

ESPACES MÉTRIQUES PLONGEABLES DANS UN HYPERCUBE: ASPECTS COMBINATOIRES

P. ASSOUAD

Centre d'Orsay, Univ. Paris-Sud, 91405 Orsay Cédex, France

M. DEZA

CNRS, 75008 Paris, France

Pour un espace métrique, on montre les liens existant entre diverses possibilités de plongement isométrique: dans un hypercube, dans $\mathbb{Z}^n$ ou dans un espace L^1 . On étudie des conditions (surtout nécessaires) de plongabilité, notamment l'inégalité hypermétrique. On applique ces notions aux graphes avec leur distance usuelle ou tronquée (notamment) aux polytopes réguliers). On examine aussi rapidement plusieurs exemples de caractère non combinatoire et les liens avec d'autres problèmes classiques (copositivité, adresses ternaires, théorème de Grothendieck).

0. Introduction

On a voulu grouper ici de nombreux résultats sur les propriétés métriques des hypercubes provenant soit de la combinatoire, soit de l'analyse fonctionnelle. De ce fait on ne donne pas les démonstrations en général, mais les références sont éventuellement précisées. Les démonstrations seront de toute façon détaillées dans un livre à paraître des deux auteurs [2].

On s'intéresse ici aux espaces métriques plongeables isométriquement soit dans un hypercube ou dans $\mathbb{Z}^n$ (avec la distance $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$), soit dans un espace L^1 .

La première éventualité a des liens avec certains problèmes d'existences en combinatoire (adresses, "line graphs", "intersection patterns").

La seconde possibilité de plongement aurait plutôt des liens avec les espaces normés et l'analyse fonctionnelle.

Donnons une idée rapide du plan:

- (1) introduction de notions de base et de leurs liens les plus évidents;
- (2) étude des conditions (surtout nécessaires) de plongabilité;
- (3) cas des graphes avec distance tronquée;
- (4) cas des graphes avec distance usuelle (on étudie notamment les polytopes réguliers et les "regular honeycombs" ou pavages réguliers);
- (5) examen d'exemples de nature non combinatoire;
- (6) quelques sujets connexes ("intersection patterns", copositivité, adresses ternaires, théorème de Grothendieck).

Par ailleurs, précisons tout de suite un certain nombre de notations.

Pour noter les graphes on usera des notations K_n (graphe complet à n sommets), $\bar{K}_n$ (graphe sans arête à n sommets), P_n (chemin à n arêtes), C_n (cycle à n arêtes), $K_n \setminus \Gamma$ (n sommets, ensemble d'arêtes complémentaire de celui du graphe Γ) et S_n (étoile avec un centre et n sommets périphériques).

D'autre part, si $G = (X, E)$ est un graphe connexe, on considère X comme un espace métrique muni de la distance du plus court chemin (chaque arête étant prise de longueur 1) qu'on notera parfois d_G et qu'on appellera la distance de graphe usuelle.

Enfin si $G_1 = (X_1, E_1)$ et $G_2 = (X_2, E_2)$ sont des graphes on note $G_1 G_2$ leur produit direct: l'ensemble des sommets est $X_1 \times X_2$. $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ est une arête si et seulement si: $x_1 = y_1, (x_2, y_2) \in E_2$ ou $x_2 = y_2, (x_1, y_1) \in E_1$; si G est un graphe, n un entier ≥ 1 , on note G^n le produit direct de n facteurs égaux à G .

1. Notions de bases

On rappelle d'abord la définition de trois espaces métriques fondamentaux:

(1) $(K_2)^n$ l'hypercube de $\mathbb{R}^n$ (produit direct $(K_2)^n$ avec sa distance de graphe usuelle): l'espace sous-jacent est $\{0, 1\}^n$, c'est-à-dire l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$ et on pose $d(A, B) = |A \Delta B|$ pour toutes parties A, B de $\{1, \dots, n\}$ (on voit donc que ce n'est autre que le graphe des sommets et des arêtes d'un hypercube de $\mathbb{R}^n$ avec la distance du plus court chemin, ou de façon équivalente l'ensemble des mots binaires de longueur n avec la distance de Hamming).

(2) $\mathbb{Z}^n$ le pavage cubique régulier de $\mathbb{R}^n$ (produit direct $(\mathbb{Z})^n$ avec sa distance de graphe usuelle; naturellement les arêtes de $\mathbb{Z}$ sont les $(j, j+1)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$): l'espace sous-jacent est $\mathbb{Z}^n$ et on pose $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ où les x_i sont les coordonnées entières de x (on voit donc que ce n'est autre que le graphe des sommets et des arêtes du réseau cubique régulier de $\mathbb{R}^n$ avec la distance du plus court chemin).

(3) espace $L^1 \Omega, \mathcal{A}, \mu$: Ω est un ensemble, $\mathcal{A}$ une σ -algèbre de parties de Ω , μ une mesure ≥ 0 sur $(\Omega, \mathcal{A})$; $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est alors l'espace vectoriel des applications mesurables $f: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\int_{\Omega} |f(\omega)| \mu(d\omega) < \infty$; il est muni de la norme $f \rightarrow \|f\| = \int_{\Omega} |f(\omega)| \mu(d\omega)$ et donc de la distance $f_1, f_2 \rightarrow \|f_1 - f_2\|$ (en fait tout cela après passage au quotient pour être strict).

On notera que l'hypercube $(K_2)^n$ est un sous-espace métrique du pavage $\mathbb{Z}^n$. D'autre part le pavage $\mathbb{Z}^n$ est le sous-espace métrique des éléments à valeurs entières de l'espace $L^1(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ suivant: $\Omega_0 = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{A}_0 = 2^{\Omega_0}$, μ_0 est la cardinalité, c'est-à-dire la mesure qui a une masse 1 en chaque point (cet espace est l'espace l^1 de dimension n).

Définitions. (1) On dira qu'un espace métrique (X, d) est *plongeable dans un hypercube* (resp. *h-plongeable*, resp. *plongeable dans L^1*) s'il peut être considéré comme un sous-espace métrique d'un hypercube (resp. d'un pavage cubique régulier, resp. d'un espace L^1).

On dira qu'un écart d sur un ensemble X est plongeable dans un hypercube (resp. h -plongeable, resp. plongeable dans L^1) si l'espace métrique quotient correspondant a cette propriété.

(2) Soient X un ensemble et d un écart plongeable dans un hypercube (resp. h -plongeable) sur X ; on appelle h -contenu (resp. h -rang) de d et on note $\omega_h(d)$ (resp. $\rho_h(d)$) le plus petit n tel que d puisse être plongé dans un hypercube $(K_2)^n$ (resp. un pavage cubique $\mathbb{Z}^n$).

(3) Soient X un ensemble et d un écart sur X plongeable dans un hypercube; on appelle h -réalisation de d tout plongement de d dans un hypercube c'est-à-dire la donnée d'un ensemble fini Ω et pour chaque $x \in X$ d'une partie $A(x)$ de Ω vérifiant:

$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = |A(x) \Delta A(y)|.$$

Lemme 1. Soit X un ensemble fini. On a alors:

(1) un écart sur X est h -plongeable si et seulement si il est plongeable dans un hypercube;

(2) si un écart sur X est à valeurs entières et plongeable dans L^1 , alors il existe λ rationnel tel que λd soit h -plongeable.

Définition. Soient X un ensemble et d un écart sur X à valeurs entières. On appelle échelle de d et on note $\eta(d)$ le plus petit rationnel λ tel que λd soit h -plongeable.

2. Conditions de plongeabilité

On cherche à reconnaître les distances plongeables dans L^1 par un certain nombre d'inégalités simples. Même en présence de structures additionnelles (graphes, stationnarité) on ne sait pas le faire.

Cependant il faut signaler que pour les espaces normés (avec la distance de la norme $d(x, y) = \|x - y\|$), on a la caractérisation suivante [10]: d est plongeable dans L^1 si et seulement si d est de type négatif (voir ci-dessous). (Rappelons aussi qu'un espace métrique (X, d) est plongeable dans L^2 si et seulement si d^2 est de type négatif.)

En fait on ne dispose principalement que de l'importante condition nécessaire suivante (introduite dans [13]):

Définitions. (1) Soient (X, d) un espace métrique et n un entier ≥ 1 , on dit que d est $(2n+1)$ - (resp. $2n$ -) polygonale si on a:

$$\forall x_1, \dots, x_n \in X, \quad \forall y_1, \dots, y_{n+1} \in X \quad (\text{resp. } \forall y_1, \dots, y_n \in X),$$

$$\sum_{i < j} d(x_i, x_j) + \sum_{i < j} d(y_i, y_j) \leq \sum_{i, j} d(x_i, y_j).$$

(on notera que les x_i et y_j ne sont pas supposés distincts).



Fig. 1

On parle de *pentagonal* au lieu de 5-polygonal (naturellement l'inégalité 3-polygonale est simplement l'inégalité triangulaire). (Voir la Fig. 1.)

(2) On dit que d est *hypermétrique* (resp. *de type négatif*) si d est $2n+1$ - (resp. $2n$ -) polygonale pour tout entier $n \geq 1$.

Proposition 2. *Un écart plongable dans L^1 est hypermétrique. Un écart $(2n+1)$ -polygonal est $(2n-1)$ - et $(2n+2)$ -polygonal.*

Un écart $(2n+2)$ -polygonal est $2n$ -polygonal.

Un écart hypermétrique est de type négatif.

(Noter qu'une fonction symétrique hypermétrique est nécessairement un écart.)

Le cône des écarts plongables dans L^1 sur un ensemble fini fixe X est un polytope, donc caractérisé en principe par un nombre fini d'inégalités (les éléments extrémaux du cône dual). Ces inégalités ne sont pas connues explicitement en général. En particulier dès que l'ensemble X a 7 points, on montre que l'usage des inégalités polygonales ne suffit pas. De façon précise on a:

Proposition 3. (1) [13] *Une distance sur un ensemble à 4 points est plongable dans L^1 .*

(2) [13] *Une distance pentagonale sur un ensemble à 5 points est plongable dans L^1 .*

(3) [5, 6] *Sur un ensemble à 7 points, il existe des distances hypermétriques et non plongables dans L^1 .*

Dans le cas d'un ensemble à 7 points précisons le contre exemple donné dans [6]: c'est le graphe $K_7 \setminus P_2$ avec sa distance de graphe usuelle; le contre exemple donné dans [5] est dual et consiste en une inégalité satisfaite par les écarts plongables dans L^1 et ne se ramenant pas à des inégalités polygonales (Noter que sur un ensemble à 6 points il semble qu'une distance 7-polygonale soit plongable dans L^1 , mais la question demeure ouverte).

Le cas où X est fini est d'une importance particulière car on a le résultat de finitude suivant:

Proposition 4 ([10] et aussi [4]). *Soit (X, d) un espace métrique. Pour que d soit plongable dans L^1 il faut et il suffit que la restriction de d à chaque partie finie de X soit plongable dans L^1 .*

[10] donne en fait un résultat général de finitude pour les distances plongeables dans L^p , pour $p \in [1, \infty]$; plus tard [4] présente ce même résultat pour L^1 comme un cas particulier d'un résultat de finitude pour les covariances M -réalisables (pour le point de vue des covariances et "intersection patterns" voir cidessous, chapitre VI).

Le problème de la reconnaissance des distances h -plongeables est plus compliqué. On doit ajouter aux inégalités qui assureraient le plongement dans L^1 des conditions de nature différente.

On doit avoir la condition de parité suivante:

Lemma 5. *Soit (X, d) un espace métrique. Si d est h -plongeable, alors le périmètre de tout triangle est pair.*

On note que cette condition n'est pas suffisante pour qu'une distance plongeable dans L^1 soit h -plongeable: ainsi pour le graphe $K_6 \setminus P_1$ (avec d sa distance de graphe usuelle) $2d$ est plongeable dans L^1 mais non h -plongeable.

Cependant on a:

Proposition 6 [13]. *Sur un ensemble à 5 points un écart plongeable dans L^1 est h -plongeable dès que le périmètre de tout triangle est pair.*

3. Graphes avec distance tronquée

On fait d'abord l'observation suivante: soit X un ensemble, une fonction symétrique sur $X \times X$ à 2 valeurs (0 sur la diagonale et éventuellement ailleurs et 1) est toujours un écart plongeable dans L^1 (car après quotient on se ramène à un graphe complet, voir cidessous).

Soit X un ensemble. Une fonction symétrique sur $X \times X$ à 3 valeurs (0 sur et seulement sur la diagonale, 1 et 2) est toujours une distance. Cela amène à poser la définition suivante:

Definition. Soit $G = (X, E)$ un graphe. On appelle *distance tronquée* sur l'ensemble des sommets de G la distance définie ainsi:

$$\forall x, y \in X, d'_G(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } (x, y) \in E, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d'_G n'est autre que $\inf(d_G, 2)$ avec l'adaptation évidente si G n'est pas connexe.)

Notations. Soit $G = (X, E)$ un graphe, $x_0 \in X$ et G_0 le sousgraphe induit sur $X \setminus \{x_0\}$. on dira que G est *suspension* de G_0 si $(x_0, x) \in E$ pour tout $x \in X \setminus \{x_0\}$. D'autre part, pour abrégé, on utilise l'expression anglaise "line graph" pour désigner le graphe représentatif des arêtes d'un graphe.

Proposition 7. Soit $G = (X, E)$ un graphe.

(a) d'_G est h -plongeable si et seulement si elle est h -plongeable chaque fois qu'elle est restreinte à 5 points (en fait cela réduit G à être S_n ou $(K_2)^2$ ou $\bar{K}_n$).

(b) Si G est un "line graph" ou une suspension de "line graph", alors $2d'_G$ est h -plongeable.

(c) Si $|X| \leq 6$, $2d'_G$ est h -plongeable si et seulement si G ne contient pas comme sous-graphe induit un des 8 graphes exhibés dans la Fig. 2.

Démonstration. (a) Soit G tel que d'_G soit h -plongeable. Supposons d'abord $|X| = 3$. Le Lemme 5 implique $G = P_2$ ou $\bar{K}_3$. Supposons maintenant $|X| = 4$ ou 5, les sous-graphes induits sur 3 points doivent être P_2 ou $\bar{K}_3$. Par ailleurs rappelons que $K_{2,3}$ n'est pas pentagonal. Donc $G = S_3, S_4, (K_2)^2, \bar{K}_4$ ou $\bar{K}_5$. Si $|X| = n \geq 6$, les sous-graphes induits sur 5 points doivent être S_4 ou $\bar{K}_5$. On vérifie aisément que si $G = S_n, (K_2)^2, \bar{K}_n$, alors d'_G est h -plongeable. D'où le résultat.

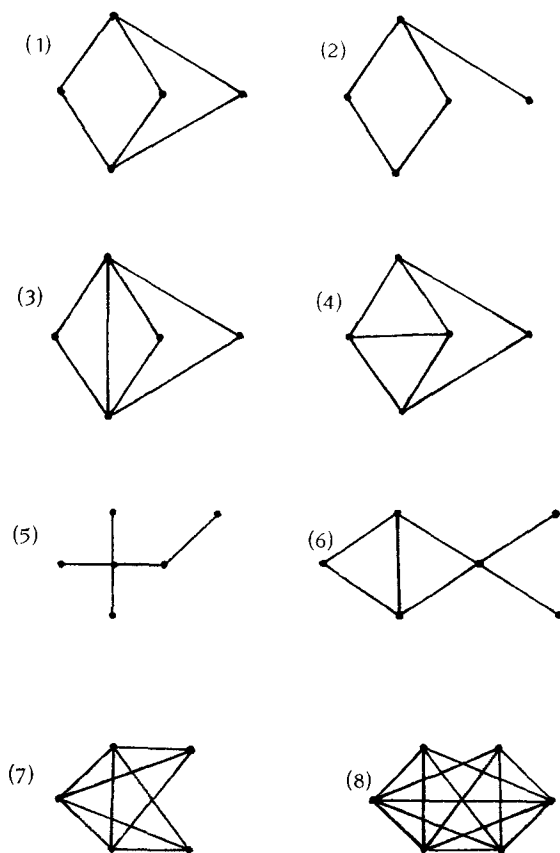


Fig. 2

(b) Soit $\Gamma = (Y, F)$ un graphe. Soit $G_0 = (F, E_0)$ le "line graphe" de Γ ($(a, b) \in E_0$ si, $a, b \in F$, $|a \cap b| = 1$). Soit $G = (X, E)$ la suspension de G_0 (c'est-à-dire: $X = F \cup \{x_0\}$ et $E = E_0 \cup \{(a, x_0) \mid a \in F\}$). Pour obtenir une h -réalisation de $2d'_G$ (et donc aussi de $2d'_{G_0}$ par restriction) on prend:

$$\Omega = Y, \quad A(x_0) = \emptyset \quad \text{et} \quad A(a) = a \quad \text{pour tout } a \in F.$$

(c) Les graphes à 5 sommets ou moins sont tous des "line graphs" ou des suspensions de "line graphs" excepté 6 graphes à 5 sommets: les graphes (1), (2), (3), (4) de l'énoncé et les graphes

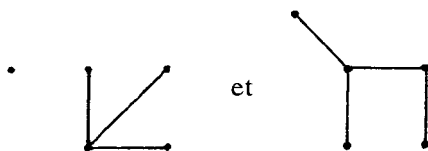


Fig. 3

On vérifie aisément que pour les quatre premiers (resp. les deux derniers) $2d'_G$ n'est pas pentagonale (resp. est h -plongeable).

Les graphes à 6 sommets qui ne contiennent pas (1), (2), (3) ou (4) comme sous-graphe induit (ce qui exclut déjà 48 graphes) sont tous des "line graphs" ou des suspensions de "line graphs" excepté 27 graphes. Pour ces 27 graphes, $2d'_G$ est toujours h -plongeable sauf pour les graphes (5), (6), (7) et (8) de l'énoncé. On notera que pour (5) et (6) (resp. pour (7) et (8)) $2d'_G$ n'est pas L^1 -plongeable (resp. $4d'_G$ est h -plongeable). $\square$

Remarques. (1) On peut poser la question suivante: la reconnaissance des graphes G pour lesquels $2d'_G$ est h -plongeable est-elle un *problème d'ordre fini*, c'est à dire existe-t-il un entier p tel que, pour chaque graphe G , $2d'_G$ est h -plongeable dès qu'elle est h -plongeable toutes les fois qu'elle est restreinte à p points?

(En d'autres termes, la h -plongeabilité de $2d'_G$ peut-elle être caractérisée par un nombre fini de *configurations interdites*?) En fait, on peut mettre en évidence un graphe G à 9 sommets avec $2d'_G$ non h -plongeable bien que h -plongeable dès qu'on enlève un sommet quelconque, donc $p \geq 9$.

(2) On peut rapprocher ce problème des suivants (pour lesquels la question est résolue):

- reconnaître les graphes tels que d_G est h -plongeable: ordre 5, [17, 6];
- reconnaître les "line graphs": ordre 6, [7].

On peut aborder le problème (1) (reconnaître si $2d'_G$ est h -plongeable) comme un problème de "line graph" d'hypergraphe très particulier.

Rappelons qu'en général (cf. [8]) la reconnaissance d'un "line graph" d'hypergraphe (même assez précisé) ne peut se faire par un nombre fini de configurations interdites.

(3) Signalons aussi un résultat de “finitude” de [25]: soit E un espace normé de dimension finie dont la boule unité est un polytope; pour que E (muni de la distance de la norme) soit plongeable dans L^1 , il suffit que tout sous-espace normé de E de dimension 3 soit plongeable dans L^1 .

(4) Soient $G = (X, E)$ un graphe et n un entier ≥ 1 . On définit sur l'ensemble des sommets de G la distance $d_G^{(n)}$ suivante:

$$\forall x, y \in X, d_G^{(n)}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ n & \text{si } (x, y) \in E, \\ n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette distance est $2n + 1$ -polygonale. Si k est un entier ≥ 1 , la reconnaissance des graphes G tels que $kd_G^{(n)}$ soit h -plongeable est-elle un problème d'ordre fini?

(5) Notons enfin (c'est un résultat de [11] sur la reconnaissance des “intersection patterns”) que la reconnaissance des distances h -plongeables a 4 valeurs (0, 2, 4, 6) est un problème NP *complet* donc ne saurait être un problème d'ordre fini que si $NP = P$ (Plutôt que de préciser ces termes, on renvoie au livre de Garey et Johnson [19]).

4. Graphes avec distance usuelle

On considère désormais des graphes connexes $G = (X, E)$. L'ensemble des sommets X est muni de la distance de graphe usuelle d_G (distance du plus court chemin). On a l'important résultat suivant:

Proposition 8. [17] *Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe. Alors d_G est h -plongeable si et seulement si:*

- (a) G est bipartite
- (b) pour tout $(s, t) \in E$, l'ensemble $G(s, t) = \{x \in X \mid d(x, s) < d(x, t)\}$ est métriquement fermé (c'est-à-dire pour tout $x, y \in G(s, t)$ tout chemin de longueur minimale entre x et y est contenu dans $G(s, t)$).

On voit aisément que la condition (a) (graphe bipartite) n'est autre que la condition du Lemme 5 (périmètre pair pour les triangles).

Avis [6] remarque que la condition (b) n'est autre que l'inégalité pentagonale. En d'autres termes:

Corollaire 9. *Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe. Alors d_G est h -plongeable si et seulement si elle est h -plongeable toutes les fois qu'elle est restreinte à 5 points (problème d'ordre 5).*

On va maintenant donner des exemples (chaque graphe est muni de la distance usuelle d_G et on donnera le cas échéant la valeur de $\eta = \eta(d_G)$).

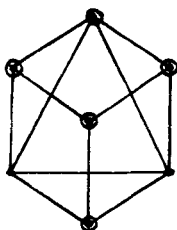


Fig. 4

On note d'abord que les graphes $K_{2,3}$, $K_{2,3}$ plus une arête (ce qui se fait de deux façons) et $K_7 \setminus P_2$ fournissent des exemples de graphes non plongeables dans L^1 (les trois premiers sont les exemples (1), (3), (4) de la proposition 7 pour lesquels $d_G = d'_G$; le dernier est le contre exemple de [6]).

L'exemple (2) de la Proposition 7 pour lequel d'_G diffère de d_G (d_G est h -plongeable, $d'_G = \inf(d_G, 2)$ n'est pas plongeable dans L^1) peut s'interpréter de la façon suivante: Le graphe du cube tronqué autour d'un sommet (c'est-à-dire le graphe des sommets et des arêtes de ce polyèdre) n'est pas plongeable dans L^1 (voir la Fig. 4). Pour finir, nous précisons dans le Tableau 1 (voir page suivante) la possibilité de plongements pour les graphes de polytopes et pavages réguliers. On va maintenant envisager le graphe (c'est-à-dire le graphe des sommets et des arêtes) de chaque polytope régulier, de chaque pavage régulier de $\mathbb{R}^n$ et de certains pavages réguliers du plan hyperbolique. (Voir le Tableau 1.) Pour chacun d'eux on donnera la valeur de l'échelle $\eta(d_G)$. Enfin on notera chacun par son symbole de Schäffli (voir le livre de Coxeter [12]).

(En dehors des cas les plus simples, les polyèdres réguliers viennent de [21], l'étude de l'échelle de $K_{m+1} \setminus P_1$ à l'aide de matrices de Hadamard provient de [9] et le reste de [3]; la Proposition 8 sert de critère lorsque $\eta = 1$ et la Proposition 4 pour les pavages du plan hyperbolique.)

5. Plongements dans L^1 de quelques espaces métriques infinis

On se propose de donner des exemples sans détail (et sans répéter ceux de [21]).

(1) *Semigroupes*. Soit S un semi groupe abélien noté additivement avec une origine 0; on suppose soit que S est un groupe, soit qu'il existe un entier n avec $2ns = s$ pour tout $s \in S$. Soit $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, on pose alors: $\forall s, t \in S$, $d(s, t) = 2f(s+t) - f(2s) - f(2t)$.

Proposition 10 [4]. Soit d la fonction définie ci-dessus. Si d est de type négatif, alors d est une distance plongeable dans L^1 .

Corollaire 11 [4]. Soit ϕ une capacité ∞ -alternée de Choquet. Alors la fonction $d(A, B) = 2\phi(A \cup B) - \phi(A) - \phi(B)$ est une distance plongeable dans L^1 .

Tableau 1

Symbole de Sch�affli	Nom usuel	Graphe	Plongeabilit� et échelle
$\{n\}$	polygone à n côtés	C_n	$\eta = 1$ (n pair), $= 2$ (sinon)
$\{\infty\}$	pavage "cubique" de $\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\eta = 1$
$\{3, 3\}$	tétraèdre	K_4	$\eta = 2$
$\{4, 3\}$	cube	$(K_2)^3$	$\eta = 1$
$\{3, 4\}$	octaèdre		$\eta = 2$
$\{5, 3\}$	dodécaèdre		$\eta = 4$
$\{3, 5\}$	icosaèdre		$\eta = 4$
$\{4, 4\}$	pavage "cubique" de $\mathbb{R}^2$	$\mathbb{Z}^2$	$\eta = 1$
$\{3, 6\}$	pavage triangulaire de $\mathbb{R}^2$		$\eta = 2$
$\{6, 3\}$	pavage hexagonal de $\mathbb{R}^2$		$\eta = 1$
$\{p, q\}$ $\left(\text{pour } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}\right)$	(pavage régulier du plan hyperbolique)	graphe planaire de degré q à mailles de longueur p	plongeable dans L^1 si p est pair (partie finie $\eta = 1$)
$\{\infty, q\}$	(pavage régulier du plan hyperbolique)	arbre infini de degré q	plongeable dans L^1 (partie finie $\eta = 1$)
$\{3, 4, 3\}$	polytope à 24 faces de $\mathbb{R}^4$		non plongeable dans L^1
$\{3, 3, 5\}$	polytope à 600 faces de $\mathbb{R}^4$		non plongeable dans L^1
$\{5, 3, 3\}$	polytope à 120 faces de $\mathbb{R}^4$		?
$\{3, 3, 4, 3\}$	pavage de $\mathbb{R}^4$ par des polytopes en croix		$\eta = 2$
$\{3, 4, 3, 3\}$	pavage de $\mathbb{R}^4$ par des polytopes à 24 faces		non plongeable dans L^1
(les symboles qui suivent sont de longueur $(n - 1)$ avec $n \geq 4$)			
$\{3, \dots, 3\}$	simplexe dans $\mathbb{R}^n$	K_{n+1}	$\eta = 2$
$\{4, 3, \dots, 3\}$	hypercube dans $\mathbb{R}^n$	$(K_2)^n$	$\eta = 1$
$\{3, \dots, 3, 4\}$	polytope en croix dans $\mathbb{R}^n$	contient $K_{n+1} \setminus P_1$	$\frac{1}{2}n \leq \eta < n$ (cf. matrices de Hadamard)
$\{4, \dots, 4\}$	pavage cubique de $\mathbb{R}^{n-1}$	$\mathbb{Z}^{n-1}$	$\eta = 1$

(2) *Anneaux*. Donnons seulement le résultat suivant pour l'anneau des entiers (mais il s'étend aux anneaux factoriels).

Proposition 12 [4]. *Pour tous p, q entiers > 0 on pose*

$$d(p, q) = \log \frac{\text{p.p.c.m.}(p, q)}{\text{p.g.c.d.}(p, q)}.$$

Alors d est une distance plongeable dans L^1 .

(3) *Distance des biotopes*. Cette distance est introduite dans [23].

Proposition 13 [4]. Soit un ensemble fini. Pour tous $A, B \subset \Omega$, on pose $\delta(A, B) = |A \Delta B| / |A \cup B|$ (distance des biotopes). Alors δ est une distance plongeable dans L^1 .

Plus généralement, soient (X, d) un espace métrique plongeable dans L^1 et x_0 un point de X . Alors

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, y) + d(x, x_0) + d(y, x_0)}$$

est plongeable dans L^1 .

(4) Calcul fonctionnel. Il s'agit d'un analogue d'un résultat de [24].

Proposition 14 [4]. Soit (X, d) un espace métrique plongeable dans L^1 . Alors d^p (pour chaque $p \in]0, 1]$) et $1 - \exp(-\lambda d)$ (pour chaque $\lambda > 0$) sont des distances plongeables dans L^1 .

(5) Espaces normés.

Proposition 15 [24]. Un espace L^p est plongeable dans L^1 si $p \in [1, 2]$. Un espace L^p n'est pas plongeable en général dans L^1 si $p \in]2, \infty]$.

(6) Espaces hyperboliques. Rappelons la présentation due à Klein: soit X la boule ouverte (euclidienne) de $\mathbb{R}^n$; pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, on pose

$$d(x, y) = \left| \log \frac{\|x - u\| \|y - v\|}{\|x - v\| \|y - u\|} \right|$$

où u et v sont les intersections de la droite xy avec la sphère.

(X, d) est l'espace hyperbolique de dimension n .

Proposition 16 [1]. Le plan hyperbolique est plongeable dans L^1 .

Il semble vraisemblable qu'en général l'espace hyperbolique de dimension n soit plongeable dans L^1 . En effet on montre dans [18] que sa distance est de type négatif.

(Signalons que la sphère de $\mathbb{R}^n$ avec sa distance géodésique est plongeable dans L^1 , [21].)

4. Covariances et diverses questions connexes

Soient X un ensemble, k et d des fonctions symétriques de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in X$. On définit alors $K_{x_0}d$ et Lk de la façon suivante:

$$\forall x, y \in X, K_{x_0}d(x, y) = \frac{1}{2}[d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y)],$$

$$\forall x, y \in X, Lk(x, y) = k(x, x) + k(y, y) - 2k(x, y).$$

On a: $LK_{x_0}d = d$. On va voir que les opérateurs K_{x_0} et L permettent le passage entre les distances h -plongeables et les “intersection patterns” (ainsi que le passage correspondant pour les distances plongeables dans L^1). Pour cela donnons d’abord les définitions suivantes:

Définitions. Soient X un ensemble et k une fonction symétrique de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$.

(a) On dit que k est un “intersection pattern” s’il existe un ensemble Ω et une famille $(A(x))_{x \in X}$ de parties de Ω telles qu’on ait:

$$\forall x, y \in X, k(x, y) = |A(x) \cap A(y)|.$$

(b) On dit que k est une *covariance* $\{0, 1\}$ -réalisable (ou “intersection pattern” continu) s’il existe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ avec $\mu \geq 0$ et une famille $(f(x))_{x \in X}$ de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $\{0, 1\}$ tels que:

$$(i) \quad \forall x, y \in X, \quad k(x, y) = (f(x) | f(y))_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)}$$

(où $(\cdot | \cdot)_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$).

Remarques. (a) Les “intersection patterns” sont la forme naturelle de certains problèmes d’existence en combinatoire. L’extension à n variables (cardinal des intersections n à n) est étudiée dans [16].

(b) Si on pose pour chaque $x \in X$: $A(x) = \{\omega \mid f(x)(\omega) = 1\}$ on peut écrire aussi bien (i) sous la forme:

$$\forall x, y \in X, \quad k(x, y) = \mu(A(x) \cap A(y))$$

ce qui justifie la dénomination d “intersection pattern” continu.

(c) Il est intéressant de remplacer dans (i) les fonctions à valeurs dans $\{0, 1\}$ par des fonctions à valeurs dans M (où M est une partie de $\mathbb{R}$ ou même d’un espace de Hilbert auxiliaire). On obtient ainsi: pour $M = \{-1, 1\}$ la classe des “covariances of unit processes”, pour $M = \mathbb{R}^+$ la classe des matrices complètement positives (objet dual de la classe des matrices copositives).

Un examen systématique pour M quelconque en est donné dans [2]. (Tout cela dans le cas réel; dans un travail en cours, le cas complexe est considéré, avec $M = \mathbb{T}$). Le passage entre distance et covariance est immédiat:

Proposition 17. Soient (X, d) un espace métrique et $x_0 \in X$. Alors d est plongeable dans L^1 (resp. h -plongeable) si et seulement si $K_{x_0}d$ est une covariance $\{0, 1\}$ -réalisable (resp. un “intersection pattern”).

Enfin on va montrer les liens existant entre les questions qui précèdent et deux problèmes classiques (en fait surtout pour rappeler l’importance de ces problèmes).

Rappelons d’abord la notion de contenu: (X est un ensemble)

(a) (voir plus haut) soit d une distance h -plongeable; on appelle h -contenu de

d (noté $\omega_n(d)$) le plus petit des entiers n tels que d puisse s'écrire $d(x, y) = |A(x) \Delta A(y)|$ pour des $A(x)$ inclus dans un ensemble Ω avec $|\Omega| = n$.

(b) de même soit d une distance plongeable dans L^1 ; on appelle *contenu* de d (noté $\omega(d)$) le plus petit des réels a tels que d puisse s'écrire $d(x, y) = \mu(A(x) \Delta A(y))$ pour des $A(x)$ inclus dans un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ avec $\mu \geq 0$, $\mu(\Omega) = a$.

On utilisera la notion de contenu (resp. h -contenu), sans préciser les adaptations évidentes, dans des cas où des représentations différentes sont utilisées: par exemple pour $\mu(A(x) \cap A(y))$, pour les covariances M -réalisables et ci-dessous.

(1) *Adresses ternaires et conjecture de Graham et Pollack* (cf. [20]). Soient X un ensemble et d une distance à valeurs entières sur X . On dit qu'on s'est donné des *adresses ternaires* si on s'est donné pour chaque $x \in X$, deux parties $A(x)$ et $\tilde{A}(x)$ d'un ensemble Ω de façon que:

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad A(x) \subset \tilde{A}(x), \\ \forall x, y \in X, \quad d(x, y) = |[A(x) \setminus \tilde{A}(y)] \cup [A(y) \setminus \tilde{A}(x)]|. \end{aligned}$$

Une telle représentation est toujours possible (noter que si on prenait $\tilde{A}(x) = A(x)$, ce ne serait plus le cas que pour les distances h -plongeables). La notion intéressante ici est le h -contenu (ou longueur minimale des adresses ternaires) c'est-à-dire la valeur minimale de $|\Omega|$ dans une telle représentation.

Conjecture de Graham et Pollack. Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe à n sommets. Alors la longueur minimale des adresses ternaires pour (X, d_G) est inférieure ou égale à $n - 1$.

(Yao [26] donne une bonne évaluation de cette longueur).

(2) *Théorème et constante de Grothendieck* (on renvoie entièrement à [22]). Un résultat important en analyse fonctionnelle (du à Grothendieck) est le suivant:

Soit X la sphère unité d'un espace de Hilbert H , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de norme 1; on peut se donner un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ avec $\mu \geq 0$ et $\mu(\Omega)$ fini, et pour chaque $x \in X$ deux fonctions mesurables $f(x)$ et $g(x)$ de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\{-1, 1\}$ de façon que:

$$\forall x, y \in X, \quad (x | y)_H = (f(x) | g(y))_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)}$$

(où $(\cdot | \cdot)_H$ et $(\cdot | \cdot)_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)}$ désignent les produits scalaires respectifs dans les espaces de Hilbert H et $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$).

L'assertion importante ici est que $\mu(\Omega)$ est fini et on appelle *constante de Grothendieck* la plus petite valeur possible de $\mu(\Omega)$ dans une telle représentation, autrement dit le contenu de ce problème. Notons-la K_G . L'évaluation suivante seule est connue [22].

$$\frac{\pi}{2} \leq K_G \leq \frac{\pi}{2 \operatorname{Argsh} 1}.$$

Bibliographie

- [1] R. Alexander, Planes for which the lines are the shortest paths between points, *Illinois J. of Math* 22 (2) (1978) 177–190.
- [2] P. Assouad et M. Deza, Isometric embeddings of metric spaces in combinatorics and analysis (to appear).
- [3] P. Assouad, Embeddability of regular polytopes and honeycombs in hypercubes, *Coxeter Symposium*, Toronto (mai 1979).
- [4] P. Assouad, Produit tensoriel, distances extrémales et réalisation de covariances, I et II, *C.R. Acad. Sci. Paris*. t. 288 (Ser. A) 649–652 et 675–677.
- [5] P. Assouad, Un espace hypermétrique non plongeable dans un espace L_1 , *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 285 (Ser. A) (1977) 361–362.
- [6] D. Avis, Hamming metrics and facets of the Hamming cone, *Tech. Report SOCS-78.4*, McGill Univ., 1978.
- [7] L.W. Beineke, Derived graphs and digraphs, in: *Beiträge zur Graphentheorie* (Leipzig, 1968).
- [8] J.C. Bermond, A. Germa and M.C. Heydemann, Graphes représentatifs d'hypergraphs, *Rapport no. 19*, Lab. informatique, Univ. Paris-Sud, 1979.
- [9] I.F. Blake and J.H. Gilchrist, Addresses for graphs, *IEEE Trans. Information Theory*, IT-19 (5) (1977) 683–688.
- [10] J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle and J.L. Krivine, Lois stables et espaces L^p , *Ann. Inst. H. Poincaré* 2 (1966) 231–259.
- [11] V. Chvátal, Recognizing of intersection patterns, in this volume.
- [12] H.S.M. Coxeter, *Regular polytopes*, 2nd ed. (Macmillan, New York, 1963).
- [13] M. Deza (Tylkin), On Hamming geometry of unitary cubes (Russian), *Doklady Akad. Nauk. SSSR* 134 (5) (1960) 1037–1040.
- [14] M. Deza, Matrices des formes quadratiques non-négatives pour des arguments binaires, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 277 (Ser. A) (1973) 873–875.
- [15] M. Deza et I.G. Rosenberg, Intersection and distance patterns, *Proc. of Conference on Graph Theory and Related Topics*, (Academic Press, New York, 1979) 133–144.
- [16] M. Deza et I.G. Rosenberg, Generalized intersection patterns and two symbols balanced arrays, *J. Linear Algebra and Appl.* 30 (1980) 9–40.
- [17] D.Z. Djokovic, Distance-preserving subgraph, of hypercubes, *J. Combinatorial Theory* 14 (1973) 263–267.
- [18] J. Faraut, Fonction brownienne sur une variété riemannienne, in: *Seminaire de Prob. VII* (Strasbourg 1971–72), *Lecture Notes in Math.* 321 (Springer-Verlag, Berlin, 1973) 61–76.
- [19] M.R. Garey and D.F. Johnson, *Computers and intractability* (Freeman, San Francisco, 1979).
- [20] R.L. Graham and H.O. Pollack, On embedding graphs in squashed cubes, *Lecture Notes in Math.* 303 (Springer-Verlag, Berlin, 1972) 99–110.
- [21] J.B. Kelly, Hypermetric spaces, in: *The geometry of metric and linear spaces*, *Lecture Notes in Math.* 490 (Springer-Verlag, Berlin, 1975) 17–31.
- [22] J.L. Krivine, Constantes de Grothendieck et fonctions de type positif sur les sphères, *Advances in Math.* 31 (1979) 16–30.
- [23] E. Marczewski et H. Steinhaus, On a certain distance of sets and the corresponding distance of functions, *Colloq. Mathematicum* 6 (1958) 319–327.
- [24] I.J. Schoenberg, Metric spaces and positive definite functions, *Trans. AMS* 44 (1938) 522–536.
- [25] H.S. Witsenhausen, A support characterization of zonotopes, *Mathematika* 25 (1978) 13–16.
- [26] A. Yao, On the loop switching addressing problem, *SIAM J. of Computing* 7 (1978) 515–523.