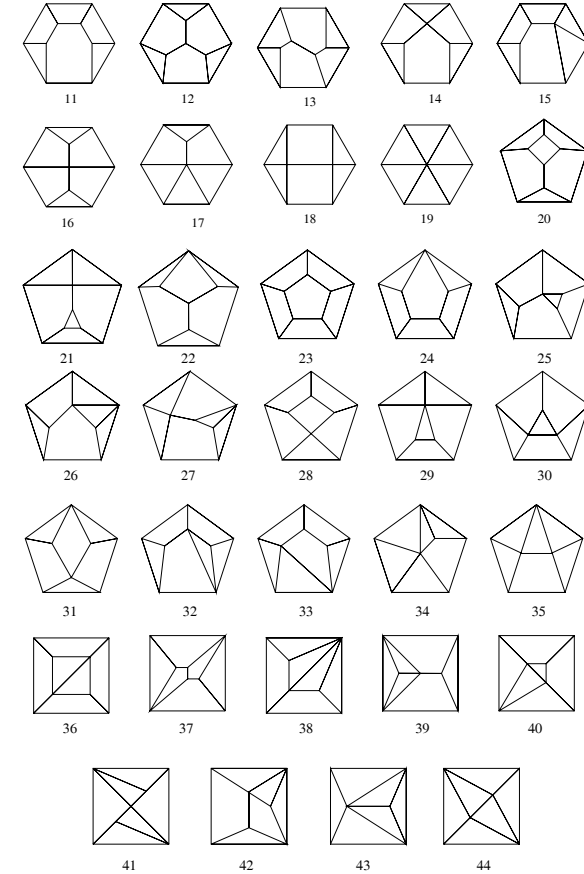


Рис. 12.2. Все 3-многогранники с семью гранями

у двух вершин на расстоянии 2, не 5-гональны; двойственные к ним $\rightarrow \frac{1}{2}H_7$. Пять полиэдров на рис. 12.3 соответственно не 5-, 5-, 7-, 7-, 9-гональны; остовы двойственных к ним соответственно: вложимы в $\frac{1}{2}H_8$, $\frac{1}{2}H_7$, $\frac{1}{2}H_7$, $\frac{1}{2}H_6$, не 5-гонален. Оставшиеся три полиэдра и двойственные к ним не 5-гональны.

Один из этих трех оставшихся полиэдров (а именно, 3-усеченная Prism_3) — наименьший простой полиэдр с $p = (3, 1, 1, p_6, 0, \dots)$; такие полиэдры существуют (смотри с. 271 в [Grün67]) если и только если p_6 — нечетное число, не равное единице. Октаэдр Дюрера, упо-

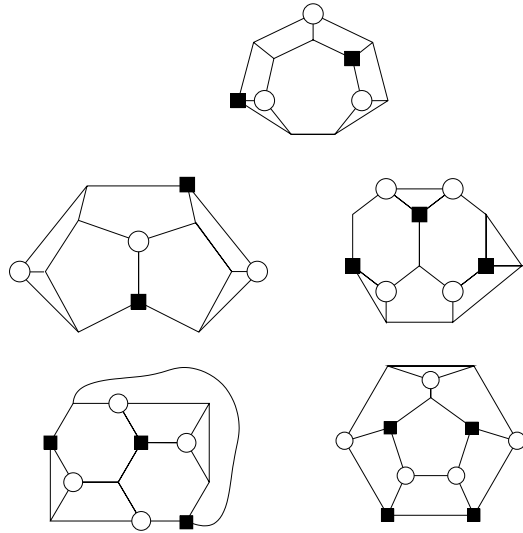


Рис. 12.3. Некоторые простые восьмигранники

мянутый выше, — это γ_3 , усеченный у двух противоположных вершин. Он так называется, поскольку присутствует на картине Дюрера «Меланхолия», 1514, Там этот многогранник изображен лежащим на своей треугольной грани.

Замечание 12.2.

- (i) Остовы всех простых ℓ_1 -полиэдров с $f \leq 8$ гранями (их восемь) вложимы в $\frac{1}{2}H_f$; все они, за исключением α_3 , ℓ_1 -жестки, и кроме того, $\gamma_3 \rightarrow H_3$, $\text{Prism}_6 \rightarrow H_4$.
- (ii) Остовы полиэдров в центре рис. 12.3 и одного из трех не 5-гональных простых восьмигранников, двойственные к которым тоже не 5-гональны, являются двумя наименьшими 3-регулярными графами с тривиальной группой автоморфизма.
- (iii) Среди остовов одиннадцати простых полиэдров, гранями которых служат только k -угольники, $k \leq 5$, (они двойственны всем восьми выпуклым дельтаэдрам, 1-усеченному α_3 , 1-усеченному γ_3 и октаэдру Дюрера) остовы только двух (двойственных 3-вытянутой Prism_3 и дважды каппингованной APrism_4) не являются ℓ_1 -графами.

Полиэдры с двумя типами граней

Обозначим $(k; a, b; p_a, p_b)$ любой k -валентный полиэдр, гранями которого являются только p_a a -угольников и p_b b -угольников, где $3 \leq a < b$ и $p_a > 0$, $p_b \geq 0$. Будем называть его полиэдром с двумя типами граней. У любого полиэдра с двумя типами граней $(k; a, b; p_a, p_b)$ и с n вершинами есть

$$\frac{kn}{2} = \frac{(ap_a + bp_b)}{2}$$

ребер, и он удовлетворяет соотношению Эйлера

$$n - k\frac{n}{2} + (p_a + p_b) = 2,$$

т. е.

$$n = \frac{2(p_a + p_b - 2)}{k - 2}.$$

Приравняв эти два выражения для n , мы получаем

$$p_a(2k - a(k - 2)) + p_b(2k - b(k - 2)) = 4k. \quad (13.1)$$

Это равенство влечет $a < 2k/(k - 2)$. Действительно, если предположить справедливость неравенства $2k \leq a(k - 2)$, то оно влечет неравенство $2k < b(k - 2)$. Вместе эти неравенства и 13.1 ведут к противоречию $k \geq 3$. Поэтому для (k, a) есть только возможности $(3, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$.

Далее, поскольку $b > a$, мы получаем $b = 2k/(k - 2)$ только для $(k, b) = (3, 6)$, $(4, 4)$, а $b < 2k/(k - 2)$ только для шести простых (т. е. для которых $k = 3$) полиэдров при $(a, b) = (3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$.

Если $p_b = 0$, то приведенные выше пять возможных значений (k, a) дают (комбинаторно) платоновы полиэдры D_0 , γ_3 , α_3 , β_3 , I_{30} , соответственно.

Если $p_b = 1$, то полиэдров с двумя типами граней не существует.

Если $p_b = 2$, то не существует полиэдров с двумя типами граней при $(k, a) = (3, 3)$, а при $(k, a) = (3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$ получаются полиэдры: Prism_b , Barrel_b (двойственный 2-каппингованной APrism_b), APrism_b и снаб APrism_b . Последний полиэдр состоит из таких трех циклов: внешний $(x_1, \dots, x_b)$, средний $(y_1, y'_1, \dots, y_b, y'_b)$, и внутренний $(z_1, \dots, z_b)$, где $x_i \sim y_i, y'_i, y_{i+1}$ и $z_i \sim y'_{i-1}, y_i, y'_i$ для всех циклично упорядоченных $i = 1, \dots, b$. Этот полиэдр называется *снаб*

APrism_b , поскольку при $b = 4$ это (комбинаторно) хорошо известный полиэдр с правильными гранями — снаб APrism_4 . Она 5-гональна, но не 7-гональна. Заметим, что снаб APrism_3 иногда называют *снаб тетраэдром*; у него такой же остов, как и у Ico , но группой симметрии является T . Многогранник $\text{Barrel}_b := (2\text{-APrism}_b)^*$ (см. гл. 4) — это аналог Prism_b , только слой 4-угольников заменяет двумя слоями 5-угольников; у него $4b$ вершин.

Предположение 13.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- (i) $\text{Prism}_b \rightarrow \frac{1}{2}H_{b+2}$ (и более того, $\rightarrow H_{(b+2)/2}$ для четных b),
 $\text{Prism}_b^* \rightarrow \frac{1}{2}H_4, \frac{1}{2}H_4$, не 5-гонален при $b = 3, 4, b \geq 5$ соответственно;
- (ii) $\text{APrism}_b \rightarrow \frac{1}{2}H_{b+1}$,
 $\text{APrism}_b^* \rightarrow H_3$, не 5-гональна при $b \geq 4$;
- (iii) $\text{Barrel}_3 = \text{октаэдр Дюрера} \rightarrow \frac{1}{2}H_8, \text{Barrel}_3^* \rightarrow \frac{1}{2}H_6$,
 $\text{Barrel}_5 = \text{Do} \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}, \text{Barrel}_5^* \rightarrow \frac{1}{2}H_6$,
 Barrel_4 не 5-гонален (см. рис. 6.4 d)), Barrel_4^* гиперметрический, но не ℓ_1 -вложим,
при $b > 5$ оба — и Barrel_b , и двойственный ему не 5-гональны;
- (iv) снаб $\text{APrism}_3 = \text{Ico} \rightarrow \frac{1}{2}H_6$, двойственная ей $\rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$,
снаб APrism_4 не 7-гональна, двойственная ей не 5-гональна,
при $b \geq 5$ оба — и снаб APrism_b и двойственный ей, не 5-гональны.

В дальнейшем бы будем рассматривать в основном полиэдры с двумя типами граней при $p_b \geq 3$. Вначале рассмотрим *простые* полиэдры с двумя типами граней, т. е. случай $k = 3$. При $b < 6$ имеется только шесть таких полиэдров: октаэдр Дюрера (т. е. γ_3 , усеченный в двух противоположных вершинах) и пять двойственных дельтаэдров (Prism_3 и двойственные BPrism_5 , снаб дисфеноиду, 3-пополненной Prism_3 , 2-каппингованная APrism_4). Более того, имеется только одиннадцать простых полиэдров с $\sum_{i \geq 3} p_i = p_3 + p_4 + p_5$: шесть вышеназванных, оставшиеся три двойственных дельтаэдра (α_3, γ_3 , додекаэдр) и 1-усеченный γ_3 , 2-усеченный α_3 , для которых $(p_3, p_4, p_5) = (1, 3, 3), (2, 2, 2)$ соответственно. ℓ_1 -статус всех этих полиэдров и двойственных к ним известен (см. выше).

Простые n -вершинные полиэдры с двумя типами граней при $b = 6$ мы будем обозначать как a_n при $a = 3, 4, 5$: $3_n, 4_n, 5_n$ (фуллерены). Их параметр p_a не зависит от n : $p_3 = 4, p_4 = 6, p_5 = 12$. Ниже будут рассматриваться полиэдры $a_n, a = 3, 4, 5$, а также как и интересный

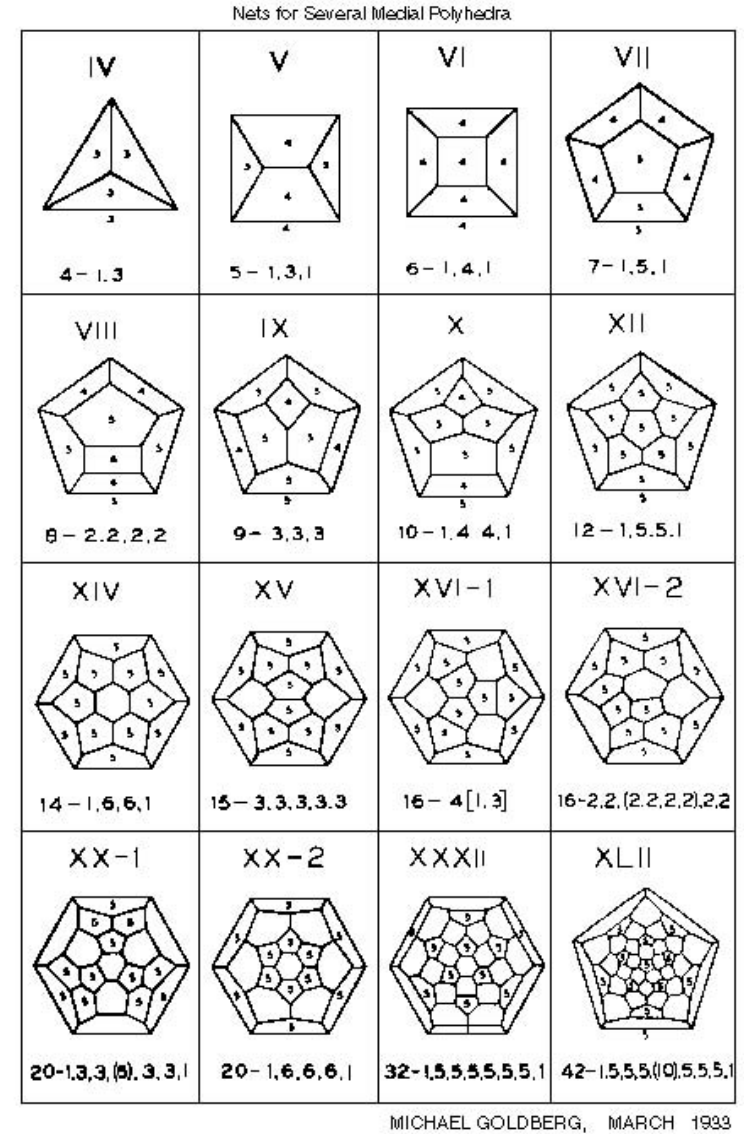


Рис. 13.1. Некоторые медиальные полиэдры Гольдберга¹⁾.

¹⁾Заметим, что на рис. 13.1 самый нижний пятиугольный полиэдра XXXII (футбольный мяч C_{60}Ih) изображенный ошибочно в виде двух смежных четырехугольников.

случай $(4; 3, 4; p_3, p_4)$, в котором параметр $p_3 = 8$ тоже постоянный. Последние полиэдры мы обозначим $ос_n$ и будем называть их *октаэдритами*.

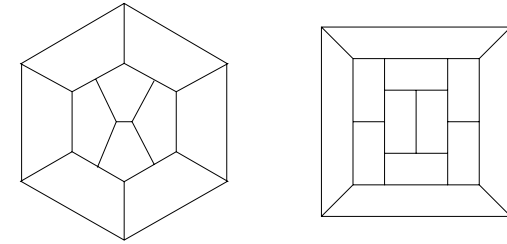
13.1. Медиальные полиэдры Гольдберга

В 1935 году, Гольдберг [Gold35] ввел фуллерены (при несколько более общих предположениях). Он заметил, что в 1882 году Киркман нашел более 80 (из 89) изомеров F_{44} . При $n \neq 18, 22$, Гольдберг определил *медиальный полиэдр* с n вершинами как простой полиэдр, для которого все грани являются $\left[6 - \frac{24}{n+4}\right]$ -угольниками или $\left[7 - \frac{24}{n+4}\right]$ -угольниками. Если $20 \leq n \neq 22$, то медиальные полиэдры являются фуллеренами. Поэтому мы распространяем обозначение F_n на произвольный медиальный полиэдр с n вершинами. На рис. 13.1 изображены эти медиальные полиэдры, последние девять из которых это — $F_{20}(I_h)$, $F_{24}(D_{6d})$, $F_{26}(D_{3h})$, $F_{28}(T_d)$, $F_{28}(D_2)$, $F_{36}(D_{3h})$, $F_{36}(D_{6h})$, $C_{60}(I_h)$ и $C_{80}(I_h)$ ($C_{80}(I_h)$ назван в [Gold35] *шамферинговым додекаэдром*).

Таблица 13.1

Все k -валентные полиэдры с только a -угольными и b -угольными гранями,
 $3 \leq a < b \leq 6$, $p_a > 0$, $p_b > 0$

(a, b)	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
(5, 6)	5_n (фуллерен) существует, если и только если $p_6 \geq 2$	—	—
(4, 6)	4_n существует, если и только если $p_6 \geq 2$	—	—
(3, 6)	3_n существует, если и только если $p_6 \geq 4$, четно	$p_3 = 8 + 2p_6$, $n = 6 + 3p_6$	$p_3 = 20 + 8p_6$, $n = 12 + 6p_6$
(4, 5)	только для двойственных дельтаэдров	—	—
(3, 5)	только октаэдр Дюрера	$p_3 = 8 + p_5$, $n = 6 + 2p_5$	$p_3 = 20 + 5p_5$, $n = 12 + 4p_5$
(3, 4)	только Prism_3	$p_3 = 8$, $n = 6 + p_4$ существует, если и только если $p_4 \geq 2$	$p_3 = 20 + 2p_4$, $n = 12 + 2p_4$ существует, если и только если $p_4 \geq 2$

Рис. 13.2. Квазимедиальные полиэдры $\tilde{F}_{18}(C_{2v})$ и $\tilde{F}_{22}(C_{2v})$

Медиальные полиэдры были введены Гольдбергом как предполагаемое наилучшее (изопериметрически) приближение к сфере в классе полиэдров с заданным числом f граней. Медиальный полиэдр с f гранями — это полиэдр с двумя типами граней ($k = 3$; $a = \left[6 - \frac{12}{f}\right]$, $b = a + 1$; $p_a, p_b = f - p_a$). Он существует при всех $f \geq 4$, кроме $f = 11, 13$. При $f = 4, \dots, 10, 12$ такие полиэдры в точности представляют собой двойственные восьми выпуклым дельтаэдрам: α_3 , Prism_3 , $\text{Prism}_4 = \gamma_3$, Prism_5 , двойственному снаб дисфеноиду, двойственному 3-пополненной Prism_3 , Barrel_4 и $\text{Barrel}_5 = Do$ (см. случай $k = 3$ табл. 13.1 ниже).

Следующие два полиэдра, изображенные на рис. 13.2, почти медиальны; мы назовем их *квазимедиальными полиэдрами* с 18 и 22 вершинами и будем обозначать их $\tilde{F}_{18}(C_{2v})$ и $\tilde{F}_{22}(C_{2v})$. $\tilde{F}_{18}(C_{2v})$ — это икосаэдр со склеенными ребрами (см. [King91]), изображенный на рис. 8.8. $\tilde{F}_{22}(C_{2v})$ — это однореберно усеченный додекаэдр, упомянутый на с. 274 в [SaMo97]. У этого полиэдра — десять пятиугольных граней; это наибольшее число граней, которое может быть у простых полиэдров с 22 вершинами. И $\tilde{F}_{18}(C_{2v})$, и $\tilde{F}_{22}(C_{2v})$, а также двойственные им не 5-гональны.

Простые полиэдры с двумя типами граней при $b > 6$ были рассмотрены в [Malk70]. Кроме соотношения Эйлера $(6 - a)p_a = 12 + (b - 6)p_b$ мы имеем:

- если $a = 3$, то $b \in \{7, 8, 9, 10\}$;
- если $a = 4$, $b \equiv 0 \pmod{8}$, то p_b четно;
- если $a = 5$, $b \equiv 0 \pmod{10}$, то p_b четно.

В статье [Malk70] утверждается, что перечисленные выше необходимые условия (для существования такого полиэдра) к тому же достаточны, и есть только конечное число исключений. Полиэдров

$(3; 3, b; p_3, p_b)$ при $b < 6$ только два: Prism_3 и октаэдр Дюрера; оба они ℓ_1 -вложимы в $\frac{1}{2}H_5$, $\frac{1}{2}H_8$ соответственно. Полиэдры $(3; 3, b; p_3, p_b)$ при $b = 6, 8, 10$ не 5-гональны, поскольку они содержат изометрический не 5-гональный подграф (треугольники изолированы), состоящий из вершины, окруженной треугольником и двумя многоугольниками с четным числом вершин. Примерами ℓ_1 -графов среди двойственных к ним служат три всоду капшингованных платоновых тела α_3 , β_3 , Ico .

Теперь рассмотрим *непростые* полиэдры с двумя типами граней. Имеется только два класса непростых полиэдров с двумя типами граней, а именно, $(4; 3, b; p_3, p_b)$ и $(5; 3, b; p_3, p_b)$. Перечислим все возможные $(k; a, b)$ при $b \leq 6$: это $(4; 3, 6)$, $(4; 3, 5)$, $(4; 3, 4)$, $(5; 3, 6)$, $(5; 3, 5)$, $(5; 3, 4)$. В каждом из этих случаев имеется бесконечное число таких полиэдров. А именно,

$(5; 3, 4; p_3, p_4)$ существует для любого $p_4 > 1$, [Fisc75];

$(4; 3, 4; p_3, p_4)$ существует для любого $p_4 > 1$, [Grün67, P. 282].

Бесконечное число примеров построено для каждого из оставшихся четырех случаев в [Grün96] (все они, за исключением тетракис усеченного октаэдра $(4; 3, 6; 24, 8)$, не ℓ_1 -вложимы).

Напомним, что если P — полиэдр $(k; a, b; p_a, p_b)$ с n вершинами, то $\text{Ambo}(P)$ — это 4-валентный полиэдр с p_a a -гранями, p_b b -гранями и, кроме того, с n k -гранями. Итак, у $\text{Ambo}(P)$ два типа граней если и только если $k \in \{a, b\}$. Все возможные случаи для $\text{Ambo}(P)$ и его параметров таковы:

- (i) $k = a = 3, 4, 5$,
- (ii) $\text{Ambo}(P) = (OC)_{2n}$ если $P = (OC)_n$,
- (iii) $\text{Ambo}(P) = (4; 3, 5; 20 + 5p_5, 12 + 5p_5)$, если $P = (5; 3, 5; p_3, p_5)$.

(в (iii), мы используем соотношение 13.1, которое дает $p_3 = 20 + 5p_5$.)

Если мы рассмотрим только P , для которых $b \leq 6$, то в дополнение к (ii) и (iii) мы получим:

- (i.1) $\text{Ambo}(P) = (OC)_9$ если $P = \text{Prism}_3 = (3; 3, 4; 2, 3)$,
- (i.2) $\text{Ambo}(P) = (4; 3, 5; 14, 6)$ если P — октаэдр Дюрера,
- (i.3) $\text{Ambo}(P) = (4; 3, 6; n + 4, n/2 - 2)$ если $P = 3_n$.

Заметим, что случаи (ii), (iii), (i₃) этой $\text{Ambo}(P)$ -конструкции тоже приводят к бесконечному числу полиэдров с двумя типами граней при $k = 4$, $a = 3$ и $b = 4, 5, 6$.

У двойственного к полиэдру с двумя типами граней (k, a, b) есть вершины двух валентностей: a и b . Мы обозначим число вершин с такими валентностями v_a и v_b . В соответствии с [Juso70], *самодвой-*

ственный полиэдр при $p = (p_a, p_b)$, $3 \leq a < b$ существует, если и только если $p_i = v_i$, $i = a, b$, $a = 3$ и $p_a = p_3 = n - p_b$, $p_b = \frac{n-4}{b-3}$. Таким образом, при $p_b = 0, 1$ это α_3 , Pug_b . При $b = 4$, подслучай $n \equiv 1 \pmod{4}$ реализован k -вытянутой Pug_4 , для которой $p = (p_3 = 4, p_4 = 4k + 1)$; итак, все описанные выше полиэдры вложимы в полукуб. Но полиэдры при $b = 4$ и $n = 6, 7, 8$ не 5-гональны (остовом служит $K_6 - P_6$ для $n = 6$). Кроме того, для жиробифастигума (полиэдра с правильными гранями) $p = (p_3, p_4) = v = (v_3, v_4) = (4, 4)$, но он не самодвойственный; он сам и двойственный к нему не 5-гональны.

Еще одним красивым примером полиэдра с двумя типами граней и с двумя вершинными валентностями служит химерическое образование из куба и додекаэдра. Для него $p = (p_4 = 6, p_5 = 12)$ и $v = (v_3 = 20, v_4 = 6)$; это фундаментальная область наименьшего (по объему) известного замкнутого гиперболического пространства (см. [Week85]). Ни он сам, ни двойственный к нему с остовом $K_6 - K_3 - K_2$ не 5-гональны.

13.2. Правильногранные полиэдры с двумя типами граней

Приведем примеры ℓ_1 -полиэдров среди непростых полиэдров с двумя типами граней:

$$\text{ромбикубоктаэдр} = (4; 3, 4; 8, 18) \rightarrow \frac{1}{2}H_{10},$$

$$\text{тетракис усеченный } \beta_3 = (4; 3, 6; 24, 8) \rightarrow \frac{1}{2}H_{12},$$

$$\text{снаб } \gamma_3 = (5; 3, 4; 32, 6) \rightarrow \frac{1}{2}H_9,$$

$$\text{снаб Do} = (5; 3, 5; 80, 12) \rightarrow \frac{1}{2}H_{15},$$

а среди двойственных им — оба зоноэдра Каталана. Двойственные к перечисленным шести ℓ_1 -полиэдрам не 5-гональны. Только у трех архимедовых полиэдров грани более чем двух типов: у ромбикосидодекаэдра $\rightarrow \frac{1}{2}H_9$ и двух больших зоноэдров.

Списки известных ℓ_1 -полиэдров среди полиэдров с двумя типами граней и двойственных им приведены в табл. 13.2 и 13.3; они взяты из [DeGr99] и [Deza02].

Оказывается, что все известные ℓ_1 -полиэдры (или обладающие ℓ_1 двойственными) с двумя типами граней являются a - или b -правильногранными. Полиэдр, все грани которого — a - или b -угольники, называется *a -правильногранным* если каждая a -угольная грань смежна

Таблица 13.2

Известные полиэдры с двумя типами граней с вложимыми остовами

k	a, b	p_a, p_b	полиэдр	вложим в	t_a, t_b
3	3,5	2,6	октаэдр Дюрера	$\frac{1}{2}H_8$	0,4
3	4,5	4,4	двойственный снаб дисфеноид	$\frac{1}{2}H_8$	1,2
3	4,6 b	$b, 2$	Prism $_b$ (вкл. $b = 3$)	$\frac{1}{2}H_{b+2}$	2,0
3	4,6	6,8	tr(β_3)	H_6	0,3
3	4,6	6,12	Cham(γ_3)	H_7	0,4
3	4,6	6,12	скрученный Cham(γ_3)	H_7	0,4
3	5,6	12,3	фуллерен $5_{26}(D_{3h})$	$\frac{1}{2}H_{12}$	-,0
3	5,6	12,10	фуллерен $5_{40}(T_d)$	$\frac{1}{2}H_{15}$	2,-
3	5,6	12,12	фуллерен $5_{44}(T)$	$\frac{1}{2}H_{16}$	2,3
3	5,6	12,30	Cham(Do)	$\frac{1}{2}H_{22}$	0,4
4	3,b	2 $b, 2$	APrism $_b$	$\frac{1}{2}H_{b+1}$	2,0
4	3,4	8,4 m	2-каппингованный($C_4 \times P_{m+1}$)	$\frac{1}{2}H_{2m+4}$	2,
4	3,4	8,3	Ambo(Prism $_3$)	$\frac{1}{2}H_6$	-,1
4	3,4	8,4	с симметрией D_2	$\frac{1}{2}H_6$	-,0
4	3,4	8,10	6-вытянутый предыдущий	$\frac{1}{2}H_8$	1,-
4	3,4	8,10	6-вытянутый $2 - (C_4 \times P_2)$	$\frac{1}{2}H_8$	1,-
4	3,4	8,18	ромбокубктаэдр	$\frac{1}{2}H_{10}$	0,-
4	3,6	24,8	тетраakis tr(β_3)	$\frac{1}{2}H_{12}$	2,3
5	3,4	32,6	снаб γ_3	$\frac{1}{2}H_9$	-,0
5	3,5	80,12	снаб Do	$\frac{1}{2}H_{15}$	-,0

одному и тому же числу t_a a -угольных граней; он называется b -*правильногранным*, если каждая b -угольная грань смежна одному и тому же числу t_b b -угольных граней. Классификацию таких полиэдров с двумя типами граней можно найти в [DeGr01] и [BrDe99]. Заметим, что 2-каппингованный($C_4 \times P_{m+1}$) является a -правильногранным, причем $t_{a=3} = 2$; он является b -правильногранным, если и только если $m = 1, 2$ (причем $t_{b=4} = 2, 3$ при $m = 1, 2$ соответственно).

Таблица 13.3

Известные полиэдры с двумя типами граней, остов двойственных к которым вложим

k	a, b	p_a, p_b	полиэдр	вложим в	t_a, t_b
3	3,4	2,4	Prism $_3$	$\frac{1}{2}H_4$	0,2
3	3,5	2,6	октаэдр Дюрера	$\frac{1}{2}H_6$	0,4
3	3,6	4,4	tr(α_3)	$\frac{1}{2}H_7$	0,3
3	3,6	4,6	Cham(α_3)	$\frac{1}{2}H_8$	0,4
3	3,6	4,6	скрученный Cham(α_3)	$\frac{1}{2}H_8$	0,4
3	3,6	4,12	4-tr(Do)	$\frac{1}{2}H_{10}$	0,5
3	3,6	4,16	tr(всюду каппингованный α_3)	$\frac{1}{2}H_{11}$	0,-
3	3,7	6,6	6-tr(γ_3)	$\frac{1}{2}H_{10}$	0,4
3	3,7	8,12	8-tr(Do)	$\frac{1}{2}H_{14}$	0,5
3	3,7	8,12	8-tr(Do)	$\frac{1}{2}H_{14}$	0,5
3	3,8	8,6	tr(γ_3)	$\frac{1}{2}H_{12}$	0,4
3	3,8	12,12	12-tr(Do)	$\frac{1}{2}H_{18}$	0,5
3	3,8	12,12	12-tr(Do)	$\frac{1}{2}H_{18}$	0,5
3	3,9	16,12	16-tr(Do)	$\frac{1}{2}H_{22}$	0,5
3	3,10	20,12	tr(Do)	$\frac{1}{2}H_{26}$	0,5
3	5,6	12,4	фуллерен $5_{28}(T_d)$	$\frac{1}{2}H_7$	3,0
3	5,6	12,8	фуллерен $5_{36}(D_{6h})$	$\frac{1}{2}H_8$	2,-
3	5,6	12,20	$5_{60} = \text{tr}(\text{Ico})$	$\frac{1}{2}H_{10}$	0,3
4	3,4	8,6	кубктаэдр	H_4	0,0
4	3,4	8,4 m	$2 - (C_4 \times P_{m+1}) = (C_4 \times P_{m+2})^*$	H_{m+3}	2, -
4	3,5	20,12	икосидодекаэдр	H_6	0,0
4	3,5	16,8	4-каппингованный tr(β_3)	H_7	2,3

Замечание 13.1.

- (i) В последних столбцах в табл. 13.2, 13.3 приведены, когда это уместно, числа t_a, t_b . Все *правильногранные* (т.е. для которых имеются оба числа, и t_a , и t_b) полиэдры с двумя типами граней

- любой степени k (см. [Deza02]) находят свое место среди полиэдров, данных в этих таблицах.
- (ii) Для всех ℓ_1 -полиэдров из табл. 13.2 (за исключением Prism_3 , октаэдра Дюрера и 2-каппингованного $C_4 \times P_{m+1}$) двойственные полиэдры не 5-гональны.
 - (iii) Многие из ℓ_1 -полиэдров P из обеих табл. 13.2 и 13.3 вкладываются в $\frac{1}{2}H_{2d}$, где d — диаметр P . Но, например, диаметр двойственного усеченного α_3 равен двум, а двойственного усеченного додекаэдра — четырем.

13.3. Операции над полиэдрами с двумя типами граней

Рассмотрим некоторые операции, переводящие полиэдр P с двумя типами граней в другой полиэдр с двумя типами граней. Пусть $(k; a, b; p_a, p_b)$ — параметры полиэдра P . Если $b = 2k$, тогда двойственный всюду каппингованному P называется в [FoMa95] *липфрогом* полиэдра P . Его параметрами являются $(3; a, b; p_a, p_b + |V(P)|)$ и у него $k|V(P)|$ вершин. Напомним, что если $b = 2k = 6$, то параметрами шамферинга P (замены всех ребер шестиугольниками) являются $(3; a, b; p_a, p_b + |E(P)|)$ и у него $4|V(P)|$ вершин.

Все $5_n, 4_n, 3_n$ с икосаэдральной, октаэдральной, тетраэдральной симметрией соответственно, охарактеризованы в [Gold37]. Для них $n = 20(a^2 + ab + b^2)$, $8(a^2 + ab + b^2)$, $4(a^2 + ab + b^2)$ соответственно, при $a \geq b \geq 0$. Случаи $b = 0$ и $a = b$ соответствуют полной симметрии I_h, O_h, T_d . Липфрог (и шамферинг) Do , γ_3 , α_3 соответствуют случаю $a = b = 1$ ($a = 2, b = 0$ соответственно); эти липфроги являются усеченными Ico , β_3 , α_3 соответственно. Ясно, что каждый из классов всех $5_n, 4_n, 3_n$ замкнут относительно операций липфроза и шамферинга.

Пусть P, P' — два платоновых полиэдра соответственно с параметрами (k, l, n, f) и $(k' = k, l', n', f')$, описывающими размер граней, валентность, число вершин и число граней. Рассмотрим выпуклый полиэдр $P + fP'$, полученный присоединением копии P' к каждой из граней P . Тогда $(P + fP')^*$ — полиэдр с двумя типами граней, параметры которого равны $(k; l', l(l' - 1); f(n' - k), n)$. Случай $P' = \alpha_3$ соответствует всюду каппингу симплицального P . Ясно, что в то время как $\alpha_3 + i\alpha_3$, $\beta_3 + i\alpha_3$ являются ℓ_1 -вложимыми при $0 \leq i \leq f$, для $\alpha_3 + i\beta_3$ при $2 \leq i \leq 4$ и $\beta_3 + i\beta_3$ при $1 \leq i \leq 8$ верно обратное. (Здесь $P + iP'$ присоединение P' только к i граням P .)

Для заданного пролиэдра P определим $P + \text{Py}_q$ ($P + \text{Prism}_q$, $P + \text{APrism}_q$) как полиэдр, полученный присоединением новой вер-

шины ко всем вершинам q -угольной грани (присоединением соответственно Prism_q , APrism_q к q -угольной грани).

Случаи, когда $\text{Py}_m + \text{Prism}_m$ вложимы, рассмотрим в следствие 4.1 в гл. 4. Заметим, что $\text{APrism}_n \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}$, но $\text{APrism}_n + \text{APrism}_n$ не 5-гонален. *Золотой додекаэдр* из [HiPe89], т.е. Do с APrism_5 на каждой из его 12 граней не 5-гонален.

Вложимость вытягивания $P + \text{Prism}_m$ полиэдра P вдоль изометричной m -угольной грани влечет следующую вложимость. Пусть P — полиэдр с вершиной v такой, что $P - v \rightarrow \frac{1}{2}H_m$. Тогда P , усеченный у вершины v , вложим в $\frac{1}{2}H_{m+2}$. Например, такое усечение P у двух противоположных верхушек вложимо: в $\frac{1}{2}H_{10}$ если P есть Ico (т.е. 2-каппинованная APrism_5); в $\frac{1}{2}H_9$ если P есть 2-каппингованная APrism_4 (она гиперметрична и ее гиперметрика экстремальна); H_4 , если $P - \beta_3 = \text{APrism}_3$; $\frac{1}{2}H_{11}$, если $P - 5_{24}^*$ (т.е. если $P - 2$ -каппингованная APrism_6 , которая не 5-гональна).

Среди всех 92 полиэдров с правильными гранями, 19 являются *вытянутыми* P (т.е. получаются из P добавлением или вставкой призмы), 27 являются *i -пополненными* P , т.е. i -каппингами P . Например, пентакис APrism_5 и Do являются вложимыми, пентакис Py_5 и Prism_5 — не 5-гональны, тетракис Prism_3 и APrism_4 гиперметрические, но не ℓ_1 -невложимы.

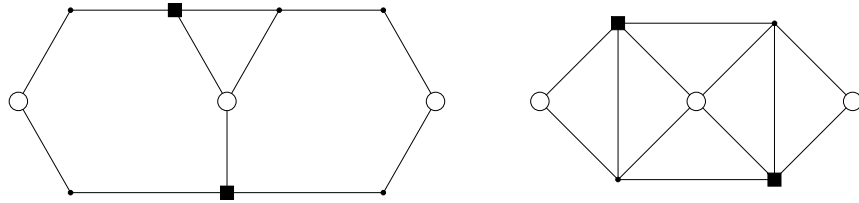
13.4. Полиэдры 3_n и 4_n

Напомним, что мы обозначаем n -вершинный простой полиэдр с двумя типами граней при $b = 6$ как a_n , $a = 3, 4, 5$. Уравнение 13.1 дает при этом $p_a = \frac{12}{6-a}$, т.е. $p_3 = 4, p_4 = 6, p_5 = 12$.

Вложимость $3_n, 4_n$ и двойственных к ним описана ниже.

Предположение 13.2.

- (i) Перечислим все, кроме куба, известные ℓ_1 вложимые 4_n : Prism_6 , усеченный октаэдр, шамферингованный куб и скрученный шамферингованный куб.
- (ii) Октаэдр — это единственный ℓ_1 -вложимый двойственный 4_n .
- (iii) Тетраэдр — это единственный ℓ_1 -вложимый 3_n .
- (iv) Перечислим все, кроме тетраэдра, известные ℓ_1 вложимые 3_n^* : триакис тетраэдр $3_{12}^* \rightarrow \frac{1}{2}H_7$, двойственные шамферингованному и скрученному тетраэдрам, то есть, оба $3_{16}^* \rightarrow \frac{1}{2}H_8$,

Рис. 13.3. Не 5-гональные конфигурации в 3_n и 4_n^*

4-каппингованный на несмежных фасетах $\text{Iso } 3_{28}^* \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$ и двойственный линфлогу триаксис тетраэдра $3_{36}^*(T_d) \rightarrow \frac{1}{2}H_{11}$.

Доказательство. Чтобы доказать, что указанные выше полиэдры ℓ_1 -невложимы, мы просто представим (см. рис. 13.3) не 5-гональные конфигурации, содержащиеся в их остовах. Коэффициенты b_i нарушаемого 5-гонального неравенства по-прежнему равны, соответственно, 0 — для вершин, отмеченных черным, -1 — для вершин, отмеченных квадратиком, и 1 — для вершин, отмеченных белым кружком. $\square$

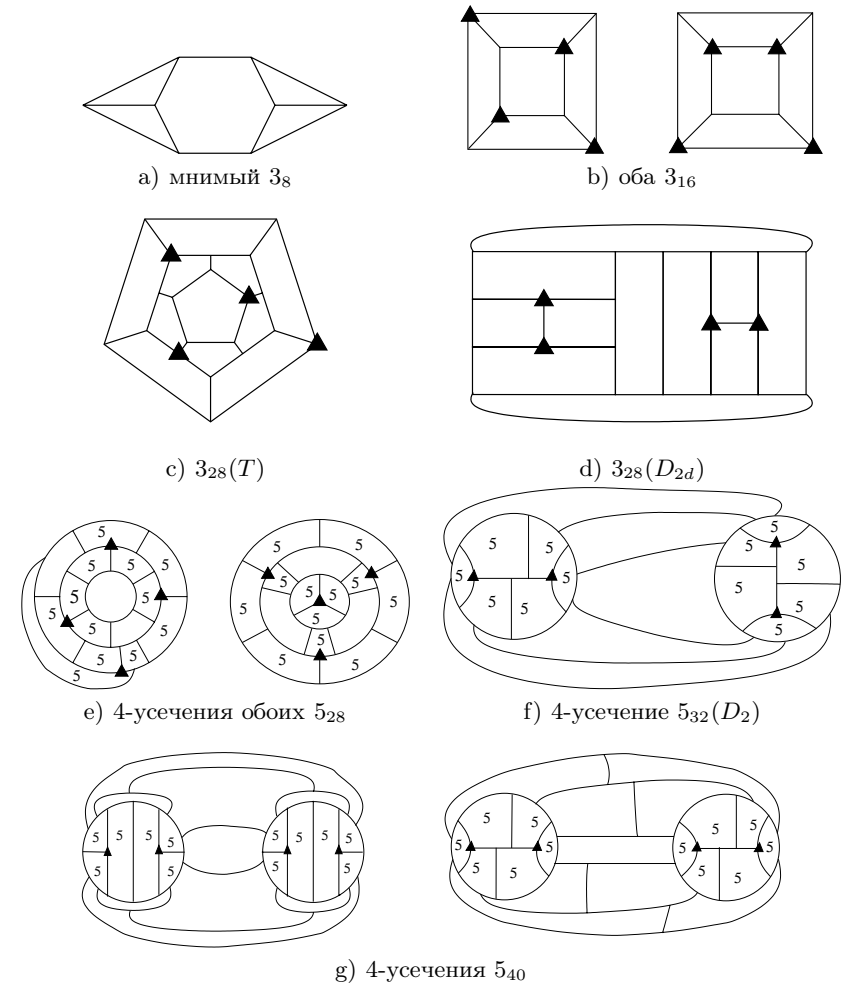
В теореме 2 из [GrMo63] утверждается, что 3_n существуют для всех $n \equiv 0 \pmod{4}$, кроме $n = 8$, и предоставляется полное описание их остовов.

Поскольку $3_4 = \alpha_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_3, \frac{1}{2}H_4$, он не ℓ_1 -жесткий. «Мнимый» 3_8 дважды, но не трижды связный и он также не 5-гонален.

Имеется в точности $N_3(n)$ полиэдров 3_n при $1 \leq \frac{n}{4} \leq 30$, где $N_3(n)$ задается в таблице ниже:

$n/4$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$N_3(n)$	1	0	1	2	1	2	2	4	3	3	2	7	3	4	5
$n/4$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$N_3(n)$	8	3	7	4	9	7	6	4	14	6	7	8	12	5	13

Из теоремы 3.4 в [Sah94] следует, что $N_3(n) = O(n)$. Ясно, что α_3 — единственный 3_n с граничащими треугольниками. Итак, любой 3_n , $n > 4$, не 5-гонален, поскольку содержит не 5-гональный изометрический подграф, изображенный слева на рис. 13.3. Нам известны шесть ℓ_1 -полиэдров 3_n^* . Вычисления в [Duto02] показали, что при $n \leq 136$ других не существует.

Рис. 13.4. Некоторые графы 3_n

За исключением α_3 и единственного $3_{12} =$ усеченный α_3 , любой 3_n является 4-вершинным усечением простого полиэдра больше с $\sum_{i \geq 3} p_i = p_4 + p_5 + p_6$ (таким образом, из неравенства Эйлера $\sum_{i \geq 3} (6-i)p_i = 12$, следует, что $p_5 = 12 - 2p_4$). Имеет $n - 8$ вершин (и $n = 28 + 2p_6 - 2p_4$). В частности, 3_n — это 4-вершинное усечение фуллерена 5_{n-8} если и только если у этого 5_{n-8} , есть четыре вершины

типа $(5, 5, 5)$, попарные расстояния между которыми равны по меньшей мере трем; при этом любая пара треугольников разделена более, чем одним шестиугольником. У такого 5_{n-8} есть либо четыре изолированные тройки пятиугольников, либо два изолированных набора по шесть пятиугольников. $3_n^* \rightarrow \frac{1}{2}H_m$ если и только если $5_{n-8}^* \rightarrow \frac{1}{2}H_{m-4}$.

При малых значениях n имеем (см. рис. 13.4; отмеченные вершины обозначают усечение):

1. Ровно семь из 3_n возникают как 4-вершинные усеечения двойственных дельтаэдров: единственный 3_{12} из α_3 , оба 3_{16} (шамферингованный и снаб шамферингованный α_3) из γ_3 , единственный 3_{20} из двойственного снаб дисфеноиду, оба 3_{24} из двойственной 2-APrism_4 и один (из двух) 3_{28} из Do . Второй 3_{28} получается из простого полиэдра с 12 гранями, у которого $p = (p_4, p_5, p_6) = (4, 4, 4)$.
2. Ровно 6 из 3_n возникают как 4-вершинные усеечения фуллеренов 5_m , $20 \leq m \leq 36$: один 3_{28} из 5_{20} , 3_{32} из 5_{24} , один 3_{36} из $5_{28}(D_2)$, еще один 3_{36} из $5_{28}(T_d)$, 3_{40} из $5_{32}(D_2)$, 3_{44} из $5_{36}(D_2)$; каждый из этих шести фуллеренов обладает единственным, с точностью до симметрии, множеством из четырех вершин, попарные расстояния между которыми ≥ 3 .

В теореме 1 из [GrMo63] утверждается, что 4_n существует для любого четного $n \geq 8$ кроме $n = 10$. Ясно, что 4_n двудольный и имеется бесконечное число центрально симметричных 4_n . Следовательно, либо он вкладывается в H_m , либо не 5-гонален. При $4 \leq \frac{n}{2} \leq 30$, существуют $N_4(n)$ полиэдров 4_n , где $N_4(n)$ даны в таблице ниже: Из теоремы 3.4 в [Sah94] следует, что $N_4(n)$ имеют порядок $O(n^3)$.

$n/2$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$N_4(n)$	1	0	1	1	1	1	3	1	3	3	3	2	8	3
$n/2$	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
$N_4(n)$	7	7	7	5	14	6	12	12	13	10	23	12	19	

Единственный ℓ_1 -полиэдр из 4_n^* — это $4_8^* = \beta_3 \rightarrow \frac{1}{2}H_4$, поскольку остальные 4_n^* содержат следующий не 5-гональный изометрический 7-вершинный подграф: $C_{\{1, \dots, 6\}}$ с хордами $(1, 3)$, $(4, 6)$, к которому добавлена одна новая вершина, соединенная с вершинами 1, 3, 4, 6. Ясно, что $4_8 = \gamma_3$, $4_{12} = \text{Prism}_6$, усеченный β_3 — это 4_{24} (один из трех),

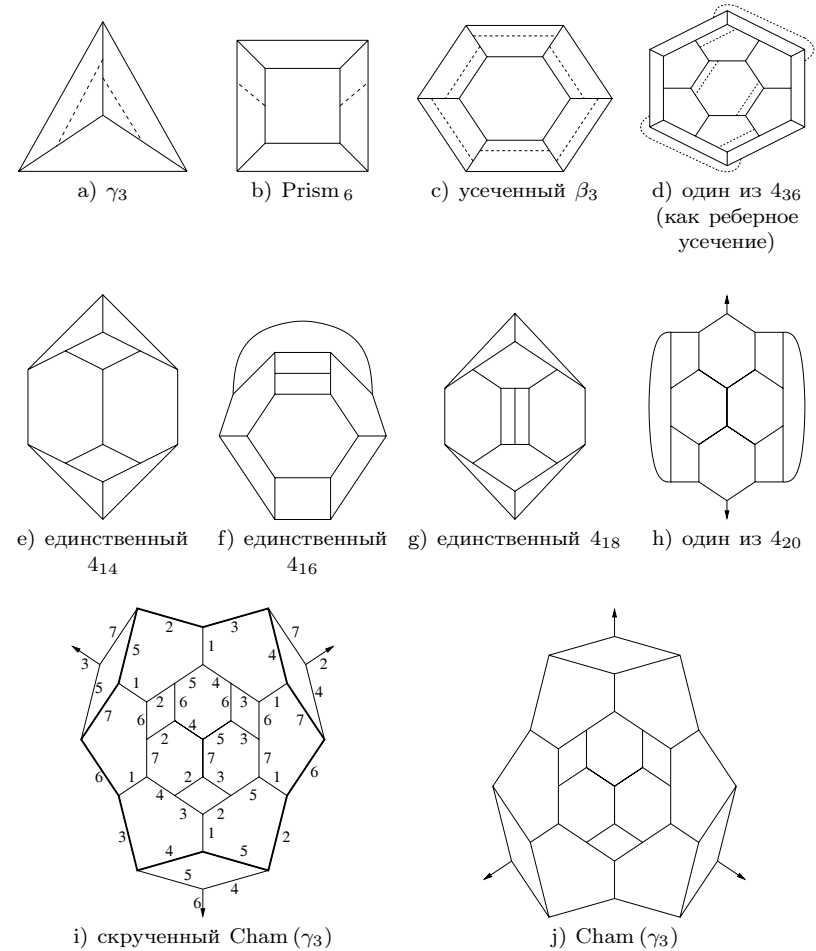


Рис. 13.5. Некоторые графы 4_n

два 4_{32} — это $\text{Cham}(\gamma_3)$ и скрученный $\text{Cham}(\gamma_3)$ (см. рис. 13.5). Эти пять полиэдров — все известные ℓ_1 вложимые 4_n (см. [DDS05]). Они вложимы в H_3 , H_4 , H_6 , H_7 , H_7 соответственно. Первые три — это полиэдры Вороного, $\text{Cham}(\gamma_3)$ — это не заполняющий пространство зоноэдр, а скрученный — центрально несимметричен (это единственный из перечисленных выше пяти полиэдров, который, в терминах следующей главы, не является эквиразрезным графом). Вычисления [Duto02] показывают, что не существует других ℓ_1 -вложимых 4_n при $n \leq 96$.

$\text{Cham}_t(\gamma_3)$ является ℓ_1 -вложимым только при $t = 1$. При $n \equiv 2 \pmod{6}$, двойственный к полиэдру, являющемуся столбцом из $\frac{n-2}{6}$ октаэдров β_3 , есть полиэдр 4_n ; при $n > 8$, он и двойственный ему не 5-гональны. Примерами полиэдров 4_n без пар смежных 4-угольников служат $\text{Cham}_t(\gamma_3)$ ($t \geq 1$) с $8a^2$ вершинами, где $a \geq 2$ есть функция t , и двойственные к следующим полиэдрам: тетраakis куб, кубоктаэдр, скрученному кубоктаэдру (т.е. треугольная ортобикупола №47), жировытянутая треугольная бикупола и снаб куб. У двойственных соответственно по 24, 32, 32, 44, 56 вершин. Последние два не 5-гональны. «Двойственный тетраakis» выше обозначает усечение на шести 4-валентных вершинах двойственного полиэдра.

С другой стороны, любой 4_n , у которого каждая пара 4-угольников разделена по крайней мере тремя ребрами (например, $\text{Cham}_t(\gamma_3)$, $t \geq 2$), возникает как 6-реберное усечение (вместо ребер помещают 4-угольники) фуллера 5_{n-12} . Следовательно, у такого 4_n нет пар смежных 4-угольников, и более того, у соответствующего 5_{n-12} имеется шесть пар смежных пятиугольников. Многие 4_n получаются как 6-реберные усечения 5_n при более слабых условиях: $\text{Cham}(\gamma_3)$ из 5_{20} , $\text{tr}(\beta_3)$ из α_3 . Кроме того, усеченный β_3 — это 6-реберное (по непересекающимся ребрам) усечение $4_{12} = \text{Prism}_6$, Prism_6 — это 2-реберное (по непересекающимся ребрам) усечение $4_8 = \gamma_3$, γ_3 есть 2-реберное (по непересекающимся ребрам) усечение α_3 . Подходящие 6-реберные (по непересекающимся ребрам) усечения 5_{24} (двойственной 2-APrism_6) дает 4_{36} и так далее (см. рис. 13.5).

13.5. Еще раз о полиэдрах 5_n (фуллерах)

В теореме 1 из [GrMo63] утверждается, что 5_n существует для любого четного $n \geq 20$ кроме $n = 22$. Полиэдры 5_n , т.е. полиэдры $(3; 5, 6; 12, p_6)$ с двумя типами граней, называются в химии *фуллерами*; см. гл. 2. На самом деле, все 5_n — это случаи $f = 2 + \frac{n}{2} \geq 12$ медиальных полиэдров (ср. с гл. 13.1).

По теореме 3.4 из [Sah94] (основанной на результате из [Thu98]), число $N_5(n)$ полиэдров 5_n имеет порядок $O(n^9)$. Перечислим все известные ℓ_1 -вложимые 5_n :

$$\text{Do} = 5_{20} \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}, \quad 5_{26} \rightarrow \frac{1}{2}H_{12},$$

$$5_{40}(T_d) \rightarrow \frac{1}{2}H_{15}, \quad 5_{44}(T) \rightarrow \frac{1}{2}H_{16}$$

$$\text{и } \text{Cham}(\text{Do}) = 5_{80}(I_h) \rightarrow \frac{1}{2}H_{22}.$$

Последний из них — это двойственный пентаkis икосидодекаэдр. Его скрученный вариант не ℓ_1 -вложимы. Перечислим также все известные ℓ_1 вложимые 5_n^* :

$$\text{Ico} = 5_{20}^* \rightarrow \frac{1}{2}H_6,$$

$$\text{гексакис усеченный } \alpha_3 = 5_{28}(T_d) \rightarrow \frac{1}{2}H_7,$$

$$\text{гексакис } \text{APrism}_6^2 = 5_{36}^*(D_{6h}) \rightarrow \frac{1}{2}H_8,$$

$$\text{и пентаkis } \text{Do} = 5_{60}^*(I_h) \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}.$$

На самом деле, никаких других ℓ_1 -вложимых 5_n , и 5_n^* не существует при $n < 60$; по-видимому, они не существуют и при других n . Все семь перечисленных выше фуллеренов таких, что они сами или двойственные им ℓ_1 -вложимы, обладают наивысшей симметрией для их числа вершин и все они, за исключением двойственного к $5_{28}(T_d)$ диаметра 3, обладают соответствующим вложением в $\frac{1}{2}H_{2m}$, где m — диаметр остова. $5_{28}(T_d)$ — единственный не антиподальный среди них.

Некоторые интересные классы 5_n были упомянуты выше в гл. 2:

$$5_{10(t+1)} = (2\text{-APrism}_5^t)^*, \quad 5_{12(t+1)} = (2\text{-APrism}_6^t)^*, \quad t \geq 1,$$

и те (с четырьмя изолированными тройками пятиугольников), которые возникают при стягивании четырех треугольников в каком-либо 3_n .

13.6. Полиэдры os_n (октаэдриты)

Это 4-валентные полиэдры с двумя типами граней, с n вершинами и с параметрами $(4; 3, 4; p_3, p_4)$. Итак, согласно 13.1, $p_3 = 8$ и $n = 6 + p_4$. Исключая 3_n , 4_n , 5_n , это единственный случай полиэдров с двумя типами граней, для которых p_a фиксировано для данных (k, b) . В [Grün67], с. 282, доказано существование os_n для всех $n \geq 6$, кроме $n = 7$.

Заметим, что двойственные октаэдриты os_n^* — это в точности случай $d = 3$ почти простых кубичных d -многогранников в терминах [BlBl98]. В действительности в [BlBl98] дана характеристика таких d -многогранников при $d \geq 4$. Нетрудно перечислить все почти простые кубичные 2-мерные комплексы; это $P_2 \times P_n$ для любого конечного n и $P_2 \times Z_+$, $P_2 \times Z$, т.е. бесконечные в одном или обоих направлениях (соответственно) полосы квадратов, также с удаленной вершиной или ребром. Но разнообразие таких d -многогранников становится слишком большим для исключительного случая $d = 3$.

Числа $N_{oc}(n)$ полиэдров oc_n при $6 \leq n \leq 30$ приведены в таблице ниже:

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$N_{oc}(n)$	1	0	1	1	2	1	5	2	8	5	12	8	25
n	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
$N_{oc}(n)$	13	30	23	51	33	76	51	109	78	144	106	218	

Ясно, что $\text{Ambo}(oc_n)$ — это oc_{2n} . Другая операция, а именно, вставка в некоторый oc_n кольца из m 4-угольников вдоль простого прямого цикла (определенного в гл. 1 см. с. 23), дает oc_{n+m} ; будем называть его m -вытягиванием, см. гл. 1. Например,

$$2 - \text{Prism}_4^t = \text{ВРуг}_4^{t+1} = oc_{4t+6} \rightarrow \frac{1}{2}H_{2t+4}$$

— это m раз итерированное 4-вытягивание $2 - \text{Prism}_4$. Итерированные 3-вытягивания β_3 , 4-вытягивания APrism_4 и $2 - \text{Prism}_4$ дают oc_n при $n = 6 + 3m, 8 + 4m, 10 + 4m$, где m — произвольное натуральное число.

Приведем примеры октаэдритов oc_n для малых n :

$$\beta_3 = oc_6 \rightarrow \frac{1}{2}H_4,$$

$$\text{APrism}_4 = oc_8 \rightarrow \frac{1}{2}H_5,$$

$$\text{Ambo}(\text{Prism}_3) = 3\text{-вытянутая } \beta_3 = oc_9 \rightarrow \frac{1}{2}H_6,$$

$$2 - \text{Prism}_4 = oc_{10} \rightarrow \frac{1}{2}H_6;$$

второй oc_{10} тоже вложим в $\frac{1}{2}H_6$. Все кроме одного полиэдры на рис. 13.6 не 5-гональны: oc_{11} , четыре полиэдра oc_{12} , (кубоктаэдр = $\text{Ambo}(\beta_3)$ = 4-вытянутая APrism_4 , скрученный кубоктаэдр = № 47, еще один дважды 3-вытянутый β_3 и еще один oc_{12}) и $\text{amboAPrism}_4 = oc_{16}$. Далее, ромбокубоктаэдр $oc_{24} \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$, но его скрученный вариант («четырнадцатое архимедово тело») не 5-гонален. Эти полиэдра являются 8-вытягиваниями двух полиэдров скрученного $\text{Ambo}(\text{APrism}_4)$, который вложим: $oc_{16} \rightarrow \frac{1}{2}H_8$, и $\text{Ambo}(\text{APrism}_4)$, который не 5-гонален (см. оба малых полиэдра на рис. 6.3). Упомянутый выше oc_{16} является также 6-вытягиванием $2 - \text{Prism}_4$; 6-вытягивание второго oc_{10} — это другой oc_{16} , который тоже вложим в $\frac{1}{2}H_8$.

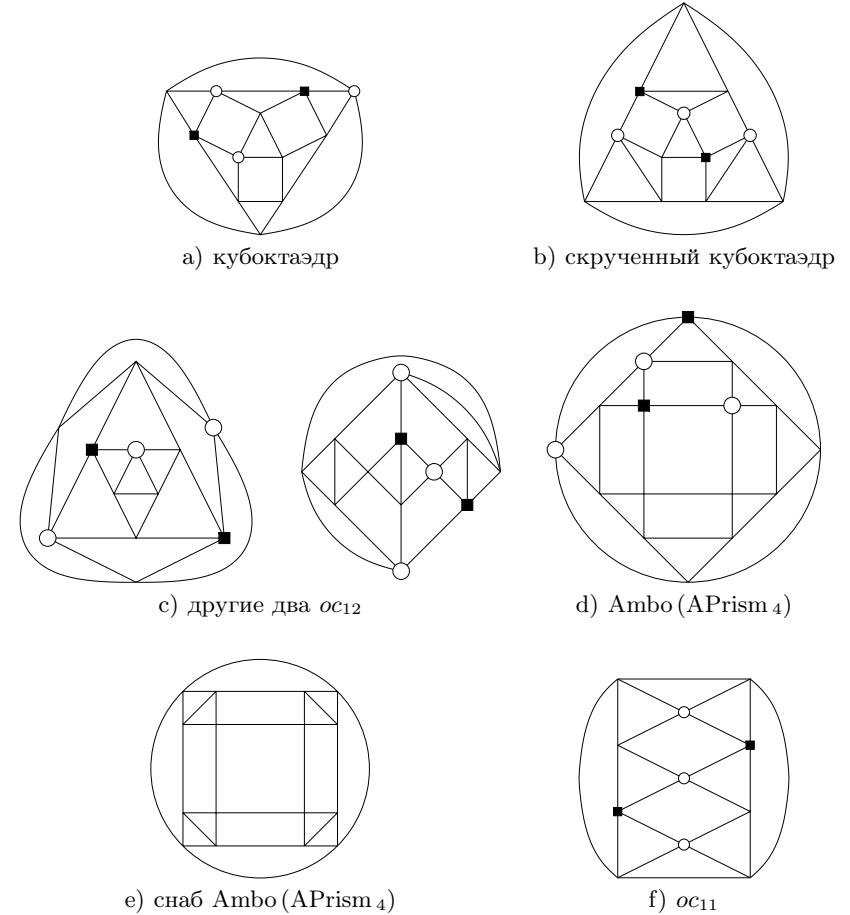


Рис. 13.6. Некоторые oc_n

Среди двойственных перечисленным выше oc_n , все вложимые являются зоноэдрами: (кубоктаэдр)* $\rightarrow H_4$ и

$$(2 - \text{Prism}_4^t)^* = \text{Prism}_4^{t+1} \rightarrow H_{t+3},$$

для любого целого $t \geq 0$.

Кстати, $\text{Ambo}(\text{Prism}_3)^* = (oc_9)^*$ — это наименьший выпуклый полиэдр с нечетным числом граней, которые все четырехугольны; он не 5-гонален.

Специальные ℓ_1 -графы

14.1. Эквивалентные ℓ_1 -графы

В первой половине этой главы мы будем следовать [DePa01], где можно найти доказательства представленных ниже результатов.

Граф G называется *эквивалентным*, если он допускает ℓ_1 -вложение такое, что в левой части неравенства (1.2) гл. 1, относящегося к размеру $s(d_G)$ этого вложения, имеет место строгое равенство. (Ниже $s(d_G)$ означает размер такого эквивалентного вложения.) Это означает, что для такого графа каждое S в равенстве (1.1) гл. 1 соответствует *эквивалентной метрике* $\delta(S)$, т.е. удовлетворяет неравенству $a_S \neq 0$, если и только если S разбивает V на части размеров $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ и $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, где $n = |V|$.

Напомним, что связный граф называется *2-связным* (или *2-вершинно-связным*), если он остается связным после удаления любой вершины.

Лемма 14.1. *Эквивалентный граф, у которого есть по крайней мере четыре вершины, — 2-связный.*

Из этой леммы вытекает такое

Следствие 14.1. Для любого эквивалентного графа G с $n \geq 4$ вершинами

$$2 - \frac{1}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \leq s(d_G) \leq \frac{n}{2},$$

причем неравенство в левой части имеет место, если и только если $G = K_n$, а в правой части — если и только если $G = C_n$.

Условие $n \geq 4$ в этой формулировке необходимо. В самом деле,

$$s(d_{P_3}) = 2 > s(d_{C_3}) = \frac{3}{2}.$$

Заметим, что P_2 и P_3 — единственные эквивалентные деревья. Кроме того, $W(C_5) = 15 < W(P_{\{123452\}})$ и $s(d_{C_5}) = \frac{5}{2} < s(d_{P_{\{123452\}}})$, где $P_{\{123452\}}$ обозначает цикл на 2, 3, 4, 5, в котором к вершине 2 присоединено добавочное ребро.

Замечание 14.1. G является эквивалентным графом, если для него имеется реализация с бинарной матрицей F , у которой суммы по столбцам равны $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ или $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Если вместо этого условия мы потребуем, чтобы в любой строке матрицы F содержалось в точности k единиц, то мы получим другой специальный ℓ_1 -граф. А именно такой, который вкладывается изометрически, с точностью до шкалы λ , в граф Джонсона $J(m, k)$. Шпекторов заметил, что вложимость такого графа можно определить за полиномиальное время с использованием алгоритма, приведенного в [DeSh96], но нам неизвестны аналогичные характеристики эквивалентных графов. Легко видеть, что любой граф G , изометрически вложимый с точностью до шкалы λ в гиперкуб H_m , также вложим изометрически с точностью до шкалы λ в граф Джонсона $J(2m, m)$. В самом деле, пусть произвольной вершине v графа G соответствует подмножество A_v данного m -множества; тогда можно сопоставить вершине v объединение A_v и образа дополнения A_v при некотором взаимно однозначном отображении данного m -множества на некоторое m -множество, не пересекающееся с данным. Столбцы « $J(m, k)$ » табл. 4.1, 4.2 дают все вложения Q в $J(m, k)$, где Q — любое из платоновых тел, полуправильных полиэдров и двойственных к ним.

Назовем эквивалентный ℓ_1 -граф *антиподальным удвоением*, если его реализация в H_m (т.е. упомянутая выше $(0, 1)$ -матрица F) имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} A & O \\ J - A & J' \end{pmatrix},$$

где A — это $\frac{n}{2} \times m'$ $(0, 1)$ -матрица, J, J' — матрицы, состоящие только из единиц, а O это $\frac{n}{2} \times (m - m')$ матрица, состоящая из нулей.

Если, кроме того, матрица A является реализацией с той же шкалой λ некоторого графа G' , то прямая проверка показывает, что матрица J' имеет $\lambda(d(G') + 1) - n$ столбцов, где $d(G)$ — диаметр G . Заметим, что Дважды Нечетный (Double Odd) граф DO_{2s+1} (например, DO_5 , изображенный на рис. 14.1), для которого $s \geq 3$, служит примером антиподального удвоения с матрицей A , не соответствующей реализации никакого графа G' для любой декомпозиции F описанного выше вида.

Замечание 14.2. Антиподальное удвоение — это в точности ℓ_1 -граф, который допускает антиподальный изоморфизм, т.е. обладает центральной симметрией (для любой вершины имеется ровно еще одна на расстоянии, равном диаметру) и отображение всех вершин

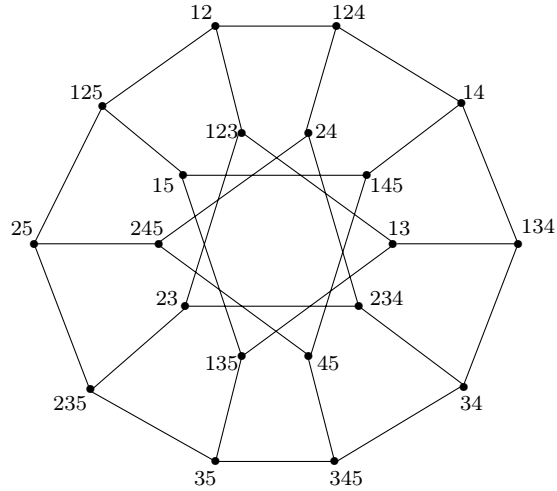


Рис. 14.1. Дважды нечетный DO_{2s+1} с $s = 2$

в их антиподы является изоморфизмом. Антиподальные расширения произвольных ℓ_1 -метрик были рассмотрены в [DeLa97], раздела 7.2.

Для того, чтобы изучить, когда можно построить ℓ_1 -граф из ℓ_1 -графа путем антиподального удвоения (см. теорему 14.1 ниже), введем следующее определение. Для графа $G = (V, E)$, определим его *диаметральное удвоение* как граф $\square G$ с множеством вершин $V^+ \cup V^-$ (где V^+ и V^- — две копии V), причем смежность их определяется таким образом: u^a смежна с v^b если $a = b$ и $(u, v) \in E$, или если $a \neq b$ и $d_G(u, v) = d(G)$, где $a, b \in \{+, -\}$, где $d(G)$ — диаметр G .

Лемма 14.2. Подграфы $\square G$, индуцированные на V^+ и V^- , изометричны G если и только если

$$d_G(u, v) \leq 2 + d_G(w_1, w_2) \quad \text{для всех } u, v, w_1, w_2 \in V, \\ \text{удовлетворяющих равенствам } d_G(u, w_1) = d_G(v, w_2) = d(G). \quad (14.1)$$

Лемма 14.3. Пусть G удовлетворяет условиям предыдущей леммы. Тогда

$$d_{\square G}(u^+, v^-) = d(G) + 1 - d_G(u, v) \quad (14.2)$$

если и только если любая геодезическая в G лежит на геодезической длины $d(G)$.

Некоторые свойства G наследуются графом $\square G$.

Лемма 14.4. Пусть G — граф, удовлетворяющий уравнениям (14.1) и (14.2). Тогда $\square G$ удовлетворяет равенству $d(\square G) = d(G) + 1$, уравнениям (14.1) и (14.2).

Если $d(G) = 2$, то G удовлетворяет (14.1). Более того, $G \neq K_n$ удовлетворяет (14.2), если только у него нет ребра (u, v) , для которого $G_u = G_v$, где G_u — подграф G , индуцированный окрестностью вершины u . В частности, сильно регулярные графы, рассмотренные ниже, удовлетворяют (14.1) и (14.2); заметим, что ℓ_1 -графы образуют сравнительно небольшое подсемейство сильно регулярных графов.

Не всегда граф $\square G$ единственным образом определяет граф G , исходя из которого он был построен. Может случиться, что $\square G' = \square G$ для $G \neq G'$. Ниже нам встретится много таких примеров. Но графы G и G' связаны следующей операцией на графах. *Диаметральным переключением* графа G относительно $S \subset V$ называется граф G' , который получается из графа G следующим образом: ребра, входящие в $(S \times S) \cup ((V - S) \times (V - S))$, сохраняются, а множество ребер из $S \times (V - S)$ заменяется на $\{(u, v) \in S \times (V - S) : d_G(u, v) = d(G)\}$.

Заметим, что *переключение Зейделя* — это операция, которая совпадает с диаметральным переключением для графов диаметра два.

Теорема 14.1. Пусть G есть ℓ_1 -граф. Тогда $\square G$ — ℓ_1 -граф, если G удовлетворяет (14.1), (14.2) и

$$s(d_G) \leq d(G) + 1. \quad (14.3)$$

Более того, если $\square G$ есть ℓ_1 -граф, то тогда:

- (i) $d(\square G) = d(G) + 1$, $\square G$ удовлетворяет уравнениям (14.1), (14.2), а также (14.3) в виде равенства.
- (ii) все ℓ_1 -реализации $\square G$ являются эквивалентными вида

$$\begin{pmatrix} A & O \\ J - A & J' \end{pmatrix}$$

с $\lambda(d(G) + 1) - t$ столбцами, с точностью до перестановок столбцов и строк и взятия дополнений столбцов. Здесь A есть ℓ_1 -реализация G со шкалой λ .

Замечание 14.3. $K_4 - P_3$, $K_4 - P_2$, диаграмма Дынкина E_6 служат примерами ℓ_1 -графов, удовлетворяющих (14.1), (14.3), но не (14.2). Аффинная диаграмма Дынкина $\tilde{E}_6$ служит примером графа, который не удовлетворяет (14.1) и (14.3), но удовлетворяет (14.2).

Заметим, что любой граф G диаметра $d(G) = 2$ удовлетворяет (14.1) и (14.2). Разумеется, не все из них являются ℓ_1 -графами,

например, $K_{2,3}$. Кроме того, не все ℓ_1 -графы диаметра два удовлетворяют (14.3), например, $K_{1,4}$.

Вообще говоря, для любого ℓ_1 -графа $G = (V, E)$, для которого $|V| \geq 4$, выполняется двойное неравенство

$$d(G) \leq s(d_G) \leq d(G) + |V| - 3. \quad (14.4)$$

В правой части (14.4) имеет место равенство если и только если G — звезда, в чем можно убедиться, применив теорему 1.1 гл. 1.

Теорема 14.1 обобщает ситуацию для графа вечеринки $K_{n \times 2}$, рассмотренную в [DeLa97], раздел , на произвольные ℓ_1 -графы. Отсюда следует, что минимальная шкала ℓ_1 -вложения графа $\square G$ равна минимальному λ такому, что метрика λd_G изометрически вкладывается в H_m при $m = \lambda(d(G) + 1)$. В частном случае, когда $G = K_{4a}$, Лемма 7.4.6 из [DeLa97] дает для такого минимального λ , неравенство $\lambda \geq 2a$. Оно превращается в равенство если и только если существует матрица Адамара порядка $4a$.

Теперь мы приведем большое число примеров, не придерживаясь какого-либо порядка. Эквиварезный ℓ_1 -граф называется *удвоением*, если он является антиподальным удвоением. И более того, если он получается из графа G_0 так, как описано в теореме 14.1, то мы даем явное его представление $G = \square G_0$.

Перечислим **все эквиварезные графы, у которых не более шести вершин**: C_n ($2 \leq n \leq 6$), K_n , ($n = 4, 5, 6$), P_3 , 4-колесо и октаэдр $K_{3 \times 2}$. Среди этих одиннадцати графов только K_n не ℓ_1 -жесткий и только C_4 , C_6 и $K_{3 \times 2}$ являются удвоениями.

Шкала прямого произведения $G \times G'$ двух ℓ_1 -графов равна наименьшему общему кратному шкал G и G' , а его размер равен сумме их размеров. Более того, $G \times G'$ является ℓ_1 -жестким, если и только если G и G' суть ℓ_1 жесткие.

Лемма 14.5. *Если у каждого из ℓ_1 -графов G , G' четное число вершин, то $G \times G'$ — эквиварезный граф, если и только если эти графы эквиварезны.*

Граф Дуба (прямое произведение нескольких копий графа Шрикханде и нескольких копий K_4 , см., например, [BCN89], с. 27) служит примером эквиварезного графа, полученного с помощью леммы 14.5. Это (не ℓ_1 -жесткий и не являющийся удвоением) ℓ_1 -граф со шкалой два.

Вложимые дистанционно-регулярные графы

Здесь мы опять свободно используем обозначения [BCN89]; кроме того, в значительной степени мы используем [KoSp94].

Граф диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если он связан и допускает группу автоморфизмов, которая транзитивна на множестве всех пар его вершин, отстоящих друг от друга на расстояние i для всех $1 \leq i \leq d$. И вообще, связный граф называется *дистанционно регулярным*, если он регулярный и если для данных двух вершин x и y , число вершин на расстоянии i от x и на расстоянии j от y зависит только от расстояния $d(x, y)$.

Любой дистанционно регулярный граф диаметра два называется *сильно регулярным*. Перечислим все гиперметричные многогранные сильно регулярные графы:

- $(n \times n)$ -решетки $K_n \times K_n$,
- триангулированные графы $T(n) = J(n, 2)$,
- остов $K_{n \times 2}$ многогранника β_n ,
- $G(1_{21}) = \frac{1}{2}H_5$ и
- $G(2_{21})$ = граф Шлефли;

только последний из них, граф Шлефли, не ℓ_1 -вложим.

В статье [Kool90] доказано, что все конечные дистанционно регулярные графы, вложимые со шкалой единица в H_m , являются дистанционно транзитивными:

- γ_m ,
- C_{2m} и
- для нечетных m Дважды Нечетные графы DO_m .

В [KoSp94] найдены все ℓ_1 -вложимые дистанционно регулярные конечные графы.

Более того, графы Петерсена и Шрикханде оба являются эквиварезными графами со шкалой два и размера 3; оба они ℓ_1 -жесткие и не являются удвоениями. Дважды нечетный граф DO_{2s+1} является эквиварезным графом со шкалой единица и размера $2s + 1$. Полукуб $\frac{1}{2}H_m$ является эквиварезным графом со шкалой два и размера m . Он не ℓ_1 -жесткий только для $m = 3, 4$; он является удвоением, если и только если m четно. Граф Джонсона $J(2s, s)$ является не ℓ_1 -жестким удвоением со шкалой два и размера s .

Кроме того, следующие графы являются дистанционно регулярным эквиварезными графами.

1. Любой ℓ_1 -граф Тейлора: $\frac{1}{2}H_6$, $J(6, 3)$, C_6 , H_3 , икосаэдр. Все они являются удвоениями диаметра три и размера 3; их можно построить, используя теорему 14.1 выше.

2. Любой сильно регулярный ℓ_1 -граф, за исключением $J(s, 2)$ ($s \geq 5$), и любая $(s \times s)$ -решетка $H(2, s)$ при нечетном s . Явно это C_5 , граф Петерсена, $\frac{1}{2}H_5$, граф Шрикханде, H_m при четном m , $K_{s \times 2}$.
3. В числе дистанционно регулярных графов G с диаметром больше двух и $\mu > 1$: $\frac{1}{2}H_m$ при $m > 5$, $H(m, d)$, $J(s, t)$ при $t > 2$, икосаэдр и граф Дуба.
4. Все ℓ_1 -графы Коксетера за исключением $J(s, t)$ при $t < \frac{s}{2}$: $J(2s, s)$, икосаэдр, додекаэдр, $K_{s \times 2}$, $\frac{1}{2}H_s$, H_s , C_s ($s \geq 5$).
5. Все кубические дистанционно регулярные ℓ_1 -графы: K_4 , граф Петерсена, H_3 , DO_5 , додекаэдр.

Кроме того, все вполне правильные ℓ_1 -графы при $\mu > 1$ являются эквиразрезными графами. Еще одним примером служит 12-вершинный кореберно регулярный подграф графа Клебша $\frac{1}{2}H_5$, (см. [BCN89], гл. 3.11, с. 104). Это эквиразрезный граф размера $\frac{5}{2}$ со шкалой два, не являющийся удвоением.

В статье [Маср82] показано, что любой *бесконечный дистанционно транзитивный граф G конечной степени* возникает из бесконечного дерева T следующим образом: вершины G — это p -валентные вершины T , причем две из них смежны, если они расположены в T на расстоянии два. В дереве T степени вершин двудольных блоков равны p и q соответственно. (Другими словами, G является половиной подграфа бесконечного дистанционно биправильного дерева T .) Граф, индуцированный всеми соседями фиксированной вершины G , является объединением p непересекающихся полных графов K_{q-1} . Легко видеть, что, общем случае, $G \rightarrow \frac{1}{2}Z_\infty$. В частном случае $q = 2$, это просто бесконечное p -регулярное дерево и оно вложено в Z_∞ , за исключением случая $p = q = 2$, когда это бесконечный путь $P_Z \rightarrow Z_1$.

Некоторые эквиразрезные графы, которые являются удвоениями ℓ_1 -графов (некоторые указаны в гл. 7.2 [DeLa97])

- 1) $C_{2s} = \square P_s$.
- 2) $K_{s \times 2} = \square K_s$.
- 3) $H_s = \square H_{s-1}$.
- 4) $J(2s, s) = \square J(2s-1, s)$.
- 5) $\frac{1}{2}H_{2s} = \square \frac{1}{2}H_{2s-1}$.
- 6) $\text{Prism}_{2s} = \square C_{2s}$.
- 7) $\text{APrism}_{2s+1} = \square C_{2s+1}$.

- 8) До — это удвоение окружности $C_{\{1,2,\dots,9\}}$ с добавочной вершиной, смежной вершинам 3, 6 и 9 окружности.
- 9) Исо — это удвоение 5-колеса; а кроме того, это удвоение графа, полученного из шестиугольника $C_{\{1,2,\dots,6\}}$ добавлением ребер (2, 4), (2, 6) и (4, 6).
- 10) $J(6, 3)$ — это удвоение графа Петерсена, в добавлении к указанному выше графу пункта 4 при $s = 3$.
- 11) $\frac{1}{2}H_6$ — это удвоение графа Шрикханде и (4×4) -решетки $H_{2 \times 4}$ (более точно, ее реализации в $\frac{1}{2}H_6$), в добавлении к указанному выше графу пункта 5 при $s = 3$.

В пунктах 9, 10, 11 перечислены эквивалентные относительно (диаметрального) переключения графы G такие, что $\square G$ является ℓ_1 -графом Тейлора; см. формулировку предыдущей теоремы 14.1. Такая ситуация, вообще говоря, хорошо известна. Например, граф Госсета (это граф Тейлора, который не является ℓ_1 -графом) можно получить как диаметрально удвоение одного из пяти не изоморфных, но эквивалентных относительно переключения графов. Определения и обсуждение такой ситуации с более общей точки зрения можно найти, например, в [BCN89], с. 103–105.

Эквиразрезные многогранники

Остовы многих «красивых» многогранников являются эквиразрезными графами. Ниже мы перечислим несколько таких примеров.

Все пять платоновых тел имеют эквиразрезный остов; все они, за исключением тетраэдра α_3 , являются ℓ_1 -жесткими. Все, за исключением куба γ_3 (со шкалой единица), имеют шкалу два. Размеры α_3 , β_3 , γ_3 , Исо и До равны $\frac{3}{2}$, 2, 3, 3 и 5 соответственно.

Остов любого зонотопа является удвоением, и его шкала равна единице; поэтому он ℓ_1 -жесткий.

Среди всех ℓ_1 -вложимых полуправильных полиэдров имеются:

- 1) все следующие зоноэдры (т.е. 3-мерные зонотопы): усеченный октаэдр, усеченный кубоктаэдр, усеченный икосидодекаэдр и Prism_{2s} ($s > 2$), размеры которых равны 6, 9, 15 и $s+1$ соответственно;
- 2) все остальные удвоения: ромбикубоктаэдр, ромбикосидодекаэдр и APrism_{2s+1} ($s > 1$) со шкалой два, их размеры равны 5, 8 и $s+1$ соответственно;

- 3) все оставшиеся эквиразрезные многогранники: снаб куб, снаб додекаэдр и APrism_{2s} ($s > 1$); у всех них шкала два, а размеры равны $\frac{9}{2}$, $\frac{15}{2}$ и $s + \frac{1}{2}$ соответственно;
- 4) у оставшейся Prism_{2s+1} ($s > 1$) шкала два и размер $s + \frac{3}{2}$; это не эквиразрезный граф.

Среди всех ℓ_1 -вложимых полиэдров Каталана (двойственных архимедовым) имеются:

- 1) все зоноэдры: двойственный кубоктаэдру и двойственный икосидодекаэдру, размеры которых равны 4 и 6 соответственно;
- 2) единственное отличное от них удвоение — это двойственный усеченному Исо со шкалой два и размера 5;
- 3) во всех оставшихся случаях (двойственные $\text{tr}(\gamma_3)$, $\text{tr}(\text{Do})$, $\text{tr}(\alpha_3)$ и Prism_3) мы получаем не эквиразрезные ℓ_1 -графы со шкалой два, размеры которых равны 6, 13, $\frac{7}{2}$ и 2 соответственно.

Все платоновы, полуправильные и двойственные полуправильным ℓ_1 -полиэдры являются ℓ_1 -жесткими, за исключением тетраэдра и двойственного Prism_3 . Перечислим все не эквиразрезные графы, входящие в их число (см. столбцы «разрезы» в табл. 4.1, 4.2): Prism_n при нечетных n и двойственные к четырем полуправильным полиэдрам (Prism_3 и усеченные тетраэдр, куб, додекаэдр).

Примерами полиэдров с правильными гранями (из списка 92 полиэдров) с эквиразрезными остовами (все со шкалой два) служат №75 (биполненная Prism_6) размера 4 (удвоение) и еще два, удвоениями не являющиеся: №74 (пополненная Prism_6) размера 4 и №83 (триуменишенный Исо) размера 3.

Правильные ℓ_1 -вложимые многогранники размерности выше третьей эквиразрезные остовы. Перечислим их: α_n , γ_n и β_n .

Существует ровно три полуправильных ℓ_1 -вложимых многогранника размерности выше трех (см. [DeSh96]). У двух из них эквиразрезные остовы: у $\frac{1}{2}H_5$ и у снаб 24-ячейки. Последняя является 4-мерным полуправильным многогранником с 96 вершинами. Правильный 4-многогранник 600-ячейка может быть получена каппингом ее 24 икосаэдральных фасет. Ее остов имеет шкалу два и размер шесть; это удвоение.

Три из шамферингованных платоновых тел обладают ℓ_1 -остовами: $\text{Cham}(\gamma_3)$ — это зоноэдр размера 7, $\text{Cham}(\text{Do})$ обладает эквиразрезным (не являющимся удвоением) остовом со шкалой два и размера 11, у $\text{Cham}(\alpha_3)$ не эквиразрезный ℓ_1 -остов со шкалой два и размера 4.

14.2. Вложения со шкалой один

Вначале напомним (см. гл. 1), что конечный ℓ_1 -граф вложим со шкалой один если и только если он двудольный и 5-гональный.

Малые двудольные полиэдральные графы

Среди шести полиэдров с двудольным остовом, у которых не более девяти граней, имеется два вложимых, куб 4_8 и $4_{12} = \text{Prism}_6$; оба они являются зоноэдрами, вложимыми в H_3 и H_4 соответственно. Оставшиеся четыре — это oc_8^* , oc_9^* , 4_{14} и не 5-гональный 12-вершинный граф, изображенный на рис. 14.2 а). Среди пяти полиэдров с двудольным остовом с десятью гранями и не более чем тринадцатью вершинами имеются два вложимых — oc_{10}^* и $\text{RhDo} - v_3$ (см. рис. 14.2 с) и d); в табл. 14.1 они идут под номерами 13 (при $t = 1$) и 2. Остаются еще три: второй oc_{10}^* , APrism_5^* и не 5-гональный 13-вершинный полиэдр, граф которого изображен на рис. 14.2 b). Оба упомянутые выше вложимые графа вложимы в H_4 , но только граф на рис. 14.2 d) не является центрально симметричным. Напомним, что мы приписываем полиэдрам, представленным только своими комбинаторными типами, максимально возможную симметрию. Например, граф на рис. 14.2 с) и, вообще говоря, любой полиэдр $C_4 \times P_{t+2}$, $t \geq 1$ из табл. 14.1 рассматривается как центрально-симметричный, но это не зонотоп, поскольку у него должны быть несколько трапециевидных граней для того, чтобы его можно было реализовать как выпуклый полиэдр.

Невыпуклая реализация $C_4 \times P_3$ (как два смежных куба) вымещивает 3-пространство не нормально (см. разбиение №35 в табл. 10.3), а граф этого паркета вложим в Z_3 . №15–16 из табл. 14.1 являются многогранниками Вороного для решеток Z_t и A_t^* ; полиэдры №1, 3 и 4 являются полиэдрами Вороного решеток $A_2 \times Z_1$, A_3 и L_5 (см. гл. 11).

Напомним, что №2 из табл. 14.1 ($\text{RhDo} - v_3$, т. е. RhDo с удаленной простой вершиной) — это грань любого из трех разбиений Вороного из табл. 10.1, 10.2 и 10.3: №25, который вложим в Z_4 , и не 5-гональные №26 и 33. Кстати, два 13-вершинных графа на рис. 14.2 b) и d) — это в точности два наименьших негамильтоновых двудольных полиэдральных графа, которые могут быть реализованы как мозаика Делоне их вершин (см. рис. 10 в [Dill96]).

Зонотопы

Зонотопы — это аффинные проекции (называемые *тенями* в [Soxe73]) гиперкубов γ_m . (Кстати, любой выпуклый политоп — это аффинная проекция симплекса α_m , а любой центрально симметричный выпуклый политоп — это аффинная проекция кросс-политопы β_m .)

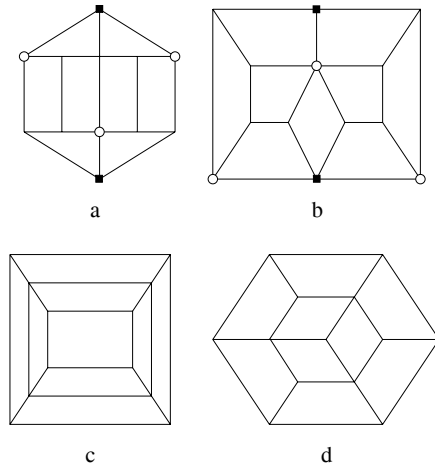


Рис. 14.2. Some small bipartite polyhedral graphs

Напомним, что дайсинг можно рассматривать как решетку, многогранник Вороного которой является зонотопом (см. [Erda98]).

Следующий результат был доказан в [BEZ90].

Предположение 14.1. *Остов любого зонотопа диаметра m изометрически вложим в остов H_m гиперкуба γ_m , аффинной проекцией которого он является.*

Замечание 14.4. Приведем примеры зонотопов:

- 1) Пять архимедовых и двойственных к ним (каталановых) полиэдров, являющиеся зоноэдрами: № 5, 9, 11 и 3, 6 из табл. 14.1;
- 2) Все пять (комбинаторно различных) полиэдров Вороного (размерности 3) являются зоноэдрами:
куб $\gamma_3 = H_3$,
ромбический додекаэдр $\text{RhDo} \rightarrow H_4$,
 $\text{Prism}_6 \rightarrow H_4$,
вытянутый додекаэдр $\text{ElDo} \rightarrow H_5$,
усеченный $\beta_3 \rightarrow H_6$;
- 3) Все пять *золотых изозоноэдров* Коксетера (это зоноэдры, все грани которых — ромбы, длины диагоналей которых составляют золотое отношение):
Два типа гексаэдров (эквивалентных γ_3), ромбический додекаэдр, ромбический икосаэдр $Pz(5)$ и триаконтаэдр (т.е. двойственный икосидодекаэдру).

Таблица 14.1

Некоторые изометричные полиэдральные подграфы гиперкубов

№	Число вершин	Степень	Полиэдр	Влож. в	Aut	Зонотон
1	12	3	Prism_6	H_4	D_{6h}	+
2	13	3,4	$\text{RhDo} - v_3$	H_4	C_{3v}	не-CS
3	14	4	$(\text{cuboct.})^* = \text{RhDo}$	H_4	O_h	+
4	18	3,4	ElDo	H_5	D_{4h}	+
5	24	3	$\text{tr}(\beta_3)$	H_6	O_h	+
6	32	4	$(\text{icosidode.})^* = \text{triac.}$	H_6	I_h	+
7	32	3	$\text{Cham}(\gamma_3)$	H_7	O_h	+
8	32	3	$\text{tw.Cham}(\gamma_3)$	H_7	D_{3h}	не-CS
9	48	3	$\text{tr}(\text{cuboct.})$	H_9	O_h	+
10	56	3,4		H_9	C_i	нет
11	120	3	$\text{tr}(\text{icosidode.})$	H_{15}	I_h	+
12	$4t > 12$	3	$\text{Prism}_{2t} = C_{2t} \times P_2$	H_{t+1}	D_{2th}	+
13	$4(t+2) > 8$	4	$C_4 \times P_{t+2}$	H_{t+3}	D_{4h}	нет
12	$2\binom{2t+1}{t}$	$t+1$	DO_{2t+1}	H_{2t+1}		
14a	$t(t-1)+2$	$3, t > 4$	$Pz(t), t > 3$ нечетно	H_t	D_{td}	+
14b	$t(t-1)+2$	$3, t > 4$	$Pz(t), t > 4$ четно	H_t	D_{th}	+
15	2^t	t	t -гиперкуб	H_t		+
16	$(t+1)!$	t	перестановочный многогранник	$H_{\binom{t+1}{2}}$		+

- 4) Любопытное семейство из восьми 3-зонотопов, вложимых в H_m , $3 \leq m \leq 10$, и обладающих $m(m-1)$ гранями, приведено в [ScYo00].
- 5) Дополнительно к Prism_{2m} и γ_m , приведем еще несколько примеров, бесконечных семейств зонотопов (№ 12–16 в табл. 14.1): полярные зоноэдры $Pz(m) \rightarrow H_m$ (при $m = 3, 4, 5$ это γ_3 , RhDo , ромбический икосаэдр соответственно, см. [Сохе73]) и m -мерные перестановочные полиэдры (при $m = 2$ и 3 это C_6 и усеченный β_3 соответственно).

Фасетные графы ориентированных матроидов

Ориентированный матроид на E — это пара $M = (E, \mathbf{F})$, где E — конечное (m -элементное) множество, а $\mathbf{F}$ — множество *знаковых векторов* на E (называемых *гранями*), которое удовлетворяет некоторым специальным аксиомам (см., например, [Fuku95]). Естественный порядок на знаковых векторах (на E) определяет *ранг грани* f как длину любой максимальной цепи из 0 в f . Максимальные грани называются *фасетами*; общий ранг r of topes называется *рангом ориентированного матроида* M . *Фасетный граф* матроида M — это граф, обозначаемый $T(M)$, причем фасеты служат его вершинами, и две из них смежны, если у них есть общая грань ранга $r - 1$. Фасетный граф однозначно определяет ориентированный матроид.

Граф называется *антиподальным*, если для каждой его вершины a имеется единственная вершина a' такая, что расстояние от a' до a больше, чем расстояние до a от любой соседней с a' вершины. Если остов многогранника антиподален, то максимальная симметрия этого многогранника включает центральную симметрию. Следующие результаты Фукуды и Ханда (см. [Fuku95]) описывают в этих терминах связи изометрических подграфов гиперкубов с фасетными графами ориентированных матроидов $M = (E, \mathbf{F})$ ранга $r \geq 3$ на m -элементном множестве E :

- (i) $T(M)$ — это r -связный антиподальный граф и $T(M) \rightarrow H_m$;
- (ii) Граф есть фасетный граф ориентированного матроида ранга три на m -элементном множестве, если и только если он является остовом центрально симметричного полиэдра и этот остов есть изометрический подграф H_m .

Если $T(M)$ — это остов зонотопа, тогда этот зонотоп r -мерный, а его диаметр равен m . Теперь нас интересует построение не зонотопального центрально-симметричного полиэдра.

Любой многогранник Вороного центрально симметричен, и его фасеты тоже центрально симметричны. Но в дополнение к этому у зонотопа центрально симметричны грани всех размерностей. Остов $G(P)$ зонотопа P есть *фасетный граф матроида* ориентированного матроида $M(P)$, который *представлен* зонотопом P . Поэтому такой ориентированный матроид называется *представимым, ориентированным*, или *линейным* матроидом. Грань размерности k зонотопа P представляет ориентированный матроид ранга k .

Рассмотрим 3-мерный зонотоп, т. е. зоноэдр P . Пусть F и F' — две противоположные грани P . Пусть у F есть $2k$ ребер, $k \leq 3$. Эти ребра параллельны k векторам. Эти k векторов линейно независимы

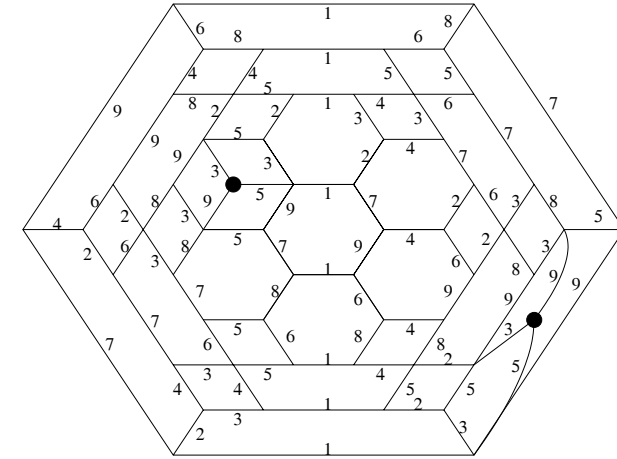


Рис. 14.3. Не зонотопальный центрально симметричный полиэдр, остов которого вложим в H_9

и образуют цикл $C(F)$ матроида $M(P)$. Пусть $\{(i, i') : 1 \leq i \leq 2k\}$ — $2k$ пар взаимно антиподальных вершин F и F' , соответственно. Обозначим $Q(G)$ граф, полученный из $G := G(P)$ добавлением двух новых вершин v, v' и новых ребер $(v, i), (v', i')$ при $i = 2j + 1, 0 \leq j \leq k - 1$. Ясно, что $Q(G)$ антиподальный и G — изометрический подграф $Q(G)$. Если $G \rightarrow H_m$, то при $k = 3$ также и $Q(G) \rightarrow H_m$.

Если G есть 3-связный планарный граф, тогда то же самое можно сказать и о $Q(G)$. Поэтому $Q(G)$ — остов полиэдра, который мы обозначаем $Q(P)$. Он центрально симметричен. Обыкновенно, если P — зоноэдр, то $Q(P)$ — тоже. Но в нашем случае множество векторов, представляющее F и F' , не является циклом ориентированного матроида $M(Q(P))$.

Рассмотрим вытянутый додекаэдр ElDo и ромбический додекаэдр RhDo. Можно проверить, что $Q(\text{Prism}_6)$ — это RhDo, $Q^2(\text{ElDo})$ — это ромбический икосаэдр $Pz(5)$, а $Q^4(\text{tr}(\beta_3))$ — триаконтаэдр, т. е. двойственный икосидодекаэдру. (Здесь $Q^m(P) := Q(Q^{m-1}(P))$.)

Но бывают случаи, когда полиэдр $Q(P)$ не является зоноэдром и поэтому не реализует ориентированного матроида. Такой пример привел Фукуда в [Fuku95] (используя шестиугольные грани F и F' , на которых были размещены новые вершины); см. рис. 14.3.

Этот полиэдр имеет 56 вершин, 18 шестиугольных и 18 квадратных граней. Он представляет собой пример незонотопального цен-

трально симметричного полиэдра, остов которого вложим в H_9 . Этот полиэдр — минимальный в следующем смысле: любой центрально симметричный 3-многогранный изометрический подграф H_m , $m \leq 8$, является (будучи фасетным графом ориентированного матроида ранга три с самое большое восемью элементами) остовом зонотопа.

Фукуда построил его как (не Паппово) расширение ориентированного матроида ранга три на восьми точках. В качестве *линейного* расширения того же матроида он получил двойственный зоноэдр диаметра девять, у которого 54 вершины, 20 шестиугольных и 12 квадратных граней: для этого достаточно удалить две отмеченные противоположные вершины у 56-вершинного полиэдра, изображенного на рис. 14.3 выше.

Замечание 14.5. В [DeSt96, DeSt97] можно найти аналогичные изометрические вложения остовов *бесконечных* полиэдров (плоских паркетов) в кубические решетки Z_n . Например, правильный квадратный паркет и правильный шестиугольный паркет вложимы в Z_2 и Z_3 ; они являются разбиениями Вороного решеток Z_2 , A_2 . Архимедовы паркеты (4.8.8), (4.6.12) и двойственные архимедовым паркетам [3.6.3.6] вложимы в Z_4 , Z_6 , Z_3 . Кроме того, аperiodический паркет Пенроуза вложим в Z_5 , а двойственная мозаика № 12 (из табл. 9.1 выше) вложима в Z_∞ . Паркет на рис. 14.4b) тоже вкладывается в Z_∞ . Ясно, что любой *плоский решетчатый* паркет такой, что его разбиение Вороного вложимо в Z_m , является дайсингом. Другими словами, он *зоноэдральный*, т.е. у него есть только центрально симметричные грани. Любой зоноэдральный плоский паркет вкладывается в Z_m , $m \leq \infty$. Зоноэдральный плоский паркет не обязательно должен быть периодическим (например, аperiodический паркет Пенроуза, образованный двумя золотыми ромбами) или быть проекцией Z_m , $m < \infty$ (см., например, паркет на рис. 14.4a). Упомянутый выше паркет [3.6.3.6] не зоноэдральный, поскольку его четырехугольные грани не центрально симметричны.

Некоторые обобщения вложимых со шкалой 1 планарных графов

Пусть G — двудольный плоский граф. Если он бесконечен, мы будем считать, что степень его вершин ограничена и что он *дискретный*, т.е. любая ε -окрестность любой точки плоскости содержит только конечное число его вершин. Назовем такой граф G *допустимым* (или *строго допустимым*), если существует отображение f его вершин на вершины гиперкуба H_m , $m \leq \infty$ такое, что его ребра (x, y) отображаются в ребра $(f(x), f(y))$ гиперкуба H_m и образы циклов, ограни-

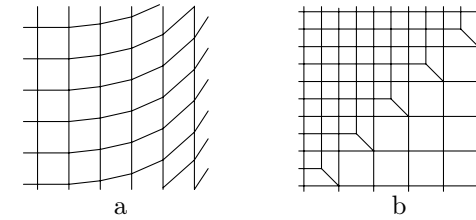


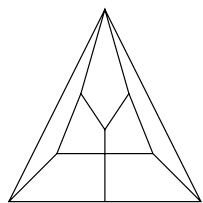
Рис. 14.4. Два вложимых паркета

чивающих его внутренние (или соответственно все) грани, являются изометрическими подграфами того же H_m . Используя результат из [DSS86], мы получаем, что G допустим (или строго допустим), если и только если каждая из его зон (зона — это множество ребер попарно противоположных в гранях) проста, т.е. у нее нет самопересечений. (В случае строгой допустимости грань включается; таким образом, G рассматривается как граф на сфере, и зоны могут проходить через внешнюю грань.) И действительно, если некоторая зона пересекает сама себя по грани, тогда цикл, ограничивающий эту грань, не будет изометрическим в H_m . С другой стороны, если G является плоским *квадрильяжем*, т.е. все его внутренние грани суть 4-угольники, то тогда (что было доказано в [DSS86]) он допустим (или строго допустим) если и только если все его зоны просты. Общий случай допустимого (или строго допустимого) графа G может быть сведен к предыдущему разбиением всех его внутренних (или соответственно всех) граней на 4-угольники; так что множество зон и их простота (или непростота) сохраняются.

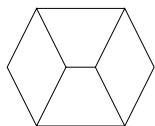
В терминах зон мы получаем, что G вложим со шкалой один (т.е. является изометрическим планарным подграфом гиперкуба), если и только если он допустим, и более того, каждая его зона выпукла. В действительности зоны являются поясами, соответствующими выпуклым противоположным разрезам, так что через произвольное ребро происходит ровно одна зона.

Частичный подграф гиперкуба всегда двудольный; множество его вершины отображается *инъективно* во множество вершин гиперкуба. Ясно, что имеются следующие необращаемые импликации для возможных свойств графов по отношению к гиперкубам:

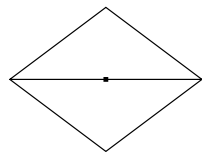
изометрический (т.е. вложимый со шкалой 1) $\rightarrow$ индуцированный $\rightarrow$
 $\rightarrow$ частичный $\rightarrow$ двудольный,
 изометрический планарный $\rightarrow$ допустимый $\rightarrow$ двудольный планарный.



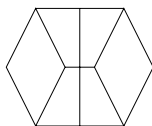
а) двойственный к APrism_4 — двудольный планарный граф, но не допустимый и не частичный



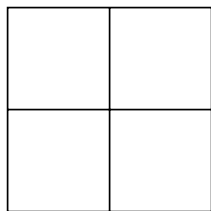
с) Куб с удаленной вершиной допустимый и частичный в H_3 , но не индуцированный



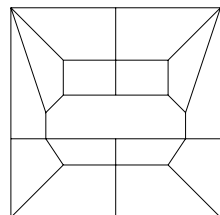
б) $K_{2,3}$ допустимый в H_2 , но не частичный



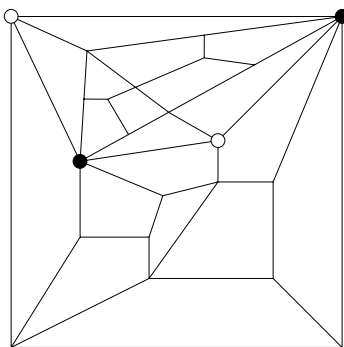
д) допустимый и индуцированный в H_4 , но не изометрический



е) изометрический но не строго допустимый



ф) индуцированный в H_6 , но не допустимый



г) строго допустимый в H_6 , но не частичный

Рис. 14.5. Семь контрпримеров

(Для каждого графа мы берем его самое сильное свойство; например, 8-цикл, который является только частичным подграфом H_3 , рассматривается как изометрический, поскольку он — изометрический подграф H_4 .)

На рис. 14.5 изображены семь контрпримеров. В последнем графе рис. 14.5 г) две вершины, помеченные черными кружками, являются точками самосоприкосновения зон восьми 4-угольников вокруг них; образы двух вершин, отмеченных белыми кружками, совпадают в H_6 .

Некоторые обобщения ℓ_1 -вложимости

15.1. Квазивложения

Здесь мы рассматриваем *квазивложения* или, более точно, *t-вложения* данного графа G , т. е. наше обычное вложение, но только для *t-усеченного расстояния* $\min(t, d_G)$, где t меньше диаметра графа G . Мы будем говорить, что метрика d является *t-вложимой*, если существует ℓ_1 -вложимая метрика d' такая, что $d'_{i,j} = \min(d_{i,j}, t)$. Это понятие было введено в [DeSh96], где было показано, что данный там полиномиальный алгоритм распознавания ℓ_1 -графов может быть распространен на распознавание *t-вложимых* графов.

В дальнейшем, описывая *t-вложение* полиэдра P , мы сопоставляем каждой его вершине v подмножество $a(v)$ множества N . Обычно в качестве N мы берем множество всех граней, которые являются k -угольниками для фиксированного k . Мы будем говорить, что грань F *достижима* посредством t -пути из вершины v если имеется t -путь длины t из вершины v в вершину грани F . Здесь мы используем обозначение C_{60} для усеченного икосаэдра $5_{60}(I_h)$. Даже если C_{60} не ℓ_1 -вложим, мы все-таки можем *квазивложить* его в $\frac{1}{2}H_{20}$ в следующем смысле.

В соответствии с [DeSh96], у усеченного икосаэдра (диаметра 9) есть *единственное* 7-вложение в $\frac{1}{2}H_{20}$: при этом каждая вершина сопоставляется $2+2+3$ шестиугольникам (из всех 20), достижимым посредством 0-, 1-, 2-путей соответственно. Кроме того, это единственное 3-вложение, но не единственное 2-вложение: например, сопоставим каждую вершину двум ее шестиугольникам. Единственное 3-вложение C_{60} в $\frac{1}{2}H_{20}$ называется *квази- C_{60}* . Более того, квази- C_{60} есть ℓ_1 -жесткая (но не графическая) метрика.

Рисунок 15.1 иллюстрирует 7-вложение C_{60} . Конструкция такова: мы можем сопоставить координату в $\mathbb{R}^{20}$ каждому из 20 шестиугольников. Тогда вершина v (например, белый атом рис. 15.1) отображается в вершину $\phi(v)$ полукуба $\frac{1}{2}H_{20}$ (в нечетном представлении), ненулевые координаты которой соответствуют семи шестиугольникам C_{60} , содержащим вершину, расстояние от которой до v меньше трех

(семь серых шестиугольников на рис. 15.1). Это дает нам 7-вложение C_{60} в полукуб $\frac{1}{2}H_{20}$. Все расстояния восемь и девять в C_{60} переходят в расстояние семь в квази- C_{60} (напомним, что диаметр C_{60} равен 9).

Группа автоморфизмов квази- C_{60} (т. е. все перестановки двадцати координат, сопоставленных двадцати шестиугольникам C_{60} , которые сохраняют квази- C_{60}) совпадает с одной из групп усеченного икосаэдра C_{60} , которая является группой Кокстера H_3 , изоморфной $\{1, -1\} \times A_5$. Рисунок 15.2 иллюстрирует один автоморфизм квази- C_{60} : обращение спирального гамильтонова пути на 20 шестиугольниках C_{60} .

У икосидодекаэдра (диаметра 5) есть *единственное* [DeSh96] 4-вложение в $\frac{1}{2}H_{12}$: при этом каждая вершина сопоставлена $1 + 1 + 2$ пятиугольникам (из всех 12), достижимых посредством 0-, 1-, 2-путей. Это также единственное 3-вложение, но 2-вложение существует и другое: при нем каждая вершина сопоставляется двум ее треугольным граням.

У кубоктаэдра (диаметра 3) имеется по крайней мере два следующих 2-вложения:

- в $\frac{1}{2}H_6$: каждая вершина сопоставлена своим квадратным граням,
- в $\frac{1}{2}H_8$: каждая вершина сопоставлена своим двум треугольным граням; это вложение, так же как и два предыдущих являются *t-вложениями* в $\frac{1}{2}H_{2d(P)+2}$, где $d(P)$ — диаметр P .

Вершинная фигура (и локальный граф остова) снаб 24-ячейки — это триуменьный икосаэдр (тело $M_7 = \aleph^{\circ} 83$ с правильными гранями и диаметра 3). Он вложим в $\frac{1}{2}H_6$ и обладает 2-вложением в $\frac{1}{2}H_7$.

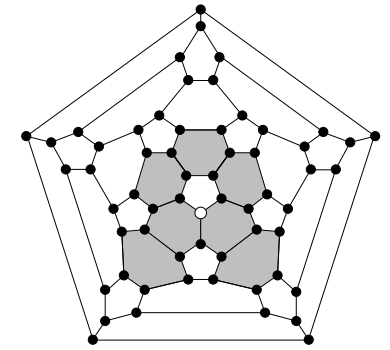


Рис. 15.1. 7-вложение $C_{60}(I_h)$ в $\frac{1}{2}H_{20}$

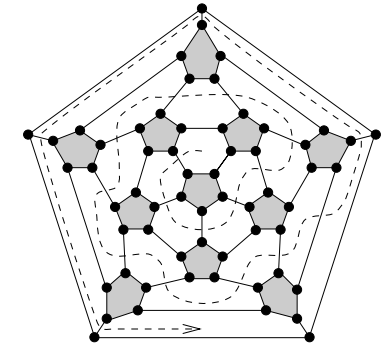


Рис. 15.2. Спиральный гамильтонов автоморфизм квази- C_{60}

У любого простого полиэдра есть 2-вложение в тетраэдральный граф $J(n, 3)$ (а значит, в $\frac{1}{2}H_n$): при этом каждая вершина сопоставлена трем своим граням. Если диаметр простого полиэдра не меньше трех, тогда он 3-вложим, если и только если числа вершин его граней принадлежат множеству $\{3, 4, 5\}$. Приведем примеры такой процедуры:

- 1) у додекаэдра (диаметра 5) есть 3-вложение в граф Джонсона $J(12, 3)$; кроме того, у него есть 5-вложение в $\frac{1}{2}H_{10}$,
- 2) $\alpha_3 \rightarrow J(4, 3) \rightarrow \frac{1}{2}H_4$ (не единственное),
- 3) $M_{25}^* \rightarrow J(8, 3) \rightarrow \frac{1}{2}H_8$,
- 4) 2-вложение Prism_n , которое оказывается $\text{Prism}_n \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+2}$ (для четных $n \rightarrow H_{\frac{n+2}{2}}$).

Еще одна процедура: фиксируем 5-колесо ∇C_5 в остоке икосаэдра и сопоставим каждую вершину v множеству всех вершин 5 колеса на расстоянии 0 и 1 от v ; мы получим (единственное) 3-вложение икосаэдра.

Двойственный к $F_{60}(C_s)_r$, изображенный на рис. 22 в [DDG98], допускает 4-вложение в $\frac{1}{2}H_{10}$. Более точно, диаметр $F_{60}^*(C_s)_r$ равен 5 и сохраняются все расстояния, за исключением расстояний между четырьмя противоположными пятиугольниками: $(\overline{38}, 48)$, $(\overline{1378}, 1478)$, $(\overline{45}, 35)$ и $(\overline{2459}, 2359)$. Эти расстояния в $\frac{1}{2}H_{10}$ равны четырем, а не пяти. См. рис. 15.3, где 4-вложение $F_{60}^*(C_s)_r$ задается метками фасет $F_{60}(C_s)_r$. Кроме того, не 5-гональная конфигурация $F_{60}(C_s)_r$ приведена на рис. 15.3.

Следующая теорема (см. [DFS03]) полностью описывает t -вложения для полностью икосаэдральных (т.е. с симметрией I_h) фуллеренов и двойственных к ним.

Теорема 15.1.

- (i) $C_{20k^2}(I_h)$, $k \geq 1$, $(2k+7)$ -вложим в $\frac{1}{2}H_{12k-2}$; его диаметр равен $6k-1$,
- (i') $(C_{20k^2}(I_h))^*$, $k \geq 2$, $2k$ -вложим в $\frac{1}{2}H_{6k}$; его диаметр равен $3k$,
- (ii) $C_{60k^2}(I_h)$, $k \geq 1$, $(6k+1)$ -вложим в $\frac{1}{2}H_{20k}$; его диаметр равен $10k-1$,
- (ii') $(C_{60k^2}(I_h))^*$, $k \geq 1$, $(3k+2)$ -вложим в $\frac{1}{2}H_{10k}$; его диаметр равен $5k$.

Теперь для каждого из этих четырех случаев укажем полный набор зон, дающих t -вложение. В каждой зоне самопересечений не

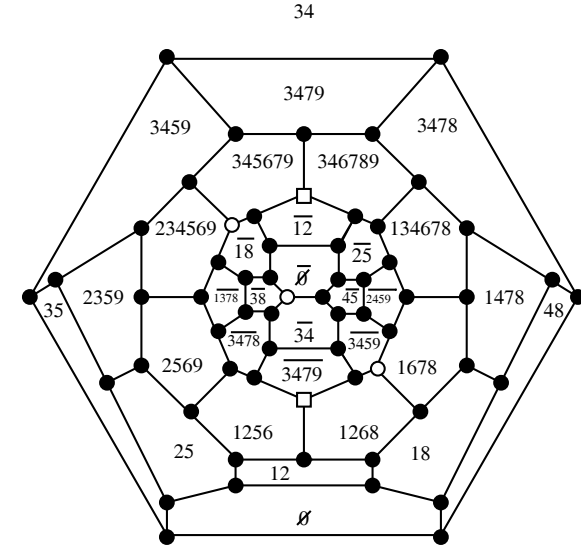


Рис. 15.3. 4-вложение $F_{60}^*(C_s)_r$ в $\frac{1}{2}H_{10}$ и не 5-гональная конфигурация $F_{60}(C_s)_r$

будет; поэтому любые две из них будут либо *параллельными*, т.е. непесекающимися, либо будут пересекаться в точности в двух гранях. Мы будем называть зону граней фуллерена *специальной* или *чистой*, судя по тому, содержит она или нет пятиугольники. Размерность полукуба равна числу специальных зон, сложенному с удвоенным числом чистых. Оказывается, эта размерность вдвое больше диаметра графа в случаях (i), (i') и (ii'). Заметим, что это t -вложение изометрическое только при $k=1$ в случаях (i), (i'), (ii') и при $k=2$ в случае (i). В случае (i') имеются $6k$ альтернирующих зон, длина каждой из которых равна $10k$; они разбиваются на шесть классов параллельности. В случае (ii') имеются $10k$ альтернирующих зон, длина каждой из которых равна $18k$; они разбиваются на десять классов параллельности. В случае (i) имеются $6(k-1)$ чистых зон, длина каждой из которых равна $5k$; они разбиваются на шесть классов параллельности; кроме того, имеются десять специальных (альтернирующих) зон длины $6k$ каждая. Каждая специальная зона состоит из шести пятиугольников, разделенных последовательностями из $k-1$ шестиугольников. У каждой зоны одинаковое число (шесть для чистой и три для специальной) пятиугольников внутри и снаружи

кольца. В случае (ii) имеется $10(k-1)$ чистых зон длины $9k$ каждая; и имеется 20 специальных (альтернирующих) зон длины $9k$ каждая. Каждая специальная зона не альтернирующая; она состоит из трех пятиугольников, разделенных последовательностями из $3k-1$ шестиугольников. У каждой чистой зоны по шесть пятиугольников внутри и снаружи кольца, образованного зоной; у каждой специальной зоны по три пятиугольника внутри и снаружи кольца. Все $20k$ зон разбиты на десять классов параллельности и каждый класс состоит из $k-1$ чистых зон, помещенных между двумя специальными.

15.2. Липшицево вложение

Здесь мы рассмотрим еще одно ослабление нашего главного понятия ℓ_1 -вложимости. Отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств X, Y называется *липшицевым*, если для любых вершин a, b пространства X , выполняется двойное неравенство

$$1 \leq \frac{d_X(a, b)}{d_Y(f(a), f(b))} \leq C,$$

где C — постоянная, называемая *искажением*. В 1985 году Бурген показал, что любая метрика не более чем на n точках липшицево вложима в ℓ_1^k (для конечной размерности k) с искажением $C = O(\log n)$; Линьял, Лондон и Рабинович в 1994 году показали, что более того, $k = O((\log n)^2)$. Например, у $K_{1,3}$ искажение больше 1. В 1978 году Аарони показал, что любое ℓ_p при $p > 2$ не является липшицево вложимым в ℓ_1 .

Кажется вполне правдоподобным, что метрика пути любого бесконечного гиперметрического графа (и более того, любая 5-гональная метрика) с точностью до шкалы липшицево-вложима в Z_m , $m \leq \infty$.

15.3. Полиэдральные гиперметрики

Выпуклый конус всех гиперметрик на m точках обозначается H_{ur_m} . Назовем гиперметрику d на m точках *ранга k* , если размерность пересечения всех граней H_{ur_m} , которым принадлежит d , равна k ; назовем гиперметрику *экстремальной гиперметрикой*, если ее ранг равен 1, т. е. она принадлежит экстремальному лучу H_{ur_m} .

Многогранник $P \times P'$ гиперметрический если и только если оба P, P' гиперметрические; он не в ℓ_1 вложим, если и только если хотя бы один из P, P' не вложим. (Но, например, любая пирамида $\text{Pyr}(P)$ на многограннике P , у которого не меньше 28 вершин, вложима если, и только если она гиперметрическая.)

У любого гиперметрического, но не ℓ_1 -вложимого графа с гиперметрикой ранга k не больше 56^k вершин; остов прямого произведения k копий 7-мерного многогранника Госсета 3_{21} реализует достижение этой верхней границы.

Ниже мы обозначим G_i , $1 \leq i \leq 26$ графы из [DeGr93], соответствующие экстремальным гиперметрикам на семи точках (но это не их графические метрики). Заметим, что графы G_1 и G_2 экстремальных гиперметрик являются остовами 4-мерных пирамид с основаниями Pyr_5 и 2-каппинованного α_3 соответственно.

Все гиперметрические, но не ℓ_1 -графы, у которых не более семи вершин, известны (см. [DeGr93]); они являются 12 графическими метриками среди 26 экстремальных гиперметрик на семи точках.

Предположение 15.1. Среди всех гиперметрических не ℓ_1 графов, у которых не более семи вершин, многогранными являются только: 3-полиэдральными G_4 (см. рис. 15.4 d)) и 4-полиэдральными

$$G_1 = \nabla^2 C_5 = K_7 - C_5 \quad \text{и} \quad G_2 = K_7 - P_4.$$

Любая, за исключением K_2 , гиперметрика экстремальна если и только если она порождает полиэдральные 2_{21} или 3_{21} ¹⁾. Итак, число вершин любого экстремального гиперметрического графа лежит внутри интервала $[7, 56]$, и размерность любого многогранника такого, что его остов является экстремальной гиперметрикой, лежит внутри интервала $[6, 7]$. Будем говорить, что граф экстремальной гиперметрики типа I (типа II) если он порождает решетку корней E_6 (E_7 соответственно). Диаметр графа G типа I равен двум, поскольку это индуцированный подграф графа Шлэфли $G(2_{21})$ диаметра два, и в этом случае ∇G — экстремальная гиперметрика типа II.

Ясно, что

$$G(\text{Pyr}(P)) = \nabla G(P), \quad \dim(\text{Pyr}(P)) = \dim P + 1.$$

(Заметим, что $\text{Pyr}^k(C_5) \rightarrow \frac{1}{2}H_5$ при $k \in \{0, 1\}$ — это экстремальная гиперметрика при $k \in \{2, 3\}$, и она 7- но не 9-гональна при $k = 4$.)

Приведем примеры многогранников, остовы которых экстремально гиперметрические, но не представимы в виде $\nabla G'$ для экстремально гиперметрического графа G' :

типа I:

- 1) полиэдры № 30, 71, 106 = M_{22} и еще один с остовом G_4 ; у них есть 9, 9, 10 и 7 вершин соответственно (см. рис. 15.4);

¹⁾Напомним, что всякая гиперметрика d порождает многогранник Делоне P_α (см., например: Деза, Лопана. Геометрия разрезов и метрик. Теорема 14.1.3.)

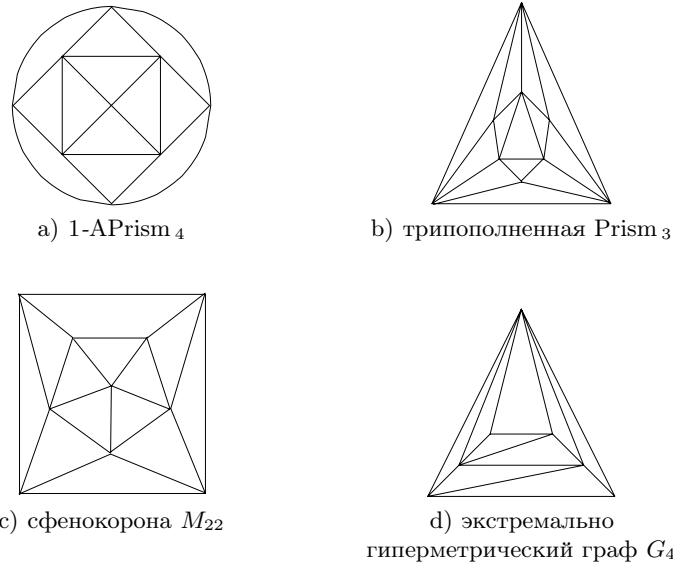


Рис. 15.4. Примеры гиперметрических ℓ_1 -невложимых многогранников

- 2) 4-многогранники с остовами G_1, G_2 ; у них обоих по семь вершин;
- 3) 6-многогранники: с остовами $K_9 - C_6 = G(\text{Pyt}^3(\text{Prism}_3))$, $\nabla^2 T(5) = G(\text{Pyt}^2(\text{Ambo}(\alpha_4)))$, $\nabla \frac{1}{2} H_5$ и многогранник Шлэфли 2_{21} ; у них, соответственно, 9, 12, 17 и 27 вершин;

типа II:

- 1) полиэдры №37, $107 = M_{21} + \text{Pyt}_4$, с 10 и 11 вершинами соответственно,
- 2) 7-многогранник Госсета 3_{21} ; у него 56 вершин.

Итак, мы получили две следующих последовательности вписанных многогранников таких, что их остовы экстремально гиперметрические:

$$G_1 = \nabla^2 C_5 < \nabla^2 G(0_{21}) < \nabla G(1_{21}) < G(2_{21}) \quad (\text{типа I}),$$

$$\nabla^3 C_5 < \nabla^3 G(0_{21}) < \nabla^2 G(1_{21}) < G(3_{21}).$$

Приведем несколько примеров экстремальных гиперметрик, которые не являются полиэдральными, но в некотором смысле близки к полиэдральным:

- 1) 7-вершинный граф G_{18} типа I — это планарный граф *скрученного* полиэдра.

- 2) Остов звездного октаэдра (сечение γ_3 многогранником β_3 с вершинами в центрах граней γ_3), который является *невъпуклым* полиэдром; это 14-вершинный граф G_{so} . Он включает экстремальный гиперметрический граф G_4 в качестве индуцированного подграфа. G_{so} — это изометрический подграф графа Госсета $G(3_{21})$ и, поскольку его диаметр равен 3, он типа II.
- 3) Антипаутины AW_9^2 , AW_{12}^3 — типа I, а AW_{14}^3 — типа II; AW_9^2 проективно планарный, и становится планарным, если мы удалим из него одно ребро.

И наконец, можно перечислить изометрические подграфы (и среди них полиэдральные) данного полукуба $\frac{1}{2}H_n$, которые не являются изометрическими подграфами его фасет. Например, следующие графы — такие изометрические полиэдральные подграфы графа Клебша $\frac{1}{2}H_5 = G(1_{21})$:

- 1) C_5 , $K_5 = G(\alpha_4)$ (вместе с четырьмя графами из п. 2 ниже), это единственные такие подграфы $\frac{1}{2}H_5$, у которых не более 6 вершин;
- 2) $K_6 - C_6 = G(\text{Prism}_3)$, $K_6 - P_5$ (полиэдральный), $K_6 - P_4 = G(2\text{-кашпингованный } \alpha_3)$, $\nabla C_5 = G(\text{Pyt}_5)$ (среди всех десяти 6-вершинных изометрических подграфов $\frac{1}{2}H_5$);
- 3) остовы следующих полиэдров, у которых не менее 7 вершин: №27 (1-кашпингованная Prism_3), №60 (пополненная Prism_3), №70 (биополненная Prism_3), 1-кашпингованный β_3 , APrism_4 ;
- 4) остовы 4-многогранников: $\text{Pyt}(\text{Prism}_3)$, $\alpha_1 \times \alpha_3$, $G(0_{21}) = T(5)$, $T(5) - K_1$, $T(5) - \overline{K_2}$, 1-кашпингованный (на фасете β_3) 0_{21} ;
- 5) остовы 5-многогранников: $\text{Pyt}^2(\text{Prism}_3)$, $\text{Pyt}(\text{ambo-}\alpha_4)$.

15.4. Симплициальные n -многообразия

Интересную возможность ослабить нашу вложимость многогранников мы получим, если рассмотрим изометрические вложения со шкалой в гиперкубы и кубические решетки 1-остовов симплициальных и кубических *комплексов*, более общих, чем граничные комплексы многогранников. Например, у на вершинах $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ с фасетами $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$ остовом является $K_5 - K_3$; у кубического комплекса на вершинах $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ с фасетами $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5, 6\}$, $\{1, 4, 5, 6\}$ остов — $K_{3,3}$. Поэтому оба они не 5-гональны.

Так как общий случай симплициальных комплексов слишком обширен, мы получили некоторые частные результаты в терминах *линков* $(n-2)$ -граней. Для любого n -симплекса S , содержащего фиксиро-

ванную $(n-2)$ -грань S' , существует единственное ребро e такое, что S является объединением S' и e . Линк $(n-2)$ -грани S' в комплексе, K — это цикл, образованный такими ребрами e для всех n -симплексов S , содержащих S' в K .

Теорема 15.2. Пусть M замкнутое симплициальное n -многообразие размерности $n \geq 3$. Тогда:

- (i) M не вложимо, если у него есть $(n-2)$ -грань, принадлежащая по крайней мере пяти n -симплексам и такая, что ее линк есть изометрический цикл в остове.
- (ii) M вложимо, если любая из его $(n-2)$ -граней принадлежит не более, чем четырем (т.е. 3 или 4) n -симплексам.

Если $(n-2)$ -грань принадлежит хотя бы шести n -симплексам (и поэтому по крайней мере шести $(n-1)$ -симплексам), то остов M не 5-гонален, поскольку он содержит изометрический подграф $K_5 - K_3$. Например, $\text{De}(A_3^*)$ не 5-гонален, поскольку у него есть шесть тетраэдров на некоторых ребрах.

Если $(n-2)$ -грань принадлежит ровно пяти n -симплексам, то остов M содержит изометрический подграф $K_7 - C_5$ (т.е. остов 4-многогранника $\text{Pyr}(\text{Pyr}_5)$), который 5-гонален, но не вложим. Например, у правильного 4-многогранника 600-ячейки, который является замкнутым симплициальным 3-многообразием, есть пять тетраэдров на каждом ребре.

Условие изометричности связи необходимо (оно было пропущено в [DeSt98]). Например, существует вложимое 3-многообразие, у которого есть ребро, принадлежащее пяти тетраэдрам; его остов — $K_7 - P_2$.

Для того, чтобы проверить (ii) теоремы 15.2 при $n = 3$, например, рассмотрим замкнутые симплициальные 3-многообразия такие, что каждое ребро принадлежит не более, чем четырем тетраэдрам. Существует ровно пять таких многообразий. Их остовами являются $K_5 = G(\alpha_4)$, $K_{2 \times 4} = G(\beta_4)$, K_6 (3-мерное подмногообразие α_5), $K_6 - e$, $K_7 - 2e$. Все эти пять остовов вложимы в $\frac{1}{2}H_m$ при $m = 5, 4, 6, 8, 8$ соответственно. Можно показать, что остов любого n -многообразия в случае (ii) — это граф $K_i - tP_2$ (т.е. i -клика с t удаленными непересекающимися ребрами) такой, что либо $(i, t) = (2n+2, n+1)$, либо

$$n \geq t+1 \quad \text{и} \quad n+t+2 \leq i \leq n+t+1 + \left\lfloor \frac{n-t+1}{2} \right\rfloor.$$

На самом деле, любой подграф остова $(n+1)$ -ортедра, содержащий $K_{n+2} - P_2$, возникает как остов такого вида; все они являются вложимыми графами диаметра два. Например, $K_7 - P_2$ возникает как остов n -многообразия (ii), но только при $n = 4$.

Литература

- [Andr05] Andreini A. Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari e sulle corrispondenti reti correlative (in Italian) // Mem. Societa Italiana della Scienze. Ser. 3 **14** (1905) P. 75—129.
- [AsDe80] Assouad P., Deza M. Espaces métriques plongables dans un hypercube: aspects combinatoires // Annals of Discrete Mathematics **8** (1980) P. 197—210.
- [Asso81] Assouad P. Embeddability of regular polytopes and honeycombs in hypercubes // The Geometric Vein, Coxeter Festschrift. Berlin: Springer-Verlag, (1981) P. 141—147.
- [Avis80] Avis D. Hypermetric spaces and the Hamming cone // Canadian Journal of Mathematics **33** (1981) P. 795—802.
- [AvDe91] Avis D., Deza M. The cut cone, ℓ_1 -embeddability, complexity and multi-commodity flows // Networks **21** (1991) P. 595—617.
- [BaCh00] Bandelt H.-J., Chepoi V. Decomposition and ℓ_1 -embedding of weakly median graphs // European Journal of Combinatorics **20** (2000) P. 701—714.
- [BaSc95] Baake M., Schlottman M. Geometric aspects of tilings and equivalence concepts // Proc. 5th Conference on Quasicrystals. World Scientific (1995) P. 15—21.
- [BLKBSSR95] Balaban A. T., Liu X., Klein D. J., Babic D., Schmalz T. G., Seitz W. A., Randic M. Graph invariants for fullerenes // Journal of Chemical Information and Computer Science **35** (1995) P. 396—404.
- [Berm71] Berman M. Regular faced convex polyhedra // Journal of the Franklin Institute **291-5** (1971) P. 329—352.
- [BEZ90] Björner A., Edelman P. H., Ziegler G. M. Hyperplane arrangements with a lattice of regions // Discrete and Computational Geometry **5** (1990) P. 263—288.
- [BlBl91] Blind G., Blind R. The semi-regular polyhedra // Comment. Math. Helvetica **66** (1991) P. 150—154.

- [BIB198] *Blind G., Blind R.* The almost simple cubical polytopes // Discrete Mathematics **184** (1998) P. 25—48.
- [BrDe99] *Brinkmann G., Deza M.* Tables of face-regular polyhedra // Journal of Chemical Information and Computer Science **40-3** (1999) P. 530—541.
- [BCN89] *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [Chav84] *Chavey D.* Periodic tilings and tilings by regular polygons, Ph.D. Thesis, Univ. of Wisconsin-Madison, 1984.
- [Chav89] *Chavey D.* Tilings by regular polygons — 2; a catalog of tilings // Computers Math. Applic. **17** (1989) P. 147—165. Reprinted in SYMMETRY 2 / Ed. by I. Hargittai. Vol. 18. Int. Series Modern Applied Mathematics and Computer Science. Pergamon Press, 1989.
- [CDG97] *Chepoi V., Deza M., Grishukhin V. P.* Clin d'oeil on ℓ_1 -embeddable planar graphs // Discrete Applied Mathematics **80** (1997) P. 3—19.
- [CDV06] *Cheroi V., Dragan F., Varees Y.* Distance and routing labelling cha for non-positiely.
- [Conw67] [Conw67] *Conway J. H.* Four-dimensional Archimedean polytopes, Proc. Colloquium on Convexity, Copenhagen 1965, Kobenhavns Univ. Mat. Institut (1967) P. 38—39.
- [CoSl88] *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Sphere Packings, Lattices and Groups // Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **290** New York: Springer-Verlag, 1988.
- [Coxe35] *Coxeter H. S. M.* Wythoff's construction for uniform polytopes // Proceedings of London Mathematical Society **38-2** (1935) P. 327—339.
- [Coxe37] *Coxeter H. S. M.* Regular skew polyhedra in three and four dimensions and their topological analogues // Proceedings of London Mathematical Society **43-2** (1937) P. 33—62.
- [Coxe54] *Coxeter H. S. M.* Regular honeycombs in hyperbolic space // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Amsterdam, 1954. Vol. 3 (1954) P. 155—169.
- [Coxe73] *Coxeter H. S. M.* Regular Polytopes. 3-rd ed. New York: Dover, 1973.
- [Crit70] *Critchlow K.* Order in Space. New York: Viking Press, 1970.
- [Crom97] *Cromwell P. R.* Polyhedra Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [DbLa81] *Debroey I., Landuyt F.* Equitransitive edge-to-edge tilings by regular convex polygons // Geometriae Dedicata **11** (1981) P. 47—60.
- [Delo37] *Делоне Б. Н.* Геометрия положительных квадратичных форм // УМН **3** (1937) С. 26—62; **4** (1938) С. 102—164.

- [Deza60] *Тылжин М. Е. (Deza M.)* О геометрии Хэмминга единичных кубов // Доклады АН СССР. Т. 134 (1960) P. 1037—1040.
- [Deza02] *Deza M.* Face-regular polyhedra and tilings with two combinatorial types of faces // Codes and Designs. OSU Math. Research Institute Publ. **10** (2002) P. 49—71.
- [DDG98] *Deza A., Deza M., Grishukhin V. P.* Embedding of fullerenes and coordination polyhedra into half-cubes // Discrete Mathematics **192** (1998) P. 41—81.
- [DDS04] *Deza M., Dutour M., Shpectorov S.* Isometric embedding of Wythoff polytopes into cubes and half-cubes // Proceedings of COE Workshop on Spherical packings (Fukuoka 2004), MHF Lecture Notes 2004 —1 / Ed. by E. Bannai (2004) P. 55—70. (papes/math. CO/0407527 of LANL archive)
- [DDS05] *Deza M., Dutour M., Shpectorov S.* Graphs 4_n that are isometrically embeddable into hypercubes // SEAMS Math. Bulletin **29-3** (2005).
- [DFS03] *Deza M., Fowler P. and Shtogrin M. I.* Version of zones and Petri circuits of icosahedral fullerenes and icosadeltahedra // Journal of Chemical Information and Computer Science **43** (2003) P. 595—599.
- [DeGr93] *Deza M., Grishukhin V. P.* Hypermetric graphs // Quarterly Journal of Mathematics Oxford **44-2** (1993) P. 399—433.
- [DeGr97a] *Deza M., Grishukhin V. P.* A zoo of ℓ_1 -embeddable polyhedral graphs // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **25** (1997) P. 181—231.
- [DeGr97b] *Deza M., Grishukhin V. P.* The skeleton of the 120-cell is not 5" gonol // Discrete Mathematics **165/166** (1997) P. 205—210.
- [DeGr99] *Deza M., Grishukhin V. P.* ℓ_1 -embeddable polyhedra // Algebras and Combinatorics, Int. Congress, ICAC '97 Hong Kong / Ed. by K. P. Shum et al. Springer (1999) P. 189—210.
- [DeGr01] *Deza M., Grishukhin V. P.* Face-regular bifaced polyhedra // Journal of Statistical Planning and Inference **95-1,2**, Special Issue in honor of S. S. Shrikhande (2001) P. 175—195.
- [DeLa94] *Deza M., Laurent M.* ℓ_1 -rigid graphs // Journal of Algebraic Combinatorics **3** (1994) P. 153—175.
- [DeLa97] *Деза М., Лоран М. И.* Геометрия разрезов и метрик. М.: МЦМНО, 2001.
- [DePa01] *Deza M., Pasechnik D.* On equicut graphs, Multiple-Valued Logic, Special Issue in honour of I. G. Rosenberg **7** (2001) 363—377.
- [DeSh96] *Deza M., Shpectorov S.* Recognition of ℓ_1 -graphs with complexity $O(nm)$, or football in a hypercube // European Journal of Combinatorics **17-2,3** (1996) P. 279—289.

- [DeSt96] Де́за М., Шторгин М. И. Изометрические вложения полуправильных многогранников, разбиений и им дуальных в гиперкубы и кубические решетки // УМН. Т. 51 (6) (1996) P. 199—200.
- [DeSt97] Де́за М. и Шторгин М. И. Вложение графов в гиперкубы и кубические решетки // УМН. Т. 52 (6) (1997) P. 155—156.
- [DeSt98] Deza M., Shtogrin M. I. Embedding of skeletons of Voronoï // Voronoï's impact on modern science. Book 2. Institute of Mathematics. Kyiv (1998) P. 80—84.
- [DeSt99] Deza M., Shtogrin M. I. Mosaics, embeddable into cubic lattices // Preprint LIENS 99-5. Paris: Ecole Normale Supérieure (1999), Discrete Mathematics **244/1-3** (2002) P. 43—53.
- [DeSt00a] Deza M., Shtogrin M. I. Uniform partitions of 3-space, their relatives and embedding // European Journal of Combinatorics **21-6**, Special Issue "Discrete Metric Spaces" (2000) P. 807—814.
- [DeSt00b] Де́за М., Шторгин М. И. Вложение химических графов в гиперкубы // Матем. заметки. Т. 68 (6) (1997) С. 339—352.
- [DeSt00c] Deza M., Shtogrin M. I. Embedding of the graphs of regular tilings and honeycombs into the graphs of hypercubes and cubic lattices // Arrangements. Tokyo: 1998; Series Advanced Studies in Pure Mathematics // Math. Society of Japan (2000) P. 73—92.
- [DeSt01] Deza M., Shtogrin M. I. Clusters of cycles // Journal of Geometry and Physics **40-3,4** (2001) P. 302—319.
- [DeSt02a] Де́за М., Шторгин М. И. Мозаики и их изометрические вложения // Известия РАН. Сер. мат. Т. 66 (3) (2002) С. 3—22.
- [DeSt02b] Де́за М., Шторгин М. И. Экстремальные и нерасширяемые полициклы // Труды МИАН. Т. 239 (3) (2002) С. 127—145.
- [DeSt02c] Де́за М., Шторгин М. И. Критерий вложимости (r, q) -полицидов // УМН. Т. 57 (3) (2002) С. 149—150.
- [DeSt02d] Де́за М., Шторгин М. И. Метрики постоянной кривизны на полициклах // УМН. Т. 78 (2) (2005) С. 223—233.
- [DeTu96] Deza M., Tuma J. A note on ℓ_1 -rigid planar graphs // European Journal of Combinatorics **17-2,3** (1996) P. 157—160.
- [Dill96] Dillencourt M. B. Polyhedra of small order and their Hamiltonian properties // Journal of Combinatorial Theory. Series B **66** (1996) P. 87—122.
- [Djok73] Djoković D. Ž. Distance preserving subgraphs of hypercubes // Journal of Combinatorial Theory. Series B **14** (1973) P. 263—267.

- [DSS86] Долбинин Н. Н., Штанько М. И., Шторгин М. И. Кубические подкомплексы в правильных решетках // Доклады АН СССР. Т. 291 (2) (1986) С. 277—279.
- [Duto02] Dutour M. Private communication, October 2002.
- [Enge98] Engel P. New investigations of parallelohedra in R^d , in: Voronoï's impact on modern science. Book 2 // Institute of Mathematics. Kyiv, 1998. P. 22—60.
- [EnGr02] Engel P., Grishukhin V. There are exactly 222 L-types of 5 dimensional primitive lattices // European Journal of Combinatorics **23-3** (2002) P. 275—279.
- [ErRy87] Erdahl R. M., Ryshkov S. S. The empty sphere // Canadian Journal of Mathematics **34-4** (1987) P. 794—824.
- [Erda98] Erdahl R. M. Zonotopes, and Voronoï's conjecture on parallelohedra // Voronoï's impact on modern science. Book 2. Institute of Mathematics. Kyiv, 1998 P. 61—74.
- [Fedo1885] Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. СПб., 1885; М.: изд-во АН СССР, 1953.
- [Fisc75] Fischer J. C. Five-valent convex polyhedra with prescribed faces // Journal of Combinatorial Theory. Series A **18** (1975) P. 1—11.
- [FoMa95] Fowler P. W., Manolopoulos D. E. An Atlas of Fullerenes. Oxford: Clarendon Press, 1995.
- [Fuku95] Fukuda K. Lecture notes: A constructive approach to polyhedral geometry and mathematical programming, Institute for Mathematical Research, ETH, Zürich, Switzerland, 1995.
- [Gold35] Goldberg M. An isoperimetric problem for polyhedra, Tohoku Mathematical Journal **40** (1935) P. 226—236.
- [Gold37] Goldberg M. A class of multi-symmetric polyhedra, Tohoku Mathematical Journal **43** (1937) P. 104—108.
- [GrMo63] Grünbaum B., Motzkin T. S. The number of hexagons and the simplicity of geodesics on certain polyhedra // Canadian Journal of Mathematics **15** (1963) P. 744—751.
- [GrSh87] Grünbaum B., Shephard G. C. Tilings and Patterns. New York: W. H. Freeman, 1987.
- [GrSh98] Grünbaum B., Shephard G. C. Isohedra with nonconvex faces // Journal of Geometry **63** (1998) P. 76—96.
- [Grün67] Grünbaum B. Convex Polytopes. New York: Interscience, 1967.
- [Grün94] Grünbaum B. Uniform tilings of 3-space, Geombinatorics **4** (1994) P. 49—56.

- [Grün96] *Grünbaum B.* Private communication. May 1996.
- [HiPe89] *Hilton P., Pedersen J.* Duality and the Descartes deficiency, *Computer Mathematics and Applications* **17-1,2,3** (1989) P. 73—88.
- [John66] *Johnson N. W.* Convex polyhedra with regular faces // *Canadian Journal of Mathematics* **18** (1966) P. 169—200.
- [John91] *Johnson N. W.* Uniform Polytopes, manuscript, 1991, to appear, Cambridge University Press.
- [Juco70] *Jucovič E.* Characterization of the p -vector of a self-dual 3-polytope // *Combinatorial structures and their applications, Proceedings of Calgary Conference 1969* / Ed. by *Guy R.* and al. (1970) P. 185—187.
- [Karz85] *Karzanov A. V.* Metrics and undirected cuts // *Mathematical Programming* **32** (1985) P. 183—198.
- [Kats83] *Katsura I.* Theory on the structure and stability of coated vesicles // *Journal of Theoretical Biology* **103** (1983) P. 63—75.
- [Kell75] *Kelly J. B.* Hypermetric spaces // *Lecture Notes in Math.* **490** Berlin: Springer-Verlag, 1975. P. 17—31.
- [Kepl1619] *Kepler J.* Harmonice Mundi, 1619.
- [King91] *King R. B.* Topological aspects of chemically significant polyhedra // *Journal of Mathematical Chemistry* **7** (1991) P. 51—68.
- [KoSu92] *Kobayasi M., Suzuki T.* Calculation of coordinates of vertices of all convex polyhedra with regular faces (in Japanese) , *Bull. Univ. Electro-comm.* **5-2** (1992) P. 147—184.
- [Kool90] *Koolen J.* On metric properties of regular graphs. Master's Thesis. Eindhoven University of Technology, 1990.
- [KoSp94] *Koolen J., Shpectorov S. V.* Distance-regular graphs the distance matrix of which has only one positive eigenvalue // *European Journal of Combinatorics* **15** (1994) P. 269—275.
- [Kröt69] *Krötenheerdt O.* Die homogenen Mosaike n -ter Ordnung in der euklidischen Ebene, 1, *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-natur. Reihe* **18** (1969) P. 273—290.
- [Kröt70a] *Krötenheerdt O.* Die homogenen Mosaike n -ter Ordnung in der euklidischen Ebene, 2. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-natur. Reihe* **19** (1970) P. 19—38.
- [Kröt70b] *Krötenheerdt O.* Die homogenen Mosaike n -ter Ordnung in der euklidischen Ebene, 3, *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-natur. Reihe* **19** (1970) P. 97—122.
- [Macp82] *Macpherson H. D.* Infinite distance transitive graphs of finite valency // *Combinatorica* **2-1** (1982) P. 63—69.

- [Maka88] *Макаров М. В.* О выводе четырехмерных полуправильных многогранников // *Вопросы дискретной геометрии. Матем. исследования. Инст. матем. АН Молдавской ССР. Т. 103. Кишинев: Штиница, 1988. С. 139—150.*
- [Malk70] *Malkevitch J.* A survey of 3-valent 3-polytopes with two types of faces // *Combinatorial structures and their applications. Proceedings of Calgary Conference 1969* / Ed. by *R. Guy* and al. (1970) P. 255—256.
- [OkHy96] *O'Keeffe M., Hyde B. G.* Crystal Structures, Mineralog. Society of America. Washington DC, 1996.
- [Novi86] *Новиков С. П.* Топология // *Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики». Фундаментальные направления. Т. 12. Топология-I. М.: ВИНТИ, 1986.*
- [Pear78] *Pearce P.* Structure in nature is a strategy for design // *The MIT Press. Cambridge, 1978.*
- [PSC90] *Prisacaru K. F., Soltan P. S., Chepoi V. D.* On embeddings of planar graphs into hypercubes (in Russian) // *Proceedings of Moldavian Academy of Sciences. Mathematics* **1** (1990) P. 43—50.
- [Radi94] *Radin C.* The pinwheel tiling of the plane // *Annals of Discrete Mathematics* **139-2** (1994) P. 661—702.
- [RyBa76] *Рыжсков С. С., Барановский Е. П.* C -типы n -мерных решеток и пятимерные примитивные параллелепипеды (с приложением к теории покрытий) // *Труды МИАН. Т. 137. 1976.*
- [RyBa79] *Рыжсков С. С., Барановский Е. П.* Классические методы теории решетчатых покрытий // *УМН. Т. 34. (4) (1976) P. 1—68.*
- [SaMo97] *Sadoc J. F., Mosseri R.* Frustration géométrique. Aléa-Saclay. Paris: Eyrolles, 1997.
- [Sah94] *Sah C. H.* A generalized leapfrog for fullerene structures // *Fullerenes Science and Technology* **2-4** (1994) P. 445—458.
- [ScYo00] *Schwabe C., Yoshimoto N.* Zonohedra music chart // *Hyperspace* **9-3** (2000) P. 31.
- [Shpe93] *Shpectorov S.* On scale-isometric embeddings of graphs into hypercubes // *European Journal of Combinatorics* **14** (1993) P. 117—130.
- [Shto80] *Шторгин М. И.* Ненормальные разбиения трехмерного евклидова пространства на выпуклые параллелепипеды и их симметрия // *Все-союзный симпозиум по теории симметрии и ее обобщения. Тезисы докладов. Кишинев (1980) P. 129—130.*
- [Thur98] *Thurston W. P.* Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere // *in Geometry and Topology Monographs 1. The Epstein Birthday Schrift, Geom. Topol. Publ. Coventry, 1998. P. 511—549.*

- [Voro1908] *Voronoi G. F.* Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des forms quadratiques // Deuxième mémoire, J. Reine Angew. Math. **134** (1908) P.198—287, **136** (1909) P.67—178.
- [Week85] *Weeks J. R.* PhD Thesis. Princeton University, 1985.
- [Well84] *Wells A. F.* Structural Inorganic Chemistry. 5th ed. Oxford, 1984.
- [Well91] *Wells D.* The Penguin dictionary of curious and interesting geometry // Penguin Books. London; New York, 1991.
- [Wenn71] *Wenniger J. M.* Models of Polyhedra. Cambridge: Cambridge University Press, 1971.
- [Will72] *Williams R.* Natural structure. Moorpark Ca: Eudaeman Press, 1972. Reprinted as: The Geometrical Foundation of Natural Structure. New York: Dover, 1979.
- [Zalg69] *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями // Труды ЛОМИ. Л.: Наука, 1966.

Предметный указатель

- (r, q) -полицикл 88
 $(s \times s)$ -решетка 160
 1-APrism $_m$ 64
 2-APrism APrism $_m$ 64
 4-многогранник архимедов 85
 APrism $_m^k$ 64
 Barrel $_m^k$ 66
 De(L) 122
 $\frac{1}{2}$ -усечение 67
 $\frac{1}{3}$ -усечение 67
 Prism $_n^m$ 60
 Rcbt скрученный 59
 RhDo скрученный 114
 RhDo — v_3 114
 tr(додекаэдр) 57, 58
 tr(икосаэдр) 57, 58
 tr(икосидодекаэдр) 57, 58
 tr(куб) 57, 58
 tr(кубоктаэдр) 57, 58
 tr(тетраэдр) 57, 58
 Tower $_m^k$ 66
 Vo(L) 122
 A_n 122
 D -комплекс 120
 D_n 122
 D_n^+ 124
 E_6 122
 E_7 122
 E_8 122
 i -каппинг 69
 i -усечение 69
 J -комплекс 115
 k -угольник звездный 62
 k -эдром 27
 n -бипирамид ВРуг(P) 28
 n -куб γ_n 29
 n -многогранник Джонсона 28
 — квазиправильный 28
 — полуправильный 28
 — правильный 27
 — простой 27
 n -многогранником с правильными гранями 28
 n -многообразие симплициальное 180
 n -ортаэдр β_n 29
 n -пространство гиперболическое 46
 — евклидово 46
 n -симплекс α_n 29
 n -сфера 46
 $s(3, 4, 3)$ 84
 $s(3, 4, 3, 3)$ 68
 tr(октаэдр) 57
 tr(октаэдр) 58
 120-ячейкой 52
 24-ячейка 52
 — снаб 84
 600-ячейка 52
 bcc 115
 fcc 115
 hcp 116

- азулен 91
 амбо-многогранник 30
 антипаутина AW_n^k 63
 антипризма большая 86
- бензол 91
 бесконечная шахматную доску 121
 бикупола 80
 билунабиротонда 81
 бирешетка 114
 — алмазная 120
 бифенил 91
 борид UB_{12} 116
 борид CaB 115
 борид Fe_2AlB_2 115
- вейвлет сферический 75
 вершинно-расщепленный (34) 89
 вершинно-расщепленный (35) 89
 водород H 91
 высоконопорный Si 115
 вытягивание 29
- гебесфеноротонда
 триангулированная 81
 гексакис 69
 гидрокарбонат полициклический
 ароматический 91
 граф t -вложимый 172
 — Госсета $G(3_{21})$ 179
 — дважды нечетный DO_{2s+1} 159
 — дистанционно регулярный 159
 — — транзитивный 159
 — дистанционно транзитивный
 бесконечный 160
 — Дуба 158
 — Козстера 66
 — медиальный 30
 — московский 60
 — Петерсена 159
 — сеточный 62
 — сильно регулярный 159
 — хеммингов 62
 — Шлэфли $G(2_{21})$ 177
 — Шрикханде 159
- эквиразрезный 154
 — экстремальный
 гиперметрический 177
- дельтаэдр 27
 дисфеноид снаб 77
 додекадодекаэдр 51
 додекаэдр Do 28
 — i -слойный 42
 — большой 47
 — дитригональный 51
 — ромбический $RhDo$ 167
 — сиамеза 77
 — скрученный 57, 58
- жиробифастигиум 83
 жировытянутая Pug_4 80
- зонотоп 166
 зоноэдр полярный $Pz(m)$ 165
- изозонотоп золотой 164
 икосаэдр 82
 — Ico 28
 — большой 47
 — со силесными ребрами 96
 икосидодекаэдр 77
 индацен 91
- каппинг 30
 карта Дика 49
 — Клейна 49
 карты правильные 49
 квадрильяж 169
 квази- $(r, 3)$ -полицикл 91
 квазивложение 172
 кластер металлический 93
 клетки окаймленных пузырьков 44
 компаунд правильный 50
 комплекс кубический 179
 — решетчатый 114
 — симплициальный 179
 коранулен 92
 куб γ_3 28
 — бесконечномерный 32

- Гильберта 33
 — скрученный 57, 58
 — — шамферингованный 145
 — Тихонова 33
 кубоктаэдр Cbt 77
 — скрученный 152
 купол Cup_n 63
- лабиринт 49
 липфрэг 144
 лист шестиугольный 44
- матрица Адамара 158
 матроид ориентированный 166
 — представимый,
 ориентированный 166
 медь Cu 117
 металлополиэдр 93
 метрика липшицево вложимая 176
 многогранник n -мерный
 перестановочный 126
 — Вороного $P(x)$ 31
 — двойственный 27
 — Делоне 31
 — звездный 46
 — октикосаэдрический 84
 — правильный 77
 мозаика 97
 — вершинно-однородная 97
 — реберно-однородная 97
- нафталин 91
- область фундаментальная 47
 обозначение Шлэфли 47
 обхват графа 88
 оксифторид Ag_7O_8F 116
 октаэдр β_3 28
 октаэдрит 138
 омпикаппинг всюду 69
 отношение золотое 85
- парацельсий $BaAl_2Si_2O_8$ 112
 пентаграмма 51
 пентакис 69
- пентален 91
 пентацикл 51
 переключение диаметрально 157
 — Зейделя 157
 перовскит (ABX_3) 115
 плоскость гиперболическая H^2 88
 — евклидова R^2 88
 — проективная 49
 плотность 46
 подграф частичный 88
 полиэдр 27
 — Архимедов 28
 — базовый 77
 — бесконечный правильный 49
 — Каталана 28
 — квазимедиальный 139
 — координационный 93
 — медиальный 138
 — однородный 51
 — правильный скошенный 49
 — с двумя типами граней 136
 полоний Po 117
 последовательность
 аперидическая 90
 правильные 111
 призма бесконечная 121
- разбиение 27
 — (r^q) правильное 88
 — Вороного 31
 — Грюнбаума 118
 — Делоне 31
 — Кельвина 118
 — некомпактное равномерное 120
 — Пенроуза 108
 — Фёпла 117
 расстояние t -усеченное 172
 — Карлсруэ 60
 — Ли 61
 — московское 60
 — радиально дискриминирующее
 60
 — сеточное 62
 — хемминга 62

- эллиптическое 61
- решетка 122
- дайсинга 125
- корневая 122
- — неприводимая 122
- род ориентированный 50
- ромб золотой 108
- ромбоикосаэдр 81
- ромбоикосидодекаэдр RIdo 77
- ромбокубктаэдр Rcbt 77
- ромбоэдр золотой 108
- ротунда пятиугольная 77
- селенид $\text{Pd}_{17}\text{Se}_{15}$ 116
- сеть КагOME 98
- Каира 98
- силицид ThSi_2 116
- силицид U_3Si_2 115
- симплекс α_3 28
- система корней E_8 84
- снаб APrism_b 135
- содалит 115
- соты n -мерные 27
- правильные звездные 52
- стелла октаэдула 50
- стелляция 69
- сфенокорона 80
- пополненная 80
- сфеномегакорона 82
- сфера S^2 88
- Кампануса 61
- телo Платоново 28
- терфенил 91
- тетракиc 69
- тор 50
- триакиc 69
- триаконтаэдр 164
- трипополненная Prism_3 80
- углерод C 91
- удвоение антиподальной 155
- диаметральноe 156
- усечение золотое 68
- фаза Лавеса MgCu_2 117
- фасетный граф матроида 166
- фигура вершинная 27
- реберная 97
- флуорантен 91
- фуллерен 37
- Бакминстера 37
- предпочтительный 37
- центрирование 124
- цеолит Линде A 116
- цеолит-ро 115
- цинк Zn 117
- шамферинг 30, 73
- эбесфена-корона 82
- энергия минимальная 44
- натяжения 44
- ячейка 46